

SU(3) 格子 QCD を用いた Dimensional Reduction
ゲージにおける QCD の低次元化の解析*

京都大学大学院 理学研究科
物理学・宇宙物理学専攻 原子核研究室
當銘 啓

2024 年 2 月 13 日

* 本稿は 2024 年 2 月に京都大学大学院理学研究科に提出した修士論文である。

概要

量子色力学 (Quantum ChromoDynamics, QCD) は、クォーク・グルーオンの間に働く強い相互作用の基礎理論であり SU(3) ゲージ理論という形式で記述され、ゲージ群の非可換性に由来してゲージ場の自己相互作用が生じる。その結果、漸近的自由性がもたらされ、高エネルギーでは摂動論が有効である。一方、低エネルギーでは著しい強結合性を示し、摂動論を超えた非摂動的な現象が多様かつ複雑な物理を与える。

QCD の非摂動的な現象の 1 つであるクォークの閉じ込めは、クォーク間の線形ポテンシャルで特徴づけられ、それにはカラー電束が 1 次元的に絞られた「フラックス・チューブの形成」が本質的に重要と考えられている。1 次元的なフラックス・チューブ形成は、4D QCD における「低次元化」の可能性を示唆しており、この「低次元的性質」を浮き彫りにする目的で、我々は「Dimensional Reduction (DR) ゲージ」という新しいゲージ固定を考案した。この DR ゲージでは、 t, z にのみ依存するゲージ関数 $\Omega(t, z)$ によるゲージ変換で (2D QCD と同じ) ゲージ対称性が残留し、従って DR ゲージの 4D QCD は 2D QCD と類似のゲージ系になると期待される。本研究では、解析的議論と SU(3) 格子 QCD 計算 [$\beta = 6.0$ (格子間隔 $a \simeq 0.1$ fm), クエンチ, 格子サイズ 24^4] を用いて DR ゲージの性質を調べ、以下のような結論を得た。

(1) DR ゲージではグルーオン場の x, y 方向成分 A_x, A_y が抑制されるので、それらを格子 QCD 配位から取り除く「 tz -射影」を考え、それによりクォーク間ポテンシャルがどのような影響を受けるかを SU(3) 格子 QCD 計算で調べた。その結果、DR ゲージではクォーク間ポテンシャルが tz -射影で変化せず、グルーオン場の 2 次元的成分のみによって再現されることが分かった。これは「長距離の物理量が 2 次元的な自由度のみで再現できる」という可能性を示唆する。

(2) 解析的議論からは、DR ゲージで tz -射影した 4D QCD は、「近接相互作用をする 2D QCD の類似系のアンサンブル」という描像が得られる。

(3) この描像に現れる 2D QCD 類似系間の相関を格子 QCD を用いて調べた。2D QCD 系間には $\exp(-mr)[m \simeq 0.6$ GeV] という指数関数的に減衰する相関が見られ、従って 2D QCD 系間の相関長は $\xi \equiv 1/m \simeq 0.3$ fm という結果が得られた。

(4) この $\xi \simeq 0.3$ fm 以上で 2D QCD 系間の相関が θ 関数的に切れるという非常に大まかな近似の下では、4D QCD が「結合定数が $g_2 \equiv gm$ の 2D QCD 系」のアンサンブルとして記述できる可能性を指摘した。

目次

第 1 章	量子色力学の基礎	3
1.1	QCD 作用とゲージ不変性	3
1.2	経路積分量子化	5
1.3	漸近的自由性	6
第 2 章	格子 QCD	8
2.1	ユークリッド化	8
2.2	リンク変数とゲージ変換	9
2.3	格子上での作用	10
2.4	格子 QCD での測定	13
第 3 章	QCD とクォーク閉じ込め	18
3.1	線形ポテンシャルとフラックス・チューブ形成	18
3.2	双対超伝導描像	20
3.3	最大可換ゲージを用いた双対超伝導描像の概略	21
第 4 章	Dimensional Reduction(DR) ゲージと QCD の低次元化の解析	27
4.1	本研究の動機と方針	27
4.2	Dimensional Reduction (DR) ゲージ	29
4.3	DR ゲージ QCD	31
4.4	tz -射影	31
4.5	格子上での DR ゲージおよび tz -射影の定式化	32
4.6	格子 QCD 計算を用いた DR ゲージ QCD の解析	35
第 5 章	まとめと展望	54

付録 A	経路積分におけるゲージ固定の方法	58
A.1	ファデーエフ・ポポフの処方	58
A.2	ファデーエフ・ポポフ・ゴースト	60
付録 B	経路積分における摂動論の方法	61
付録 C	格子 QCD におけるゲージ固定	64
付録 D	Elitzur の定理についての補足	67
D.1	Elitzur の定理の適用条件	67
付録 E	$d(U_\mu, I)^2$ についての補足	69
E.1	$d(U_\mu, I)^2$ の最大値について	69
E.2	ゲージ固定無しの場合の $\langle d(U_\mu, I)^2 \rangle = 1$ の証明	70
参考文献		72

第 1 章

量子色力学の基礎

ここでは量子色力学 (Quantum ChromoDynamics, QCD) の基礎について解説を行う [1]。

1.1 QCD 作用とゲージ不変性

量子色力学 (Quantum ChromoDynamics, QCD) は量子場の理論の 1 種であり、クォーク・グルーオンの間に働く強い相互作用の基礎理論である。数学的には、クォークのカラー自由度を N_c として、特殊ユニタリー群 $SU(N_c)$ をゲージ群とする非可換ゲージ理論として記述される。QCD に現れる場は、クォーク場 $q(x)$ とゲージ場 $A_\mu(x)$ であり、それぞれゲージ群 $SU(N_c)$ の表現として、クォーク場 $q(x)$ は基本表現、ゲージ場 $A_\mu(x)$ は随伴表現に属す。ゲージ場は随伴表現に属すため、リー代数 $\mathfrak{su}(N_c)$ の基底 T^a ($a = 1, \dots, N_c^2 - 1$) を用いて $A_\mu(x) = A_\mu^a(x)T^a \in SU(N_c)$ と表される。

QCD 作用は、 $A_\mu(x), q(x)$ を用いて

$$S_{\text{QCD}}[A] = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \text{Tr} (G_{\mu\nu}(x)G^{\mu\nu}(x)) + \bar{q}(x) (i\gamma^\mu D_\mu - m) q(x) \right] \quad (1.1)$$

と書かれる。第 1 項はグルーオンの運動項および自己相互作用項、第 2 項はクォークの運動項とクォーク・グルーオン間の相互作用項を表す。 γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) はガンマ行列である。 $\bar{q}(x)$ は $q(x)$ の Dirac 共役であり、ガンマ行列 γ^0 を用いて $\bar{q}(x) = q^\dagger(x)\gamma^0$ と定められる。第 2 項の D_μ は共変微分で

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + igA_\mu(x) \quad (1.2)$$

と定義される。 g は QCD のゲージ結合定数である。第 1 項の $G_{\mu\nu}(x)$ はゲージ場の曲率

テンソルまたは場の強さと呼ばれる量で、共変微分 D_μ から

$$G_{\mu\nu}(x) \equiv \frac{1}{ig} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + ig [A_\mu(x), A_\nu(x)] \quad (1.3)$$

と定義される。

QCD 作用 (1.1) は局所的なゲージ対称性を指導原理として構成される。ゲージ変換は $SU(N_c)$ の元

$$\Omega(x) \equiv e^{i\omega^a(x)T^a} \in SU(N_c) \quad (1.4)$$

$$\omega^a(x) \in \mathbb{R} \quad (a = 1, 2, \dots, 8) \quad (1.5)$$

を用いて、クォーク場 $q(x)$ に対して

$$q(x) \rightarrow q'(x) = \Omega(x)q(x) \quad (1.6)$$

と定義される。これに伴い、共変微分のゲージ変換は

$$D_\mu \rightarrow \Omega(x)D_\mu\Omega^\dagger(x) \quad (1.7)$$

と定められる。従って、ゲージ場 $A_\mu(x)$ は

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = \Omega(x) \left(A_\mu(x) + \frac{1}{ig} \partial_\mu \right) \Omega^\dagger(x) \quad (1.8)$$

とゲージ変換をしなければならない。これらのゲージ変換 (1.6), (1.7) (および (1.8)) より、作用 (1.1) の第 1 項、第 2 項はそれぞれ

$$\begin{aligned} \text{Tr}(G_{\mu\nu}(x)G^{\mu\nu}(x)) &\rightarrow \text{Tr}(\Omega(x)G_{\mu\nu}(x)\Omega^\dagger(x) \cdot \Omega(x)G^{\mu\nu}(x)\Omega^\dagger(x)) \\ &= \text{Tr}(G_{\mu\nu}(x)G^{\mu\nu}(x)) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \bar{q}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)q(x) &\rightarrow \bar{q}(x)\Omega^\dagger(x)(i\gamma^\mu\Omega(x)D_\mu\Omega^\dagger - m)\Omega(x)q(x) \\ &= \bar{q}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)q(x) \end{aligned} \quad (1.10)$$

となり、ゲージ不変である。局所的なゲージ対称性の他に、ローレンツ対称性とくりこみ可能性、そして CP 対称性を課すことで作用は式 (1.1) の形に定まる。

CP 対称性を課さない場合、作用には

$$\theta \text{Tr} \left(G_{\mu\nu}(x) \tilde{G}^{\mu\nu}(x) \right) \quad \left(\tilde{G}^{\mu\nu}(x) \equiv \frac{1}{2!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G_{\rho\sigma}(x) \right) \quad (1.11)$$

という項が含まれ得る ($\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は完全反対称テンソル)。式 (1.11) は θ -項と呼ばれ、全微分で書けるため古典的には無視できる (運動方程式に寄与しない) が、量子論では無視で

きず CP 対称性の破れを与える。 θ -項が存在する場合、中性子の電気双極子モーメントが生じる。2020 年に行われた測定 [2] の結果では、 θ の大きさには $|\theta| < 1.8 \times 10^{-10}$ という上限が付き、これは $\theta \simeq 0$ とほぼコンシステントといえる。

QCD はクォーク・グルーオンを扱う理論であるが、その正確な取り扱いには量子化が必要である。次節では QCD の量子化の手法として、経路積分量子化について説明をする。

1.2 経路積分量子化

経路積分量子化は、理論に登場する場のあらゆる配位を足し合わせることにより量子効果を取り入れる方法である。QCD に現れる場はゲージ場 $A_\mu(x)$ とクォーク場 $q(x)$ および $\bar{q}(x)$ なので、これらの場の配位を

$$Z \equiv \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q\mathcal{D}A_\mu e^{iS_{\text{QCD}}[A,q,\bar{q}]} \quad (1.12)$$

$$\left(\mathcal{D}f \equiv \prod_{x \in \text{spacetime}} df(x) \right)$$

のように足し上げて生成汎関数を定義する。 $q(x)$ の Dirac 共役 $\bar{q}(x)$ は、複素解析で z とその複素共役 \bar{z} を独立に扱うように、独立とみなす。

$A_\mu(x), q(x), \bar{q}(x)$ から構成される演算子 $\hat{O}[A_\mu, q, \bar{q}]$ の真空期待値は期待値は

$$\langle \hat{O}[A_\mu, q, \bar{q}] \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q\mathcal{D}A_\mu \hat{O}[A_\mu, q, \bar{q}] e^{iS_{\text{QCD}}[A,q,\bar{q}]} \quad (1.13)$$

で計算される。

場 $A_\mu(x), q(x), \bar{q}(x)$ は連続時空で定義されているため、経路積分は非可算無限の自由度による多重積分であり、自由場など特殊な場合を除いて、実行は難しい。そのため摂動論が用いられることが多い（摂動論については付録 B を参照）。

QCD の経路積分には 2 つ注意点がある。1 つ目は、フェルミオンであるクォーク場 $q(x)$ は反可換なグラスマン数の場として定義するということである。QCD 作用のフェルミオンに関する部分は $q(x), \bar{q}(x)$ は双一次形式で書かれるので、クォーク場の経路積分は、グラスマン数 \bar{q}_i, q_j によるガウス積分

$$\int d\bar{q}_i dq_j \exp [i\bar{q}_i M_{ij} q_j] = \det M \quad (1.14)$$

を用いて実行可能である。

2つ目は、ゲージ場 $A_\mu(x)$ およびゲージ対称性に関連するものである。QCD 作用はゲージ対称性をもつが、そのゲージ自由度に由来して摂動論の定義には注意を要する（場の理論における摂動論に関しては付録 B を参照）。摂動論においてプロパゲーターは非常に重要かつ基本的な役割を果たす。QCD 作用 (1.1) の第 1 項において、ゲージ場の 2 次項は部分積分を用いて

$$\frac{1}{2} \text{Tr} [A_\mu(x) (\partial^2 \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(x)] \quad (1.15)$$

と書ける。プロパゲーターはこの式 (1.15) に出てくる微分演算子

$$\partial^2 \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu \quad (1.16)$$

の逆演算子として計算できる。しかし、式 (1.16) はゼロ固有値を持つため逆演算子は発散してしまい定義できず、そのゼロ固有値の存在はゲージ自由度に由来している。そのため摂動論を念頭に置いた上でゲージ場の経路積分を連続時空で定義するにはゲージ自由度を取り除く必要があり、その方法がゲージ固定である。経路積分の形式においてゲージ固定の系統的な手法は Fadeev と Popov により発表された（詳細は付録 A を参照）[4]。このような手法を用いることでゲージ場のプロパゲーターを定義し摂動論を展開することができるようになる。

1.3 漸近的自由性

QCD ではゲージ場の自己相互作用により、結合定数 g が高エネルギー領域で小さくなるという漸近的自由性を示す。

量子効果を 1-loop まで含んだ計算では、QCD の結合定数は以下のようなになる [5, 6] :

$$\beta(\mu) \equiv \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \alpha_s(\mu^2) = -\frac{11N_c - 2N_f}{48\pi^2} \alpha_s^3(\mu^2) + O(\alpha_s^3(\mu^2)), \quad (1.17)$$

$$\alpha_s(\mu^2) \equiv \frac{g_R^2(\mu)}{4\pi} \quad (1.18)$$

ここで μ はくりこみ点のエネルギースケールであり、 $g_R(\mu)$ はエネルギースケール μ でくりこまれた結合定数、 N_f はエネルギースケール μ で massless とみなせるクォークのフレーバー数である。 $O(g_R^5)$ の項を無視してこの微分方程式 (1.17) を解くと

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{11N_c - 2N_f} \frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)} \quad (1.19)$$

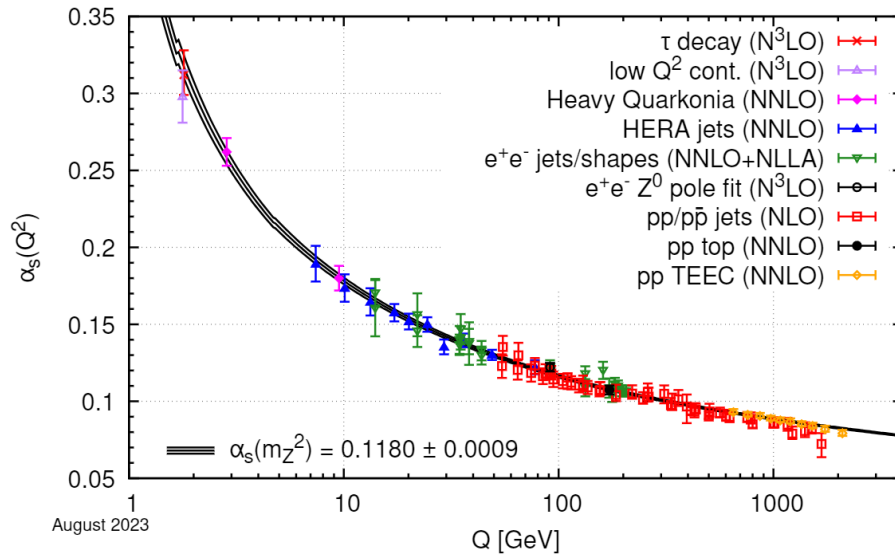


図 1.1: 漸近的自由性を示すグラフ。縦軸が結合定数 $\alpha_s(Q^2)$ 、横軸がエネルギースケール Q 。黒線は $\alpha_s(m_Z^2) = 0.1180 \pm 0.0009$ を用いて 5-loop まで量子効果を取り入れたときの微分方程式 (1.17) を解いた曲線。[3] より引用。

となる。 Λ_{QCD} は QCD スケールと呼ばれるパラメーターで、実験から Λ_{QCD} は 200~300MeV 程度ということがわかっている。

式 (1.19) より、 $11N_c - 2N_f > 0$ のとき、エネルギースケール Q^2 の増加に伴い $\alpha_s(Q)$ は減少する。我々の世界では、 $N_c = 3, N_f \leq 6$ なので、 $\alpha_s(Q^2) \ll 1$ となる高エネルギー領域では、摂動論が有効である。

これに対し、低エネルギー領域では $\alpha_s(Q^2)$ は大きくなる。特に、 $Q^2 \sim \Lambda_{\text{QCD}}$ となる領域では、 $\alpha_s(Q^2)$ は摂動的には発散してしまうため、摂動論の適用範囲外となる。

そのため低エネルギー領域の QCD を解析するには、例えば、適当な正則化の下で経路積分を直接的に評価するなど、摂動論を超えた非摂動的な方法が必要となる。格子 QCD は標準的な非摂動的解析手法であり、経路積分をモンテカルロ法により数値的に評価する。次節では、格子 QCD について解説を行う。

第 2 章

格子 QCD

格子 QCD は格子状に離散化された有限サイズの 4 次元時空上での QCD である [7, 8, 9, 10, 11]。こうすることで経路積分は、非可算無限個の自由度による多重積分から、可算有限個の自由度による多重積分になる。この章では、格子 QCD の基礎事項について解説する [12, 13, 14]。なお以下ではフェルミオンの動的な自由度を無視したクエンチ近似で議論を進める。

2.1 ユークリッド化

ユークリッド化とは、Wick 回転によりミンコフスキー時空からユークリッド時空へ移行する操作のことであり、具体的には虚時間 τ を導入し、実時間 t に対して

$$t \equiv -i\tau, \quad x^k \equiv x_k^E = x^k \quad (k = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

とすることでなされる。上付き添え字 E はユークリッド化をされた量であることを示す。ユークリッド化 (2.1) に伴い、微分は

$$\partial_t \equiv i\partial_\tau, \quad \partial_k \equiv \partial_k^E = \partial_k \quad (2.2)$$

となる。微分のユークリッド化 (2.2) から、ゲージ場 $A_\mu(x)$ は共変微分 (1.2) を通して

$$A_t \equiv iA_\tau, \quad A_k \equiv A_k^E = A_k \quad (k = x, y, z) \quad (2.3)$$

となる。ユークリッド化した時空座標およびゲージ場を

$$x_\mu^E = (\tau, x, y, z) = (it, x, y, z) \quad (2.4)$$

$$A_\mu^E = (A_\tau, A_x, A_y, A_z) = (-iA_t, A_x, A_y, A_z) \quad (2.5)$$

と表す。

ユークリッド化により作用 (1.1) も変化を受け

$$iS_{\text{QCD}} = i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QCD}} \rightarrow -S_{\text{E}} = - \int d^4x^{\text{E}} \mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\text{E}} \quad (2.6)$$

となり、ユークリッド時空での経路積分は

$$Z_{\text{E}} [A_{\mu}^{\text{E}}] = \int \mathcal{D}A_{\mu} e^{-S_{\text{E}}[A^{\text{E}}]} \quad (2.7)$$

という形式で表される。

以上がユークリッド化およびユークリッド時空での QCD の定式化である。この定式化では実変数 $x^{\text{E}}, A^{\text{E}}$ を用いることで、式 (2.6) のように作用 S^{E} が実数になり、従って位相因子 $e^{iS_{\text{QCD}}}$ は正の実数 $e^{-S_{\text{E}}}$ になる。ユークリッド時空で QCD を定式化する利点はここにあり、正の実数 $e^{-S_{\text{E}}}$ を確率の重みと見なせる。これは非常に重要な性質で、格子 QCD 計算はこの性質をもとに経路積分の数値的な評価を行う。

2.2 リンク変数とゲージ変換

格子上の理論ではゲージ場はリンク変数

$$U_{\mu}(s) \equiv e^{iagA_{\mu}(s)} \in \text{SU}(N_c) \quad (2.8)$$

で記述される (図 2.1 の左側)。ここで a は格子間隔、 g は (くりこみスケール a での) ゲージ結合定数、 s は格子点の座標である。

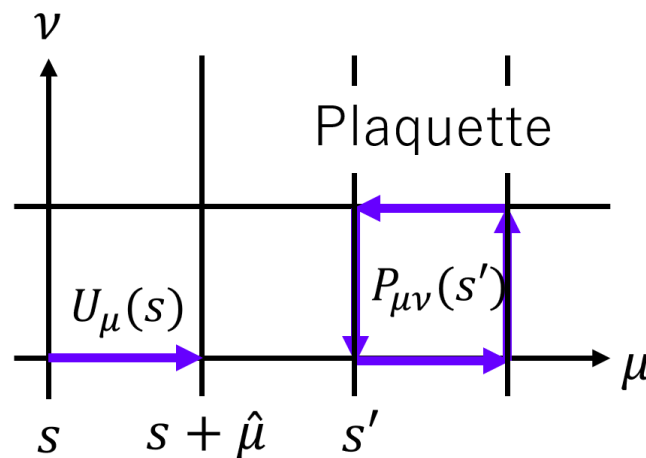


図 2.1: 格子上的リンク変数 $U_{\mu}(s)$ (左) とプラケット $P_{\mu\nu}(s')$ (右)。

$\hat{\mu}$ を μ 方向を指す長さ a のベクトルとすると、リンクは図 2.1 のように 2 つの格子点 s と $s + \hat{\mu}$ を結ぶように μ 方向に伸びた長さ a を持ち、リンク変数 $U_\mu(s)$ はこのリンク上に定義される力学変数である。

リンク変数 $U_\mu(s)$ のゲージ変換は、ゲージ変換関数 $\Omega(s) \in \text{SU}(N_c)$ を用いて

$$U_\mu(s) \rightarrow U_\mu^\Omega(s) = \Omega(s)U_\mu(s)\Omega^\dagger(s + \hat{\mu}) \in \text{SU}(N_c) \quad (2.9)$$

のように、連続理論とコンシステントに定義される [13]。

リンク変数のゲージ変換性 (2.9) は以下の議論から導くことができる。

まず連続時空中で 2 点 x, y をつなぐ曲線 C 上の Wilson line を

$$U(x, y) \equiv \mathcal{P} \exp \left[ig \int_C dz^\mu A_\mu(z) \right] \quad (2.10)$$

と定義する。 \mathcal{P} は経路順序積を表しており、2 点 x, y をつなぐ曲線を微小区間に分割して各小区間を経路に沿った順番に掛けるという操作である。例えば C が直線の場合、Wilson line は

$$\mathcal{P} \exp \left[ig \int_x^y dz^\mu A_\mu(z) \right] \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{N-1} [1 + ig \Delta x^\mu A_\mu(x + k \Delta x)] \quad (2.11)$$

と定義される。ただし $\Delta x^\mu = (y^\mu - x^\mu)/N$ である。

ここでゲージ変換 (1.8) を考えると、式 (2.11) の右辺の括弧 $[\dots]$ の内部は

$$\begin{aligned} 1 + ig \Delta x^\mu A_\mu(x) &\rightarrow 1 + ig \Delta x^\mu \Omega(x) \left\{ A_\mu(x) + \frac{1}{ig} \partial_\mu \right\} \Omega^\dagger(x) \\ &= \Omega(x) [1 + ig \Delta x^\mu \{ A_\mu(x) \}] \Omega^\dagger(x + \Delta x) + O((\Delta x)^2) \end{aligned} \quad (2.12)$$

と変換する。従って $N \rightarrow \infty$ の極限で定義される Wilson line (2.10) のゲージ変換性は式 (2.12) より

$$U(x, y) \rightarrow \Omega(x)U(x, y)\Omega^\dagger(y) \quad (2.13)$$

である。リンク変数 $U_\mu(s)$ は、格子間隔 a が十分小さいときの Wilson line $U(s, s + \hat{\mu})$ に対応するため、そのゲージ変換性は式 (2.9) で与えられる。

2.3 格子上での作用

格子上の理論の作用を決定する指導原理は

1. 連続極限 $a \rightarrow 0$ で連続理論での作用に一致すること
2. 連続理論と可能な限り同様の対称性をもつこと

の2つである。従って、リンク変数のゲージ変換 (2.9) に対して不変な量を構成する必要がある。そのような量は複数種類存在するが、最も簡単かつ標準的で広く用いられているのがプラケット作用である。

2.3.1 プラケット作用

プラケット $P_{\mu\nu}(s)$ はリンク変数を用いて以下で定義される：

$$P_{\mu\nu}(s) \equiv U_\mu(s)U_\nu(s + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(s + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(s). \quad (2.14)$$

図 2.1 のように格子上の最小四角形になるようにリンク変数を掛けて構成される量である。

リンク変数はゲージ変換で式 (2.9) のように変化するため、プラケットのゲージ変換性は

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu}(s) \rightarrow P_{\mu\nu}^\Omega(s) &= U_\mu^\Omega(s)U_\nu^\Omega(s + \hat{\mu}) (U_\mu^\Omega(s + \hat{\nu}))^\dagger (U_\nu^\Omega(s))^\dagger \\ &= \Omega(s) [U_\mu(s)U_\nu(s + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(s + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(s)] \Omega^\dagger(s) \end{aligned} \quad (2.15)$$

となる。リンク変数に挟まれたゲージ変換関数は $\Omega(s + \hat{\mu})\Omega^\dagger(s + \hat{\mu}) = 1$ のようにキャンセルし、両端のゲージ変換関数のみが残る。両端のゲージ変換関数は $\Omega(s), \Omega^\dagger(s)$ なので、 $\text{Tr}P_{\mu\nu}(s)$ はゲージ不変量になる。

プラケット作用は、この $\text{Tr}P_{\mu\nu}(s)$ を用いて以下で定義される：

$$S^{\text{Plaq}} \equiv \beta \sum_s \left[1 - \frac{1}{N_c} \sum_{\mu < \nu} \text{ReTr}P_{\mu\nu}(s) \right]. \quad (2.16)$$

ここで $\beta \equiv 2N_c/g^2$ は格子パラメーターと呼ばれる定数である。

プラケット作用 (2.16) は指導原理 2 から、ゲージ対称性を満たすように構成され、指導原理 1 も満たしている。以下、それを見る。

連続極限での作用

指導原理 1 を確認するため、プラケット作用 (2.16) の連続極限 $a \rightarrow 0$ を考える。

まずプラケット (2.14) は、リンク変数の定義 (2.8) から

$$P_{\mu\nu}(s) = e^{iagA_\mu(s)} e^{iagA_\nu(s+\hat{\mu})} e^{-iagA_\mu(s+\hat{\nu})} e^{-iagA_\nu(s)} \quad (2.17)$$

のように、ゲージ場 $A_\mu(s)$ を用いて表すことができる。

ここで、Baker-Campbell-Hausdolf の公式

$$e^A e^B = \exp \left[A + B + \frac{1}{2!} [A, B] + \dots \right] \quad (A, B : \text{正方行列}) \quad (2.18)$$

を用いると、式 (2.17) は

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu}(s) &= \exp \left[iag \left\{ A_\mu(s) + A_\nu(s + \hat{\mu}) + \frac{ia g}{2!} [A_\mu(s), A_\nu(s + \hat{\mu})] \right\} + O(a^3) \right] \\ &\times \exp \left[-ia g \left\{ A_\mu(s + \hat{\nu}) + A_\nu(s) - \frac{ia g}{2!} [A_\mu(s + \hat{\nu}), A_\nu(s)] \right\} + O(a^3) \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

と書ける。これに再度 Baker-Campbell-Hausdolf の公式 (2.18) を用いると

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu}(s) &= \exp \left[iag \{ A_\mu(s) + A_\nu(s + \hat{\mu}) - A_\mu(s + \hat{\nu}) - A_\nu(s) \} \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^2 g^2}{2!} \{ [A_\mu(s), A_\nu(s + \hat{\mu})] + [A_\mu(s + \hat{\nu}), A_\nu(s)] \} + O(a^3) \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

となる。格子上での微分として、前方差分

$$\partial_\mu f(s) \equiv \frac{f(s + \hat{\mu}) - f(s)}{a} \quad (2.21)$$

を定義すると、式 (2.20) は

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu}(s) &= \exp \left[ia^2 g \{ \partial_\mu A_\nu(s) - \partial_\nu A_\mu(s) + ig [A_\mu(s), A_\nu(s)] \} + O(a^3) \right] \\ &= \exp \left[ia^2 g (G_{\mu\nu}(s) + \Delta G_{\mu\nu}(s)) \right] \in \text{SU}(N_c) \end{aligned} \quad (2.22)$$

と書ける。ここで $\Delta G_{\mu\nu}(s)$ は式 (2.22) の指数の高次項であり、 $P_{\mu\nu}(s) \in \text{SU}(N_c)$ より $\Delta G_{\mu\nu}(s) \in \mathfrak{su}(N_c)$ かつ $\Delta G_{\mu\nu}(s) = O(a)$ である。また 1 行目から 2 行目は式 (1.3) を用いて $\{\dots\}$ の部分をゲージ場の強さ $G_{\mu\nu}(s)$ で書き直した。

ブラケット作用 (2.16) では、ブラケットは $\text{ReTr} P_{\mu\nu}(s)$ という形で含まれるため、これを計算する。ブラケットは式 (2.22) で表され、また最終的に連続極限をとるので a は十分小さいと考えると

$$\begin{aligned} \text{ReTr} P_{\mu\nu}(s) &= \text{ReTr} \left[1 + ia^2 g G_{\mu\nu}(s) + ia^2 g \Delta G_{\mu\nu}(s) - \frac{a^4 g^2}{2!} G_{\mu\nu}^2(s) + O(a^5) \right] \\ &= N_c - \text{ReTr} \left[\frac{a^4 g^2}{2!} G_{\mu\nu}^2(s) \right] + O(a^5) \end{aligned} \quad (2.23)$$

となる。ただし第 2,3 項の $G_{\mu\nu}(s), \Delta G_{\mu\nu}$ はリー代数 $\mathfrak{su}(N_c)$ の元なので、トレースにより消えた。これをプラケット作用 (2.16) に代入すれば

$$\begin{aligned} S^{\text{Plaq}} &= \beta \sum_s \left[1 - \frac{1}{N_c} \sum_{\mu < \nu} \left\{ N_c - \text{ReTr} \left[\frac{a^4 g^2}{2!} G_{\mu\nu}^2(s) \right] + O(a^6) \right\} \right] \\ &= \sum_s a^4 \left[\sum_{\mu, \nu=1}^4 \left\{ \frac{1}{2} \text{Tr} (G_{\mu\nu}^2(s)) \right\} + O(a^2) \right] \\ &\xrightarrow{a \rightarrow 0} \int d^4 x^E \frac{1}{2} G_{\mu\nu}^2(s) \end{aligned} \quad (2.24)$$

と書ける。なお 1 行目から 2 行目に移る際、 $\beta = 2N_c/g^2$ を用いて書き換え、 $\text{Tr} [G_{\mu\nu}^2(s)]$ は実であるから ReTr は Tr となることを用いた。また、 $G_{\mu\nu}(s)$ の反対称性を用いて和 $\sum_{\mu < \nu}$ を $\frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^4$ とした。

式 (2.24) で連続極限 $a \rightarrow 0$ を取ると和を積分に変えられるため、連続極限でのプラケット作用は連続時空での作用 (1.1) のグルーオン場のものに等しくなる。

2.4 格子 QCD での測定

ここまでで格子上でのゲージ場の定義およびその作用について説明をした。以下では、上記の方法で導入した格子上のゲージ場であるリンク変数 $U_\mu(s)$ を用いた格子 QCD の物理量の計算方法について説明する。

2.4.1 経路積分のモンテカルロ計算

格子 QCD での物理量 \hat{O} の真空期待値は以下で与えられる：

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}U e^{-S[U]} \hat{O}[U]}{\int \mathcal{D}U e^{-S[U]}}. \quad (2.25)$$

連続時空での経路積分 (1.13) は非可算無限個の自由度の積分であったが、格子上での経路積分 (2.25) は可算個の自由度の積分である。さらに時空が有限体積であれば、可算有限個の自由度の積分になる。

原理的には積分 (2.25) を実行することで物理量 \hat{O} の真空期待値を求めることができる。しかし、有限自由度による多重積分とはいえ、積分 (2.25) をそのまま実行するのはほぼ不可能である。例えば 10^4 個の格子点からなる時空格子を考えると、各格子点でゲージ群の自由度が 8、時空の方向の自由度が 4 なので、全体の自由度は $8 \times 4 \times 10^4 = 320000$ であり、経路積分は 320000 重積分という、超多重積分となる。

実は経路積分 (2.25) の定義に従って全てのゲージ配位を考慮する必要はない。ゲージ配位は $e^{-S[U]}$ を含む重みで経路積分 (2.25) に寄与するため、寄与の大きい配位を重点的に取り入れれば十分である。さらに、ユークリッド化により $e^{-S[U]}$ は実数となるので、 $e^{-S[U]}$ を確率因子と見なし、 $e^{-S[U]}$ を含む確率分布でゲージ配位を生成する重点サンプリングが適用できる。

格子 QCD では、重点サンプリング法を用いて生成したゲージ配位の統計平均として経路積分を評価する。具体的には、配位を N_{conf} 個生成したとして、物理量 \hat{O} の真空期待値は

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}U e^{-S[U]} \hat{O}[U]}{\int \mathcal{D}U e^{-S[U]}} \simeq \frac{1}{N_{\text{conf}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{conf}}} \hat{O}[U_i] + O\left(\frac{1}{\sqrt{N_{\text{conf}}}}\right) \quad (2.26)$$

と計算される。 U_i は i 個目のゲージ配位のリンク変数である。この際、 $O\left(\frac{1}{\sqrt{N_{\text{conf}}}}\right)$ 程度の統計誤差が生じる。

2.4.2 Elitzur の定理

ここでは格子上の場の理論において重要な「Elitzur の定理」を紹介する。

「Elitzur の定理」とは以下の定理である：

定理 1 (Elitzur の定理). 局所ゲージ対称性を持つ格子上の場の理論では、局所ゲージ対称性は自発的に破れない。

この定理の「局所ゲージ対称性は自発的に破れない」という主張は、言い換えると「局所ゲージ不変でない演算子の真空期待値は零になる」ということである。Elitzur の定理から、格子 QCD で真空期待値が零でない演算子、つまり観測可能な物理量はゲージ不変な量に限られる。本論文のようにゲージ場のみを考える場合は、リンク変数のみから構成されるゲージ不変量のみが観測でき、そのような量は基本的にはリンク変数をループ状に掛け合わせてトレースを取ったものに限られる。

2.4.3 ゲージ不変な観測量

ここでは格子 QCD で観測される基本的なゲージ不変量として、後述の研究にも関連する *Wilson loop* を紹介する。

Wilson loop

Wilson loop は以下で定義されるゲージ不変量である：

$$W_{\mu,\nu}(r \times t) \equiv \text{Tr} (L_\mu(s; r)L_\nu(s + r\hat{\mu}; t)L_\mu^\dagger(s + t\hat{\nu}; r)L_\nu^\dagger(s; r)) \in \mathbb{C} \quad (2.27)$$

$$L_\mu(s; r) \equiv U_\mu(s)U_\mu(s + \hat{\mu}) \cdots U_\mu(s + (r - 1)\hat{\mu}) \in \text{SU}(N_c). \quad (2.28)$$

式 (2.28) は μ 方向に伸びた長さ r の直線上で定義された Wilson line であり、Wilson loop は Wilson line で構成されるループ状のゲージ不変量 (2.27) である。

Wilson loop は静的なクォーク-反クォーク間ポテンシャルの情報を与えるなど、QCD において重要な物理量である。以下で Wilson loop から静的なクォーク-反クォーク間ポテンシャルが得られる理由およびその手法を説明する [13]。

まず初めに、重いクォーク-反クォーク対の時間発展をミンコフスキー時空で考える。重いクォーク-反クォーク対を時刻 t に生成するゲージ不変な演算子は、同時刻における空間の 2 点 $(\mathbf{x}, t), (\mathbf{y}, t)$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$) を結ぶ Wilson line を用いて

$$M_{\alpha\beta}(t) \equiv \bar{\Psi}_{\alpha a}^Q(\mathbf{x}, t)U_{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{y}; t)\Psi_{\beta b}^Q(\mathbf{y}, t) \quad (2.29)$$

と書ける。上付き添え字 Q は重い粒子を表す添え字であり、 Ψ^Q は重いクォークを表す Dirac 場である。また下付き添え字の α, β はスピノルの脚であり、 a, b はカラー自由度を表す。カラー自由度 a, b については、以降省略する。

$\bar{\Psi}^Q$ は粒子の生成演算子と反粒子の消滅演算子を含み、 Ψ^Q は粒子の消滅演算子と反粒子の生成演算子を含むため、 $M_{\alpha\beta}(0)|0\rangle$ は時刻 $t = 0$ に粒子-反粒子対が生成された状態を記述する。 $M_{\alpha\beta}$ で生成された粒子-反粒子対を消滅させる演算子は

$$\bar{M}_{\alpha\beta}(t) \equiv (\gamma^0)_{\alpha\rho} M_{\rho\tau}^\dagger(t) (\gamma^0)_{\tau\beta} = \bar{\Psi}_{\beta a}^Q(\mathbf{y}, t)U_{ab}(\mathbf{y} - \mathbf{x}; t)\Psi_{\alpha b}^Q(\mathbf{x}, t) \quad (2.30)$$

と定義する。これにより、時刻 $t = 0$ に生成された粒子-反粒子対が時刻 $t = T$ に消滅する確率振幅は

$$\langle 0 | \bar{M}_{\alpha'\beta'}(T)M_{\alpha\beta}(0) | 0 \rangle \quad (2.31)$$

で与えられる。

これを経路積分表示で考えてみる。経路積分表示での確率振幅 (2.31) は

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{M}_{\alpha'\beta'}(T)M_{\alpha\beta}(0) | 0 \rangle &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\Psi}^Q \mathcal{D}\Psi^Q \bar{M}_{\alpha'\beta'}(T)M_{\alpha\beta}(0) e^{iS[A, \bar{\Psi}^Q, \Psi^Q]} \\ &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\Psi}^Q \mathcal{D}\Psi^Q \left[\bar{\Psi}_{\beta'}^Q(\mathbf{y}, T)U(\mathbf{y} - \mathbf{x}; T)\Psi_{\alpha'}^Q(\mathbf{x}, T) \right. \\ &\quad \left. \times \bar{\Psi}_\alpha^Q(\mathbf{x}, 0)U(\mathbf{x} - \mathbf{y}; 0)\Psi_\beta^Q(\mathbf{y}, 0) \right] e^{iS[A, \bar{\Psi}^Q, \Psi^Q]} \quad (2.32) \end{aligned}$$

と書かれる。この章ではクエンチ近似を用いて動的なフェルミオンの自由度を無視するため、作用 $S[A, \bar{\Psi}^Q, \Psi^Q]$ はゲージ場と重いクォークの自由度のみに依存し

$$S[A, \bar{\Psi}^Q, \Psi^Q] = S_G[A] + S_Q[A, \bar{\Psi}^Q, \Psi^Q] \quad (2.33)$$

$$S_G[A] = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \text{Tr} (G_{\mu\nu}(x) G^{\mu\nu}(x)) \right] \quad (2.34)$$

$$S_Q[A, \bar{\Psi}^Q, \Psi^Q] = \int d^4x \bar{\Psi}^Q(x) (i\gamma^\mu D_\mu - M_Q) \Psi^Q(x) \quad (2.35)$$

と書ける。ここで3つ目の式 (2.35) の M_Q は重いクォークの質量である。

確率振幅 (2.31) の表式において、 Ψ^Q と $\bar{\Psi}^Q$ の組は付録 B の手法を用いると、フェルミオン・プロパゲーター $S(\mathbf{x} - \mathbf{y}, x^0 - y^0)$ で書ける。重いクォーク-反クォークはほぼ静止していると近似すると、 $S(\mathbf{x} - \mathbf{y}, x^0 - y^0)$ は

$$(\gamma^0 \partial_0 - M_Q) S(\mathbf{x} - \mathbf{y}, x^0 - y^0) = \delta(x^0 - y^0) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.36)$$

に従う。この方程式 (2.36) の解として $S(\mathbf{x} - \mathbf{y}, x^0 - y^0)$ を求めると

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x} - \mathbf{y}, x^0 - y^0) = & -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) e^{i \int_{x^0}^{y^0} dt A_0(\mathbf{x}, t)} \left\{ \theta(x^0 - y^0) \frac{1 + \gamma^0}{2} e^{-iM_Q(x^0 - y^0)} \right. \\ & \left. + \theta(y^0 - x^0) \frac{1 - \gamma^0}{2} e^{iM_Q(x^0 - y^0)} \right\} \end{aligned} \quad (2.37)$$

となる。

経路積分表示の確率振幅 (2.32) をみると、 Ψ^Q と $\bar{\Psi}^Q$ の組の作り方は以下の2通りあることがわかる：

1. $\bar{\Psi}_{\alpha'}^Q(\mathbf{y}, T)$ と $\Psi_{\beta'}^Q(\mathbf{x}, T)$ および $\bar{\Psi}_{\alpha}^Q(\mathbf{x}, 0)$ と $\Psi_{\beta}^Q(\mathbf{y}, 0)$,
2. $\bar{\Psi}_{\alpha'}^Q(\mathbf{y}, T)$ と $\Psi_{\beta}^Q(\mathbf{y}, 0)$ および $\bar{\Psi}_{\alpha}^Q(\mathbf{x}, 0)$ と $\Psi_{\beta'}^Q(\mathbf{x}, T)$.

このうち、1つ目の組み方ではプロパゲーターに $\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ が含まれており、今は $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ の場合を考えているため、2つ目の組み方のみが確率振幅 (2.32) に寄与する。従って、確率振幅 (2.32) の表式は

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{M}_{\alpha'\beta'}(T) M_{\alpha\beta}(0) | 0 \rangle = & \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\Psi}^Q \mathcal{D}\Psi^Q [-S_{\alpha'\alpha}(\mathbf{0}, T) U(\mathbf{y} - \mathbf{x}; T) \\ & \times S_{\beta\beta'}(\mathbf{0}, -T) U(\mathbf{x} - \mathbf{y}; 0)] e^{iS[A, \bar{\Psi}^Q, \Psi^Q]} \end{aligned} \quad (2.38)$$

となる。 $S_{\alpha'\alpha}$ の時間依存性が T および $-T$ であることから、1つのプロパゲーター (2.37)

のうち $\theta(x^0 - y^0)$ と $\theta(y^0 - x^0)$ のどちらか一方が残る。それにより、式 (2.38) は

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{M}_{\alpha'\beta'}(T) M_{\alpha\beta}(0) | 0 \rangle &\propto \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\Psi}^Q \mathcal{D}\Psi^Q \left[\left(\frac{1 + \gamma^0}{2} \right)_{\alpha'\alpha} \left(\frac{1 + \gamma^0}{2} \right)_{\beta'\beta} \right. \\ &\quad \times e^{i \int_0^T dt A_0(\mathbf{y}, t)} U(\mathbf{y} - \mathbf{x}; T) e^{i \int_0^T dt A_0(\mathbf{x}, t)} U(\mathbf{x} - \mathbf{y}; 0) \left. \right] \\ &\quad \times e^{-i2M_Q T} e^{iS[A, \bar{\Psi}^Q, \Psi^Q]} \\ &\propto \langle W_{k,t}(R, T) \rangle e^{-i2M_Q T} \end{aligned} \quad (2.39)$$

となる。ここで $R \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ とし、 k はベクトル $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ の方向を表す添え字とする。以上より、確率振幅 (2.32) は Wilson loop の真空期待値に比例することが分かった。

次にユークリッド時空に移って確率振幅 (2.32) の表式を考える。まず式 (2.39) は

$$\langle 0 | \bar{M}_{\alpha'\beta'}(T) M_{\alpha\beta}(0) | 0 \rangle \propto \langle W_{k,t}(R, T) \rangle_{\text{Eucl.}} e^{-2M_Q T} \quad (2.40)$$

となる。

一方、式 (2.31) にエネルギー固有状態の完全系を挿入すると

$$\langle 0 | \bar{M}_{\alpha'\beta'}(T) M_{\alpha\beta}(0) | 0 \rangle = \sum_n C_{\alpha'\beta'; \alpha\beta}^n e^{-E_n(R)T} \quad (2.41)$$

$$C_{\alpha'\beta'; \alpha\beta}^n \equiv \langle 0 | \bar{M}_{\alpha'\beta'}(0) | n \rangle \langle 0 | M_{\alpha\beta}(0) | n \rangle \quad (2.42)$$

と書ける。 $E_n(R)$ は距離 R だけ離れた重いクォーク-反クォーク対の第 n 励起状態のエネルギーを表す。

この2式 (2.40), (2.41) から、Wilson loop の真空期待値は

$$\langle W_{k,t}(R, T) \rangle_{\text{Eucl.}} \propto \sum_n C_{\alpha'\beta'; \alpha\beta}^n e^{-[E_n(R) - 2M_Q]T} \quad (2.43)$$

と書ける。 $E_n(R)$ のうち質量エネルギーは $-2M_Q$ でキャンセルされ、 $T \rightarrow \infty$ の極限では基底エネルギーが主要な寄与をするため

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle W_{k,t}(R, T) \rangle_{\text{Eucl.}} \simeq C_{\alpha'\beta'; \alpha\beta}^0 e^{-V(R)T} \quad (2.44)$$

となる。 $V(R)$ は重いクォーク-反クォークの間に働くポテンシャルであると解釈される。

従って、静的なクォーク-反クォーク間ポテンシャルは

$$V(R) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln (\langle W_{k,t}(R, T) \rangle_{\text{Eucl.}}) \quad (2.45)$$

と求められる。

第 3 章

QCD とクォーク閉じ込め

クォークはその概念の提唱以来、単離されたという明確な実験結果はなく、ハドロンの内部に閉じ込められている。閉じ込め現象の定量的な記述は、クォーク間の線形ポテンシャルという形で説明される。歴史的には、軽いハドロンの角運動量と質量の関係を表すレジジェ軌跡や重いクォーク-反クォーク対からなるクォークoniumの質量スペクトルを再現するという観点から、クォーク間ポテンシャルは現象論的に

$$V(r) = -\frac{A}{r} + \sigma r + \text{const.} \quad (3.1)$$

と予測された [15, 16, 17]。 A, σ は定数で $A \simeq 0.27$, $\sigma \simeq 0.89 \text{ GeV/fm}$ であると考えられており、特に σ は string tension と呼ばれ、閉じ込め力の特徴づける重要な量である。ポテンシャル (3.1) はコーネル・ポテンシャルと呼ばれている。

2.4.3 節で述べたように、格子 QCD でも Wilson loop を用いてクォーク-反クォーク間ポテンシャルを計算でき、図 3.1 のようにコーネル・ポテンシャルを極めて良く再現する [18, 19, 20, 21]。

3.1 線形ポテンシャルとフラックス・チューブ形成

2.4.3 節および 3 節で述べたように、閉じ込めは線形ポテンシャルという形で記述される。そしてその線形ポテンシャルの形成には 1 次元状に絞られたカラー電束、つまりカラー・フラックス・チューブの存在が本質的に重要と考えられている。

カラー・フラックス・チューブの存在は格子 QCD でも検証されており、図 3.2 は格子 QCD 計算に基づいて作用密度を可視化した結果である [22]。中間子 $Q\bar{Q}$ 系 (図 3.2a) およびバリオン QQQ 系 (図 3.2b) の双方で 1 次元のチューブ状の作用密度の盛り上がり、

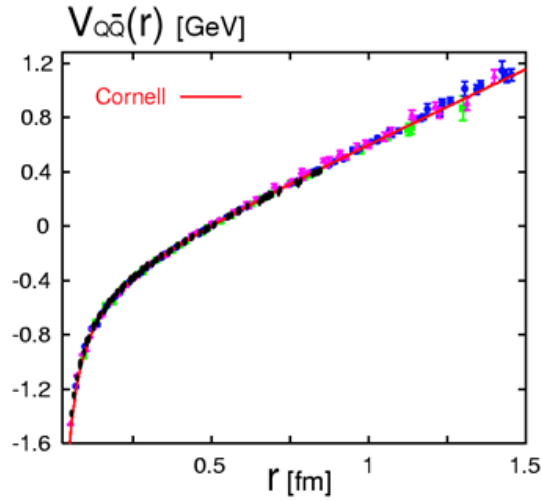
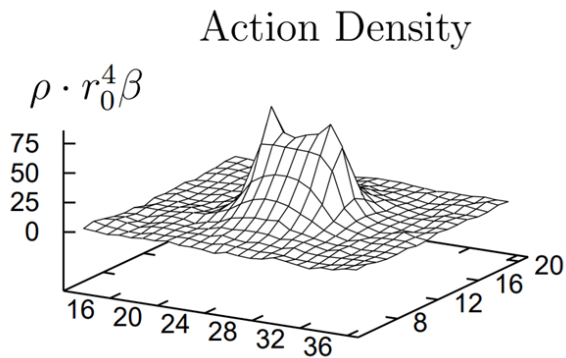
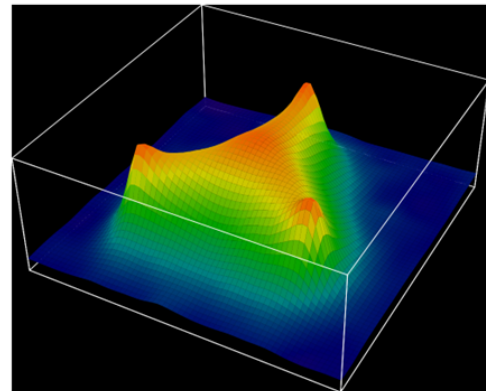


図 3.1: 格子 QCD による静止したクォーク-反クォーク間のポテンシャルの計算結果 [18, 19, 20, 21]。実線 (赤) がコーネル・ポテンシャル。

つまりフラックス・チューブの存在が確認できる。



(a) 中間子 $Q\bar{Q}$ 系の作用密度。



(b) バリオン QQQ 系の作用密度。

図 3.2: 中間子 $Q\bar{Q}$ 系 (a) とバリオン QQQ 系 (b) における作用密度に対する格子 QCD 計算 [22]。

以上のことから、フラックス・チューブの形成が閉じ込め（線形ポテンシャル）の実現に重要であると考えられる。ではこのフラックス・チューブの形成はどのようにして起こるのか？この疑問に対する答えは明確には出ておらず、様々なモデルや議論がある。その有力なモデルの 1 つに、南部・トフフト・マンデルスタムによって提唱された「双対超伝導描像」がある [23, 24, 25]。このモデルはのちに格子 QCD 計算で研究され、そこでは「最大可換ゲージ」と呼ばれるゲージ固定が用いられた [29, 30]。本論文で後述する研究も

またゲージ固定を用いた格子 QCD であり、議論の構造は双対超伝導描像の格子 QCD による研究と幾分平行なものである。そこで、本研究の参考のために、以下では「双対超伝導描像」および「最大可換ゲージ」に関する解説を行う [48, 49]。

3.2 双対超伝導描像

双対超伝導描像とは 1974~76 年に南部・トフーフト・マンデルスタムによって提唱された [23, 24, 25]、超伝導体内に現れる 1 次元的な Abrikosov 渦糸とフラックス・チューブとのアナロジーからクォーク閉じ込めを説明するというモデルである。

超伝導はクーパー対の凝縮により実現する状態であり、磁場を排斥する Meissner 効果を示す。Meissner 効果により、超伝導体内部に磁氣的なモノポールと反モノポールを置くと、その間の磁束は 1 次元状に絞られ、磁氣的なモノポールの閉じ込めが発生すると考えられる。

電磁気テンソル $F^{\mu\nu}$ およびその双対テンソル $\tilde{F}^{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad \tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (3.2)$$

を用いると、磁氣的なカレント k^ν を導入したマクスウェル方程式

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (3.3)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = k^\nu \quad (3.4)$$

には電場と磁場および電気的カレントと磁氣的カレントを入れ替える双対性

$$F^{\mu\nu} \leftrightarrow \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (3.5)$$

$$j^\mu \leftrightarrow k^\mu \quad (3.6)$$

$$(3.7)$$

がある [26]。この双対性を超伝導体に用いて、電荷（クーパー対）の凝縮と磁荷（モノポール）の凝縮を入れ替えることで、電気的なフラックス・チューブの形成およびそれによるクォークの閉じ込めを説明しようというのが双対超伝導描像である。

しかし、QCD における双対超伝導描像の正当化は非自明であり、例えば次のような問題がある：

1. 式 (3.5),(3.6) で表されるような、双対性の単純明快な定義が QCD においてできるかはわからない。

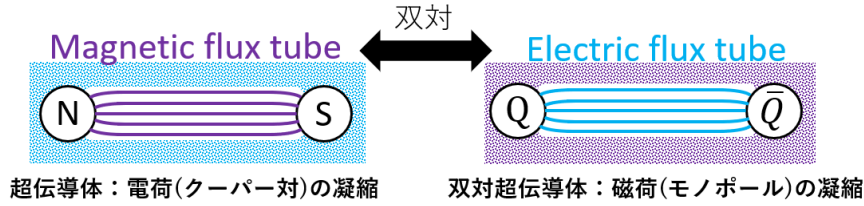


図 3.3: 双対超伝導描像の模式図。超伝導体内では電荷が凝縮し、その結果磁束が 1 次元状に絞られる (左)。電気と磁気を入れ替えた双対超伝導体内では、磁荷が凝縮し、その結果電束が 1 次元状に絞られる (右)。

2. QCD はクォークとグルーオンを基本場として構成される理論であるため、磁気モノポールの存在は非自明である。またモノポールが存在したとしても、凝縮が起こるかはわからない。

クォーク閉じ込めを双対超伝導描像で説明する際に生じるこれらの問題は、1981 年にトフフトによって発表された「可換ゲージ」により解決の糸口が与えられ [27]、以下で紹介するように「最大可換ゲージ」を用いた格子 QCD 計算により、一定の解釈が与えられるようになった。

3.3 最大可換ゲージを用いた双対超伝導描像の概略

ここでは最大可換 (Maximally Abelian, MA) ゲージおよび MA ゲージを用いた双対超伝導描像の概略について解説を行う。MA ゲージは、ゲージ固定を用いることで QCD の非摂動的な性質に対し、双対超伝導描像という物理的描像を与える。

3.3.1 MA ゲージの定義と理論形式

MA ゲージは、ユークリッド時空での QCD においてゲージ場であるグルーオン場の対角成分を最大化 (非対角成分を最小限に抑制) するゲージであり、't Hooft が提案した可換ゲージの一種である。リー代数 $\mathfrak{su}(N_c)$ のカルタン部分代数 \vec{H} を用いてゲージ場 A_μ を

$$A_\mu = A_\mu^a T^a = \vec{A}_\mu \cdot \vec{H} + \sum_{\alpha} A_\mu^\alpha E_{-\alpha} = A_\mu^{\text{diag}} + A_\mu^{\text{off-diag}} \in \mathfrak{su}(N_c) \quad (3.8)$$

と表したとき [28]、MA ゲージは関数

$$R_{\text{MA}} \equiv \int d^4s \sum_{\alpha} |A_\mu^\alpha(s)|^2 \quad (\alpha: \text{非対角成分}) \quad (3.9)$$

を最小化するゲージとして定義される。ゲージを MA ゲージに固定するという操作は「本来対等なゲージ場の対角・非対角成分の差別化」であり、具体的には

- 対角成分を最大にすることで、可換性を強調
- 非対角成分のゲージ自由度を固定し、charged matter として扱う

ということを行っている。

MA ゲージではゲージ自由度は完全には固定されておらず、 $U(1)^{N_c-1}$ のゲージ対称性が残留する。そのため、ゲージ場の可換成分はゲージ固定後もゲージ場として振る舞う。一方で非可換成分については式 (3.9) によってゲージ自由度は固定されるため、ゲージ場としての振る舞いは失われ $U(1)^{N_c-1}$ ゲージ変換に対し電荷をもつ物質場のように振る舞う。

また MA ゲージでは

$$\pi_2(SU(N_c)/U(1)^{N_c-1}) \simeq \mathbb{Z}^{N_c-1} \quad (3.10)$$

というホモトピー群に従ってトポロジカルにモノポールが出現する [32]。

つまり MA ゲージでの QCD は「可換ゲージ場 + 荷電物質場 + モノポール」という 3 種類の物理的対象からなる可換ゲージ理論となる。前述の双対超伝導描像の問題点のうち「双対性の定義」に関しては可換ゲージ理論の場合は明確であり、「カラー磁気モノポールの出現機構」についても一定の解決がなされる。残る問題は

- モノポールは凝縮するのか。
- 非摂動的な QCD 現象が可換ゲージ理論の自由度のみで記述できるか。

の 2 点である。

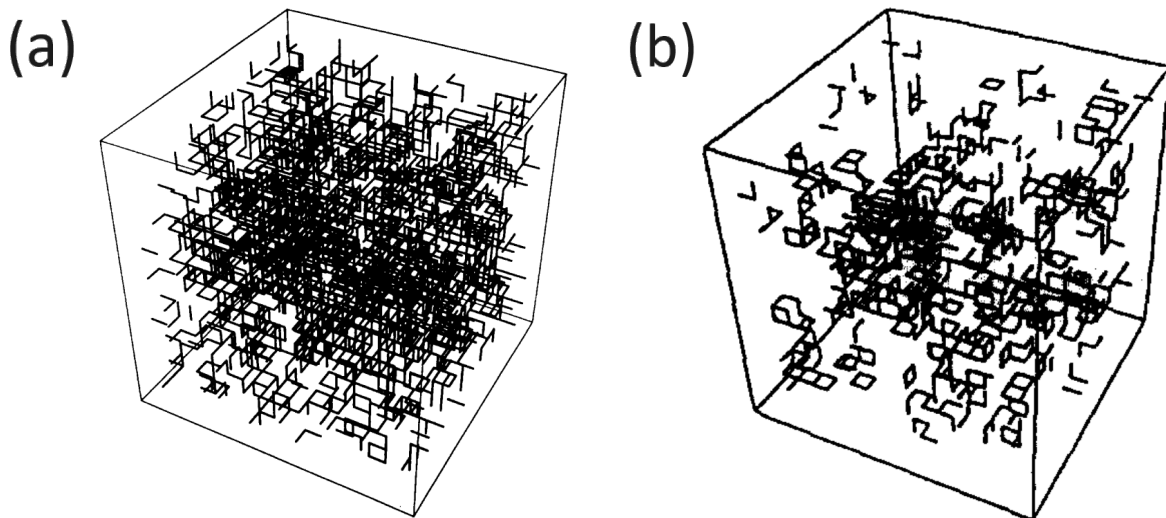
これらの問題については格子 QCD を用いて研究されており、モノポール凝縮を示す結果が報告されている [33, 34]。可換ゲージ理論の自由度による非摂動的な QCD 現象の記述については 3.3.2 節で紹介する。

3.3.2 最大可換射影と Abelian dominance

MA ゲージ固定後の QCD に対し

$$A_\mu(s) = A_\mu^{\text{diag}}(s) + A_\mu^{\text{off-diag}}(s) \rightarrow A_\mu^{\text{diag}}(s) \quad (3.11)$$

とする操作を考える。これはゲージ場の非対角成分を消す操作であり「最大可換射影」と呼ばれる。



(a) SU(2) 格子 QCD 計算によるモノポール・カレント (閉じ込め相)。 (b) SU(2) 格子 QCD 計算によるモノポール・カレント (非閉じ込め相)。

図 3.4: SU(2) 格子 QCD 計算によるモノポール・カレントの可視化。それぞれ (a) は閉じ込め相 ($\beta = 2.2$)、(b) は非閉じ込め相 ($\beta = 2.4$) におけるモノポール・カレントを示す。[34, 35] より引用。

MA ゲージは最大可換射影に対し興味深い性質を示し、一部の物理量 $\hat{O}[A_\mu]$ について

$$\hat{O}[A_\mu] \simeq \hat{O}[A_\mu^{\text{diag}}] \quad (3.12)$$

という性質が成り立つことが知られている。この性質は Abelian dominance[31] と呼ばれており、最大可換射影をしても物理量はほとんど変化しない、つまり「可換ゲージ場の自由度のみで一部の物理量は記述できる」ということを意味する。

string tension は

$$\sigma^{\text{Abel}} \simeq \sigma \quad (3.13)$$

となることが SU(2) および SU(3) 格子 QCD 計算で示されている [36, 37]。string tension は閉じ込めの強さを特徴づける物理量なので、MA ゲージでは可換ゲージ場の自由度がクォーク閉じ込めにおいて支配的であるといえる。

また Wilson loop 以外の物理量として、カイラル対称性の秩序変数であるカイラル凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle$ も Abelian dominance を示すと考えられ [32]、カイラル対称性の自発的破れにおいても MA ゲージでは可換ゲージ場が支配的であることは SU(2) および SU(3) 格子 QCD 計算で示されている [38, 39, 40]。

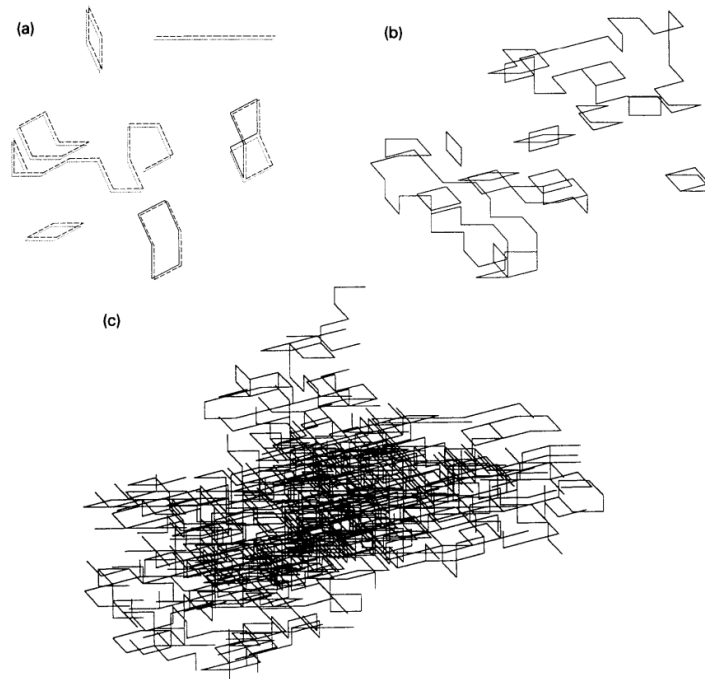


図 3.5: SU(3) 格子 QCD 計算によるモノポール・カレント。それぞれ (a) は $\beta = 6.1$ (非閉じ込め相)、(b) は $\beta = 5.8$ (非閉じ込め相)、(c) は $\beta = 5.5$ (閉じ込め相) の時のモノポール・カレントを示す [33] より引用。

3.3.3 MA ゲージのまとめ

以上が MA ゲージ QCD における双対超伝導の概略である。

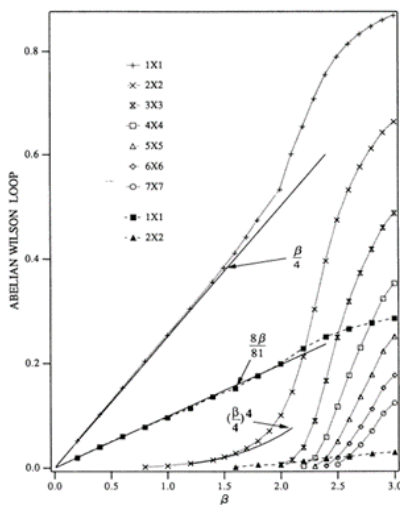
まとめると、MA ゲージは

- ゲージ場の非対角成分を最小限にするようにゲージ固定をして可換・非可換の自由度を差別化し、QCD を可換ゲージ理論 + 荷電物質場 + カラー磁気モノポールの自由度で記述する

ということを行っており、そのとき

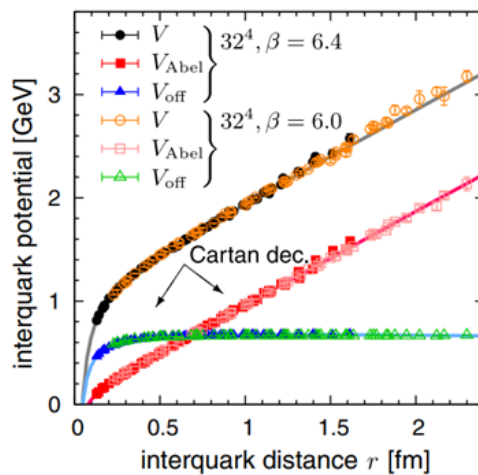
- 閉じ込め相ではカラー磁気モノポールが凝縮する
- string tension やカイラル凝縮など低エネルギー領域の QCD で重要な物理量が Abelian dominance を示す

などが格子 QCD 計算で検証または推定されている。



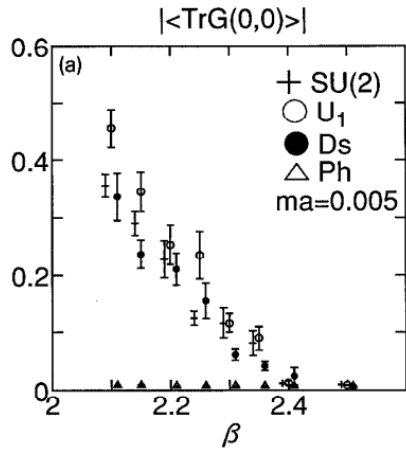
(a) MA ゲージでの SU(2) 格子ゲージ理論の計算結果。塗りつぶしの四角と三角は MA ゲージ固定前の可換なゲージ配位で計算した Wilson loop (四角が 1×1 、三角が 2×2 の Wilson loop に対応)。他のシンボルは MA ゲージ固定後の可換なゲージ配位で計算した Wilson loop。上側の実線 $(\beta/4)$ と下側の実線 $((\beta/4)^4)$ はそれぞれ 1×1 と 2×2 の完全な Wilson loop の強結合展開を表す。真ん中の実線 $(8\beta/81)$ は MA ゲージ固定前の Wilson loop の強結合展開を表す。[36] より引用。

(a) Cartan decomposition of $Q\bar{Q}$ potential

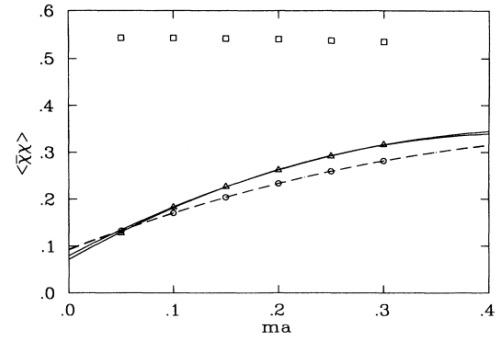


(b) MA ゲージでの SU(3) 格子ゲージ理論による最大可換射影後のクォーク-反クォーク間ポテンシャルの計算結果。丸、四角、三角はそれぞれ SU(3) のゲージ配位、MA ゲージで最大可換射影後の可換なゲージ配位、SU(3) のゲージ配位の非対角成分の配位から計算されたクォーク間ポテンシャル。[37] より引用。

図 3.6: MA ゲージでの格子 QCD が示す string tension (閉じ込め力) の Abelian dominance。

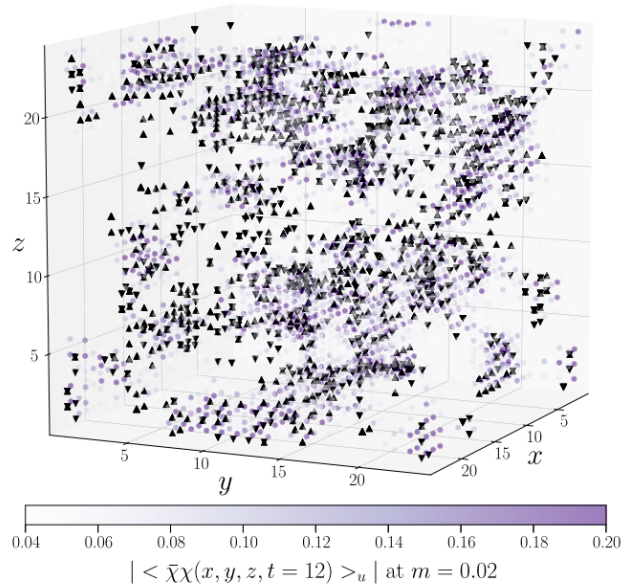


(a) カイラル凝縮の β 依存性の SU(2) 格子ゲージ理論による計算結果。SU(2), U_1 はそれぞれ SU(2) のゲージ配位、MA ゲージでの可換な配位から計算されたカイラル凝縮である。可換な配位をさらにモノポールの配位とフォトンの配位に分解し、モノポールの配位から計算されるカイラル凝縮が Ds、フォトンの配位から計算されるカイラル凝縮が Ph。[38] より引用。



(b) MA ゲージでのカイラル凝縮のクォーク質量依存性の SU(2) 格子ゲージ理論の計算結果。三角、丸はそれぞれ SU(2) のゲージ配位、MA ゲージでの可換な配位から計算されたカイラル凝縮。四角は各時空点 s でプラケット P_{xy} を対角化するゲージで定義した可換なゲージ配位による計算結果。[39] より引用。

- ▲ monopoles at $t = 11.5$
- ▼ monopoles at $t = 12.5$



(c) MA ゲージでの SU(3) 格子ゲージ理論の計算結果。局所的なカイラル凝縮とモノポールの SU(3) 格子 QCD による計算結果。時刻 $t = 12$ における局所的なカイラル凝縮の値が色のグラデーションで表されている。上向きの三角は時刻 $t = 11.5$ におけるモノポール、下向きの三角は時刻 $t = 11.5$ におけるモノポールである。[40] より引用。

図 3.7: MA ゲージでのカイラル凝縮の Abelian dominance.

第 4 章

Dimensional Reduction(DR) ゲージ と QCD の低次元化の解析

本章では本論文の主題となる研究について説明を行う。

4.1 本研究の動機と方針

前章の MA ゲージによるアプローチは、MA ゲージ固定で QCD を「可換ゲージ場 + 荷電物質場 + モノポール」で記述される理論にし、双対超伝導描像を通じてフラックス・チューブの形成を示すことでクォーク閉じ込めの物理的描像を得ている。これは QCD の「非可換性」に由来する困難を緩和するという方向からのアプローチであるといえる。

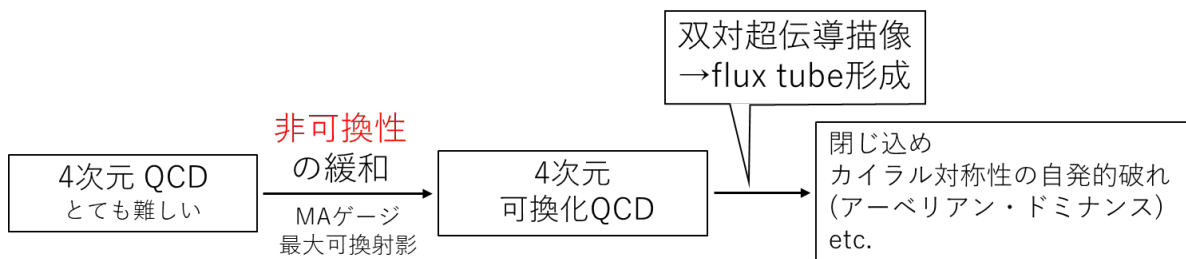


図 4.1: MA ゲージでの QCD の概略。

一方で、QCD の難しさには「高次元性」に由来するといえるものもある。低エネルギーの 4 次元 QCD を解析的に調べるのは難しいが、2 次元 QCD ならば解析的に扱える場合があり、例えば 2 次元 QCD のメソンの記述がカラー数 N_c を大きいとするラージ N_c 極限を用いて 't Hooft により求められ [41]、その物理的性質も調べられている [42, 43, 44, 45]

。このように 2 次元では解析的手法が有効な場合があるため理論的に扱いやすく、非摂動的な現象の物理的描像を得ることも 4 次元よりは容易になると考えられる。

そこで我々は、MA ゲージで非可換性が緩和されたように、ゲージ自由度を利用して 4 次元 QCD の「高次元性」を緩和することで理論を 2 次元 QCD 的自由度で記述し、問題を扱いやすくできるのではないかと考えた。特に時空が 2 次元（空間 1 次元）であれば、古典的には線形ポテンシャルが形成されるため、閉じ込めに対するアプローチとしても魅力的である。図 4.2 に本研究の閉じ込めに対するアプローチの概観を記す。

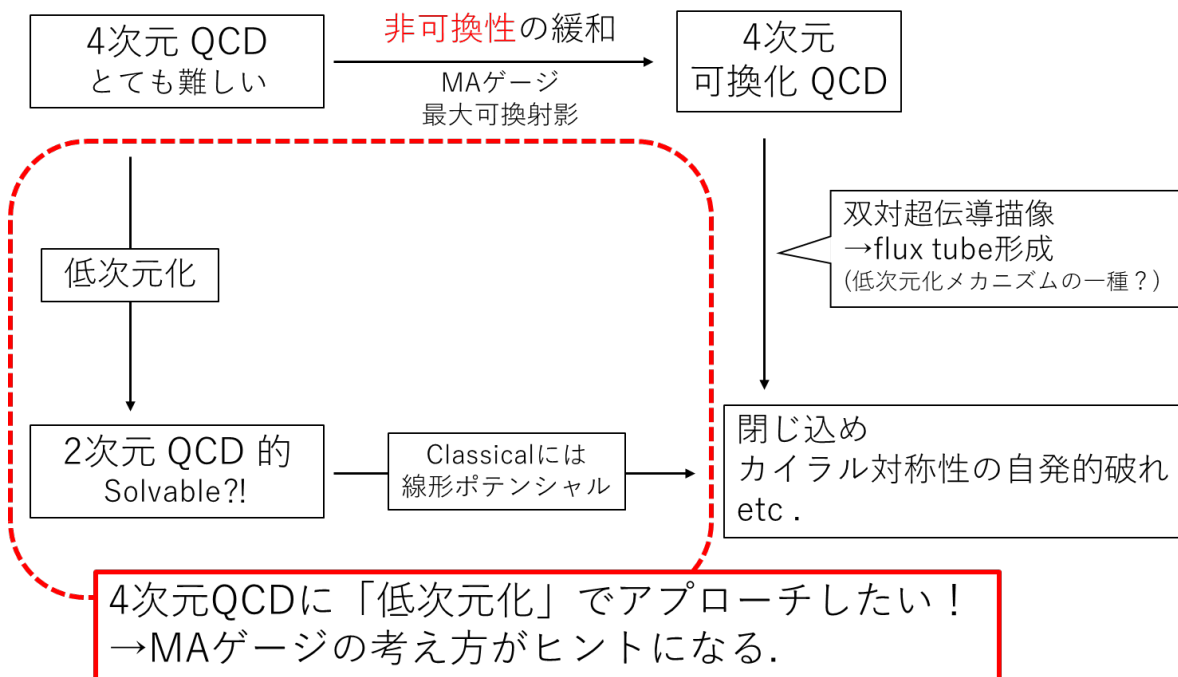


図 4.2: 本研究の閉じ込めに対するアプローチ。本研究では点線で囲まれた「低次元化」の方針で研究を進める。

本研究では以上の動機から

1. ゲージ場のうち $A_{x,y}$ 成分を最小限に抑制するようなゲージ固定で、4 次元 QCD を 2 次元 QCD 的な自由度 $A_{t,z}$ で記述可能か？
2. Abelian dominance に類似した、一部の物理量が 2 次元的自由度 $A_{t,z}$ のみで再現できるという性質は成り立ち得るのか？

について調べる。

4.2 Dimensional Reduction (DR) ゲージ

図 4.2 で示したように、4 次元 QCD に対して「低次元化」という観点でアプローチをし、理論を 2 次元 QCD 的な自由度で記述することを目指す。そこで我々は MA ゲージによる一連の研究を参考にして、ゲージ固定を用いた理論の自由度の差別化および特定の性質の強調ということを考え、「Dimensional Reduction (DR) ゲージ」という新しいゲージ固定条件を考案した。

DR ゲージは、大域的には以下の関数を最小にするようなゲージとして定義される：

$$R_{\text{DR}} \equiv \int d^4s \sum_{\perp=x,y} \text{Tr} [A_{\perp}(s)^2] = \int d^4s \text{Tr} [A_x(s)^2 + A_y(s)^2] \quad (\text{大域的な定義}). \quad (4.1)$$

ここで添え字 \perp は x, y を走る添え字であり、以下でもこの記法を用いる。また本論文では x, y 方向をまとめて transverse 方向と呼ぶ。

MA ゲージはゲージ場の非対角成分を最小限に抑制するというゲージであったのに対し、DR ゲージは関数 (4.1) を最小にするゲージなので、 $A_{x,y}$ の振幅を最小限に抑制するゲージであることがわかる。MA ゲージはユークリッド時空で定義されていたが、DR ゲージは $A_{x,y}$ にのみ依存して定義されるので、ユークリッド時空とミンコフスキー時空の両方で定義可能である。また、この DR ゲージ固定によりゲージ自由度は完全には固定されておらず、ゲージ固定は部分的である。既に述べたように MA ゲージでもゲージ固定は部分的で $U(1)^{N_c-1}$ というゲージ対称性が残留しており、このゲージ自由度が可換自由度のゲージ対称性となっている。

DR ゲージでは t, z 方向の座標にのみ依存するゲージ関数 $\Omega(t, z)$ を用いて

$$A_{t,z}(x, y, z, t) \rightarrow \Omega(t, z) \left(A_{t,z}(x, y, z, t) + \frac{1}{ig} \partial_{t,z} \right) \Omega^\dagger(t, z) \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} A_{x,y}(x, y, z, t) &\rightarrow \Omega(t, z) \left(A_{x,y}(x, y, z, t) + \frac{1}{ig} \partial_{x,y} \right) \Omega^\dagger(t, z) \\ &= \Omega(t, z) A_{x,y}(x, y, z, t) \Omega^\dagger(t, z) \end{aligned} \quad (4.3)$$

というゲージ変換に対する対称性が残留している。実際、このゲージ変換 (4.2),(4.3) に対し、ゲージ固定条件 (4.1) は不変である。

ゲージ変換 (4.2),(4.3) に関する対称性は 2 次元 QCD のゲージ対称性と等しく、式 (4.2) のように変換する $A_{t,z}$ は 2 次元ゲージ理論のゲージ場に対応し、式 (4.3) のように変換する $A_{x,y}$ は 2 次元ゲージ理論で随伴表現に属す荷電物質場と見なせる。

従って、DR ゲージ QCD は「2次元非可換ゲージ場 + 荷電物質場」という自由度で記述される理論になっていると考えられる。

上記の DR ゲージ固定条件は大域的なものであるので、局所ゲージ固定条件も求める。

既に DR ゲージ固定が完了している状況を考える。つまりゲージ場の配位として関数 (4.1) が最小となっているものを考える。このゲージ場配位に対して無限小のゲージ変換を考えると、既にゲージ固定がなされているため、 R_{DR} は最小かつ極小であり、ゲージ変換で R_{DR} の値は増加する。無限小のゲージ変換は無限小パラメーター $\omega^a(s) \in \mathbb{R}$ を用いたゲージ変換関数

$$\Omega(s) = e^{i\omega^a(s)T^a} = 1 + i\omega^a(s)T^a + O(\omega^2) \quad (4.4)$$

で実現され、それによる R_{DR} の変化分 δR_{DR} は

$$\delta R_{\text{DR}} = -\frac{1}{g} \int d^4s \text{Tr} [A_x(s)\partial_x\omega^a(s)T^a + A_y(s)\partial_y\omega^a(s)T^a + O(\omega^2)] \quad (4.5)$$

となる。今考えているゲージ場の配位は R_{DR} の極小値を実現しているため、極値条件 $\delta R_{\text{DR}} = 0$ を満たしている。そして式 (4.5) を部分積分して $O(\omega^2)$ を無視すると、任意の無限小パラメーター $\omega^a(s)$ に対して

$$\delta R_{\text{DR}} = \frac{1}{g} \int d^4s \text{Tr} [\omega^a(s)T^a (\partial_x A_x(s) + \partial_y A_y(s))] = 0 \quad (4.6)$$

が従う。よって DR ゲージの局所ゲージ固定条件は

$$\sum_{\perp=x,y} \partial_{\perp} A_{\perp}(s) \equiv \partial_x A_x(s) + \partial_y A_y(s) = 0 \quad (\text{局所的な定義}) \quad (4.7)$$

であることがわかる。

式 (4.7) から、DR ゲージの局所固定条件はランダウ・ゲージ ($\partial_{\mu} A_{\mu}(s) = 0$) やクーロン・ゲージ ($\nabla \cdot \mathbf{A}(s) = 0$) と類似した形式であることがわかる。ランダウ・ゲージやクーロン・ゲージのゲージ固定項は

$$-\frac{1}{2\alpha} \text{Tr} (\partial_{\mu} A_{\mu})^2 \quad (\text{ランダウ・ゲージ}) \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{2\alpha} \text{Tr} (\nabla \cdot \mathbf{A}(s))^2 \quad (\text{クーロン・ゲージ}) \quad (4.9)$$

という形で作用に入るため DR ゲージも同様に定式化でき、実際 DR ゲージのゲージ固定項は付録 A の処方に従うと

$$\frac{1}{2\alpha} \text{Tr} (\partial_{\perp} A_{\perp})^2 \quad (\text{DR ゲージ}) \quad (4.10)$$

という形で作用に導入可能である。その作用を調べることで DR ゲージ QCD の理論構造を解析でき、以下で DR ゲージ QCD の理論構造を調べる。

4.3 DR ゲージ QCD

3.3.2 節で解説したように、MA ゲージ QCD は可換ゲージ場 + 荷電物質場 + モノポールという自由度で記述され、低エネルギー領域では Abelian dominance が成立していた。

本節では DR ゲージ固定をした 4 次元 QCD がどのような自由で記述されるのかを調べる。なお本論文では主として閉じ込めやゲージ場の自由度に着目するため、クォークの動的自由度を無視したクエンチ・レベルでの議論を進める。

DR ゲージのゲージ固定項は式 (4.10) で書かれるため、DR ゲージ QCD の作用は

$$S_{\text{DR}} = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \text{Tr} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha} \sum_{\perp=x,y} \text{Tr} (\partial_{\perp} A_{\perp})^2 \right] \quad (4.11)$$

となる。この作用はゲージ固定項を含むが、ゲージ自由度は完全には固定されておらず、ゲージ関数 $\Omega(t, z)$ のゲージ変換に対する対称性が残留している。作用 (4.11) の第 1 項はそもそもゲージ不変であり、第 2 項 $\text{Tr} (\partial_{\perp} A_{\perp})^2$ は

$$\text{Tr} (\partial_{\perp} A_{\perp})^2 \rightarrow \text{Tr} (\Omega(t, z) \partial_{\perp} A_{\perp} \Omega^{\dagger}(t, z))^2 = \text{Tr} (\partial_{\perp} A_{\perp})^2 \quad (4.12)$$

のように不変である。

MA ゲージ QCD の場合は「4 次元可換ゲージ場 + 荷電物質場 + モノポール」という自由度で記述されており、MA ゲージ QCD では可換な自由度のみを残す最大可換射影という操作を考えていた。そこで DR ゲージでも $A_{t,z}$ のみを残す tz -射影という操作を考える。

4.4 tz -射影

DR ゲージ QCD には 2 次元 QCD と同じゲージ対称性が残留する。MA ゲージでもゲージ固定後に $U(1)^{N_c-1}$ ゲージ対称性が残る。MA ゲージの場合は、重点サンプリング法で生成した各ゲージ配位に対して MA ゲージ固定をした後、最大可換射影という操作でゲージ場の非対角部分を取り除き、4 次元 QCD を可換ゲージ理論の自由度で記述した。

tz -射影を

$$A_{x,y} \rightarrow 0 \quad (\text{DR ゲージ固定後}) \quad (4.13)$$

という操作として定義する。

tz -射影を施した作用は、 A_x, A_y が 0 になるため、

$$S_{\text{DR}}^{tz} = \int dx dy \int dt dz \left[\text{Tr} G_{tz}^2 + \sum_{\perp=1}^2 \text{Tr} \left\{ -(\partial_{\perp} A_t)^2 + (\partial_{\perp} A_z)^2 \right\} \right] \quad (4.14)$$

と表される。ここで第 1 項は t - z 平面内の 2 次元 QCD 作用と等しい。第 2 項は各 t - z 平面内の 2 次元 QCD からのずれであり、物理的には x, y 方向に並列する 2 次元 QCD 系間の相互作用に対応すると解釈される。

従って、 tz -射影を受けた 4 次元 DR ゲージ QCD の理論構造は

- 各 x, y での t - z 平面上に 2 次元 QCD の類似系
- それらの t - z 平面上の 2 次元 QCD の類似系が x, y 方向に近接的相互作用をする

という記述様式で表現できる可能性がある (図 4.3)。つまり DR ゲージの 4 次元 QCD は「 t - z 平面上の 2 次元 QCD の類似系 + x, y 方向の近接的相互作用」という見方で扱える可能性がある。4 次元 QCD の問題をより簡単な 2 次元の理論で解析できる場合、その利点は大きいと考えられる。また 2 次元 QCD から 4 次元 QCD を構築する方法を与えてくれる可能性もあり、その場合 4 次元 QCD の解析的手法による理解が深まると考えられる。

このような観点から、以下では格子 QCD 計算を用いて DR ゲージ固定された QCD の性質および理論構造を探る。

4.5 格子上での DR ゲージおよび tz -射影の定式化

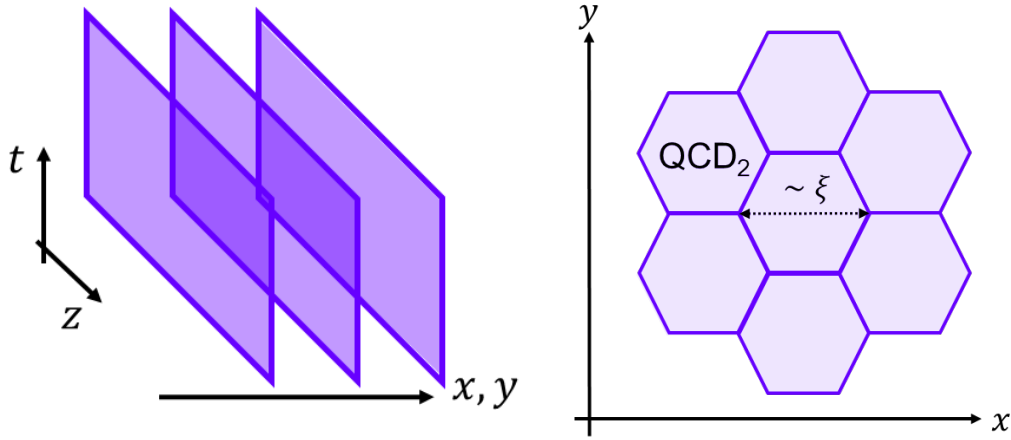
以上の DR ゲージ QCD の定式化は連続時空におけるものであるが、非摂動的な現象の解析は格子 QCD 計算が信頼性があり有効である。従って DR ゲージ QCD での閉じ込めやカイラル対称性の自発的破れといった現象の解析のためには、上記の理論を格子上で定式化することが望ましい。ここでは格子上での DR ゲージ固定および tz -射影の定式化を行う。

4.5.1 格子上での DR ゲージ

まず格子上での DR ゲージの定義について述べる。

格子上の DR ゲージはリンク変数 $U_{x,y}$ を用いて与えられる

$$R_{\text{DR}}^{\text{lat}} \equiv \sum_s \sum_{\perp=x,y} \text{ReTr} [U_{\perp}(s)] = \sum_s \text{ReTr} [U_x(s) + U_y(s)] \quad (4.15)$$



(a) tz -射影を受けた DR ゲージ QCD の模式図 (4次元時空全体)。各 tz 平面上で 2次元 QCD が成り立ち、その 2次元系が x, y 方向に無限個並列している。各 2次元系は近接的相互作用をする。

(b) tz -射影を受けた DR ゲージ QCD の模式図 ($x-y$ 平面へ射影)。2次元 QCD 系 (六角形) は t, z 方向 (紙面垂直方向) に広がり、 $x-y$ 平面内に敷き詰められている。各 2次元 QCD 系は ξ 程度の広がりを持つと考えられる。

図 4.3: tz -射影を受けた DR ゲージ QCD の模式図。2次元 QCD 系が成立する tz 平面が x, y 方向に無限個並列しており、各 2次元系が近接的相互作用をするという様式で記述できるかもしれない。

という関数 $R_{\text{DR}}^{\text{lat}}$ を最大化するゲージとして定義される。これは連続極限では式 (4.1) の R_{DR} の最小化と同義である。実際、連続極限 $a \rightarrow 0$ の近似の下では

$$U_{\mu}(s) = e^{iagA_{\mu}(s)} \simeq 1 + iagA_{\mu}(s) - \frac{1}{2}a^2g^2A_{\mu}^2(s) + O(a^3) \quad (4.16)$$

であり、従って

$$R_{\text{DR}}^{\text{lat}} \simeq -\frac{1}{2}a^2g^2 \sum_s \sum_{\perp=x,y} \text{ReTr} [U_{\perp}(s)] + \text{real const.} \quad (4.17)$$

となるので、この $R_{\text{DR}}^{\text{lat}}$ の最大化は、連続時空での R_{DR} の最小化に対応する。

次に格子上での局所的な DR ゲージ固定条件を導出する。連続時空での議論と同様に、格子上でも既にゲージ固定が完了しているリンク変数 (ゲージ場) の配位を考える。1点 s でのみ無限小のゲージ変換を考えると関数 $R_{\text{DR}}^{\text{lat}}$ の変化分 $\delta R_{\text{DR}}^{\text{lat}}$ は

$$\begin{aligned} \delta R_{\text{DR}}^{\text{lat}} &= \sum_{\perp=x,y} \text{ReTr} [\Omega(s)U_{\perp}(s) + U_{\perp}(s-a_{\perp})\Omega^{\dagger}(s)] - (\Omega(s) = 1) \\ &= \text{ReTr} \left[\Omega(s) \sum_{\perp=x,y} \left\{ U_{\perp}(s) + U_{\perp}^{\dagger}(s-a_{\perp}) \right\} \right] - (\Omega(s) = 1) \end{aligned} \quad (4.18)$$

となる。ここで a_\perp は格子間隔 a の長さをもつ \perp 方向 (x, y 方向) のベクトルである。

$\Omega(s)$ は格子上でも無限小のパラメーター ω^a を用いて式 (4.4) のように表され、リンク変数は $U_\perp(s) = \exp[iagA_\perp(s)]$ と書かれるので、連続極限 $a \rightarrow 0$ で式 (4.18) は

$$\begin{aligned} \delta R_{\text{DR}}^{\text{lat}} &= -ag \text{ReTr} \left[\omega^b T^b \sum_{\perp=x,y} (A_\perp(s) - A_\perp(s - a_\perp)) + O(a^2) \right] \\ &= -ag \text{ReTr} \left[\omega^b T^b \sum_{\perp=x,y} (\partial_\perp A_\perp(s)) + O(a^2) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

となる。1 行目から 2 行目へは前方差分を用いた。これが任意の ω^a で成立するので、格子上での局所的な DR ゲージ固定条件は

$$\sum_{\perp=x,y} \partial_\perp A_\perp(s) = 0 \quad (\partial_\perp \text{ は前方差分}) \quad (4.20)$$

となる。前方差分は連続極限で微分と一致するため、格子上での DR ゲージの定義は連続時空での定義と整合している。

4.5.2 格子上での tz -射影

格子上での tz -射影を考える。

連続時空での tz -射影は式 (4.13) で定義されるように

$$A_{x,y} \rightarrow 0 \quad (\text{DR ゲージ固定後})$$

である。リンク変数は $U_\mu(s) = \exp[iagA_\mu(s)]$ と書かれるので、格子上での tz -射影は

$$U_{x,y} \rightarrow 1 \quad (\text{DR ゲージ固定後}) \quad (4.21)$$

で定義される。

ただし、格子上での tz -射影は、格子 QCD で生成した各ゲージ配位を DR ゲージ固定した後、それらのゲージ配位に対して式 (4.21) の射影操作を施すという形で実行される。

tz -射影後のブラケット作用

4.4 節で見た tz -射影をされた後の作用 (4.14) は

$$S_{\text{DR}}^{tz} = \int dx dy \int dt dz \left[\text{Tr} G_{tz}^2 + \sum_{\perp=1}^2 \text{Tr} \left\{ -(\partial_\perp A_t)^2 + (\partial_\perp A_z)^2 \right\} \right]$$

であった。この作用のうち、第 1 項は t, z 方向に広がる 2 次元ゲージ理論の作用であり、第 2 項は x, y 方向に並列する 2 次元ゲージ系の近接的相互作用と見なせることを述べた。

第 2 項の相互作用は DR ゲージ QCD が 2 次元 QCD とどの程度ずれているかを与える項であり、後で格子 QCD 計算を用いてその効果などを評価をする。そのために、 tz -射影後の作用を格子上でも求める。

格子上の作用（プラケット作用）は

$$S^{\text{Plaq}} \equiv \beta \sum_s \left[1 - \frac{1}{N_c} \sum_{\mu < \nu} \text{ReTr} P_{\mu\nu}(s) \right]$$

である。このプラケット作用に格子上の tz -射影 (4.21) を施すと

$$S_{DR}^{\text{Plaq}, tz} = \beta \sum_s \left[\left\{ 1 - \frac{1}{N_c} \text{ReTr} P_{tz}(s) \right\} + \sum_{\mu=t,z} \left\{ 1 - \frac{1}{N_c} \sum_{\perp=x,y} \text{ReTr} [U_{\mu}(s) U_{\mu}^{\dagger}(s + a_{\perp})] \right\} \right] \quad (4.22)$$

となる。これが tz -射影後のプラケット作用である。

連続時空での議論と同様に、第 1 項は t - z 平面内の 2 次元 QCD 作用と等しく、第 2 項は x, y 方向に並列する 2 次元 QCD 系間の相互作用に対応すると解釈される。

特に第 2 項の表式は 2 次元 QCD 系間の相互作用のリンク変数を用いた表現であり、以下で紹介する格子 QCD 計算では関連する量を計算する。

4.6 格子 QCD 計算を用いた DR ゲージ QCD の解析

本節では格子 QCD 計算を用いた DR ゲージでの QCD の解析結果を述べる。

4.3 節および 4.5 での議論を踏まえ、格子 QCD を用いて DR ゲージでのリンク変数 $U_{\mu}(s)$ について 3 つの項目

1. リンク変数の局所的性質: リンク変数と単位行列の距離
2. DR ゲージ QCD で tz -射影を行った後の Wilson loop およびクォーク・ポテンシャル
3. リンク変数 U_t 間の \perp 方向 (x, y 方向) の相関

に関して計算を行った。

本研究で用いたリンク変数の配位は、プラケット作用を用いた SU(3) 格子 QCD モンテカルロ計算をクエンチ近似で行い生成した。生成した配位のサイト数は $V = 24^4$ 、

格子パラメーターは $\beta = 6.0$ とした。この β に対する格子間隔 a は string tension $\sigma = 0.89 \text{ GeV/fm}$ を再現するように決定され、その値は $a = 0.10 \text{ fm}$ であると算出されている [18]。

アルゴリズムとしては擬熱浴法 [12] を採用した。熱化時間は $N_{\text{thermal}} = 20000 \text{ sweeps}$ 、サンプリング間隔は $N_{\text{sep}} = 1000 \text{ sweep}$ とし、リンク変数の配位を 800 個生成した。

DR ゲージ固定は上記の関数 $R_{\text{DR}}^{\text{lat}}$ (式 (4.15) で定義) を最大化するようにゲージ変換関数の更新を行った (アルゴリズムの詳細については付録 C を参照)。その際、DR ゲージ固定の収束をチェックするため

$$\Delta_{\text{DR}}(s) \equiv \sum_{\perp=x,y} \partial_{\perp} A_{\perp}(s) \quad (4.23)$$

$$\epsilon_{\text{DR}} \equiv \frac{1}{N_c V} \sum_s \text{Tr} \left[\Delta_{\text{DR}}(s) \Delta_{\text{DR}}^{\dagger}(s) \right] \quad (4.24)$$

という量を定義し、 $\epsilon_{\text{DR}} < 10^{-12}$ を満たすまで更新処理を行った。

4.6.1 リンク変数の局所的性質: リンク変数と単位行列の距離

本小節では DR ゲージ固定の性質を調べるという目的で、リンク変数の局所的性質を調べた。具体的にはリンク変数と単位行列の距離を定義し計算し、ゲージ固定によりゲージ場がどのように変化したかを調べた。

まず $N \times N$ 行列 A, B の内積を

$$(A, B) \equiv \frac{1}{2N} \text{Tr} (A^{\dagger} B) = \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^* b_{ij} \in \mathbb{C} \quad (4.25)$$

と定義する ($1/2N$ は規格化因子)。この内積 (4.25) を用いて、 $N \times N$ 行列 A と B との距離 $d(A, B)$ を

$$d(A, B)^2 \equiv (A - B, A - B) = \frac{1}{2N} \text{Tr} [(A - B)^{\dagger} (A - B)] \quad (4.26)$$

と定義する。この距離 $d(A, B)^2$ は内積の定義 (4.25) から非負であり、 $d(A, B)^2 = 0$ が成立する必要十分条件は $A = B$ である。

この距離 d を用いるとリンク変数 U_{μ} と単位行列 I の距離の 2 乗 $d(U_{\mu}, I)^2$ は

$$d(U_{\mu}, I)^2 = \frac{1}{2N_c} \text{Tr} [(U_{\mu} - I)(U_{\mu} - I)^{\dagger}] = \frac{1}{2N_c} \sum_{i,j=1}^{N_c} |(U_{\mu} - I)_{ij}|^2 \quad (4.27)$$

で与えられる。

$d(U_\mu, I)^2$ はリンク変数 U_μ が $SU(N_c)$ に属するため

$$d(U_\mu, I)^2 = \frac{1}{2N_c} \text{Tr} (2I - U_\mu - U_\mu^\dagger) = 1 - \frac{1}{N_c} \text{ReTr} U_\mu \quad (4.28)$$

となる。ここで N_c が偶数であれば $U_\mu = -I$ を取ることができ、その時に $d(U_\mu, I)^2$ は最大値 2 を取る。一方で N_c が奇数の場合 $U_\mu = -I$ は取れないため、 $d(U_\mu, I)^2$ の最大値は N_c が偶数の時と異なる。 N_c が奇数の場合、 $d(U_\mu, I)^2$ の最大値を与えるのは U_μ が $-I$ に最も近くなる時であり（詳細は付録 E を参照）、結局、 $d(U_\mu, I)^2$ の値域は以下のようになる：

$$\begin{cases} 0 \leq d(U_\mu, I)^2 \leq 2 & (N_c: \text{even}) \\ 0 \leq d(U_\mu, I)^2 \leq 1 - \cos \frac{\pi(N_c-1)}{N_c} & (N_c: \text{odd}). \end{cases} \quad (4.29)$$

$d(U_\mu, I)^2$ の期待値を $SU(3)$ 格子 QCD で計算した結果が表 4.1 である（今の場合 $N_c = 3$ なので最大値は $3/2$ ）。ゲージ固定をしていない場合、 $d(U_\mu, I)^2 = 1$ は解析的に示すことができ（付録 E を参照）、事実数値計算でもそのようになっている。一方 DR ゲージ固定をした場合、 $d(U_\mu, I)^2 = 1$ の値は 0.076 という値になっており、1 と比べて 1 桁程度小さくなっている。従って、 $U_\mu = \exp[iagA_\mu]$ としたときの x, y 方向のゲージ場 A_x, A_y は、DR ゲージ固定で強く抑制されているということが分かった。

gauge	$\langle d(U_\mu, I)^2 \rangle$
No fixing	1.000
DR ($\perp = x, y$)	0.076
DR ($\mu = t, z$)	1.000

表 4.1: $d(U_\mu, I)^2$ の真空期待値。それぞれ 1 行目がゲージ固定無し、2 行目が DR ゲージでの $\perp = x, y$ 、3 行目が DR ゲージでの $\mu = t, z$ のときの値。

4.6.2 DR ゲージ QCD で tz -射影を行った後の Wilson loop およびクォーク・ポテンシャル

MA ゲージでは string tension などの物理量が Abelian dominance を示しており [36, 37]、低エネルギー領域では可換自由度が支配的である。

DR ゲージにおいては、その定義や $A_{x,y}$ が強く抑制されることから、 $A_{t,z}$ の自由度が支配的となる「 tz ドミナンス」とでもいうべき性質を示す可能性がある。我々は格子 QCD を用いて Wilson loop に関連する計算を行い、閉じ込め力である string tension について $A_{t,z}$ の自由度が支配的であるかを調べる。図 4.4 に我々が行った計算の概略を示す。

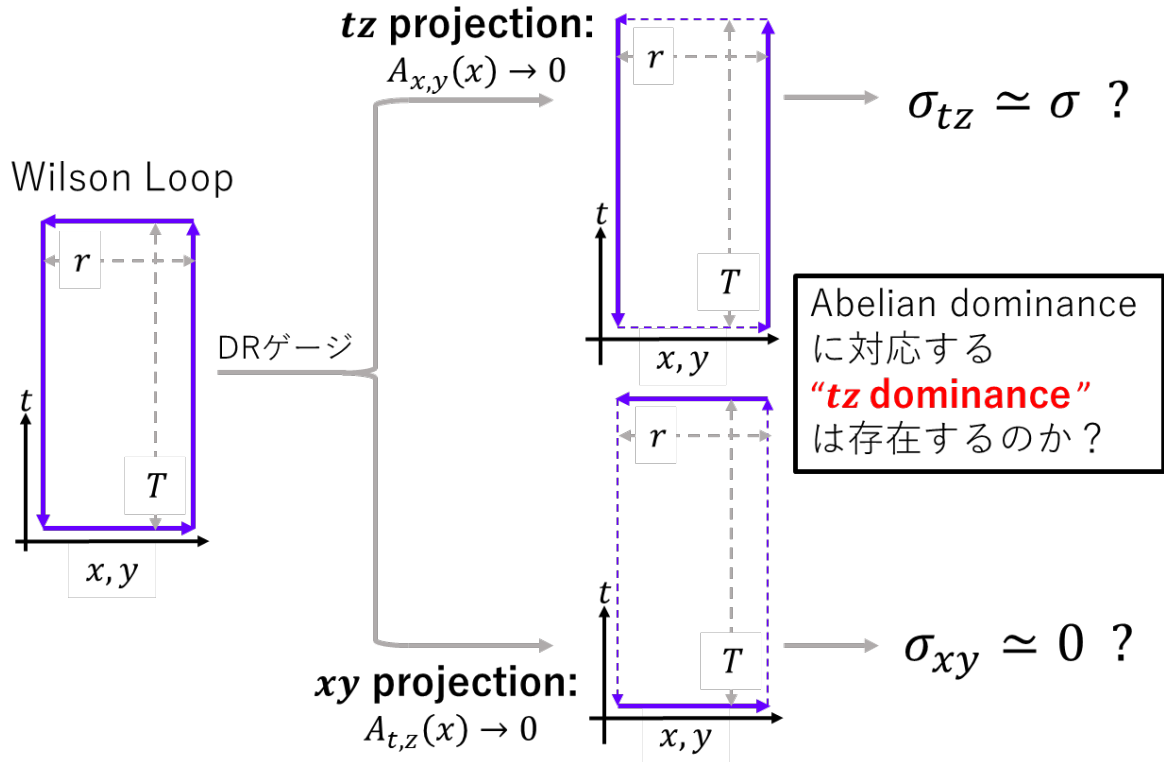


図 4.4: 本小節で行った研究の模式図。Wilson loop に tz -射影および xy -射影をしたとき、どちらが長距離の物理を担うのかを調べる。

我々は、先に導入した tz -射影の対となる操作として、 xy -射影という操作を次のように定義した：

$$A_{t,z} \rightarrow 0 \Leftrightarrow U_{t,z} \rightarrow 1 \quad (\text{DR ゲージ固定後}). \quad (4.30)$$

なお xy -射影も tz -射影と同様に、生成したゲージ配位を DR ゲージ固定した後、それらのゲージ配位に対して式 (4.30) を施すという形で実行するものとする。

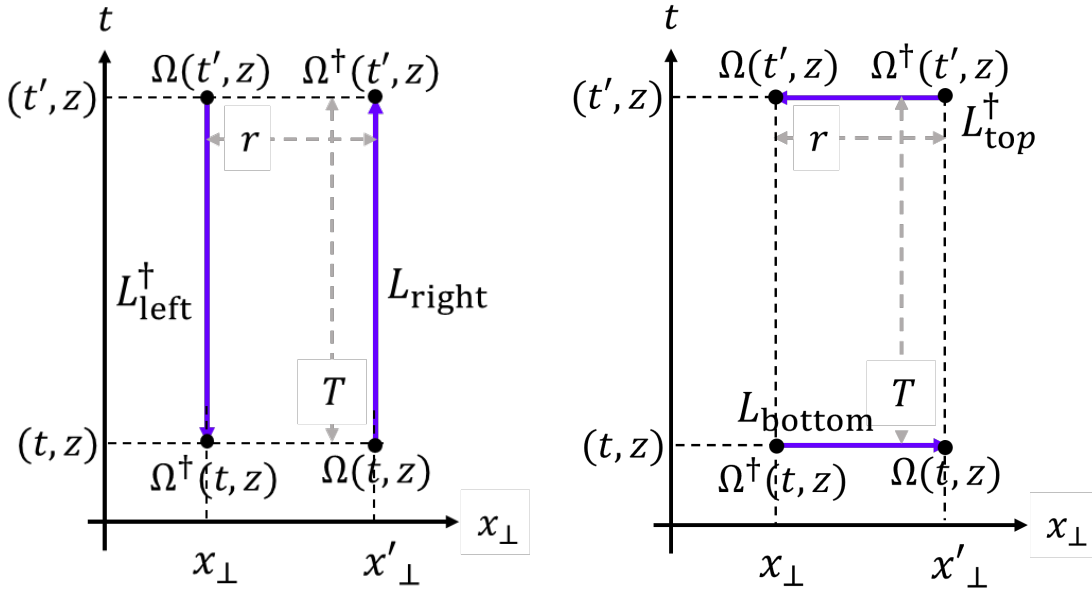
以下では、DR ゲージ QCD で tz -射影と xy -射影をそれぞれ Wilson loop に施したとき、そこから得られる string tension にどのような影響があるかを見る。

計算結果を見る前に、射影を受けた Wilson loop のゲージ不変性について論じる。

tz -射影および xy -射影は明らかにゲージ変換とは異なる操作であり、従ってゲージ不変性を壊し得るため、注意が必要である。本研究では DR ゲージ固定をしているが、先述し

たように (2次元 QCD と同じ) ゲージ自由度が残留するため、残留したゲージ自由度に関する不変性が鍵になる。

t - z 平面内の Wilson loop は x, y 方向のリンク変数を含まず、従って tz -射影で自明に不変であるので、ここでは t - \perp ($\perp = x, y$) 平面内の Wilson loop を考える。 tz -射影および xy -射影を受けた t - \perp ($\perp = x, y$) 平面内の Wilson loop は図 4.5 のようになる。



(a) tz -射影を受けた Wilson loop。左側・右側の Wilson line をそれぞれ $L_{\text{left}}^{\dagger}, L_{\text{right}}$ とする。

(b) xy -射影を受けた Wilson loop。上側・下側の Wilson line をそれぞれ $L_{\text{top}}^{\dagger}, L_{\text{bottom}}$ とする。

図 4.5: tz -射影を受けた Wilson loop (左) と xy -射影を受けた Wilson loop (右)。DR ゲージ固定後に残る 2 次元のゲージ自由度に対し、 tz -射影を受けた Wilson loop はゲージ不変だが、 xy -射影を受けた Wilson loop はゲージ不変でない。

まず tz -射影を受けた t - \perp ($\perp = x, y$) 平面内の Wilson loop $W_{t,\perp}^{tz}(r, T)$ から考える。

図 4.5a にある 2 本の Wilson line のうち、左側を $L_{\text{left}}^{\dagger}$ 、右側を L_{right} と簡単に表すと、 tz -射影を受けた Wilson loop は

$$W_{t,\perp}^{tz}(r, T) = \text{Tr} \left[L_{\text{left}}^{\dagger} L_{\text{right}} \right] \quad (4.31)$$

と表される。

残留した自由度に関するゲージ変換は図 4.5a のように

$$L_{\text{left}}^{\dagger} \rightarrow \Omega(t', z) L_{\text{left}}^{\dagger} \Omega^{\dagger}(t, z) \quad (4.32)$$

$$L_{\text{right}} \rightarrow \Omega(t, z) L_{\text{right}} \Omega^{\dagger}(t', z) \quad (4.33)$$

と変換する。この変換 (4.32),(4.33) を式 (4.31) に作用させると

$$\begin{aligned} W_{t,\perp}^{tz}(r, T) &\rightarrow \text{Tr} \left[\Omega(t', z) L_{\text{left}}^\dagger \Omega^\dagger(t, z) \Omega(t, z) L_{\text{right}} \Omega^\dagger(t', z) \right] \\ &= \text{Tr} \left[L_{\text{left}}^\dagger L_{\text{right}} \right] = W_{t,\perp}^{tz}(r, T) \end{aligned} \quad (4.34)$$

となり残留したゲージ自由度に対しゲージ不変である。

次に xy -射影を受けた Wilson loop について考える。図 4.5b にある 2 本の Wilson line のうち、上側を L_{top}^\dagger 、下側を L_{bottom} と表す。 xy -射影を受けた Wilson loop は

$$W_{t,\perp}^{xy}(r, T) = \text{Tr} \left[L_{\text{top}}^\dagger L_{\text{bottom}} \right] \quad (4.35)$$

と表され、Wilson line $L_{\text{top}}^\dagger, L_{\text{bottom}}$ のゲージ変換性は

$$L_{\text{top}}^\dagger \rightarrow \Omega(t', z) L_{\text{top}}^\dagger \Omega^\dagger(t', z) \quad (4.36)$$

$$L_{\text{bottom}} \rightarrow \Omega(t, z) L_{\text{bottom}} \Omega^\dagger(t, z) \quad (4.37)$$

であるので、 xy -射影を受けた Wilson loop は 2 次元のゲージ変換に対し

$$\begin{aligned} W_{t,\perp}^{xy}(r, T) &\rightarrow \text{Tr} \left[\Omega(t', z) L_{\text{top}}^\dagger \Omega^\dagger(t', z) \Omega(t, z) L_{\text{bottom}} \Omega^\dagger(t, z) \right] \\ &= \text{Tr} \left[\Omega^\dagger(t, z) \Omega(t', z) L_{\text{top}}^\dagger \Omega^\dagger(t', z) \Omega(t, z) L_{\text{bottom}} \right] \end{aligned} \quad (4.38)$$

となる。ここで

$$\tilde{\Omega} \equiv \Omega^\dagger(t, z) \Omega(t', z) \quad (4.39)$$

とし、 $L_{\text{top}}, L_{\text{bottom}} \in \text{SU}(N_c)$ より

$$L_{\text{top}} = L_{\text{top}}^0 1 + L_{\text{top}}^a T^a \quad (L_{\text{top}}^0, L_{\text{top}}^a \in \mathbb{C}) \quad (4.40)$$

$$L_{\text{bottom}} = L_{\text{bottom}}^0 1 + L_{\text{bottom}}^a T^a \quad (L_{\text{bottom}}^0, L_{\text{bottom}}^a \in \mathbb{C}) \quad (4.41)$$

と書けるので、式 (4.38) は

$$\begin{aligned} W_{t,\perp}^{xy}(r, T) &\rightarrow \text{Tr} \left[\tilde{\Omega} (L_{\text{top}}^{0*} 1 + L_{\text{top}}^{a*} T^a) \tilde{\Omega} (L_{\text{bottom}}^0 1 + L_{\text{bottom}}^b T^b) \right] \\ &= N_c L_{\text{top}}^{0*} L_{\text{bottom}}^0 + \text{Tr} \left[\tilde{\Omega} L_{\text{top}}^{a*} T^a \tilde{\Omega} L_{\text{bottom}}^b T^b \right] \end{aligned} \quad (4.42)$$

となる。ただし $\text{Tr} T^a = 0$ を用いた。第 1 項はゲージ変換関数がキャンセルしてゲージ不変になるが、第 2 項はゲージ変換関数のキャンセルは起こらずゲージ不変ではなく、従って xy -射影を受けた Wilson loop は残留したゲージ自由度に対しゲージ不変ではない。

Elitzur の定理よりゲージ不変でない量の真空期待値は 0 となるため、 xy -射影を受けた Wilson loop の真空期待値は 0 となるように思われる。しかしながら、式 (4.42) で $\tilde{\Omega}$ に関する群多様体上での平均を取ると第 2 項は消え

$$\langle W_{t,\perp}^{xy}(r, T) \rangle = N_c L_{\text{top}}^{0*} L_{\text{bottom}}^0 = \frac{1}{N_c} \left(\text{Tr} L_{\text{top}}^\dagger \text{Tr} L_{\text{bottom}} \right) \quad (4.43)$$

となり、 xy -射影を受けた Wilson loop の真空期待値 $\langle W_{t,\perp}^{xy}(r, T) \rangle$ は有限の値をとる。これは xy -射影を受けた Wilson loop は Elitzur の定理が暗黙に仮定している単独の既約表現という条件を満たしていないためである (付録 D)。

tz -射影を受けた Wilson loop の計算結果

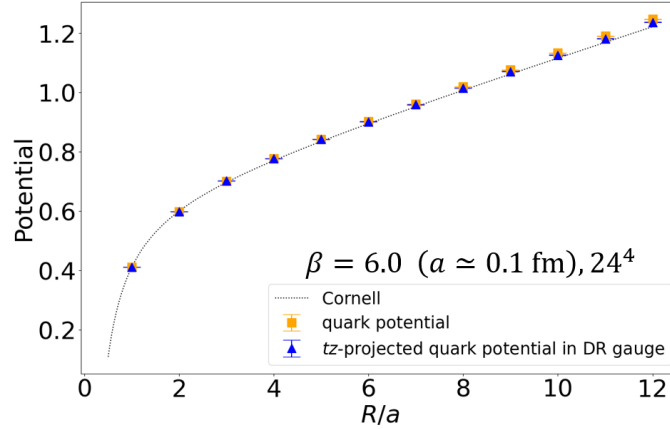


図 4.6: Wilson loop の真空期待値から求めた静的なクォーク-反クォーク間ポテンシャル (格子単位)。横軸 R/a はクォーク間距離 (格子単位) であり、Wilson loop の \perp 方向 (x, y 方向) の長さを表す。縦軸はポテンシャルの値 (格子単位) を表す。四角 (黄) が通常の Wilson loop のデータ、三角 (青) が DR ゲージ固定後に tz -射影を受けた Wilson loop のデータ、点線 (黒) は先行研究 [18] で計算されたクォーク-反クォーク間ポテンシャルのプロットである。

閉じ込め力 string tension を計算する目的で tz -射影を受けた Wilson loop から静的なクォーク-反クォーク間ポテンシャルを計算する。まず DR ゲージ固定後に tz -射影をしたゲージ配位で $t\perp$ ($\perp = x, y$) 平面内の Wilson loop $W_{t,\perp}^{tz}(r, T)$ の真空期待値 $\langle W_{t,\perp}^{tz}(r, T) \rangle$ を計算する。そして $\langle W_{t,\perp}^{tz}(r, T) \rangle$ から tz -射影後のポテンシャルを $V^{tz}(r)$ と

$$\langle W_{t,\perp}^{tz}(r, T) \rangle = A e^{-V^{tz}(r)T} \quad (4.44)$$

と定義し、 tz -射影後のポテンシャルを $V^{tz}(r)$ を

$$V^{tz}(r) = -\frac{1}{T} \ln \langle W_{t,\perp}^{tz}(r, T) \rangle \quad (4.45)$$

として求めた。

ポテンシャルの計算結果は図 4.6 のようになった。横軸 R/a は Wilson loop の \perp 方向 (x, y 方向) の長さであり、縦軸はポテンシャルの値である。四角 (黄) が通常の Wilson loop のデータ、三角 (青) が tz -射影を受けた Wilson loop のデータ、点線 (黒) が先行研究 [18] で得られた静的なクォーク-反クォーク間ポテンシャルのプロットである。

なお Wilson loop を計算する際、基底状態のポテンシャルを数値計算的に高精度かつ高効率で求めるため、空間方向のリンク変数 U_i ($i = x, y, z$) に対して、標準的な手法である「ゲージ不変な smearing」を行った。smearing のパラメーターは先行研究 [18] と同じものを使用している。

tz -射影をしても Wilson loop の振る舞いはほとんど変化せずに面積則、つまり線形ポテンシャルの存在を示し、図 4.6 から分かるように、ポテンシャルの線形部分の傾きは tz -射影にほぼ関係しないという結果が得られた。従って、クォーク閉じ込め力である string tension は tz -射影により変化しないということが示されている。

xy -射影の計算結果

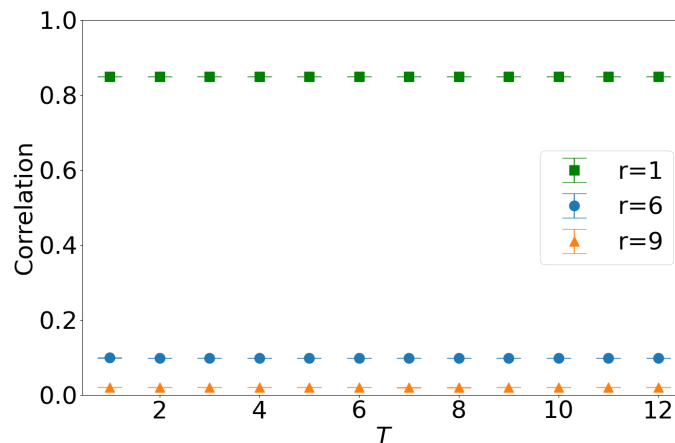


図 4.7: DR ゲージ固定後に xy -射影を受けた Wilson loop の真空期待値 $\langle W_{t,\perp}^{xy}(r, T) \rangle$ 。横軸 T は xy -射影を受けた Wilson loop の t 方向の長さ、縦軸は xy -射影を受けた Wilson loop の真空期待値。Wilson loop の \perp 方向 (x, y 方向) の長さを r と表したとき、四角 (緑) が $r = 1$ 、丸 (青) が $r = 5$ 、三角 (橙) が $r = 9$ 、のデータを表す。

DR ゲージ固定後に xy -射影を受けた Wilson loop の真空期待値 $\langle W_{t,\perp}^{xy}(r, T) \rangle$ の格子

QCD による計算結果を示す。

結果は図 4.7 のようになった。横軸 T は Wilson loop $\langle W_{t,\perp}^{xy}(r, T) \rangle$ の t 方向の長さ、縦軸は xy -射影を受けた Wilson loop の真空期待値である。Wilson loop の \perp 方向 (x, y 方向) の長さを r と表したとき、四角 (緑) が $r = 1$ 、丸 (青) が $r = 5$ 、三角 (橙) が $r = 9$ のデータを表す。

図 4.7 から分かるように、 xy -射影を受けた Wilson loop $\langle W_{t,\perp}^{xy}(r, T) \rangle$ は t 方向の長さ T に依存せず、定数のように振る舞っている：

$$\langle W_{t,\perp}^{xy}(r, T) \rangle = \text{const.} \quad (4.46)$$

T が十分大きいとき、 $\langle W_{t,\perp}^{xy}(r, T) \rangle$ はクォーク-反クォーク間ポテンシャルを $V^{xy}(r)$ として

$$\langle W_{t,\perp}^{xy}(r, T) \rangle \sim e^{-V^{xy}(r)T} \quad (T \rightarrow \infty) \quad (4.47)$$

と振る舞うので、図 4.7 の振る舞いは定数ポテンシャルを導く。さらにそのポテンシャルは

$$V^{xy}(r) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \langle W_{t,\perp}^{xy}(r, T) \rangle$$

と求まるので、この式に式 (4.46) を代入すると

$$V_{\perp}^{xy}(r) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{const.} = 0 \quad (4.48)$$

となり、ポテンシャルは 0 であると導かれる。よって xy -射影を受けた Wilson loop は DR ゲージではポテンシャルには寄与をしないという結果になる。

この結果は、DR ゲージにおいては $A_{x,y}$ の自由度は閉じ込めに対して主要ではないことを示唆しているように思われる。リンク変数および Wilson line は非可換であるから、図 4.4 のように Wilson loop を tz 部分と xy 部分に単純に分離することはできず、 xy 部分が Wilson loop の中で何らかの寄与はし得る。そのため Wilson loop の xy 部分が閉じ込め (面積則) に全く影響しないとは言えないが、上記の結果 (図 4.7) を踏まえると、その寄与は少なくとも主要なものではないと考えられる。

Wilson loop の計算のまとめ

上記の計算結果についてまとめる。

まず tz -射影を受けた Wilson loop については、ポテンシャルは図 4.6 が示すように、 tz -射影に関係なく線形ポテンシャルを導いた。また閉じ込め力 string tension は tz -射影

を受けても変化せず、従って閉じ込めの様相は、DR ゲージにおいては、 tz -射影に依存しないようである。

そして xy -射影を受けた Wilson loop については、図 4.7 から分かるように、 t 方向の長さ T に依存せず定数のように振る舞っており、ポテンシャルへの寄与は 0 であると計算される

これらの結果から、DR ゲージにおいては Wilson loop の tz 部分が閉じ込め（面積則）に主要な寄与をしており閉じ込め力である string tension をほぼ再現するが、一方 xy 部分の閉じ込めへの寄与は主要ではないと言えるだろう。

4.6.3 リンク変数 U_t 間の \perp 方向 (x, y 方向) の相関

ここまでの計算結果から、DR ゲージでは

- ゲージ場の $A_{x,y}$ 成分が強く抑制されている。
- 閉じ込めへの主要な寄与は $A_{t,z}$ 成分が与えらる (tz dominance)。

という性質が成り立っていることが確認された。次に、 tz -射影後の DR ゲージ QCD と純粋な 2 次元 QCD の差異を考える。

4.4 節での議論では、DR ゲージ QCD は「 t - z 平面内の 2 次元 QCD+2 次元 QCD 系の x, y 方向の近接的相互作用」という理論構造をしている可能性があるとして述べた。ここから、DR ゲージ QCD と 2 次元 QCD の差異の 1 つは「2 次元 QCD 系の x, y 方向の近接的相互作用」であるといえる。そこでこの x, y 方向に関する相互作用の性質を格子 QCD 計算で非摂動的に調べる。

4.5.2 節で tz -射影後のプラケット作用は、式 (4.14) で表されたように

$$S_{DR}^{\text{Plaq},tz} = \beta \sum_s \left[\left\{ 1 - \frac{1}{N_c} \text{ReTr} P_{tz}(s) \right\} + \sum_{\mu=t,z} \left\{ 1 - \frac{1}{N_c} \sum_{\perp=x,y} \text{ReTr} [U_\mu(s)U_\mu^\dagger(s+a_\perp)] \right\} \right]$$

であった。そして、この作用 (4.14) の第 2 項

$$\beta \sum_s \sum_{\mu=t,z} \left\{ 1 - \frac{1}{N_c} \sum_{\perp=x,y} \text{ReTr} [U_\mu(s)U_\mu^\dagger(s+a_\perp)] \right\} \quad (4.49)$$

が 2 次元 QCD の類似系間の x, y 方向の近接的相互作用を表していると解釈される。定

数項は重要でないので、式 (4.49) のうちリンク変数の積の部分

$$\frac{1}{N_c} \sum_{\perp=x,y} \text{ReTr} [U_\mu(s)U_\mu^\dagger(s+a_\perp)] \quad (4.50)$$

に着目する。この隣接相互作用 (4.50) は \perp 方向 (x, y 方向) に非自明な相関を与えると考えられる。これを考慮して、 \perp 方向 (x, y 方向) の相関

$$C(r) \equiv \frac{1}{N_c} \text{ReTr} \langle U_t(s)U_t^\dagger(s+ra_\perp) \rangle \quad (4.51)$$

を格子 QCD により計算した。なおゼロ温度では対称性により $\langle U_t(s)U_t^\dagger(s+ra_\perp) \rangle$ と $\langle U_z(s)U_z^\dagger(s+ra_\perp) \rangle$ は同じ結果を与える。

$C(r)$ は、ある t - z 平面上のリンク変数 $U_t(s)$ と、そこから \perp 方向 (x, y 方向) に r だけ離れた t - z 平面上のリンク変数 $U_t^\dagger(s+ra_\perp)$ の相関関数である (図 4.8)。

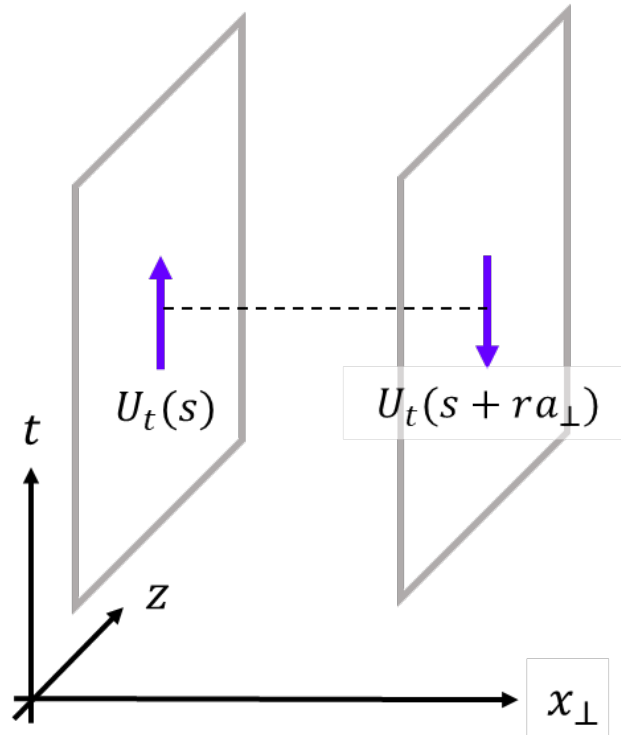


図 4.8: 相関関数 $C(r)$ の模式図。ある t - z 平面上のリンク変数 $U_t(s)$ と、そこから $\perp = x, y$ 方向に r だけ離れた t - z 平面上のリンク変数 $U_t^\dagger(s+ra_\perp)$ の相関を考える。

計算の結果、相関 $C(r)$ は図 4.9 のようになった。丸が格子 QCD の計算結果、点線が相関のデータを指数関数

$$f(r; m, A) = Ae^{-mr} \quad (4.52)$$

を用いて A, m をパラメーターとしてフィットしたものである。

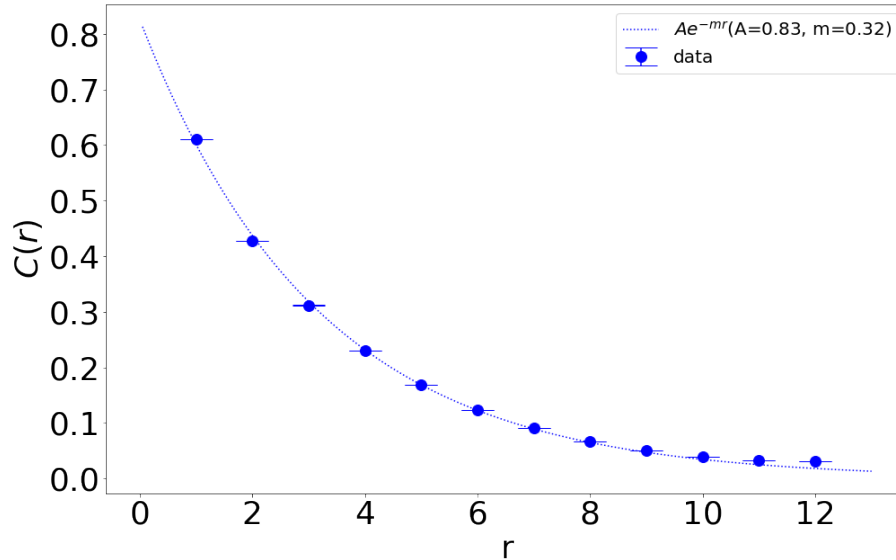


図 4.9: 2つの t - z 平面内にあるリンク変数同士の相関。横軸が2つの t - z 平面の距離 (格子単位)、縦軸が相関を表す。丸が格子 QCD による計算値。点線が指数関数での最適フィット曲線 (指数関数: $A \exp(-mr)$, $A \simeq 0.83$, $m \simeq 0.32$)。

フィットの結果、指数関数は格子 QCD の計算結果によく合い、各パラメーターの値は

$$A \simeq 0.83 \quad (4.53)$$

$$m \simeq 0.32/a \simeq 0.64 \text{ GeV} \quad (4.54)$$

であることが分かった。ただし $\beta = 6.0$ での格子上の $a = 0.1 \text{ fm}$ 、従って $a^{-1} \simeq 2.0 \text{ GeV}$ であることを用いた。

そして m の逆数で定義される相関長 ξ は

$$\xi \equiv \frac{1}{m} \simeq 0.31 \text{ fm} \quad (4.55)$$

であると計算される。

まとめると、ある t - z 平面上のリンク変数 $\{U_{t,z}(s)\}$ と \perp 方向 (x, y 方向) に r だけ離れた t - z 平面上のリンク変数 $\{U_{t,z}(s + ra_{\perp})\}$ の相関は指数関数的に減衰し、その相関長は $\xi \simeq 0.31 \text{ fm}$ であるということが分かった。

この結果は DR ゲージではゲージ場の x, y 方向の伝播は強く制限され、 x, y 方向について massive になっていることを示唆している。一方、 t, z 方向に関してはゲージ自由度が残るため massless であると考えられる。これは物性物理で近年注目を集めている「フラクトン」と似た性質であり、何かしらの関係が背後に潜んでいるのかもしれない。

以上の結果を踏まえた上で大雑把に考えれば、理論のスケールを ξ よりも十分大きくすることで、4次元の DR ゲージ QCD 系は相互作用の無い 2次元 QCD 系の集まりと見なせるかもしれない。実際には相関は図 4.9 のように指数関数的な減衰を示すため、この見方は非常に粗い近似と言わざるを得ないが、4次元 QCD に対して低次元化というアプローチを取る場合には有用な考え方であると思われる。

4.6.4 理論の単純化： t - z 平面間相互作用の第 0 近似

前節の終わりで「理論のスケールを ξ よりも十分大きくして 4次元の DR ゲージ QCD 系は相互作用の無い 2次元 QCD 系の集まりと見なす」というアイデアを提示した。

このアイデアは非常に粗い近似ではあるが、一考の余地があると思われる。そこで、大胆な理想化としてリンク変数の相関 $C(r)$ を図 4.10 のように

$$C(r) = \theta(\xi - r) = \begin{cases} 1 & (r < \xi) \\ 0 & (r > \xi) \end{cases} \quad (4.56)$$

と単純化することを考えてみる。

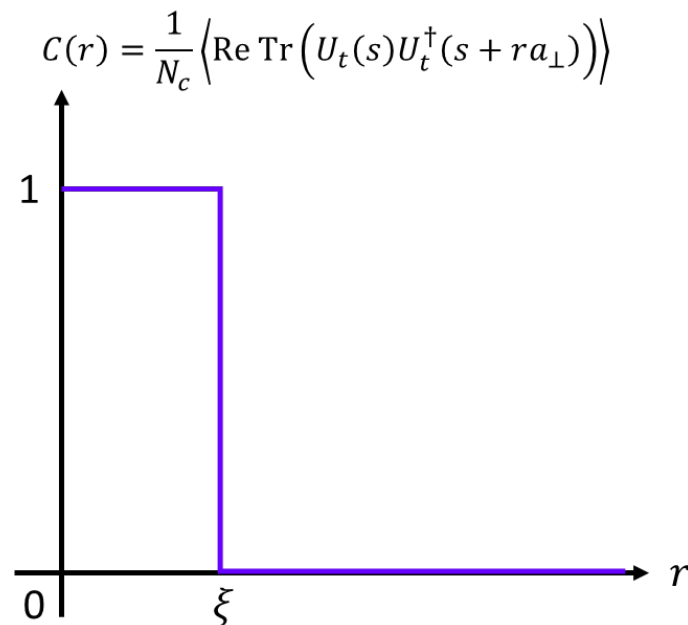


図 4.10: 図 4.9 の \perp 方向 (x, y 方向) の相関 $C(r)$ の単純化。

DR ゲージ QCD ではゲージ固定により $A_{t,z}$ と $A_{x,y}$ は同等ではないため、経路積分中

では有効作用

$$S_{\text{eff}} = \int dt dz \int dx dy \mathcal{L}_{\text{eff}} [A_{\mu}(t, z, x, y), A_{\perp}] \quad (4.57)$$

で書くことにする。

4.6.2 節の計算結果から、 $A_{x,y}$ は閉じ込め力である string tension、つまり低エネルギーの物理にほとんど寄与しないと考えられるため、議論を低エネルギー領域に限定すれば有効作用 (4.57) を

$$S_{\text{eff}}^{\text{IR}} \simeq \int dt dz \int dx dy \mathcal{L}_{\text{eff}} [A_{\mu}(t, z, x, y), A_{\perp} \simeq 0] \quad (4.58)$$

と近似できるかもしれない。

ここで図 4.10 即ち式 (4.56) の近似を適用する。この近似の下では

- $r < \xi$ では $C(r) = 1$
 \Rightarrow \perp 方向 (x, y 方向) に r だけ離れた 2 つのリンク変数 $\{U_{t,z}(s)\}, \{U_{t,z}(s + ra_{\perp})\}$ は完全に同一。
- $r > \xi$ では $C(r) = 0$
 \Rightarrow \perp 方向 (x, y 方向) に r だけ離れた 2 つのリンク変数 $\{U_{t,z}(s)\}, \{U_{t,z}(s + ra_{\perp})\}$ は完全に無相関。

となる。従って、この大胆な近似をした DR ゲージ QCD は、図 4.11 のように「 \perp 方向 (x, y 方向) に ξ 程度の広がりを持つ t - z レイヤーが並列し、各レイヤー内ではゲージ場 $A_{t,z}$ は \perp 方向 (x, y 方向) に一様だが異なるレイヤー間では独立かつ無相関」という理論構造になっていると考えられる。

近似を適用する前の図 4.3a の t - z 平面は実数 (x, y) でラベルされるが、近似をした後の図 4.11 のレイヤーは離散的であるから整数 (m, n) でラベルされる。1 つのレイヤー内ではゲージ場は \perp 方向 (x, y 方向) に一様であることを踏まえると、 $A_{\mu}(t, z, x, y)$ ($\mu = t, z$) は

$$A_{\mu}(t, z, x, y) \rightarrow A_{\mu}(t, z; m\xi, n\xi) \equiv A_{\mu}^N(t, z) \quad (4.59)$$

と表すことができる。この $A_{\mu}^N(t, z)$ は

- 同じ $N = (m, n)$ のレイヤーでは同じ値で t, z のみの関数
- 異なる $N = (m, n)$ のレイヤーでは独立かつ無相関

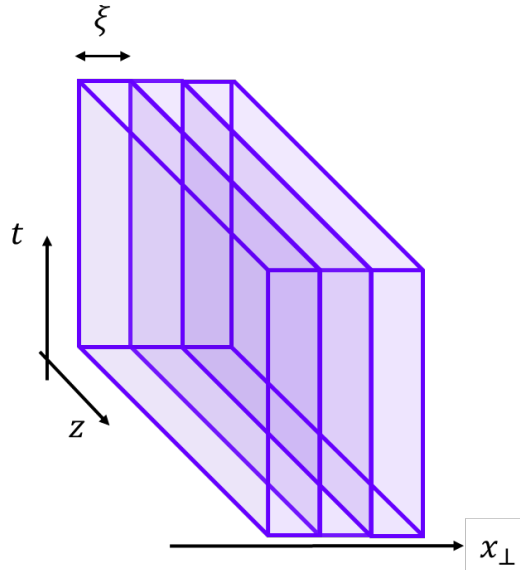


図 4.11: 図 4.10 即ち式 (4.56) の理想化を受けた DR ゲージ QCD の模式図。⊥方向 (x, y 方向) に ξ 程度の広がりを持つ t - z レイヤー内では、ゲージ場 $A_{t,z}$ は⊥方向 (x, y 方向) に一様になっており、異なるレイヤー間ではゲージ場は独立かつ無相関である。

であるから、有効作用 (4.58) の x, y に関する積分は m, n についての和になり

$$S_{\text{eff}}^{\text{IR}} \simeq \sum_{N=(m,n)} \xi^2 \int dt dz \mathcal{L}_{\text{eff}} [A_{\mu}^N(t, z)] \quad (4.60)$$

となる。

この式 (4.60) は、 x, y 座標の依存性を $N = (m, n)$ を通じて内部自由度のようにみなし、理論を 2 次元のゲージ場 $A_{\mu}^N(t, z)$ で記述している。つまり「4 次元の DR ゲージ QCD が内部自由度 $N = (m, n)$ を持つ 2 次元ゲージ理論として記述される」ということを表している (図 4.12)。

有効作用 (4.60) を tree level で考えてみる。

相関長 ξ をゲージ場 $A_{\mu}^N(t, z)$ に吸収させて、ゲージ場を

$$\mathcal{A}_{\mu}^N(t, z) \equiv \xi A_{\mu}^N(t, z) \quad (4.61)$$

と再定義する。これに伴い、ゲージ場の強さ $G_{\mu\nu}^N$ と結合定数 \mathfrak{g} を

$$G_{\mu\nu}^N \equiv \partial_{\mu} \mathcal{A}_{\nu}^N - \partial_{\nu} \mathcal{A}_{\mu}^N + i\mathfrak{g} [\mathcal{A}_{\mu}^N, \mathcal{A}_{\nu}^N] \quad (4.62)$$

$$\mathfrak{g} \equiv \frac{g}{\xi} = mg \quad (4.63)$$

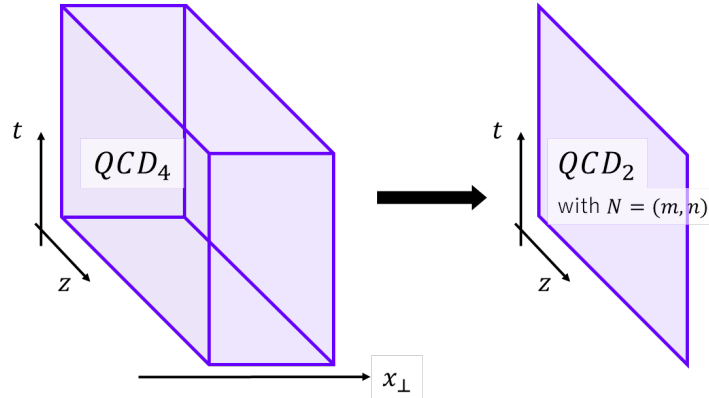


図 4.12: 大胆な近似の下での 4 次元の DR ゲージ QCD と内部自由度を持つ 2 次元 QCD の関係図。

と再定義する。

この場の強さ (4.62) を用いると、tree level の有効作用は

$$S_{\text{eff, tree}}^{\text{IR}} = \int dt dz \sum_N \frac{1}{2} \text{Tr} [\mathcal{G}_{\mu\nu}^N \mathcal{G}_{\mu\nu}^N] = \int dt dz \frac{1}{4} \delta_{NM} \mathcal{G}_{\mu\nu}^{a,N} \mathcal{G}_{\mu\nu}^{a,M} \quad (4.64)$$

と書ける。ここで μ, ν は t, z のみをとる 2 次元時空の添え字であり、 a はカラー自由度である。内部自由度 N, M についても重複した場合は縮約を取るものとする。右辺は内部自由度 N, M の結合を考えた表式であり、 N, M は $N = M$ のときのみ、つまり δ_{MN} を通して結合するというを表している。

結合定数が式 (4.63) を通じて次元を持つ。

2 次元の QCD は結合定数が質量次元を持つため、スケールを定める必要があるが、今回の場合は 4.6.3 節で得られた相関長 ξ 、あるいはその逆数である $m = \xi^{-1}$ がそのスケールになる。

最後に、2 次元の有効作用 (4.64) を用いて静的なクォーク-反クォーク間ポテンシャルを計算してみよう。

生成汎関数は

$$\begin{aligned} Z_{\text{tree}}^{2d} &= \int \mathcal{D}\mathcal{A} \exp \left[- \int dt dz \left(\frac{1}{4} \delta_{NM} \mathcal{G}_{\mu\nu}^{a,N} \mathcal{G}_{\mu\nu}^{a,M} + J_{\mu}^{a,N} \mathcal{A}_{\mu}^{a,N} \right) \right] \\ &= \int \mathcal{D}\mathcal{A} \exp \left[- \int dt dz \left(\frac{1}{4} \mathcal{A}_{\mu}^{a,N} D_{\mu\nu}^{ab} \delta_{NM} \mathcal{A}_{\mu}^{b,M} + J_{\mu}^{a,N} \mathcal{A}_{\mu}^{a,N} + \dots \right) \right] \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$D_{\mu\nu}^{ab} \equiv (-\partial^2 \delta_{\mu\nu} + \partial_{\mu} \partial_{\nu}) \delta^{ab} \quad (4.66)$$

と書ける。ここでカレント $J_{\mu}^{a,N}$ を導入し、ゲージ場と式 (4.65) のように結合させた。

簡単のため tree level でのカレント相関、そしてポテンシャルを導出してみる。そして付録 B のように $J_\mu^{a,N}$ のガウシアン形式に書き換えることを考える。そのためには $D_{\mu\nu}^{ab}$ の逆を定義する必要があるが、今の場合 2 次元のゲージ自由度が残るため、2 次元でのランダウ・ゲージ

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \quad (\mu = t, z) \quad (4.67)$$

を取ることにする。すると $D_{\mu\nu}^{ab}$ の逆演算子 $D_{\mu\nu}^{-1 ab}$ は運動量空間で

$$D_{\mu\nu}^{-1 ab}(p) = \frac{1}{p^2} \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \quad (4.68)$$

となる。

以上のことを踏まえ計算を進めると、生成汎関数は

$$Z_{\text{tree}}^{2d} \propto \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^2x d^2y J_\mu^{a,N} \left(\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{\delta_{\mu\nu}}{p^2} e^{ip(x-y)} \right) J_\nu^{b,N} \right] \quad (4.69)$$

となる。なお式 (4.69) の導出では、カレント $J_\mu^{a,N}$ の保存則 $\partial_\mu J_\mu^{a,N} = 0$ から、カレント $J_\mu^{a,N}$ のフーリエ変換を $\tilde{J}_\mu^{a,N}$ とすると、運動量空間で

$$p_\mu \tilde{J}_\mu^{a,N} = 0 \quad (4.70)$$

となることを用いた。

ここで $J_\mu^{a,N}$ として、クォークが $z = z_1$ 、反クォークが $z = z_2$ にそれぞれあり静止している系のカレントを考える。内部自由度 N はもともと x, y 座標であったから、静止している粒子を考える場合 N はある値 N_0 を取り続ける。従って、この系のカレントは

$$J_\mu^{a,N} = \mathfrak{g} [\delta(z - z_1) - \delta(z - z_2)] \delta_{\mu 0} \delta^{NN_0} T^a \quad (4.71)$$

となる。

これを式 (4.69) に代入し計算を進めると

$$Z_{\text{tree}}^{2d} \propto \exp \left[-\frac{\mathfrak{g}^2}{2} C_2 \delta^{N_0 M_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\pi} \frac{1}{p^2} (1 - \cos(pr)) \right) \right] \quad (4.72)$$

と書ける。ただし C_2 は $SU(N_c)$ のカシミア演算子であり、 $r = |z_1 - z_2|$ である。 $\delta^{N_0 M_0}$ は、この大雑把な近似では異なるレイヤーにある粒子間には相互作用が働かないことを意味している。

生成汎関数と有効ポテンシャル V_{eff} の関係性は (ユークリッド時空では)

$$Z \sim \exp \left[-\int dt V_{\text{eff}} \right] \quad (4.73)$$

であるから、有効作用 (4.64) から導かれる tree level でのポテンシャル $V_{\text{tree}}(r)$ は

$$\begin{aligned} V_{\text{tree}}(r) &= \frac{g^2}{2} C_2 \delta^{N_0 M_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1\pi} \frac{1}{p^2} (1 - \cos pr) \\ &= \frac{g^2}{2} C_2 \delta^{N_0 M_0} r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{\pi} \frac{1}{\theta^2} (1 - \cos \theta) \quad (\theta \equiv pr) \end{aligned} \quad (4.74)$$

と求まる。 p の積分を $\theta = pr$ の積分に置き換えたときに r という因子が生じ、ポテンシャルは r に比例する。つまり線形ポテンシャルである。この線形性は時空が 2 次元であることに由来する性質である。

この積分を $N_c = 3$ のときに具体的に実行すると、クォーク間ポテンシャルは

$$V_{\text{tree}}(r) = \frac{g^2}{2} \frac{4}{3} \delta^{N_0 M_0} r \quad (4.75)$$

となる。

同じレイヤー内 ($N_0 = M_0$) の t - z 平面内のポテンシャルについては、 $\beta = 6/g^2 = 6.0 \Rightarrow g = 1.0$ で $\xi = 0.31 \text{ fm}$ を用いると

$$g \simeq 0.64 \text{ GeV} \quad (4.76)$$

となるので、これを式 (4.75) に代入すると、ポテンシャルの値は

$$V_{\text{tree}}(r) = \sigma_{2D} r \quad (4.77)$$

$$\sigma_{2D} \simeq 1.4 \text{ GeV/fm} \quad (4.78)$$

となる。

QCD における string tension σ の実際の値は

$$\sigma \simeq 0.89 \text{ GeV/fm} \quad (4.79)$$

なので、式 (4.78) の値はオーダーは合っている。

上記の議論は \perp 方向 (x, y 方向) のゲージ場を無視している点で精密なものではない。有効作用も tree level で考えているので、量子効果が入っていない。そのため、上記の計算はあくまでも試算的なものであるということに注意されたい。

\perp 方向 (x, y 方向) のポテンシャルは Wilson loop から計算される。今の場合、 tz -射影後に式 (4.56) の近似をするため、図 4.5a のような Wilson loop を計算すればよい。

式 (4.56) による近似のため、計算は非常に簡単である。 $L_{\text{left}}, L_{\text{right}}$ が同じレイヤー内にある場合

$$L_{\text{left}} = L_{\text{right}}$$

となるので、Wilson loop は

$$W_{t,\perp}^{tz}(r, T) = \text{Tr} \left[L_{\text{left}}^\dagger L_{\text{right}} \right] = \text{const.}$$

となる。

一方、 $L_{\text{left}}, L_{\text{right}}$ が異なるレイヤーにそれぞれ存在する場合、リンク変数は無相関なので、 L_{left} と L_{right} も無相関である。従って、この場合の Wilson loop の真空期待値は

$$\langle W_{t,\perp}^{tz}(r, T) \rangle = \langle \text{Tr} \left[L_{\text{left}}^\dagger L_{\text{right}} \right] \rangle = 0$$

となる。

まとめると、図 4.10 即ち式 (4.56) の近似の下では、 t - \perp 面内の Wilson loop の真空期待値は

$$\langle W_{t,\perp}^{tz}(r, T) \rangle = \begin{cases} \text{const.} & (r < \xi) \\ 0 & (r > \xi) \end{cases} \quad (4.80)$$

となる。これから導かれる \perp 方向 (x, y 方向) のポテンシャルは

$$V(r) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln (\langle W_{t,\perp}^{tz}(r, T) \rangle) = \begin{cases} 0 & (r < \xi) \\ \infty & (r > \xi) \end{cases} \quad (4.81)$$

となる。従って、DR ゲージ QCD を図 4.10 即ち式 (4.56) の近似の下で考えると、 x, y 方向に凄まじい閉じ込めが生じるともいえる。

実際には、相関は図 4.9 のように指数関数的に減衰するため、 x, y 方向のポテンシャルは式 (4.81) に比べ、もう少しマイルドになると考えられる。

第 5 章

まとめと展望

我々はクォーク閉じ込めにおいて重要なフラックス・チューブ形成や、2次元 QCD の解析的取り扱いのしやすさを動機の 1 つとして、4次元 QCD の低次元性質の解析という目的で研究を行った。具体的な手法として、ゲージ自由度を利用して 4次元 QCD の低次元性自由度を強調するような「Dimensional Reduction (DR) ゲージ」という新しいゲージ固定条件を考案した。そして、DR ゲージ固定をした QCD の特性を、動的なフェルミオンの自由度を無視するクエンチ近似を用いて、解析的および数値的に調べた。数値的手法は SU(3) 格子 QCD 計算を用いた。その結果、以下の結論を得た。

まず DR ゲージではゲージ場の x, y 方向成分 A_x, A_y が抑制されるため、それらを格子 QCD のゲージ配位から取り除く「 tz -射影」を考え、それによりクォーク間ポテンシャルが受ける影響を調べた。その結果、DR ゲージではクォーク間ポテンシャルは tz -射影で変化せず、ゲージ場の 2次元性自由度 A_t, A_z のみで再現されることが分かり、 tz dominance、即ち「長距離の物理量が 2次元性自由度のみで再現できる」という可能性が示唆された。

次に解析的な議論からは、DR ゲージで tz -射影をした 4次元 QCD は「 t - z 平面上の 2次元 QCD の類似系 + 類似系間の x, y 方向の近接的相互作用」と捉えられる、つまり「 x, y 方向に近接的相互作用をする 2次元 QCD の類似系のアンサンブル」という描像が得られた。

そしてその描像に現れる 2次元 QCD の類似系間の相関を格子 QCD を用いて調べた。結果、2次元 QCD の類似系間には $\exp(-mr)$ [$m \simeq 0.6$ GeV] という指数関数的に減衰する相関がみられ、従って 2次元 QCD の類似系間の相関長は $\xi \equiv 1/m \simeq 0.3$ fm となることが分かった。

最後に、この $\xi \simeq 0.3$ fm 以上で 2次元 QCD 系間の相関が θ 関数的に切れるという非

常に大まかな近似の下では、4次元 QCD が「結合定数 $g_2 \equiv gm$ の 2次元 QCD 系」のアンサンブルとして記述できる可能性を指摘した。

これらの結果は、4次元の (DR ゲージ固定をした) QCD と 2次元 QCD の対応を仄めかすものであるように思える。特に 4次元の DR ゲージ QCD と 2次元 QCD の関係はホログラフとホログラムの関係に類似しており、4次元の DR ゲージ QCD をホログラフ、内部自由度をもつ 2次元のゲージ理論をホログラムとするような対応関係があるのかもしれない。

高次元の理論と低次元の物理が結び付ける物理はいくつか存在し、ランダムな磁場をかけた d 次元スピン系と磁場の無い $d-2$ 次元スピン系が等価となる「Parisi-Sourlas 機構 [46]」はその一例といえる。

また d 次元の重力理論と $d-1$ 次元の共形場理論 (Conformal Field Theory, CFT) が等価であることを主張する「AdS/CFT 対応」も異なる次元の物理を結ぶ対応関係の一例である。AdS/CFT 対応からは、QCD に類似した理論であるホログラフィック QCD が導かれているが、今回の研究はそれとはまた別の角度から高次元と低次元の対応を与える QCD 理論になるのかもしれない。

今後の展望として、クォークを含む full QCD での議論・計算が考えられる。閉じ込めはカイラル対称性の自発的破れと密接に関係していると考えられており、full QCD で tz dominance が存在するのかを確かめたい。また、DR ゲージではゲージ場の t, z 方向成分 A_t, A_z の x, y 方向への伝播が抑制されているが、クォークは運動方向の制限を受けないと考えられ、DR ゲージの full QCD は各 $t-z$ 平面上に束縛されたゲージ場とそれらの $t-z$ 平面間を飛び交うクォークという描像になるのかもしれない。これはグラフェンとの類似性があり、グラフェンは電子が平面上に束縛され光子が平面間を飛び交うという物理系である。従って、DR ゲージの full QCD はグラフェンのボソン・フェルミオンを入れ替えた物理系として捉えられる可能性があり、理論的に面白いかもしれない。

また、有限温度への拡張は容易かつ重要である。QCD は一定以上の温度で閉じ込めを示さなくなるが、DR ゲージ QCD では A_t, A_z が閉じ込めに主要な寄与を果たしていたため、温度を上げた場合それがどのようなようになるかは興味深い。

今回の研究では、 tz -射影を考えたが、これにより x, y 方向のゲージ場 A_x, A_y は取り除かれるため、 z 方向のカラー磁場は存在しなくなる。カラー磁場はハドロン質量と関係しており、核子 N-デルタ・バリオン Δ 間の質量差はカラー磁場によって生じるとされているため、カラー磁場によるハドロン質量への寄与が DR ゲージおよび tz -射影によってどのような影響を受けるのかはハドロン質量の起源を探るにあたって重要であると考えられる。

そして挑戦的ではあるが、4.6.3 節で示した相関を再現するような 2 次元 QCD の集合を上手く張り合わせて 2 次元 QCD から 4 次元の DR ゲージ QCD を再構築できるかということも調べてみたいと考えている。解析的には、4.6.4 節での相関関数の近似を単一の階段関数から複数の階段関数を合わせたものに拡張し、指数関数的な相関の再現およびそれを用いた解析を行ってみたい。数値的には、2 次元の格子 QCD を用いて、指数関数的な相関を持つ配位生成が実現可能か、そしてそれらを張り合わせて 4 次元の DR ゲージ QCD と同じような数値計算結果を示すかを調べてみたい。これらの手法の実現はおそらく難しいと思われるが、もし可能であれば 4 次元 QCD の解析において有用な手法になりうると思われる。

謝辞

本研究において、熱心かつ忍耐強いご指導をしてくださった菅沼秀夫先生には深く感謝申し上げます。知識が乏しく失敗も多い自分に熱心に向き合い、様々なことを教えて頂きました。この経験は非常に貴重で、得難い財産になったと思います。

研究室の皆様には、研究や日常の様々な面でサポートをして頂きました。落ち込みやすい自分の悩みや話を、多くの方が親身になって聞いてくれました。本当にありがとうございました。

また様々な感情や体験を分かち合い、切磋琢磨してくれた友人たちに感謝します。

最後に、自分はあらゆる面で家族・親族に支えられてきました。父と母の子供で、兄の弟であることは自分の誇りであり、また幸福です。心から感謝を申し上げます。

付録 A

経路積分におけるゲージ固定の方法

A.1 ファデーエフ・ポポフの処方

本節では、ゲージ理論におけるゲージ固定の方法として、経路積分量子化におけるファデーエフ・ポポフの処方 [4] について解説する。

ファデーエフ・ポポフの処方は経路積分においてゲージ固定を行う標準的な方法である。その基本的なアイデアは、場の配位の積分を「あるゲージ固定条件でのゲージ場の配位の積分」と「そこからゲージ変換で結びつく場の配位の積分」の2つの部分に分離するというものである。

以下では、ランダウ・ゲージ ($\partial_\mu A^\mu = 0$) の場合を例にとって、具体的な説明をする。

QCD の分配関数は作用 (1.1) を用いて

$$Z \equiv \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q\mathcal{D}A_\mu e^{iS_{\text{QCD}}[\bar{q}, q, A_\mu]} \quad (\text{A.1})$$

と定義される。この分配関数 (A.1) に恒等式

$$1 \equiv \int \mathcal{D}\omega \Delta[A^\omega] \delta[\partial^\mu A_\mu^\omega(x) - f(x)] \quad (\text{A.2})$$

$$\Delta[A^\omega] \equiv \text{Det} \left(\frac{\delta \partial^\mu A_\mu^\omega(x)}{\delta \omega(y)} \right) = \text{Det} [\partial_x^\mu (\partial_\mu^x + g f_{abc} A_\mu^c(x)) \delta^4(x-y)] \quad (\text{A.3})$$

を挿入する。ここで $A_\mu^\omega(x)$ はゲージ変換関数 $\Omega(x) = \exp[ig\omega(x)]$ を用いて式 (1.8) のようにゲージ変換をしたゲージ場であり、Det は汎関数行列式である。そのため、 $\Delta[A^\omega]$ はファデーエフ・ポポフ行列式と呼ばれる。また $\delta[\partial^\mu A_\mu^\omega(x) - f(x)]$ は

$$\delta[\partial^\mu A_\mu^\omega(x) - f(x)] \equiv \prod_x \delta(\partial^\mu A_\mu^\omega(x) - f(x)) \quad (\text{A.4})$$

と定義される汎デルタ関数であり、 $f(x)$ は任意関数である。恒等式 (A.2) の挿入により、分配関数は

$$Z \equiv \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\omega\Delta[A^\omega] \delta[\partial^\mu A_\mu^\omega(x) - f(x)] e^{iS_{\text{QCD}}[\bar{q}, q, A_\mu]} \quad (\text{A.5})$$

となる。ここで、作用 (1.1) と $\mathcal{D}A_\mu$ のゲージ不変性を利用すると、式 (A.5) は

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q\mathcal{D}A_\mu^\omega\mathcal{D}\omega\Delta[A^\omega] \delta[\partial^\mu A_\mu^\omega(x) - f(x)] e^{iS_{\text{QCD}}[\bar{q}, q, A_\mu^\omega]} \\ &= \int \mathcal{D}\omega \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q\mathcal{D}A_\mu\Delta[A] \delta[\partial^\mu A_\mu(x) - f(x)] e^{iS_{\text{QCD}}[\bar{q}, q, A_\mu]} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

と書くことができ、ゲージ変換の自由度に関する積分 $\int \mathcal{D}\omega$ をくりだすことができる。経路積分では、演算子 $\hat{O}[\bar{q}, q, A_\mu]$ の期待値は

$$\langle \hat{O} \rangle \equiv \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\omega \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q\mathcal{D}A_\mu\Delta[A] \hat{O}[\bar{q}, q, A_\mu] \delta[\partial^\mu A_\mu(x) - f(x)] e^{iS_{\text{QCD}}[\bar{q}, q, A_\mu]} \quad (\text{A.7})$$

と計算される。 $\int \mathcal{D}\omega$ に由来する発散は定数として現れ、期待値計算の際には分子・分母でキャンセルするため、無視できる。以上のような手続きを経ることで、経路積分による期待値の評価が可能となる。

式 (A.6) の汎デルタ関数はゲージ固定項として作用の中に入れられることができる。通常の n 次元のデルタ関数 $\delta^{(n)}(x)$ はフーリエ積分表示で

$$\delta^{(n)}(\vec{x}) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^4} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (\text{A.8})$$

と表せることから、汎デルタ関数 (A.4) は補助場 $B(x)$ を導入して

$$\begin{aligned} \delta[\partial^\mu A_\mu(x) - f(x)] &= \int \prod_x (dB(x)) \exp \left[i \int d^4x (\partial^\mu A_\mu(x) - f(x)) B(x) \right] \\ &= \int \mathcal{D}B \exp \left[i \int d^4x (\partial^\mu A_\mu(x) - f(x)) B(x) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

のように経路積分の形で書ける。この式 (A.9) を用いて式 (A.6) を書き換えると

$$Z = \int \mathcal{D}\omega \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}B\Delta[A] e^{iS_{\text{QCD}}[\bar{q}, q, A_\mu] + i \int d^4x (\partial^\mu A_\mu(x) - f(x)) B(x)} \quad (\text{A.10})$$

となる。

A.2 ファデーエフ・ポポフ・ゴースト

上記の分配関数 (A.6) を局所場の理論にするため、つまり摂動論で扱いやすくするために、ファデーエフ・ポポフ・ゴーストを導入する。

式 (1.14) から行列式はグラスマン数の積分として書けるため、新たにグラスマン数の場 $c(x), \bar{c}(x)$ を導入し、ファデーエフ・ポポフ行列式を

$$\Delta[A] = \int \mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c \exp \left[i \int d^4x \bar{c}(x) \partial^\mu D_\mu c(x) \right] \quad (\text{A.11})$$

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + gf_{abc}A_\mu^b \quad (\text{A.12})$$

と表せる。ここで導入された場 $c(x), \bar{c}(x)$ はグラスマン数であるからフェルミ統計に従うが、スカラー場の運動方程式に従うためスピンは 0 であるという奇妙な場である。この場をファデーエフ・ポポフ・ゴースト場という。

付録 B

経路積分における摂動論の方法

ここでは場の理論における摂動論の方法について、経路積分の形式で解説を行う [47]。
一般の場合を考え、場を ϕ_A と記す。添え字 A は場の時空方向成分および内部自由度をまとめて表したものとする。

理論の作用が

$$S = \int d^4x (\phi_A(x) K_{AB}^x \phi_B(x) + \mathcal{L}_{\text{int}}[\phi_A(x)]) \quad (\text{B.1})$$

のように自由場部分 (第 1 項) と相互作用部分 (第 2 項) に分離できる場合を考える。自由場部分は場 ϕ_A の 2 次項であるとする。

ここで作用 (B.1) にソース項 $J_A(x)\phi_A(x)$ を加え

$$S_J = \int d^4x (\phi_A(x) K_{AB}^x \phi_B(x) + \mathcal{L}_{\text{int}}[\phi_A(x)] + J_A(x)\phi_A(x)) \quad (\text{B.2})$$

とする。このときソース項込みの作用から定義される生成汎関数は

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi_A e^{iS_J} = \int \mathcal{D}\phi_A e^{i \int d^4x (\phi_A(x) K_{AB}^x \phi_B(x) + \mathcal{L}_{\text{int}}[\phi(x)] + J_A(x)\phi_A(x))} \quad (\text{B.3})$$

となる。

この生成汎関数 $Z[J]$ を用いると、例えば場の 2 点関数 $\langle \phi_B(x)\phi_C(y) \rangle$ は

$$\begin{aligned} \langle \phi_A(x)\phi_B(y) \rangle &= \frac{1}{Z[J]} \int \mathcal{D}\phi_A \phi_B(x)\phi_C(y) e^{iS_J} \Big|_{J \rightarrow 0} \\ &= \frac{1}{Z[J]} \int \mathcal{D}\phi_A \frac{\delta}{\delta J_B(x)} \frac{\delta}{\delta J_C(y)} e^{iS_J} \Big|_{J \rightarrow 0} \\ &= \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta}{\delta J_B(x)} \frac{\delta}{\delta J_C(y)} Z[J] \Big|_{J \rightarrow 0} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

のように $J_A(x)$ による $Z[J]$ の汎関数微分によって計算できる。一般に、場 ϕ_A によって構成される演算子 $\hat{O}[\phi_A]$ の期待値については

$$\langle \hat{O}[\phi_A] \rangle = \frac{1}{Z[J]} \hat{O} \left[\frac{\delta}{\delta J_A} \right] Z[J] \Big|_{J \rightarrow 0} \quad (\text{B.5})$$

というように、演算子 $\hat{O}[\phi_A]$ 内の場を汎関数微分に置き換えることで計算可能である。

式 (B.5) による期待値計算は形式的に可能であるが、実際に行うためには生成汎関数の計算（つまり経路積分の実行）が必要であり困難である。そこで生成汎関数の評価のため行われる手法の1つが摂動論である。

摂動論は理論を無摂動部分と摂動部分に分けて、摂動部分の効果を逐次取り込んでいくという手法である。経路積分においては $\mathcal{L}_{\text{int}}[\phi_A(x)]$ 部分を摂動部分と見なす。このとき無摂動な生成半関数 $Z_0[J]$ を

$$Z_0[J] \equiv \int \mathcal{D}\phi_A e^{i \int d^4x (\phi_A(x) K_{AB}^x \phi_B(x) + J_A(x) \phi_A(x))} \quad (\text{B.6})$$

と定義する。この経路積分は解析的に実行可能であり、まず微分演算子 K_{AB}^x の逆演算子を $K_{AB}^{-1}(x-y)$ を

$$K_{AB}^x K_{BC}^{-1}(x-y) = \delta_{AC} \delta^4(x-y) \quad (\text{B.7})$$

と定義する。逆演算子 $K_{AB}^{-1}(x-y)$ はプロパゲーターとも呼ばれる。次に場 $\phi_A(x)$ を

$$\phi_A(x) \rightarrow \tilde{\phi}_A(x) = \phi_A(x) + \frac{1}{2} \int d^4y K_{AB}^{-1}(x-y) \phi_B(y) \quad (\text{B.8})$$

と変換する。こうすると式 (B.7) は

$$Z_0[J] \equiv \int \mathcal{D}\phi_A \exp \left[i \int d^4x (\tilde{\phi}_A(x) K_{AB}^x \tilde{\phi}_B(x)) - \frac{i}{4} \int d^4x d^4y J_A(x) K_{AB}^{-1}(x-y) J_B(y) \right] \quad (\text{B.9})$$

となり、積分測度の変換 (B.8) に対する不変性 $\mathcal{D}\phi_A = \mathcal{D}\tilde{\phi}_A$ を仮定すると

$$Z_0[J] \propto \exp \left[-\frac{i}{4} \int d^4x d^4y J_A(x) K_{AB}^{-1}(x-y) J_B(y) \right] \quad (\text{B.10})$$

というように計算が可能である。比例係数の正しい評価は難しいが、経路積分による期待値評価では係数は分子・分母でキャンセルするため問題にならない。

この式 (B.10) を用いると摂動込みの生成汎関数 (B.3) は

$$Z[J] \propto \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}} \left[\frac{\delta}{\delta \phi_A(x)} \right] \right] Z_0[J] \quad (\text{B.11})$$

と書ける。式 (B.11) を

$$Z[J] \propto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}} \left[\frac{\delta}{\delta\phi_A(x)} \right] \right)^k Z_0[J] \quad (\text{B.12})$$

のように展開し、摂動を k の次数について順次取り入れるというのが摂動論の手法である。

摂動論は実空間よりも運動量空間で展開することが多い。その場合は場 $\phi_A(x)$ 、ソース $J_A(x)$ 、プロパゲーター $K_{AB}^{-1}(x-y)$ をフーリエ変換した後で上記の議論を行えばよい。

付録 C

格子 QCD におけるゲージ固定

ここでは SU(3) 格子 QCD でのゲージ固定について、具体的なアルゴリズムを説明する [12]。なおここでは DR ゲージ固定を例にとるが、クーロン・ゲージやランダウ・ゲージの場合についても同様な議論で実行可能である。

格子上における DR ゲージ固定は、重点サンプリングされた配位 1 つずつに対して、式 (4.15) で与えられる

$$R_{\text{DR}}^{\text{lat}} \equiv \sum_s \text{ReTr} [U_x(s) + U_y(s)] \quad (\text{C.1})$$

という関数を最大化するゲージ変換を施すことで実行される。そのようなゲージ変換を実現するゲージ変換関数をどのように構成するかを考える。

まず 1 点 s だけでゲージ変換を考える。すると関数 (C.1) の変化分は式 (4.18) のようになる：

$$\begin{aligned} \delta R_{\text{DR}}^{\text{lat}} &= \sum_{\perp=x,y} \text{ReTr} [\Omega(s)U_{\perp}(s) + U_{\perp}(s - a_{\perp})\Omega^{\dagger}(s)] - (\Omega(s) = 1) \\ &= \text{ReTr} \left[\Omega(s) \sum_{\perp=x,y} \left\{ U_{\perp}(s) + U_{\perp}^{\dagger}(s - a_{\perp}) \right\} \right] - (\Omega(s) = 1). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

今は関数 $R_{\text{DR}}^{\text{lat}}$ をゲージ変換で最大化することを考えているので、この変化分 (C.2) の第 1 項

$$\text{ReTr} \left[\Omega(s) \sum_{\perp=x,y} \left\{ U_{\perp}(s) + U_{\perp}^{\dagger}(s - a_{\perp}) \right\} \right] \quad (\text{C.3})$$

を最大化する $\Omega(s)$ を考える。

式 (C.3) の $\text{ReTr}[\dots]$ の最大化において、リンク変数の方向の自由度 ($\perp = x, y$) は本質的ではないので

$$\Phi(s) \equiv \sum_{\perp=x,y} \left\{ U_{\perp}(s) + U_{\perp}^{\dagger}(s - a_{\perp}) \right\} \quad (\text{C.4})$$

とまとめる。これにより考える問題は

$$\text{ReTr} [\Omega(s)\Phi(s)] \quad (\text{C.5})$$

を最大化する $\Omega(s)$ を見つけることになる。なお $\Phi(s)$ は $SU(3)$ の元の和で定義されているため、 $\Phi(s)$ 自体はもはや $SU(3)$ の元ではないことを述べておく。

式 (C.5) の最大化には適切な $\Omega(s) \in SU(3)$ を見つける必要があるが、それは難しい。そこで $\Omega(s)$ を $SU(2)$ 部分群 $\Omega_k(s)$ ($k = 1, 2, 3$)

$$\Omega(s) = \Omega_3(s)\Omega_2(s)\Omega_1(s) \quad (\text{C.6})$$

$$\Omega_1(s) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ -b_1^* & a_1^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Omega_2(s) = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b_2^* & 0 & a_2^* \end{pmatrix}, \Omega_3(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & -b_3^* & a_3^* \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

$$|a_k|^2 + |b_k|^2 = 1 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (\text{C.8})$$

に分割し、これらを順次 $\Phi(s)$ に作用させていくことで式 (C.5) を最大化することを考える。

具体的に $\Phi(s)$ を

$$\Phi(s) = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ \Phi_{31} & \Phi_{31} & \Phi_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{C.9})$$

と表し、 $\Omega_1(s)$ を掛けると

$$\begin{aligned} \Omega_1(s)\Phi(s) &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ -b_1^* & a_1^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ \Phi_{31} & \Phi_{31} & \Phi_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Phi'_{11} & \Phi'_{12} & \Phi'_{13} \\ \Phi'_{21} & \Phi'_{22} & \Phi'_{23} \\ \Phi'_{31} & \Phi'_{31} & \Phi'_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1\Phi_{11} + b_1\Phi_{21} & a_1\Phi_{12} + b_1\Phi_{22} & a_1\Phi_{13} + b_1\Phi_{23} \\ -b_1^*\Phi_{11} + a_1^*\Phi_{21} & -b_1^*\Phi_{12} + a_1^*\Phi_{22} & -b_1^*\Phi_{13} + a_1^*\Phi_{23} \\ \Phi_{31} & \Phi_{31} & \Phi_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{C.10}) \end{aligned}$$

となる。よって

$$\text{ReTr} [\Omega(s)\Phi(s)] = \text{ReTr} [a_1\Phi_{11} + b_1\Phi_{21} - b_1^*\Phi_{12} + a_1^*\Phi_{22}\Phi_{33}] \quad (\text{C.11})$$

となり、これを整理すると a_1, b_1 はそれぞれ

$$a_1 = \Phi_{11}^* + \Phi_{22} \quad (\text{C.12})$$

$$b_1 = -\Phi_{12} + \Phi_{21}^* \quad (\text{C.13})$$

とすればよいことがわかる。次に $\Omega_2(s)$ を $\Omega_1(s)\Phi(s)$ にかけて

$$\Omega_2(s)\Omega_1(s)\Phi(s) = \begin{pmatrix} \Phi''_{11} & \Phi''_{12} & \Phi''_{13} \\ \Phi''_{21} & \Phi''_{22} & \Phi''_{23} \\ \Phi''_{31} & \Phi''_{31} & \Phi''_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{C.14})$$

とすると、 $\Omega_1(s)$ のときと同様にして a_2, b_2 は

$$a_2 = \Phi'_{11} + \Phi'_{33} \quad (\text{C.15})$$

$$b_2 = -\Phi'_{13} + \Phi'_{31} \quad (\text{C.16})$$

と定まる。そして最後に $\Omega_3(s)$ をかけて上と同じ議論をすると

$$a_3 = \Phi''_{22} + \Phi''_{33} \quad (\text{C.17})$$

$$b_3 = -\Phi''_{23} + \Phi''_{32} \quad (\text{C.18})$$

のように a_3, b_3 が定まる。このようにして $\Omega_{1,2,3}(s)$ を定め、式 (C.6) でゲージ変換関数 $\Omega(s)$ を構成することで、1 点 s でのゲージ変換を実行する。

関数 (C.1) は全時空点にわたる和で書かれているので、上記の操作を各点で行い、 $R_{\text{DR}}^{\text{lat}}$ を最大化していく。ただし注意点があり、隣り合う 2 点で同時にゲージ変換を行うと 2 点のゲージ変換が干渉するので、同時に行うゲージ変換が干渉しないような工夫が必要がある。最もナイーブにやるならば、1 点ずつ順番にゲージ変換を実行していけばよい。(もちろん互いに干渉しない時空点で同時にゲージ変換を行うことは可能であり、その方が効率的である)。

大抵の場合、全時空点を 1 回ずつゲージ変換しただけでは不十分なので、上記の操作を何回も行い

$$\Delta_{\text{DR}}(s) \equiv \sum_{\perp=x,y} \partial_{\perp} A_{\perp}(s) \quad (\text{C.19})$$

$$\epsilon_{\text{DR}} \equiv \frac{1}{N_c V} \sum_s \text{Tr} \left[\Delta_{\text{DR}}(s) \Delta_{\text{DR}}^{\dagger}(s) \right] \quad (\text{C.20})$$

で与えられる ϵ_{DR} が指定した大きさを下回った時点でゲージ変換を完了するというのが格子 QCD におけるゲージ変換の手続きである。もちろんこれは充填サンプリングされた 1 つの配位に対しての操作であるため、配位を N_{conf} 個ゲージ固定する場合には、上記の操作を合計で N_{conf} 回行う必要がある。

付録 D

Elitzur の定理についての補足

ここでは Elitzur の定理に関する補足を行う。

D.1 Elitzur の定理の適用条件

Elitzur の定理の重要な帰結として「ゲージ不変でない演算子の期待値は零になる」というものがあつた。しかしこれは「単独の既約表現」について成り立つものである。多くの場合、この条件を暗黙に仮定しているが、この条件を満たさない場合、Elitzur の定理の適用はできない。以下で Elitzur の定理の適用ができない簡単な例を紹介する。

単一の既約表現に属すゲージ不変でない演算子として \hat{O} を考える。 \hat{O} には Elitzur の定理が適用できるため

$$\langle \hat{O} \rangle = 0 \quad (\text{D.1})$$

が成り立つ。

ここでゲージ不変な演算子として、恒等演算子 1 を考える。これは恒等演算子なので、そもそもゲージ変換性を持たない。また 1 の期待値は

$$\langle 1 \rangle = 1 \quad (\text{D.2})$$

となる。

ここで、 1 とゲージ不変でない演算子 \hat{O} の和 $\hat{O} + 1$ を考えてみる。この演算子 $\hat{O} + 1$ の真空期待値を計算すると

$$\langle \hat{O} + 1 \rangle = \langle \hat{O} \rangle + \langle 1 \rangle = 0 + 1 \neq 0 \quad (\text{D.3})$$

となる。演算子 $\hat{O} + 1$ は明らかにゲージ不変でないが、その期待値が零にならない。このように、演算子がゲージ不変でなくても、複数の既約表現が混合しゲージ不変な部分を含

む場合、Elitzur の定理の適用条件を満たさないため、その演算子の真空期待値は 0 でない場合がある。

Elitzur の定理を適用する際には、考えている演算子が「単一な既約表現に属す」という性質が重要であり、このことは明記されていないこともしばしばあるため注意が必要である。

付録 E

$d(U_\mu, I)^2$ についての補足

E.1 $d(U_\mu, I)^2$ の最大値について

$d(U_\mu, I)^2$ の最大値について補足する。

まずリンク変数 $U_\mu \in \text{SU}(N_c)$ を対角化することを考える。リンク変数はユニタリー行列 $V \in \text{SU}(N_c)$ を用いて

$$VU_\mu V^{-1} = \text{diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_{N_c}}) \quad (\text{E.1})$$

$$\sum_k \theta_k = 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (\text{E.2})$$

と対角化される。式 (E.2) は $\text{SU}(N_c)$ の元の行列式は 1 であることから従う。

式 (E.1) を用いて $d(U_\mu, I)^2$ の値を考える。 $d(U_\mu, I)^2$ は

$$d(U_\mu, I)^2 = \frac{1}{2N_c} \text{Tr} [(U_\mu - I)(U_\mu - I)^\dagger] \quad (\text{E.3})$$

と与えられていた。この式に $I = V^{-1}V$ を挿入しトレースの巡回不変性を用いると

$$\begin{aligned} d(U_\mu, I)^2 &= \frac{1}{2N_c} \text{Tr} [V(U_\mu - I)V^{-1}V(U_\mu - I)^\dagger V^{-1}] = \frac{1}{2N_c} \text{Tr} [(VU_\mu V^{-1} - I)(VU_\mu V^{-1} - I)^\dagger] \\ &= \frac{1}{2N_c} \sum_{k=1}^{N_c} |e^{i\theta_k} - 1|^2 \\ &= \frac{1}{N_c} \sum_{k=1}^{N_c} \{1 - \cos \theta_k\} = 1 - \frac{1}{N_c} \sum_{k=1}^{N_c} \cos \theta_k \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

となる。従って $d(U_\mu, I)^2$ が最大となるのは、拘束条件 (E.2) の下で

$$\sum_{k=1}^{N_c} \cos \theta_k \quad (\text{E.5})$$

が最小となるときである。

そこでラグランジュの未定乗数法を用いると

$$\cos \theta_1 = \cos \theta_2 = \cdots = \cos \theta_{N_c} \quad (\text{E.6})$$

が最小条件であると求まる。従って、リンク変数が $SU(N_c)$ が

$$U_\mu = e^{i \frac{2k\pi}{N_c}} I \quad (k = 1, 2, \dots, N_c - 1) \quad (\text{E.7})$$

で表せるもので $-I$ に最も近いとき、 $d(U_\mu, I)^2$ は最大となる。

$\theta = \theta_k$ ($k = 1, 2, \dots, N_c$) と置くと、式 (E.4) は

$$d(U_\mu, I)^2 = 1 - \cos \theta \quad (\text{E.8})$$

となるので、 N_c が偶数のとき、 $-I = e^{i\pi}$ が最大値

$$d(U_\mu, I)^2 = 2 \quad (\text{E.9})$$

を与える。一方 N_c が奇数のとき、リンク変数は $-I = e^{i\pi}$ を取れないため、 $\cos \theta$ が最も小さな値を取る

$$\theta = \frac{\pi(N_c - 1)}{N_c} \quad (\text{E.10})$$

のときに最大値

$$d(U_\mu, I)^2 = 1 - \cos \frac{\pi(N_c - 1)}{N_c} \quad (\text{E.11})$$

を取る。

E.2 ゲージ固定無しの場合の $\langle d(U_\mu, I)^2 \rangle = 1$ の証明

ゲージ固定をしない場合に

$$\langle d(U_\mu, I)^2 = 1 \rangle = 1 \quad (\text{E.12})$$

となることを証明する。

まず式 (4.28) より

$$\langle d(U_\mu, I)^2 = 1 \rangle = 1 - \frac{1}{N_c} \langle \text{ReTr} U_\mu \rangle \quad (\text{E.13})$$

となる。Elitzur の定理より

$$\langle \text{ReTr} U_\mu \rangle = 0 \tag{E.14}$$

なので、ゲージ固定をしていない場合は $\langle d(U_\mu, I)^2 \rangle = 1$ が従う。

参考文献

- [1] 九後汰一郎, **ゲージ場の量子論 I** (培風館, 1989)
- [2] C. Abel *et al.*, *Measurement of the Permanent Electric Dipole Moment of the Neutron*, Phys. Rev. Lett. **124**, 081803 (2020)
- [3] R.L. Workman *et al.* (Particle Data Group), PTEP **2022**, 083C01 (2022) and 2023 update
- [4] L.D. Faddeev and V.N. Popov, *Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field*, Phys. Lett. B **25**, 29 (1967)
- [5] D. J. Gross and F. Wilczek, *Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories*, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973)
- [6] H. D. Politzer, *Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?*, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973)
- [7] K. G. Wilson, *Confinement of Quarks*, Phys. Rev. D **10**, 2445 (1974)
- [8] J. Kogut and L. Susskind, *Hamiltonian Formulation of Wilson's Lattice Gauge Theories*, Phys. Rev. D **11**, 395 (1975)
- [9] A. M. Polyakov, *Compact Gauge Fields and the Infrared Catastrophe*, Phys. Lett. B **59**, 82 (1975)
- [10] M. Creutz, *Monte Carlo Study of Quantized $SU(2)$ Gauge Theory*, Phys. Rev. D **21**, 2308 (1980)
- [11] M. Creutz, *Asymptotic-Freedom Scales*, Phys. Rev. Lett. **45**, 313 (1980)
- [12] 青木慎也, **格子上の場の理論** (丸善, 2012)
- [13] H. J. Rothe, **Lattice Gauge Theories, 4th Edition** (World Scientific, 2012)
- [14] C. Gattringer and C. B. Lang, **Quantum Chromodynamics on the Lattice An Introductory Presentation**, (Springer, 2010)
- [15] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, J. Kogut, K. D. Lane, and T.-M. Yang,

- Spectrum of Charmed Quark-Antiquark Bound States*, Phys. Rev. Lett. **36**, 1276 (1976)
- [16] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane, and T.-M. Yan, *Charmonium: The model*, Phys. Rev. D **17**, 3090 (1978)
- [17] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane, and T.-M. Yan, *Charmonium: Comparison with experiment*, Phys. Rev. D **21**, 203 (1980)
- [18] T. T. Takahashi, H. Suganuma, and Y. Nemoto and H. Matsufuru, *Detailed Analysis of the Three-quark Potential in SU(3) Lattice QCD*, Phys. Rev. D **65**, 114509 (2002)
- [19] S. Aoki *et al.*, *Light Hadron Spectroscopy with Two Flavors of O(a)-improved Dynamical Quarks*, Phys. Rev. D **68**, 054502 (2003)
- [20] S. Necco and R. Sommer, *The $N_f = 0$ Heavy Quark Potential from Short to Intermediate Distances*, Nucl. Phys. B **622**, 328 (2002)
- [21] G. S. Bali, *QCD Forces and Heavy Quark Bound States*, Phys. Rep. **343**, (2001)
- [22] H. Ichie, V. Bornyakov, T. Streuer and G. Schierholz, *Flux Tubes of Two- and Three-quark System in Full QCD*, Nucl. Phys. A **721**, 899-902 (2003)
- [23] Y. Nambu, *Strings, Monopoles, and Gauge Fields*, Phys. Rev. D **10**, 4262 (1974)
- [24] G.'t Hooft, in: High Energy Physics, edited by A. Zichichi (Editorice Compositori, Bologna, 1975)
- [25] S. Mandelstam, *II. Vortices and Quark Confinement in Non-Abelian Gauge Theories*, Phys. Rept. **23**, 245 (1976)
- [26] P.A.M. Dirac, *Quantised Singularities in the Electromagnetic Field*, Proc. Roy. Soc. (London) A **133**, 60 (1931)
- [27] G.'t Hooft, *Topology of the Gauge Condition and New Confinement Phases in Non-Abelian Gauge Theories*, Nucl. Phys. B **190**, 455(1981)
- [28] H. ジョージァイ 著, 九後汰一郎 訳, *物理学におけるリー代数 (原著第 2 版)*, (吉岡書店, 2010)
- [29] A. S. Kronfeld, G. Schierholz and U.-J. Wiese, *Topology and Dynamics of the Confinement Mechanism*, Nucl. Phys. B **293**, 461 (1987)
- [30] A. S. Kronfeld, M. L. Laursen, G. Schierholz and U.-J. Wiese, *Monopole Condensation and Color Confinement*, Phys. Lett. B **198**, 516 (1987)
- [31] Z.F. Ezawa and A. Iwasaki, *Abelian Dominance and Quark Confinement in Yang-Mills Theories*, Phys. Rev. D **25**, 2681 (1982)

- [32] H. Suganuma, S. Sasaki and H. Toki, *Color Confinement, Quark Pair Creation and Dynamical Chiral-symmetry Breaking in the Dual Ginzburg-Landau Theory*, Nucl. Phys. B **435**, 207 (1995)
- [33] F. Brandstaeter, G. Schierholz and U.-J. Wiese, *Color Confinement, Abelian Dominance and the Dynamics of Magnetic Monopoles in $SU(3)$ Gauge Theory*, Phys. Lett. B **272**, 319-325 (1991)
- [34] H. Suganuma, M. Fukushima, H. Ichie and A. Tanaka, *Instanton, Monopole Condensation and Confinement*, Nucl. Phys. B **65**, 29-33 (1998)
- [35] H. Suganuma, *Quantum Chromodynamics, Quark Confinement and Chiral Symmetry Breaking: a Bridge Between Elementary Particle Physics and Nuclear Physics*, “Handbook of Nuclear Physics”, (Springer, 2023) 22-1 (48 pages), ISBN: 978-981-15-8818-1.
- [36] T. Suzuki and I. Yotsuyanagi, *Possible Evidence for Abelian Dominance in Quark Confinement*, Phys. Rev. D **42**, 4257(R) (1990)
- [37] N. Sakumichi and H. Suganuma, *Perfect Abelian Dominance of Confinement in Mesons and Baryons in $SU(3)$ Lattice QCD*, Phys. Rev. D **90**, 111501(R) (2014)
- [38] O. Miyamura, *Chiral Symmetry Breaking in Gauge Fields Dominated by Monopoles on $SU(2)$ Lattices*, Phys. Lett. B **353**, 91-95 (1995)
- [39] R. M. Woloshyn, *Chiral Symmetry Breaking in Abelian-projected $SU(2)$ Lattice Gauge Theory*, Phys. Rev. D **51**, 6411 (1995)
- [40] H. Ohata and H. Suganuma, *Clear Correlation Between Monopoles and the Chiral Condensate in $SU(3)$ QCD*. Phys. Rev. D **103**, 054505 (2021)
- [41] G. 't Hooft, *A two-dimensional Model for Mesons*, Nucl. Phys. B **75**, 461-470 (1974)
- [42] C. G. Callan Jr., N. Coote, and D. J. Gross, *Two-dimensional Yang-Mills Theory: A Model of Quark Confinements*, Phys. Rev D **13**, 1649 (1976)
- [43] M. Einhorn, *Confinement, Form Factors, and Deep-inelastic Scattering in Two-dimensional Quantum Chromodynamics*, Phys. Rev. D **14**, 3451 (1976)
- [44] R.C. Brower, J. Ellis, M.G. Schmidt, J.H. Weis, *High-energy Scattering in a Two-dimensional Gauge Theory*, Phys. Lett. B **65**, 249 (1976)
- [45] R.C. Brower, J. Ellis, M.G. Schmidt, J.H. Weis, *Hadron Scattering in Two-dimensional QCD (I). Formalism and Leading Order Calculations*, Nucl. Phys. B **128**, 131 (1977)

- [46] G. Parisi and N. Surlas, *Random Magnetic Fields, Supersymmetry, and Negative Dimensions*, Phys. Rev. Lett. **43**, 744 (1979)
- [47] M. Srednicki, *Quantum Field Theory*, (Cambridge University Press, 2007)
- [48] V. P. Nair, 現代的な視点からの場の量子論 発展編, (シュプリンガー・ジャパン, 2009)
- [49] 近藤慶一, ゲージ場の量子論入門 -質量ギャップとクォーク閉じ込めの解決に向けて, (サイエンス社, 2006)
- [50] 當銘啓、菅沼秀夫, *Dimensional Reduction Gauge and Confinement Analysis in $SU(3)$ Lattice QCD*, 日本物理学会 第 78 回年次大会, 東北大学, 口頭発表 および 概要集 (2023) .