素粒子論研究室速報:
Quantum Aspects of GMS solutions of Noncommutative Field Theory and Large N Limit of Matrix Models (hep-th/ 0111059)

発表者: 東 武大* (素粒子論研究室博士課程 1 年)

2002 年 01 月 23 日 研究室会議終了後 ~ 15:00

概 要

本稿は、京都大学物理学第二教室素粒子論研究室で ABC 順にローテーションを組んで毎週行うことになっている「速報」の論文発表の原稿である。これは、論文中に登場する計算の詳細や背景となる知識を付け加えながら、個人的にまとめたものである。したがって、本稿に見当違いな部分があったとしても、原著者にはその責は一切なく、責はすべて発表者である東武大にあることを断っておく。

繰り返すが、これはあくまで個人的な勉強をまとめたものに過ぎない。

目 次

1 Introduction **2**

2 GMS soliton[5] の復習 **2**

2.1 簡単な解について 4

2.2 一般解に関する考察 5

3 2 次元非可換場の理論と、0 次元行列模型との対応 **7**

3.1 古典的な真空とインスタントン 8

3.2 量子論的なソリトン解と 3 つの相の存在 9

3.3 運動項の寄与について 18

4 (2+1) 次元非可換場の理論と、1 次元行列模型との対応 **21**

4.1 (2+1) 次元場の理論の復習 21

4.2 古典的な静的ソリトン解 22

4.3 量子論に基づく考察 22

4.4 古典的な真空とソリトンについて 24

5 最後に **26**

*mail:azuma@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp

1 Introduction

この論文の主眼とするところは、GMS soliton の量子論的な側面と、行列模型との関連を調べることにある。GMS soliton とは、後でも簡単に説明をするが、非可換パラメーターが非常に大きいときのソリトン解について調べるものである。この場合は、具体的に解を定式化することが [5] において調べられている。では、この理論を量子論的に解釈すればどうなるのであろうか。このときは、後でみるように次の 3 つの相が現われる。このような相は、非可換パラメーターと、行列の大きさ N の間の指数の関係によって決定され、次の相について相転移が起こる。

- GMS phase: $\theta \sim N^\nu$ で、$\nu > 1$ のとき。
- Planar phase: $\theta \sim N$ のとき。
- disordered phase: $\theta \sim N^\nu$ で、$\nu < 1$ のとき。

こうした相転移が生じるのは、one-matrix model における経路積分の測度を、行列の固有値について表現したときに、Vandermonde determinant が生じることに起因する。これは「Coulomb repulsion term」とも呼ばれるものであり、非可換ソリトンについての古典的な描像と量子論的な描像を大きく異るものとする。

この論文では、次の二つの理論についての非可換ソリトンの量子論的な側面について考察し、それぞれ次の意味で行列模型と関連している。

- 2 次元非可換場の理論: 0 次元 ($c = 0$) 行列模型に対応。
- (2+1) 次元非可換場の理論: 1 次元 ($c = 1$) 行列模型に対応。

ここで言う行列模型とは、1990 年頃に調べられた非臨界弦に対するもの (レビューとしては、[1] 参照) であり、minimal model $c = 1 - \frac{6}{m(m+1)}$ の場合については、その非摂動的な側面も含めて良く知られているものである。一方、上記の $c = 1 - \frac{6}{m(m+1)}$ の場合の m の大きい場合については、解析が非常に複雑なものとなるが、$c = 1$ について言えば厳密に解けることが知られている。

本稿では、以上の観点から GMS soliton の量子論的な側面について考察を進める。まず、第 2 節では、Gopakumar, Minwalla, Strominger によって調べられた非可換ソリトンの研究について簡単にレビューをする。第 3 節では 2 次元非可換場の理論と $c = 0$ 行列模型の関係について述べることにする。第 4 節では、時間も含めた (2+1) 次元の理論と $c = 1$ 行列模型の関係について調べる。

2 GMS soliton[5] の復習

本題に入る前に、まずは GMS soliton についての簡単な復習から入る。非可換幾何学は、言うなれば「座標の量子化」であり、座標の間に次の非可換関係が課される。

$$[x^i, x^j] = i\theta^{ij}. \tag{2.1}$$

これは量子力学における不確定性原理が空間同士についても、成立するということを意味する。そして、Seiberg 及び Witten の論文 [3] で指摘されたように、こうした非可換性は B-field を入れた超弦理論において実現されるものであり、具体的に、こうした非可換性が見られるのは、string scale l_s 程度の長さについての世界であることがわかる。それゆえに、非可換幾何学とは、非局所的なものであり、それゆえに通常の可換な空間で議論された事柄とは異なる現象が多く見られる。良い例として、Derrick の定理を見てみよう。これは、静的なソリトン解の存在条件について議論をしたものである。

[定理](Derrick) 静的ソリトンが存在するのは、それぞれの空間の次元に応じて、次の場合に限定される。

- $d=1$: スカラー場のみ (キンクや、Sine-Gordon 方程式)
- $d=2$: スカラー場とゲージ場の混在する系 (超伝導体の磁束線)
- $d=3$: スカラー場とゲージ場の混在する系 (モノポール)
- $d=4$: ゲージ場のみ (インスタントン)

[証明] 以下の議論は、d 次元空間の静的解に限定する。また、ゲージ場については、$A_0=0$ のゲージで考えることにする。一般にハミルトニアンは次の形で書ける。

$$H=\int d^dx\mathcal{H}=\int d^dx[(D_i\phi)(D^i\phi)^\dagger+F_{aij}F^{aij}+V(\phi)]. \tag{2.2}$$

第 1,2,3 項はそれぞれ、スカラー場の運動エネルギー、ゲージ場の運動エネルギー、およびスカラー場のポテンシャルエネルギーである。これらは全て正の値をとる。

$$K_s=(D_i\phi)(D^i\phi)^\dagger\geq 0, K_a=F_{aij}F^{aij}\geq 0, V(\phi)\geq 0 \tag{2.3}$$

そこで、変数を次のようにリスケールする。

$$\phi(x)\to\phi(\lambda x), A_i(x)\to\lambda A_i(\lambda x). \tag{2.4}$$

そうすれば、ハミルトニアンは次のようにして書き換えることができる。

$$\mathcal{H}(\lambda)=\lambda^{2-d}K_s+\lambda^{4-d}K_a+\lambda^{-d}V(\phi). \tag{2.5}$$

エネルギーは、$\lambda=1$ で極小のはずであるから、これを λ について変分をすれば次の関係式を得る。

$$\frac{d\mathcal{H}(\lambda)}{d\lambda}|_{\lambda=1}=(2-d)K_s+(4-d)K_a-dV(\phi)=0. \tag{2.6}$$

したがって、静的ソリトン解の存在条件については以下の事柄がいえる。

- 純粋スカラー場の場合: ゲージ場が存在しないので $K_a=0$ である。したがって、$(2-d)K_s-dV(\phi)=0$ の解が存在するのは、$d=1$ の場合のみである。
- 純粋ゲージ場の場合: 今度は、スカラー場が存在しないので、$K_s=V=0$ である。したがって、$(4-d)K_a=0$ が成立するためには、$d=4$ でなければいけない。

以上により、Derrick の定理の証明が完結する。[証明終]

このように、静的ソリトン解の存在する条件は、ただの可換な理論であれば空間の次元によって制限されるのであるが、このような描像は非可換空間では成立せず、任意の空間次元についての純然スカラー場について、静的ソリトン解が存在する。

まずは、(2+1) 次元空間における非可換場の理論に対する非可換スカラー場の理論について調べる。但し、ここでは時間には非可換性は存在せず、空間成分にのみ非可換性が存在するとする。このとき、スカラー場の理論のエネルギー汎関数は次で記述することができる。

$$E=\frac{1}{g^2}\int d^2z(\partial_z\phi\partial_{\bar{z}}\phi+V(\phi))_\star. \tag{2.7}$$

Derrick の定理で示されたように、$\theta = 0$ であればこの純然スカラー場にソリトン解は存在しないが、$\theta \to \infty$ の場合を考えれば、全く異なる描像を見ることができる。ここで空間方向の変数を次のようにしてリスケールする。

$$z \to z\theta^{-\frac{1}{2}}, \quad \bar{z} \to \bar{z}\theta^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.8}$$

このようにリスケールしたことは、Moyal 積から非可換パラメーターを排除したことを意味する。

$$\begin{aligned}(A \star B)(z,\bar{z}) &= \exp\left(\frac{\theta}{2}(\partial_z\partial_{\bar{z}'} - \partial_{z'}\partial_{\bar{z}})\right) A(z,\bar{z})B(z',\bar{z}')|_{z=z'} \\ &\to \exp\left(\frac{1}{2}(\partial_z\partial_{\bar{z}'} - \partial_{z'}\partial_{\bar{z}})\right) A(z,\bar{z})B(z',\bar{z}')|_{z=z'}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

したがって、この系のエネルギー汎関数は次のように書き換えられる。

$$E = \frac{1}{g^2}\int d^2z \left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \theta V(\phi)\right)_\star. \tag{2.10}$$

ここで、先程の可換な理論の Derrick の定理の証明で示した状況と大きく異なるのは、

非可換パラメーター θ を十分大きくとれば運動項が寄与しない

点にある。即ち、先の Derrick の定理の証明について言えば、$K_s = 0$ であるのと同じことである。したがって、この理論の古典的な運動方程式は次の非常に簡単な形で記述することができる。

$$V'(\phi)_\star = 0. \tag{2.11}$$

ここではポテンシャルは多項式で書けるものとして、次の形を仮定する。

$$\begin{aligned}V(\phi) &= \frac{1}{2}m^2\phi_\star^2 + \sum_{k=3}^{r}\frac{b_k}{k}\phi_\star^k, \\ V'(\phi) &= m^2\phi + \sum_{k=2}^{r-1} b_k\phi_\star^k.\end{aligned} \tag{2.12}$$

この非可換ソリトンの一般解は、次の非常に簡単な方程式をもとにして構成することができる。

$$(\phi_0 \star \phi_0)(x) = \phi_0(x). \tag{2.13}$$

そうすれば、明らかに多項式 $f(x)$ に対して、$f(a\phi_0(x)) = f(a)\phi_0(x)$ が成立する。従って上記の非可換ソリトン解に関して言えば、(2.13) を満たす解について、$\phi(x) = \lambda_i\phi_0(x)$ が、$V'(\lambda_i) = 0$ を満足するならば、非可換ソリトン解となる。

2.1 簡単な解について

さて、次に (2.13) を満たす解を具体的に構築しよう。ここでは次にガウス型の波形を仮定する。

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi\Delta^2}\exp(-\frac{r^2}{\Delta^2}). \tag{2.14}$$

ここで、$r^2 = x^2 + y^2$ である。そうすれば、この Fourier 変換は次で与えられる。

$$\begin{aligned}&\tilde{\psi}(k)\frac{1}{\pi\Delta^2} = \int dxdy e^{ik_1x+ik_2y}\exp(-\frac{x^2+y^2}{\Delta^2}) \\ =\ & \frac{1}{\pi\Delta^2}\left(\int dx \exp\left(-\frac{1}{\Delta^2}(x - \frac{ik_1\Delta^2}{2})^2 - \frac{k_1^2\Delta^2}{4}\right)\right) \times \left(\int dy \exp\left(-\frac{1}{\Delta^2}(y - \frac{ik_2\Delta^2}{2})^2 - \frac{k_2^2\Delta^2}{4}\right)\right) \\ =\ & \exp\left(-\frac{k^2\Delta^2}{4}\right).\end{aligned} \tag{2.15}$$

従って、この Moyal 積を計算するには、Fourier 変換をした文脈で考えるのが分りやすく、次のように計算できる。但し、以下の計算では反対称テンソルは $\epsilon_{12}=1$ であるものとする。

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\psi}\star\tilde{\psi})(p) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int dk_1 dk_2 \exp\left(-\frac{k^2\Delta^2}{4}-\frac{(p-k)^2\Delta^2}{4}+\frac{i}{2}\epsilon_{ij}k^i(p-k)^j\right)\\
&= \frac{\exp\left(-\frac{\Delta^2}{4}p^2\right)}{4\pi^2}\int d^2k \exp\left(\frac{\Delta^2}{2}(-k_1^2-k_2^2+k_1p_1+k_2p_2)+\frac{i}{2}(k_1p_2-k_2p_1)\right)\\
&= \frac{\exp\left(-\frac{\Delta^2}{4}p^2\right)}{4\pi^2}\left(\int dk_1 \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2}\left(k_1^2-k_1p_1-\frac{ip_2k_1}{\Delta^2}\right)\right)\right)\times\left(\int dk_2 \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2}\left(k_2^2-k_2p_2+\frac{ip_1k_2}{\Delta^2}\right)\right)\right)\\
&= \frac{\exp\left(-\frac{\Delta^2}{4}p^2\right)}{2\pi\Delta^2}\exp\left(\frac{\Delta^2}{8}\left(p_1+\frac{ip_2}{\Delta^2}\right)+\frac{\Delta^2}{8}\left(p_2-i\frac{p_1}{\Delta^2}\right)\right)=\frac{1}{2\pi\Delta^2}\exp\left(-\frac{p^2}{8}\left(\Delta^2+\frac{1}{\Delta^2}\right)\right). \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

したがって、これを座標空間へと Fourier 変換して戻せば、これは次の形に帰着できる。

$$
(\psi\star\psi)(x)=\frac{1}{\pi^2\Delta^2\left(\Delta^2+\frac{1}{\Delta^2}\right)}\exp\left(-\frac{2r^2}{\Delta^2+\frac{1}{\Delta^2}}\right). \qquad (2.17)
$$

これは、$\Delta=1$ のとき、もとの関数と定数倍以外は等しい。従って、方程式 (2.13) の解は次の形で得ることができる。

$$
\phi_0(x)=2\pi\psi(x)=2\exp(-r^2). \qquad (2.18)
$$

2.2 一般解に関する考察

まずは、非可換ソリトン解について、最も簡単なタイプの古典解を構成した。次に、非可換ソリトンの一般的な古典解の構成法について考える。そのために、まず準備として Weyl Moyal correspondence という概念について説明を加える。これは、非可換空間と演算子との対応関係のことである。具体的には次のように構成する。

[Weyl-Moyal Correspondence]
非可換空間 R^2_θ 上の関数 $f(q,p)$ は、次の演算子 O_f に次の意味で対応をする。

$$
\begin{aligned}
f(q,p) \quad &\Leftrightarrow \quad O_f=\frac{1}{(2\pi)^2}\int d\sigma d\tau U(\tau,\sigma)\tilde{f}(\tau,\sigma),\ \text{where} \qquad (2.19)\\
&\qquad U(\tau,\sigma)=\exp[-i(\tau\hat{q}+\sigma\hat{p})],\ \text{with}\ [\hat{q},\hat{p}]=i,\\
&\qquad \tilde{f}(\tau,\sigma)=\int dqdp\exp(i(\tau q+\sigma p))f(q,p),\\
\int d^2x\cdots \quad &\Leftrightarrow \quad Tr_{\mathcal{H}}\cdots, \qquad (2.20)\\
f(q,p)\star g(q,p) \quad &\Leftrightarrow \quad O_fO_g=O_{f\star g}. \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

これについては、以下の計算によってその対応を見ることができる。まず Campbell-Hausdorff の公式を適用することによって、以下の関係式を得る。

$$
\begin{aligned}
U(\tau_1,\sigma_1)U(\tau_2,\sigma_2) &= \exp\left(-i((\tau_1+\tau_2)\hat{q}+(\sigma_1+\sigma_2)\hat{p})+\frac{1}{2}[-i(\tau_1\hat{q}+\sigma_1\hat{p}),-i(\tau_2\hat{q}+\sigma_2\hat{p})]\right)\\
&= U(\tau_1+\tau_2,\sigma_1+\sigma_2)\exp\left(\frac{-i}{2}(\tau_1\sigma_2-\tau_2\sigma_1)\right). \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

従って、まず演算子の積は次で計算することができる。

$$
O_fO_g = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d\sigma_1 d\tau_1 d\sigma_2 d\tau_2 U(\tau_1,\sigma_1)U(\tau_2,\sigma_2)\tilde{f}(\tau_1,\sigma_1)\tilde{g}(\tau_2,\sigma_2)
$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d\sigma_1 d\tau_1 d\sigma_2 d\tau_2 U(\tau_1+\tau_2,\sigma_1+\sigma_2)\tilde{f}(\tau_1,\sigma_1)\tilde{g}(\tau_2,\sigma_2)\exp\left(\frac{-i}{2}(\tau_1\sigma_2-\tau_2\sigma_1)\right) \quad (2.23)$$

従って、$\tau_3=\tau_1+\tau_2$、$\tau_4=\frac{\tau_1-\tau_2}{2}$、$\sigma_3=\sigma_1+\sigma_2$、$\sigma_4=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$ とすれば、先程の積は次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} O_f O_g &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int d\sigma_3 d\tau_3 U(\tau_3,\sigma_3)\left[\frac{1}{(2\pi)^2}\int d\sigma_4 d\tau_4 \exp\left(\frac{i}{2}(\sigma_3\tau_4-\sigma_4\tau_3)\right)\right. \\ &\qquad \left.\tilde{f}\left(\tau_4+\frac{\tau_3}{2},\sigma_4+\frac{\sigma_3}{2}\right)\tilde{g}\left(-\tau_4+\frac{\tau_3}{2},-\sigma_4+\frac{\sigma_3}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int d\sigma_3 d\tau_3 U(\tau_3,\sigma_3) f\tilde{\star} g(\tau_3,\sigma_3) = O_{f\star g}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

以上によって、非可換空間における Moyal 積と、Hilbert 空間における演算子の積の対応の写像を構成することができた。即ち、Weyl-Moyal correspondence によって、2 次元非可換空間上の関数は 0 次元空間に対する行列模型によって記述することができる。このことは、後の議論において本質的な役割を果たす。

さて、演算子と関数の対応を用いて、具体的に非可換ソリトンの運動方程式の一般解を構築してみよう。これは次のようにして定式化することができる。

$$O=\sum_{n=0}^{\infty} a_n |n\rangle\langle n|. \quad (2.25)$$

ここで、a_n は方程式 $V'(\lambda)=0$ の任意の解であるとする。また、$|n\rangle$ は生成消滅演算子

$$a=\frac{\hat{q}+i\hat{p}}{\sqrt{2}},\quad a^\dagger=\frac{\hat{q}-i\hat{p}}{\sqrt{2}},\ \text{with}\ [a,a^\dagger]=1 \quad (2.26)$$

の固有状態であって、

$$|n\rangle=\frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle,\ \text{with}\ a|0\rangle=0. \quad (2.27)$$

として定式化される。この意味において、明らかに演算子 O は次を満足する。

$$O^2 = \sum_{n,m} a_n a_m |n\rangle\langle n|m\rangle\langle m| = \sum_{n,m} a_n a_m \delta_{nm}|n\rangle\langle m| = \sum_n a_n^2 |n\rangle\langle n|. \quad (2.28)$$

結論から言えば、$|n\rangle\langle n|$ は関数の形で次のように記述することができる。

$$|n\rangle\langle n| \Leftrightarrow \phi_n(r^2=x^2+y^2) = 2(-1)^n \exp(-r^2) L_n(-2r^2). \quad (2.29)$$

これを導出するためには、$|n\rangle\langle m|$ の一般形から考察していくのが良い。即ち、これを Weyl Moyal 変換した関数を次で表す。

$$f_{nm}(q,p)=\int dy \exp(-ipy)\langle q+\frac{y}{2}|n\rangle\langle m|q-\frac{y}{2}\rangle. \quad (2.30)$$

これを求めるためには、次の母関数を導入して計算するのが良い。

$$G(\lambda,\bar{\lambda},q,p)=\sum_{n,m}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\frac{\bar{\lambda}^m}{\sqrt{m!}} f_{nm}(q,p). \quad (2.31)$$

そこで、この方程式を具体的に解くことにする。そこで、コヒーレント状態は、Campbell-Hausdorff の公式により次の形で記述できることがわかる。ここで、

$$\lambda=-\frac{\sigma+i\tau}{\sqrt{2}},\quad \bar{\lambda}=-\frac{\sigma-i\tau}{\sqrt{2}} \quad (2.32)$$

であるとすれば、

$$|\lambda\rangle = U(\tau,-\sigma)|0\rangle = \exp(\lambda a^\dagger - \bar{\lambda}a)|0\rangle = \exp\left(-\frac{|\lambda|^2}{2}\right)\exp(\lambda a^\dagger)\exp(-\bar{\lambda}a)|0\rangle = \exp\left(-\frac{|\lambda|^2}{2}\right)\exp(\lambda a^\dagger)|0\rangle. \tag{2.33}$$

としてコヒーレント状態を記述できる。これは以下の関係式を満足する。

$$|\lambda\rangle\langle\lambda| = U|0\rangle\langle 0|\bar{U} = e^{-|\lambda|^2}\sum_{n,m}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\frac{\lambda^m}{\sqrt{m!}}|n\rangle\langle m|. \tag{2.34}$$

以上により、上記の母関数は次で記述することができる。

$$\begin{aligned} G(\lambda,\bar{\lambda},q,p) &= \exp(|\lambda|^2)\int dy e^{-ipy}\langle q+\frac{y}{2}|U|0\rangle\langle 0|\bar{U}|q-\frac{y}{2}\rangle = 2\exp(|\lambda|^2)\exp(-(q+\sigma)^2-(p+\tau)^2) \\ &= 2e^{-r^2-|\lambda|^2}\exp(\sqrt{2}r(\bar{\lambda}e^{i\phi}+\lambda e^{-i\phi})) \\ &= 2e^{-r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sqrt{2}\bar{\lambda}re^{i\phi}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{r\sqrt{2}}e^{-i\phi}\right)^n\exp(\sqrt{2}re^{-i\phi}). \end{aligned} \tag{2.35}$$

ここで、極座標 (r,ϕ) は、$q+ip = re^{i\phi}$ の意味で用いている。さて、更に変数変換として、

$$y = 2r^2, k = -\frac{1}{\sqrt{y}}\lambda e^{-i\phi}. \tag{2.36}$$

と置き換えると、上記の母関数は、Laguerre 多項式に関する公式

$$\sum_{m=0}^{\infty}L_m^{n-m}(y)k^m = e^{-yk}(1+k)^n \tag{2.37}$$

を用いることによって次で書き換えられる。

$$\begin{aligned} G(\lambda,\bar{\lambda},q,p) &= 2e^{-r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sqrt{2}\bar{\lambda}re^{i\phi}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{r\sqrt{2}}e^{-i\phi}\right)^n\exp(\sqrt{2}re^{-i\phi}) \\ &= 2\exp\left(-\frac{y}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\bar{\lambda}\sqrt{y}e^{i\phi})^n(1+k)^ne^{-yk} \\ &= 2\exp\left(-\frac{y}{2}\right)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\bar{\lambda}\sqrt{y}e^{i\phi})^nL_m^{n-m}(y)(-y^{-\frac{1}{2}}\lambda e^{-i\phi})^m. \end{aligned} \tag{2.38}$$

以上により、λ, $\bar{\lambda}$ の冪を数えることによって関数 f_{nm} は以下の形であることがわかる。

$$f_{nm}(r,\phi) = 2e^{-r^2}\frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{m!}}(-1)^n(2r^2)^{\frac{m-n}{2}}\exp(i\phi(m-n))L_n^{m-n}(2r^2). \tag{2.39}$$

以上の考察によって、非自明な非可換ソリトン解として以下の形のものが構築されたことになる。

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n|n\rangle\langle n| \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}a_n 2(-1)^ne^{-r^2}L_n(2r^2). \tag{2.40}$$

3　2 次元非可換場の理論と、0 次元行列模型との対応

ここまでで、非可換ソリトンに関する Gopakumar, Minwalla, Strominger の仕事に関して簡単に復習をした。次は、上記の基礎知識を踏まえて本題に入ることにする。まずは、2 次元非可換場の理論と行列模型についての対応関係を見ることにする。これについては、2 節で既に見たとおりであるが、作用

$$S_{NC}[\theta,V] = \int d^2y\left[\frac{1}{2}\partial_y T\star\partial_y T + V_\star(T)\right] \tag{3.1}$$

は、変数変換 $y \to x = \frac{1}{\sqrt{\theta}} y$ によって、

$$S_{NC}[\theta, V] = \theta \int d^2x \left[V_\star(T) + \frac{1}{2\theta}(\partial_x T)^2 + \cdots \right]. \tag{3.2}$$

として記述される。これは既に説明をした Weyl-Moyal correspondence を用いることによって、次の 0 次元行列模型に帰着することができる。

$$S_{NC}[\theta, V] = \theta Tr_{\mathcal{H}} \left[V(T) + \frac{1}{\theta} \left(-\frac{1}{2}[\hat{x}, T]^2 \right) + \cdots \right]. \tag{3.3}$$

次に、行列模型 (3.3) を古典的、量子論の両側面から考察を加えることにする。

3.1 古典的な真空とインスタントン

この理論の古典解は、$\theta \to \infty$ の極限においては非常に自明に得ることができる。これは方程式 $V'(T) = 0$ の解であって、

$$T = \sum_{l=1}^{N} \lambda_{a_l} P_l = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_k & & \\ & & & & \ddots & \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

として書ける。ここで、N は Hilbert space の次元、即ち行列の大きさであって、次で定義する。

$$N = \dim \mathcal{H} \tag{3.5}$$

λ_{a_l} は、方程式 $V'(\lambda) = 0$ の解の集合 (P は多項式 $V(\lambda)$ の次数)

$$\{\lambda_i (i = 1, \cdots, P-1) | V'(\lambda_i) = 0\} \tag{3.6}$$

のいずれかの値をとる。また、P_l は射影演算子であり、具体的には

$$P_l = \begin{pmatrix} & & & l & & \\ & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ l \to & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \text{ with } P_l^2 = P_l. \tag{3.7}$$

の形をとるものである。これについて固有値密度を次によって定義する。

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} \delta(\lambda - \lambda_{a_l}) \tag{3.8}$$

さて、簡単のために double-well potential に対して考察を行なう。具体的にはポテンシャルは次の形で与えられる。

$$V(T) = V_0 + \frac{\lambda_4}{4}(T^2 - T_0^2)^2. \tag{3.9}$$

そうすれば、二重に縮退した真空は明らかに次の形で与えられる。

$$T_{R,L} = \pm T_0 \mathbf{1}_N. \tag{3.10}$$

これは任意の θ の値について成立する古典解である。何故ならば、$\boldsymbol{T_{R,L}}$ は単位行列に比例するため、運動項に相当する **commutator** は θ の値に依らず消えるからである。エネルギーは

$$E_0 = \theta Tr_{\mathcal{H}} \left[V_0 \mathbf{1}_N \pm \frac{1}{\theta} T_0 \left(-\frac{1}{2} [\mathbf{x}, \mathbf{1}_N] \right) \right] = \theta V_0 Tr_{\mathcal{H}} \left[\mathbf{1}_N \right] = N \theta V_0. \tag{3.11}$$

で得られる。次に、(N_1, N_2) インスタントン解について考える。今度は、θ が大きいときにのみ限定される解であり、次で与えられる。

$$T_{N_1,N_2} = T_0 (P_{[N_1]} - P_{[N_2]}) \tag{3.12}$$

ここで、$P_{[N_{1,2}]}$ は階数 $N_{1,2}$ の射影演算子である $(N_1 + N_2 = N)$。先程の真空の解と大きく異なるのは、解が単位行列に比例しないため、commutator を落とせるのはあくまで $\theta \to \infty$ の極限に依っている点にある。これに対する固有値密度は次で与えられる。

$$\rho_{[N_1,N_2]}(\lambda) = n_1 \delta(\lambda - T_0) + n_2 \delta(\lambda + T_0), \text{ where } n_{1,2} = \frac{N_{1,2}}{N}. \tag{3.13}$$

3.2 量子論的なソリトン解と 3 つの相の存在

これまで 2 次元非可換場の理論の古典解について考察を加えてきたが、では量子論ではどのような描像をみることができるのであろうか。このときの経路積分は次で記述できる。

$$Z_{NC}[\theta, V, L_1, L_2] = \int [dT]_{L_1,L_2} \exp\left(-S_{NC}[\theta, V]\right). \tag{3.14}$$

これは図に示すような非可換平面上の経路積分を表す。ここで、L_1, L_2 は赤外発散を抑えるための cut-off

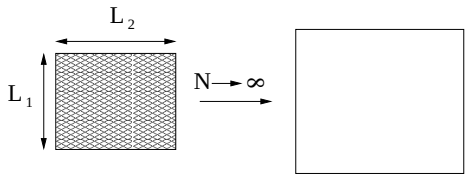

図 1: 量子論的な非可換場の理論に対する、非可換平面。

にあたる。これは、Weyl-Moyal correspondence によって、0 次元の行列模型に帰着することができるが、そのまえに cut-off の物理量と、非可換パラメーター θ、Hilbert 空間の大きさ N の間の対応を目に見える形で考察するために、2 次元非可換トーラス上の非可換場の理論を考察する。結論から言えば、この非可換な系においては、

large N と、**large** θ の二重のスケーリングの極限

を持つことが理解できる。

非可換トーラス上において、座標 X_1, X_2 は次の周期境界条件を満足するものとする。

$$X^a + L^a \delta^b_a \mathbf{1}_N = U_b^{-1} X^a U_b, \text{ with } (a, b = 1, 2). \tag{3.15}$$

そうすれば、(特に $L_1 = L_2 = L$ の場合) これは次の非可換性を満足する。

$$U_a U_b U_a^{-1} U_b^{-1} = \exp(-i\Theta^{ab}) \mathbf{1}_N, \text{ where } \Theta^{ab} = \theta^{ab} (\frac{2\pi}{L})^2. \tag{3.16}$$

このとき、スカラー場は行列 U を基底として記述することができる。

$$T = \sum_{(m_1,m_2) \in \mathbf{Z}} \tilde{T}_{(m_1,m_2)} U_1^{m_1} U_2^{m_2}. \tag{3.17}$$

そうすれば、N の大きい極限では次のようにエルミート演算子で記述できることがわかる。

$$U_a = \exp\left(2\pi i \frac{y^a}{L_a}\right), \text{ with } [\hat{y}_a, \hat{y}_b] \sim i\left(\frac{L_a L_b}{(2\pi)^2}\right)\Theta^{a\,b} = i\theta^{a\,b}. \tag{3.18}$$

そこで、非可換場の理論における分配関数を簡略化するために、**rational noncommutative torus** を考える。即ち非可換性が

$$\theta = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \Theta = \frac{1}{N}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2. \tag{3.19}$$

そうすれば、量子論的な非可換トーラス上では $N \times N$ 行列模型における次の分配関数に対応する。

$$\lim_{L_1, L_2 \to \infty} Z_{NC}[\theta, V, L_1, L_2] = \lim_{N\to\infty} Z_N[\theta, V, N], \text{ where} \tag{3.20}$$

$$Z_N[\theta, V, N] = \int [dT]_N \exp\left(-S_{NC}[\theta, V(T)]\right). \tag{3.21}$$

ここで、積分の測度は次で与えられるものである。

$$[dT]_N = \prod_{i=1}^{N} dT_{ii} \prod_{1\le i<j\le N} 2dRe(T_{ij})dIm(T_{ij}). \tag{3.22}$$

さて、これで θ の大きい極限を実現するには次のスケーリング則を考えればよい。

$$L, N \to \infty, \text{ and } \theta \sim \frac{L^2}{N} \to \infty. \tag{3.23}$$

これを実現するには次のオーダーの関係を要求すれば良い。

$$L \sim N^\gamma \Rightarrow \theta^{2\gamma - 1} \Rightarrow \gamma > \frac{1}{2}. \tag{3.24}$$

上記の考察の帰結として一番面白いのは、この行列模型の large N と large θ のスケーリングの関係に応じて、3 つの相が現われる点にある。古典論との本質的な違いは、量子論的な経路積分においては、

large N の行列模型の積分の測度を考える必要が生じた

点にある。ここでいう行列模型とは、1990 年代に低次元時空の bosonic な非臨界弦理論の非摂動的な定式化について考察するために提唱されたモデルのことを言う。これらの模型については、1990 年に Brezin 及び Kazakov [13] によって、Painleve 方程式と呼ばれる非線型な微分方程式に帰着することで厳密に解くことができる可能性が示唆された。以下の考察でははは行列の固有値を中心にして考える。こうした行列模型の扱い方について述べている論文で、有名なものとして [10] をあげることができる。$\lambda_1, \cdots \lambda_N$ を行列 T の固有値であるとすれば、積分の測度については次の重要な関係式が知られている。

[Prop]: T を $N \times N$ 行列であるとして、その固有値が $\lambda_1, \cdots \lambda_N$ であるとする。そうすれば積分の測度は次を満足する。

$$\begin{aligned}
[dT]_N &= \prod_{i=1}^{N} dT_{ii} \prod_{1\le i<j\le N} 2dRe(T_{ij})dIm(T_{ij}) \\
&= \prod_{i=1}^{N} d\lambda_i \prod_{1\le i<j\le N} (\lambda_i - \lambda_j)^2 dU_{ij} = (\prod_{i=1}^{N} d\lambda_i)(\det X)^2 dU_{ij}, \text{ where} \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_N \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} & \lambda_2^{N-1} & \cdots & \lambda_N^{N-1} \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

[証明] これについては発表者の修士論文 [7] や、Coleman の講義ノート [11] にも書いてあるが、もう一度繰り返しておく。まず、あるユニタリー行列 U が存在して、これによって T は次のように対角化できる。

$$UMU^{\dagger} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N). \tag{3.27}$$

そうすれば、測度は固有値とユニタリー行列の成分に別けることができる。通常の極座標表示では前者が動径方向、後者が角度成分に相当する。

$$dT = (\prod_{i=1}^{N} d\lambda_i) h(\lambda_1, \cdots, \lambda_N) dU_{ij} \tag{3.28}$$

残された仕事は、関数 $h(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$ を決定することである。そこで、ユニタリー行列の成分につい微小変換を行なう (言うまでもなく、ユニタリー行列の集合の群のリー環はエルミート行列の集合である)。そこで、微小変換を表すリー環のエルミート行列

$$u_{ij} = \epsilon_{ij} E_{ij} + \epsilon_{ij}^{\dagger} E_{ji} \tag{3.29}$$

によって変換すれば、

$$[\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_N), u_{ij}] = (-\epsilon_{ij} E_{ij} + \epsilon_{ij}^{\dagger} E_{ji})(\lambda_i - \lambda_j) \tag{3.30}$$

としてかける。従って、測度に関する寄与は $(\lambda_i - \lambda_j)^2$ である。よって、全体の寄与は Vandermonde 行列式で与えられる。[証明終]

こうして 0 次元場の理論の行列模型について、固有値で記述したときに Vandermonde determinant が現われたことは、非可換ソリトンの量子論を考えるうえで本質的な役割を果たす。これによって分配関数は、次で記述できる。

$$\begin{aligned} Z_N &= C_N \int (\prod_{k=1}^{N} d\lambda_k) \prod_{1 \le i < j \le N} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \exp\left(-\theta \sum_k V(\lambda_k) \right) \\ &= C_N \int (\prod_{k=1}^{N} d\lambda_k) \exp(-S_{eff}(\lambda_1, \cdots \lambda_N)). \end{aligned} \tag{3.31}$$

ここで、$C_N = \mathrm{Vol}[\frac{U(N)}{U(1)^N \times \mathcal{S}_N}] = \frac{1}{N!} \prod_{k=1}^{N} \frac{(2\pi)^{K-1}}{\Gamma(K)}$ は、角度成分の積分の体積にあたる量であり、以下の議論においては本質的な役割を果たさない ($\mathcal{S}_N$ は N 個の固有値の permutation の対称性である)。

ここで分配関数は、次の二つの成分 $S_{eff} = S_{cl} + S_m$ に別けることができる。

- $S_{cl}[N, \theta] = \theta \sum_{k=1}^{N} V(\lambda_k) = N\theta \left(\sum_{k=1}^{N} V(\lambda_k) \right) \sim \mathcal{O}(N\theta)$:
  これは、古典論でも存在した項である。
- $S_m[N] = N^2 \left(\frac{1}{2N^2} \sum_{1 \le l \ne l \le N} \ln(\lambda_k - \lambda_l)^2 \right) \sim \mathcal{O}(N^2)$:
  これは量子論に特有の項であり、積分の測度に由来するものである。

N と θ のオーダーの関係によって次の 3 つの相にわけることができる。

- GMS phase: $\theta \sim N^{\nu}$ で、$\nu > 1$ のとき。S_{cl} が $\theta \to \infty$ の極限で支配的であり、量子論的な効果を無視できる。
- planar phase: $\theta \sim N$ であり、古典的な効果と積分の測度に起因する効果が同程度である。
- disordered phase: $\theta \sim N^{\nu}$ で、$\nu < 1$ のとき。今度は S_m が $\theta \to \infty$ の極限で支配的であり、積分の測度の成分のほうが支配的である。

次に、この非可換ソリトンの真空とインスタントン解について考察を行なう。この問題を扱うには、$N \to \infty$ の極限を考えて、固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ の分布を、連続な固有値密度関数 $\rho(\lambda)$ によって記述することができる。ただし、この関数の台 (support)$\mathcal{D}$ は有限な領域であるものとする。これもまた、[10] の論文で述べられた手法に基づくものである。

$$\int_{\mathcal{D}} d\lambda \rho(\lambda) = 1, \text{ and } \rho(\lambda) \geq 0 \text{ on } \lambda \in \mathcal{D} \tag{3.32}$$

そうすれば、先程の有効作用は次の形で連続な固有値密度を用いて記述することができる。

$$S_{eff}[\rho] = N^2 \left[g_{\text{eff}}^{-2} \int_{\mathcal{D}} d\lambda \rho(\lambda) V(\lambda) - \int_{\mathcal{D}} d\lambda d\mu \rho(\lambda)\rho(\mu) \ln|\lambda - \mu| \right]. \tag{3.33}$$

ここで、$g_{eff}^2 = \frac{N}{\theta}$ は、ある **relative weight** である。さて、この理論の固有値分布を調べるには、[10] で調べられた鞍点法による解析を実行する。以下では、具体的に double-well potential

$$V(T) = V_0 + \frac{1}{4}(T^2 - T_0^2)^2. \tag{3.34}$$

について、[10] の手法で解析する。すなわち、このポテンシャルに対して、λ について微分をして、$\frac{d}{d\lambda} S_{eff} = 0$ を解けば、

$$\frac{g_{\text{eff}}^{-2}}{2} \lambda(\lambda^2 - T_0^2) = Pv \int_{\mathcal{D}} d\mu \frac{\rho(\mu)}{\lambda - \mu} = Re \left(\int_{\mathcal{D}} d\mu \frac{\rho(\mu)}{\lambda - \mu} \right). \tag{3.35}$$

を得ることができる。ここで、ポテンシャルは y 軸について左右対称であることから、台もまた y 軸について対称であるものとして、

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathcal{R} | a \leq |x| \leq b\} \tag{3.36}$$

であるとする。そうすれば、関数 $F(\lambda) = \int_{\mathcal{D}} d\mu \frac{\rho(\mu)}{\lambda - \mu}$ は、実軸上の branch cut$a \leq |x| \leq b$ 以外の全複素平面上の領域で定義される複素関数であって、以下の性質を課せられるものである。

1. まず、cut $\mathcal{D}$ 上以外では、解析的な複素関数であること。
2. $\int_{\mathcal{D}} d\lambda \rho(\lambda) = 1$ であることの当然の帰結として、$|\lambda| \to \infty$ の極限では、$F(\lambda) \to \frac{1}{\lambda}$ を満足すること。
3. $F(\lambda)$ は、$\lambda \in \mathcal{R}$ で、$\mathcal{D}$ 以外の領域にあるときには、$F(\lambda) \in \mathcal{R}$ であること。
4. λ が、branch cut に近づいたときに、以下を満足すること。

$$F(\lambda \pm i\epsilon) = \frac{g_{\text{eff}}^{-2}}{2} \lambda(\lambda^2 - T_0^2) \mp i\pi u(\lambda). \tag{3.37}$$

これは、主値積分の公式 $\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \text{Pv}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$ に起因するものである。

これらの性質をもとにして、具体的に関数の形を決定していくことにする。4. の要請によって、関数は次の形に決定される。

$$F(\lambda) = \frac{g_{\text{eff}}^{-2}}{2}(\lambda^3 - \lambda T_0^2) - g(x)\sqrt{(\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - b^2)}. \tag{3.38}$$

ここで、$g(\lambda)$ はある多項式であるが、2. の要請によって、$\lambda \to \infty$ の極限によって、$\frac{\lambda_4}{2}(\lambda^3 - \lambda T_0^2 \lambda)$ を打ち消すようになっていなければいけない。したがって、ルートの中が $\mathcal{O}(\lambda^2)$ であることから、$g(\lambda)$ は 1 次の多項式でなければいけない。

$$g(\lambda) = p\lambda + q \tag{3.39}$$

であるとすれば、ここで問題にしている平方根が

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(\lambda^2-a^2)(\lambda^2-b^2)} = \lambda^2\sqrt{1-\frac{a^2+b^2}{\lambda^2}+\frac{a^2b^2}{\lambda^4}} \\
=\ & \lambda^2\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{a^2+b^2}{\lambda^2}+\frac{a^2b^2}{\lambda^4}\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{a^2+b^2}{\lambda^2}+\frac{a^2b^2}{\lambda^4}\right)^2+\cdots\right) \\
=\ & \lambda^2-\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{4a^2b^2-(a^2+b^2)^2}{8\lambda^2}+\mathcal{O}(\lambda^{-4}).
\end{aligned} \tag{3.40}$$

として展開できることを用いれば、

$$\begin{aligned}
F(\lambda) &= \frac{g_{\rm eff}^{-2}}{2}(\lambda^3-\lambda T_0^2)-(p\lambda+q)\left(\lambda^2-\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{4a^2b^2-(a^2+b^2)^2}{8\lambda^2}+\mathcal{O}(\lambda^{-4})\right) \\
&= \lambda^3(\frac{g_{\rm eff}^{-2}}{2}-p)-q\lambda^2+\lambda\left(-T_0^2\frac{g_{\rm eff}^{-2}}{2}+\frac{p(a^2+b^2)}{2}\right)-\frac{q(a^2+b^2)}{2}+\frac{p(a^2-b^2)^2}{8\lambda}+\mathcal{O}(\lambda^{-2}) \\
&= \frac{1}{\lambda}+\mathcal{O}(\lambda^{-2}).
\end{aligned} \tag{3.41}$$

となるように係数比較をして、高次の項をキャンセルするように係数及び固有値密度関数の台の領域についての条件が課せられる。

$$p=\frac{g_{\rm eff}^{-2}}{2},\quad q=0,\quad a^2+b^2=2T_0^2,\quad (a^2+b^2)^2-4a^2b^2=16g_{\rm eff}^2. \tag{3.42}$$

以上により、まず一次多項式 $g(\lambda)$ は、$g(\lambda)=\frac{g_{\rm eff}^2}{2}\lambda$ であり、台の領域に関して言えば a^2、b^2 は二次方程式

$$t^2-2T_0^2t+\left(T_0^4-4g_{\rm eff}^2\right)=0 \tag{3.43}$$

の解であることがわかる。即ち

$$a=\sqrt{T_0^2-2g_{\rm eff}^2},\quad b=\sqrt{T_0^2+2g_{\rm eff}^2}. \tag{3.44}$$

であることがわかる。固有値密度関数は (3.37) の条件に立ち返って求めることができる。

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2}g_{\rm eff}^{-2}\sqrt{-(\lambda^2-a^2)(\lambda^2-b^2)} & \lambda\in\mathcal{D}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.45}$$

この固有値密度は、古典論の極限では確かに古典的な運動方程式から求めたものに帰着することがわかる。即ち、$g_{\rm eff}=\sqrt{\frac{N}{\theta}}\to 0$ としたときについて言えば、

$$\rho_s \overset{g_{\rm eff}\to 0}{\to} \rho_{cl}=\frac{1}{2}\delta(\lambda-T_0)+\frac{1}{2}\delta(\lambda+T_0). \tag{3.46}$$

を得ることができる。これは特に古典解のときの、$[\frac{N}{2},\frac{N}{2}]$-instanton 解に対応をしている。

さて、以上の考察から読みとれるこうした量子論的な非可換場の理論のソリトン解について興味深い性質は、

固有値分布について、量子論では互いに斥力が働く

点にある。こうして斥力が働くことは、量子論的な効果であって、古典論の範囲内では決してみることのできない効果である。

さて、この効果は通常の可換な系における状況とは大きく異なっていることに気付く。非可換場の理論では、

固有値同士に引力ではなく、斥力が働いている。

通常の量子力学の二次摂動の寄与は、基底状態のまわりでは負の値になって現われ、したがって引力としての寄与をおよぼす。このことは次のようにして見ることができる。ポテンシャル $H = H_0 + \epsilon V$ に対しては、摂動によるポテンシャルの補正は、

$$\begin{aligned} &E_n = E_n^{(0)} + \epsilon E_n^{(1)} + \epsilon^2 E_n^{(2)} + \cdots, \text{ where} \\ &E_n^{(1)} = \langle \phi_n^{(0)} | V | \phi_n^{(0)} \rangle, \quad E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle \phi_m^{(0)} | V | \phi_n^{(0)} \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

として与えられる。もし、$E_n^{(0)}$ が基底状態のエネルギーであるとすれば、その他のいかなる状態についてもエネルギー $E_m^{(0)}$ は、

$$E_n^{(0)} - E_m^{(0)} < 0 \tag{3.48}$$

を満足する。したがって、分子は明らかに正の物理量であるため、$E_n^{(2)} < 0$ であって、常に引力としての作用をすることがわかる。良い例として、Van der Waars 力を考えることにしよう。二つの原子 1,2 が十分離れているとする。原子 1,2 が単独にいるときのハミルトニアンを H_1, H_2 とすれば、原子間の双極子モーメントに関する寄与 V を摂動として取り入れると、全体のハミルトニアンは次で記述できる。

$$H = H_1 + H_2 + V = H_1 + H_2 + \frac{1}{R^3}\left((\hat{d}_1 \cdot \hat{d}_2) - \frac{3(\hat{d}_1 \cdot R)(\hat{d}_2 \cdot R)}{R^2} \right). \tag{3.49}$$

このときの原子 1,2 の基底状態をそれぞれ、$|\phi^{(0)}; 1\rangle$ 及び $|\phi^{(0)}; 2\rangle$ であるとする。このとき、一次摂動の効果は存在しないことがわかる。一次摂動の寄与は、

$$\langle \Phi^{(0)} | V | \Phi^{(0)} \rangle = \frac{1}{R^3}\left(\langle \hat{d}_1 \rangle \langle \hat{d}_2 \rangle - \frac{3(\langle \hat{d}_1 \rangle \cdot R)(\langle \hat{d}_2 \rangle \cdot R)}{R^2} \right). \tag{3.50}$$

であるが、$\langle \hat{d}_i \rangle = \langle \phi^{(0)}; i | \hat{d}_i | \phi^{(0)}; i \rangle$ は時間反転などの議論により、通常 0 としてもよい。そこで、摂動の効果で支配的なのは、二次摂動であって、これは $-\frac{1}{R^6}$ の寄与を与えるが、これが Van der Waars 力として作用をする。

話を戻して、非可換場の理論であれば上記の考察に反して量子論的な効果が引力ではなく斥力となって生じることを見るためには、量子論的なエネルギーと、古典的なエネルギーを比較してやればよい。ここで、ポテンシャル $V(\lambda)$ を凸関数であるとする。そこで、

$$V_0 = V(\lambda_s): \text{ ポテンシャルの極小値}$$

であるとする。すなわち任意の λ に関して $V(\lambda) \geq V_0$ である。さて、固有値密度は $\int_{\mathcal{D}} \rho(\lambda) d\lambda = 1$ であることから、次のようにして Lagrange の未定乗数法によって鞍点法の解析を行なう。

$$S_{\text{tot}}[\rho] = S_{\text{eff}}[\rho] + E\left(1 - \int_{\mathcal{D}} d\lambda \rho(\lambda)\right). \tag{3.51}$$

そうすれば、これを $\rho(\lambda)$ について変分をとることによって次を得ることができる。

$$N^2 \left[g_{\text{eff}}^{-2} V(\lambda) - 2 \int_{\mathcal{D}} d\mu \rho(\mu) \ln|\lambda - \mu| \right] - E = 0. \tag{3.52}$$

従ってこれに $\rho(\lambda)$ をかけて積分をすることで、次を得る。

$$E = N^2 \left[g_{\text{eff}}^{-2} \int_{\mathcal{D}} d\lambda \rho(\lambda) V(\lambda) - 2 \int d\mu d\lambda \rho(\mu)\rho(\lambda) \ln|\mu - \lambda| \right]. \tag{3.53}$$

そうすれば、有効作用は次で記述できる。

$$\begin{aligned} S_{\rm eff}[\rho] &= E + \frac{1}{2}N\theta\left(\int d\lambda\rho(\lambda)V(\lambda)\right) - \frac{E}{2} \\ &= E + \frac{1}{2}N\theta\int_{\mathcal{D}} d\lambda\rho(\lambda)\left(V(\lambda) - V_0\right) \geq E = N\theta V_0. \end{aligned} \tag{3.54}$$

古典的な極限では、$S_{\rm cl} = N\theta V_0$ であることがわかる。従って、常に、量子論的な有効作用は、古典的なエネルギーよりも大きく、従って常に固有値分布の間には斥力が働いていることがわかる。

このことを具体的に見るために、調和振動子のポテンシャル $V(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2$ を考えることにしよう。古典的には明らかにポテンシャルの極小値は 0 である。次に量子論的なエネルギーの有効作用について考えることにしよう。そのためにはまた [10] の手法に基づいて固有値密度関数を求めることにする。今度は、固有値分布関数 $\rho(\lambda)$ の台を $-a \leq x \leq a$ であるとする。そうすれば同様にして λ について有効作用を微分することで今度は運動方程式

$$\frac{1}{2}\lambda = Pv\int_{\mathcal{D}} d\mu\frac{\rho(\mu)}{\lambda - \mu}. \tag{3.55}$$

を得る。そこで、同様にして $F(\lambda) = \int_{\mathcal{D}} d\mu\frac{\rho(\mu)}{\lambda-\mu}$ とすれば、同様に先程の 4ヶ条の条件を要求することによって、

$$F(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - a^2}\right). \tag{3.56}$$

として関数形を決定できる。そうすれば、$\lim_{|\lambda|\to\infty} = \frac{1}{\lambda}$ の条件を課すことで、

$$F(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda - \lambda(1 - \frac{a^2}{2\lambda^2} + \cdots)) = \frac{a^2}{4\lambda} + \mathcal{O}(\lambda^{-3}). \tag{3.57}$$

として展開されることから、$a = 2$ より、固有値分布関数の台の範囲を

$$-2 \leq \lambda \leq 2. \tag{3.58}$$

として決定できる。従って調和振動子に対する固有値分布関数は (3.37) を用いることで、

$$\rho_{\rm harmonic}(\rho) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - \lambda^2} \tag{3.59}$$

を得る。従って古典論におけるポテンシャルの極小値は明らかに 0 であることから、量子論におけるゼロ点エネルギーは以下で計算できる。

$$\Delta E = S_{\rm eff}[\rho_{\rm harmonic}] = \frac{1}{2}N\theta\int_{-2}^{2} d\lambda\frac{1}{2\pi}\frac{\lambda^2}{2}\sqrt{4 - \lambda^2} = \frac{N\theta}{4}. \tag{3.60}$$

となる。ここで一つ注意せねばならない点は、**disordered phase** では measure の量子論的な寄与が支配的であって、large N の極限で鞍点法を用いることができないので上記のような考察ができないことである。

最後に Vandermonde effect が摂動論 (即ち、Feynman diagram による考察) の見地からも

$$\theta \to \infty, \;\; L \to \infty \tag{3.61}$$

の極限において自明に読み取れることを補足しておく。ここでも double-well potential を用いて解析を行なうことにする。ここでも double-well のポテンシャルを考察することにするが、真空のまわりで展開すれば、$T(x) = T_0 + \phi(x)$ として、非可換場の理論の作用は、

$$S_{NC} = \theta\int d^2x\left[V_0 + \left(\lambda_4 T_0^2\phi^2 + \lambda_4 T_0\phi^3 + \frac{\lambda_4}{4}\phi^4\right) - \frac{1}{2\theta}(\partial_x\phi)^2\right]. \tag{3.62}$$

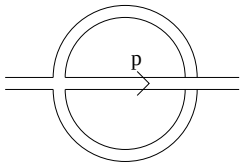

図 2: 非可換場の理論における non-planar なダイアグラム。

として与えられる。そこで、次のような non-planar なダイアグラムを考えてみる。これについては、[4] の論文で詳しく調べられているが、この one-loop 積分は次で計算される。まずは、非可換空間の場の理論における Feynman rule について復習しておこう。

- まずは、非可換積についての積分は、表面項を別にすればただの可換な積と同じであることを証明する。即ち、次の関係式が成立する。

$$\int d^d x \phi(x) \star \phi(x) = \int d^d \phi(x)\phi(x). \tag{3.63}$$

[証明] まず、このスター積は、次のようにして冪級数によって記述できる。

$$\begin{aligned}\int d^d x \phi(x) \star \phi(x) &= \int d^d x \phi(x)\phi(x) + \int d^d x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\prod_{p=1}^{k} \frac{i}{2} \theta^{i_p j_p} \frac{d}{dy^{i_p}} \frac{d}{dz^{j_p}} \right) \phi(y)\phi(z)|_{y=z=x} \\ &\overset{\nabla}{=} \int d^d x \phi(x)\phi(x) + \int d^d x \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{2} \right)^k \phi(x) \frac{1}{k!} \theta^{i_1 j_1} \theta^{i_2 j_2} \cdots \theta^{i_k j_k} \frac{d^{2k}\phi(x)}{dx^{i_1} dx^{j_1} \cdots dx^{i_k} dx^{j_k}}. \end{aligned} \tag{3.64}$$

ここで、$\frac{d^{2n}\phi(x)}{dx^{i_1} dx^{j_1} \cdots dx^{i_n} dx^{j_n}}$ は、$i_p \leftrightarrow j_p$ の入れ替えについて対称であるが、$\theta^{i_p j_p}$ は入れ替えについて反対称であるので、上記の冪級数の項は悉く消える。従って、関係式 (3.63) が成立する。[証明終]

- 次に、Moyal 積を Fourier 変換することで、vertex の寄与は、次で自明に得られる。

$$V(k_1, \cdots, k_n) = \exp\left(-\frac{i}{2} \sum_{1 \le i < j \le n} k_i \times k_j \right), \text{ where } k_i \times k_j = k_{i\mu} \theta^{\mu\nu} k_{j\nu}. \tag{3.65}$$

また、$k_1 = l_1 - l_2$、$k_2 = l_2 - l_3$、$\cdots$、$k_{n-1} = l_{n-1} - l_n$、$k_n = l_n - l_1$ であるとすれば、$k_p \times k_q = -k_q \times k_p$ であることをもちいて、

$$\begin{aligned}\sum_{1 \le i < j \le n} k_i \times k_j &= k_1 \times (k_2 + k_3 + \cdots + k_n) + k_2 \times (k_3 + \cdots k_n) + \cdots + k_{n-1} \times k_n \\ &= (l_1 - l_2) \times (l_2 - l_3 + l_3 - l_4 + \cdots l_n - l_1) + \cdots + (l_{n-1} - l_n) \times (l_n - l_1) \\ &= (l_1 - l_2) \times (l_2 - l_1) + (l_2 - l_3) \times (l_3 - l_1) + \cdots + (l_{n-1} - l_n) \times (l_n - l_1) \\ &= 0 + (l_1 \times l_2 + l_2 \times l_3 - l_1 \times l_3) + (l_1 \times l_3 + l_3 \times l_4 - l_1 \times l_4) \\ &\quad + \cdots + (l_{n-1} \times l_n + l_1 \times l_{n-1} + l_n \times l_1) \\ &= l_1 \times l_2 + l_2 \times l_3 + \cdots l_{n-1} \times l_n + l_n \times l_1. \end{aligned} \tag{3.66}$$

を得ることができる。このことの当然の帰結として、planar diagram では非可換積に起因する位相の効果は存在しない。何故なら、全ての vertex について、位相の効果が打ち消し合うからである。それに対して、non-planar なダイアグラムであれば、

$$\exp(i k_i \times k_j) \tag{3.67}$$

の位相の効果が生じる。

以上より、図に示した Feynman diagram は、

$$I_2 \sim \int \frac{d^2k}{k^2+m^2} e^{ik\times p}. \tag{3.68}$$

であることがわかる。ここで、質量は $m^2 = 2$ である。また、ここでの議論に関係しない定数倍は無視している。分母については、次の Schwinger parameter で置き換えることができることを用いる。

$$\frac{1}{k^2+m^2} = \int_0^{+\infty} dt \exp\left(-t(k^2+m^2)\right). \tag{3.69}$$

そうすれば、先程の Feynman diagram は次で評価できる。

$$I_2 \sim \int d^2k \int_0^{+\infty} dt \exp\left(-tk^2 - tm^2 + ik\times p\right). \tag{3.70}$$

これを k についてガウス積分すれば (以下、$m^2 = 2$ を代入)、次の関係式を得る。

$$I_2 \sim \int_0^{+\infty} dt \frac{1}{t} \exp\left(-2t - \frac{p_\mu(\theta^2)^{\mu\nu}p_\nu}{4t}\right). \tag{3.71}$$

そこで、t が小さいときの発散を正則化するために、次の cut off を導入する。

$$I_2 \sim \int_0^{+\infty} dt \frac{1}{t} \exp\left(-2t - \frac{1}{t}\left(\frac{p_\mu(\theta^2)^{\mu\nu}p_\nu}{4} + \frac{1}{\Lambda_{UV}^2}\right)\right). \tag{3.72}$$

そこで、運動量の効果も込めて、有効 cut off を次で定義する。

$$\Lambda_{\text{eff}}^{-2} = \Lambda_{\text{UV}}^{-2} + \frac{p_\mu(\theta^2)^{\mu\nu}p_\nu}{4}. \tag{3.73}$$

そうすれば、数学公式集に載ってある公式を用いることで、次で non-planar なダイアグラムの one-loop の効果が評価できる。

$$I_2 = \int_0^{\infty} dt \frac{1}{t} \exp\left(-2t - \frac{\Lambda_{\text{eff}}^{-2}}{t}\right) = 2K_0\left(\frac{2m}{\Lambda_{\text{eff}}}\right). \tag{3.74}$$

このようにして、ベッセル関数で上記の Feynman diagram の効果を得ることができたことは、量子論においての Vandermonde effect で見られた 3 つの相の存在の兆候を表していることを次のようにして見ることができる。ここで、cut-off parameter については、おおまかには

$$\Lambda_{\text{eff}}^{-2} = \Lambda_{\text{UV}}^{-2} + (\theta\cdot\mathbf{p})^2.$$

であるから、$p \sim \frac{1}{L}$ においては、

$$I_2 \sim 2K_0\left(\frac{2m\theta}{L}\right) \tag{3.75}$$

として書ける。一方、非可換トーラス上の非可換パラメーターは、$\theta = \frac{1}{N}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$ と書けたので、$L \sim \sqrt{\theta N}$ の関係が成立する。このことに喚起すれば、結局は非可換場の理論における non-planar な one-loop diagram の効果は、

$$I_2 \sim 2K_0\left(\frac{2m}{g_{\text{eff}}}\right) \tag{3.76}$$

を得ることができる。これをそれぞれの相について詳しく見てみることにしよう。

- $\theta \sim N^\nu$ (但し $\nu > 1$) のとき (GMS phase)。$g_{\text{eff}} \to 0$ なので、$I_2 \to 0$ である。
- $\theta \sim N$ のとき (planar phase)。g_{eff} は有限の量であり、I_2 もまた有限の寄与を与える。
- $\theta \sim N^\nu$ (但し $\nu < 1$) のとき (GMS phase)。$g_{\text{eff}} \to \infty$ なので、$I_2 \to \infty$ である。

このように、量子論における 3 つの相の存在は、非可換場の理論における Feynman diagram についての考察を行なうことによっても理解することができる。

3.3 運動項の寄与について

次に、2 次元非可換場の理論において、運動項の寄与

$$S_{-1} = \int d^2x \mathcal{L}_{-1} = \int d^2x \left(-\frac{1}{2}[x, T]_\star \right) \tag{3.77}$$

を無視できるための条件について考察を加える。後でみるように量子論的に考えれば、この項の寄与は

$$S_1 \sim \mathcal{O}(N^3\theta^{-1}) = \mathcal{O}(N^2 g_{\text{eff}}^2). \tag{3.78}$$

として評価できる。従って量子論の効果をも考えて考察すれば、経路積分の measure の寄与が支配的である、即ち

$$S_{\text{eff}} \sim \mathcal{O}(N^2) \gg S_{-1} \sim \mathcal{O}(N^2 g_{\text{eff}}^2) \tag{3.79}$$

であることから、GMS phase においては $g_{\text{eff}} \to 0$ より、

$$g_{\mathbf{eff}} \to 0 \text{ の極限では運動項を無視できる}$$

ことを証明する。運動項の寄与は、この理論の枠組みでは Weyl-Moyal mapping で 0 次元場の理論の行列模型に移したときに、$U(N)$ 対称性を破る働きをしている。以下、この項のオーダー評価について、二つのアプローチから考察をする。前者は、摂動論的な考察であり、後者は非摂動的な考察である。

摂動論的な扱い

まずは、Weyl-Moyal mapping を用いて、0 次元場の理論の行列模型としての扱いを行なう。ここで、場は次の調和振動子の固有状態によって張られるように rescale される。

$$|n\rangle = \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle, \text{ where } \frac{1}{2}[\hat{x}^1 \pm i\hat{x}^2] = (a, a^\dagger). \tag{3.80}$$

そうすれば、特に double-well のポテンシャル

$$\begin{aligned} V(T) &= V_0 + \frac{\lambda_4}{4}(T^2 - T_0^2)^2 = V(0) + \frac{m^2}{2}T^2 + \frac{\lambda^4}{4}T^4, \text{ where} \\ V(0) &= V_0 + \frac{\lambda_4}{4}T_0^4, \quad m^2 = -\lambda_4 T_0^2. \end{aligned}$$

を考えれば、行列模型に写像した後の分配関数は次の形で記述できる。

$$Z_N = \int [dT]_N \exp(-S_{NC}[\theta, T]), \text{ where } S_{NC} = (S_{cl} + S_{0P} + S_{0V}) + S_{-1}. \tag{3.81}$$

ここで、作用を 4 つに別けたそれぞれの項は次のとおりである。

$$S_{cl} = \theta Tr V(0), \quad S_{0P} = \theta Tr \left(\frac{m^2}{2}T^2 \right), \quad S_{0V} = \theta Tr \left(\frac{\lambda_4}{4}T^4 \right), \quad S_{-1} = Tr \left(-\frac{1}{2}[\hat{x}, T]^2 \right). \tag{3.82}$$

まずは、摂動論的に主要なオーダーを評価する。自由エネルギーの、量子効果による補正の主要なオーダーの項は次で評価できる。

$$\langle S(T) \rangle_{0P} = \frac{1}{Z_{0P}} \int [dT] S(T) \exp(-S_{0P}) = S_{cl} + \Delta S_{0P} + \Delta S_{0V} + \Delta S_{-1} \tag{3.83}$$

ここで、$Z_{0P} = \int [dT] \exp(-S_{0P})$ の意味である。以上により、オーダー評価は次のとおりである。

$$\begin{aligned} &S_{cl} = \theta Tr V(0) \sim \theta N V(0), \quad \Delta S_{0P} = \theta m^2 \langle {}_{0P}T^2 \rangle \sim N^2, \\ &\Delta S_{0V} = \langle S_{0P} \rangle_{0P} = \theta \lambda_4 \frac{N^3}{(\theta m^2)^2}, \quad \Delta S_{-1} = \langle S_{-1} \rangle_{0P} = \frac{N^3}{\theta m^2}. \end{aligned} \tag{3.84}$$

上記のオーダー評価を行なうには、下図のようにダイアグラムを考えてみれば良い。

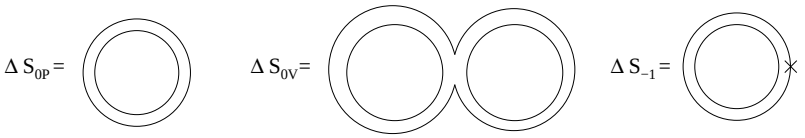

図 3: 左から順に、プロパゲーターの one-loop の寄与、vertex の寄与、運動項の寄与。

- まず、プロパゲーターの寄与については、one-loop のダイアグラムで表される。したがって、$\langle TT\rangle_{0P} \sim \frac{1}{\theta m^2}$ であるから、具体的な寄与は、次で表される。

$$(\theta m^2) \times \frac{1}{\theta m^2}[\text{propagator}] \times (N[\text{color loop}])^2 = N^2. \tag{3.85}$$

- 次に、vertex の寄与については 8 の字型のダイアグラムで表される。これについては次で計算できる。

$$(\theta\lambda_4) \times (\frac{1}{\theta m^2}[\text{propagator}])^2 \times (N[\text{color loop}])^3 = \frac{\lambda_4 N^3}{\theta m^2}. \tag{3.86}$$

- 最後に、運動項の寄与について考察する。これについては、次の二つの項が考えられる。$Tr(T\hat{x}_a T\hat{x}_a)$ と、$Tr(T^2\hat{x}_a^2)$ であるが、前者については $Tr(\hat{x}_a) = 0$ であるから、自明に寄与しない。したがって後者の寄与のみを考える必要がある。これについては、

$$Tr(\hat{x}_a^2) = \sum_{n=0}^{N-1} n = \mathcal{O}(N^2) \tag{3.87}$$

  として評価できるので、全体としては、次のようにしてオーダー評価ができる。

$$(N[\text{color loop}]) \times (N^2[\text{insertion of } x_a^2]) \times (\frac{1}{\theta m^2}[\text{propagator}]) = \frac{N^3}{\theta m^2}. \tag{3.88}$$

そこで、次のようにして物理量を再定義して作用を書き直す。まず、プロパゲーターについては

$$\theta m^2 T^2 = M^2 \tag{3.89}$$

として記述する。そうすれば他の物理量を

$$\bar{\lambda}_4 = \frac{\lambda_4}{m^2}, \quad \bar{V}(0) = \frac{V(0)}{m^2}, \quad \bar{\theta} = \frac{m^2\theta}{N} = m^2 g_{\text{eff}}^2 \tag{3.90}$$

とおけば、作用は次の形で記述できる。

$$S_{NC} = N^2\bar{\theta}\bar{V}(0) + Tr\left[\frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{N}\frac{\bar{\lambda}_4}{\bar{\theta}}\left(\frac{1}{4}M^4\right) + \frac{1}{N}\frac{1}{\bar{\theta}}\left(-\frac{1}{2}[\hat{x}_a, M]^2\right)\right]. \tag{3.91}$$

場を再定義した (3.91) の作用は、まさに物理量の effective なオーダーを表すものである。そこで、摂動論の考察がそもそも意味をなすためには、vertex や運動項の寄与 (それぞれ $\frac{\lambda_4}{\theta}$ 及び、$\frac{1}{\theta}$) が、十分小さくなければいけない。そのためには、

$$\bar{\theta} \gg \bar{\theta}_4 \gg 1. \tag{3.92}$$

の条件が要求される。

非摂動的な解析

次に、運動項の寄与を無視できるための条件について、別のアプローチを考える。今度は、理論の自由エネルギーの評価を平均場近似によって行なう。これは本日の西村氏のコロキウム [9] でも見られた手法である。即ち、運動項による摂動の効果を次で評価する。まず、$\langle\cdots\rangle_0$ は、

$$\langle\cdots\rangle_0 = \frac{\int [dM](\cdots)e^{-S_0}}{\int [dM]e^{-S_0}}. \tag{3.93}$$

の意味で定義する。そうすれば、作用 $S_0 + S_{-1}$ についての自由エネルギーを評価したいときに、次のように考える。

$$e^{-F\text{exact}} = \int [dM]e^{-(S_0+S_1)} = \left(\int [dM]e^{-S_0}\right) \times \left(\frac{\int [dM]e^{-(S_0+S_1)}}{\int [dM]e^{-S_0}}\right) = \int [dM]e^{-S_0}\langle e^{-S_1}\rangle_0. \tag{3.94}$$

そこで、これについては凸不等式を用いて評価をする。即ち、$f(x)$ が下に凸な関数、即ち $f''(x) = 0$ であるとすれば、$0 < t < 1$ について

$$tf(a) + (1-t)f(b) > f\left(ta + (1-t)b\right) \tag{3.95}$$

を満足する。このことを用いれば、$\frac{d^2e^{-x}}{dx^2} > 0$ であることから、不等式 (3.95) を援用することが可能であり、

$$e^{-F\text{exact}} \geq \int [dM]e^{-S_0} \exp\left(-\langle S_{-1}\rangle_0\right) \tag{3.96}$$

を満足する。即ち自由エネルギーに関して言えば、

$$F_{\text{exact}} \leq F_0 + \Delta F, \text{ where } F_0 = -\ln \int [dM]e^{-S_0}, \quad \Delta F = \langle S_{-1}\rangle_0 \tag{3.97}$$

が成立する。そこで、あとは ΔF を具体的に評価してやればよい。そのためには、格子ゲージ論におけるプロパゲーターの公式を用いる。

$$\langle M_{kl}M_{mn}\rangle_0 = C_1\delta_{kl}\delta_{mn} + C_2\delta_{kn}\delta_{lm}, \text{ where} \tag{3.98}$$

$$C_1 = \frac{\langle (TrM)^2\rangle_0}{(N^2-1)} - \frac{\langle TrM^2\rangle_0}{N(N^2-1)}, \quad C_2 = -\frac{\langle (TrM)^2\rangle_0}{N(N^2-1)} + \frac{\langle TrM^2\rangle_0}{(N^2-1)}. \tag{3.99}$$

この公式は、以下のごく単純な対称性の議論によって理解することができる。まず、対称性によってこの形が

$$\langle M_{kl}M_{mn}\rangle_0 = C_1\delta_{kl}\delta_{mn} + C_2\delta_{kn}\delta_{lm}. \tag{3.100}$$

であることは自明にわかる。後は係数 C_1 及び C_2 を決定すればよいが、これも次の特別な場合を考えればよい。

- $k = l$ 及び $m = n$ のとき。式 (3.100) は次で記述できる。

$$\langle (TrM)^2\rangle_0 = \delta_{kk}\delta_{mm}C_1 + \delta_{km}\delta_{km}C_2 = N^2C_1 + NC_2. \tag{3.101}$$

- $k = n$ 及び $l = m$ のとき。同様にして、この式は次でかける。

$$\langle (TrM^2)\rangle_0 = \delta_{km}\delta_{km}C_1 + \delta_{kk}\delta_{mm}C_2 = NC_1 + N^2C_2. \tag{3.102}$$

あとは、連立方程式 (3.101)、(3.102) を C_1、C_2 について解くことによって、公式 (3.100) を得る。

公式 (3.100) を援用すれば、運動項の寄与は次の不等式によって評価できる。

$$\begin{aligned}
\Delta F &= \langle \frac{1}{N\bar{\theta}} Tr\left(-\frac{1}{2}[\hat{x}^a, M]^2\right)\rangle_0 = \langle \frac{1}{N\bar{\theta}}(-\hat{x}^a_{kl}\hat{x}^a_{mn}M_{lm}M_{nk} + \hat{x}^a_{kl}\hat{x}^a_{lm}M_{mn}M_{nk})\rangle \\
&= \frac{1}{\bar{\theta}}\left[-(\hat{x}^a_{lm}\hat{x}^a_{nk})\frac{1}{N}\langle M_{kl}M_{mn}\rangle_0 + (\hat{x}^a\hat{x}^a)_{nk}\frac{1}{N}\langle M_{kp}M_{pn}\rangle_0\right] \\
&= \frac{1}{\bar{\theta}}\left[-(\hat{x}^a_{lm}\hat{x}^a_{nk})\frac{1}{N}(C_1\delta_{kl}\delta_{mn} + C_2\delta_{kn}\delta_{lm}) + (\hat{x}^a\hat{x}^a)_{nk}\frac{1}{N}(C_1\delta_{kp}\delta_{pl} + C_2\delta_{kl}\delta_{pp})\right] \\
&= \frac{1}{\bar{\theta}}\left[C_2 Tr\{(x^a)^2\} - \frac{C_1}{N}\{Tr(x^a)\}^2\right] \\
&= \frac{1}{\bar{\theta}} Tr\{(x^a)^2\}\left(\frac{\langle (TrM^2)\rangle_0}{N^2-1} - \frac{\langle (TrM)^2\rangle_0}{N(N^2-1)}\right). \qquad (3.103)
\end{aligned}$$

ここで、$Tr(x^a) = 0$ であることを用いている。さらに、最後の式の ( ) は $\mathcal{O}(1)$ であり、$Tr\{(x^a)^2\} \sim \mathcal{O}(N^2)$ であることから、この寄与は最終的に次でオーダー評価できる。

$$\Delta F \sim \mathcal{O}(N^2\bar{\theta}^{-1}) = \mathcal{O}(N^2 g^2_{\rm eff}) \qquad (3.104)$$

従って、$g_{\rm eff} \to 0$ のときについては、運動項の寄与が無視できることが証明された。

4 (2+1) 次元非可換場の理論と、1 次元行列模型との対応

ここまでで考察してきたものは、2 次元空間の非可換場の理論と、0 次元空間における行列模型との対応関係であった。次に着目するのは、時間をいれたモデルである。すなわち、今度は (2+1) 次元場の理論に着目をして、行列模型との対応を考える。そうすれば、時間の効果をいれた行列模型との対応がつくことがわかる。

4.1 (2+1) 次元場の理論の復習

まずは、(2+1) 次元場の理論に関する復習から入るが、多くの事柄は前に考察した 2 次元空間場の理論と同じ性質であるので、ここではやや飛ばして説明を進める。「(2+1) 次元非可換空間」と言った場合、非可換性は空間成分のみに課して、時間と空間は交換する系をさすものとする。即ち交換関係としては、次を要求する。

$$[y^a, y^b] = i\theta^{ab}, \quad [t, y^a] = 0, \text{ with } a, b = 1, 2. \qquad (4.1)$$

このとき、スカラー場は時間、空間ともに依存するが、ポテンシャルは時間に依存しないものとする。そうすれば作用は次で記述できる。

$$S_{NC}[\theta, V] = \int_{R^{2,1}} dtd^2y \left[\frac{1}{2}\partial_t T \star \partial_t T - \frac{1}{2}\partial_y T \star \partial_y T - V_\star(T)\right] \qquad (4.2)$$

全く同様にして、$y \to x = \frac{1}{\sqrt{\theta}}y$ として rescale をすれば、作用は次のように書き換えることができる。

$$S_{NC(0+1)}[\theta, V] = \theta \int_{R^{2,1}} dtd^2x \left[\mathcal{L}_0 + \frac{1}{\theta}\mathcal{L}_{-1} + \cdots\right], \text{ where} \qquad (4.3)$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}[(\partial_t T)^2 - V(T)], \quad \mathcal{L}_{-1} = -\frac{1}{2}(\partial_x T)^2. \qquad (4.4)$$

これは Weyl-Moyal correspondence によって同様にして次の Hilbert 空間における行列模型に写像することができる。

$$S_{NC}[\theta, V] = \theta \int dt Tr_{\mathcal{H}}\left[\left(\frac{1}{2}(\partial_t T)^2 - V(t)\right) + \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{2}[\hat{x}, T]^2\right) + \cdots\right]. \qquad (4.5)$$

この場合もまた、$\theta \to \infty$ の場合に関する限りにおいて、この理論は APD(area preserving diffeomorphism) である $U(N)$ 対称性を持っている (そうでなければ、空間微分の項が $U(N)$ 対称性を破ってしまう)。ここで、スカラー場は projection operator を基底として

$$T(T) = \sum_{l=1}^{N} \lambda_{a_l}(t) P_l \tag{4.6}$$

として書けるが、時間依存性が全て係数のほうに押し付けられていることをおさえておこう。

4.2 古典的な静的ソリトン解

この理論の古典的真空とソリトン解についてまず理解を得ることにする。まず、この理論の Euler-Lagrange 方程式

$$\partial_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t T)} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T} \right) = 0. \tag{4.7}$$

を解けば、運動方程式として次を得る。

$$-\partial_t^2 T(t) - V'(T) = 0, \Leftrightarrow -\ddot{\lambda}_{a_l}(t) - V'(\lambda_{a_l}(t)) = 0 \tag{4.8}$$

さて、ソリトン解は時間依存性のない 2 次元場の理論と同一視できるものであるが、これは当然の帰結である。何故なら 2 次元場の理論のインスタントン解は、(2+1) 次元場の理論の静的なソリトン解と同一のものであるからである。そこで、再び対称な double-well potential

$$V(T) = V_0 + \frac{\lambda_4}{4}(T^2 - T_0^2)^2 \tag{4.9}$$

を考える。古典的な真空は $T_{\text{vacuum}} = \pm T_0 \mathbf{1}$ によって記述できるので、静的な $[N_1, N_2]$ ソリトン解は、

$$T_{N_1,N_2} = T_0(P_{[N_1]} - P_{[N_2]}) \tag{4.10}$$

の形で記述できる。

4.3 量子論に基づく考察

次に量子論の枠組みでこの理論を考える。すなわち次のような経路積分を考える。

$$Z_{NC}[\theta, V, L_1, L_2] = \int [dT(t)]_{L_1,L_2} \exp\left(-S_{NC}[\theta, V(T)]\right). \tag{4.11}$$

そうすれば、**regularize** をした分配関数は、Weyl-Moyal mapping によって次の対応をもつことがわかる。

$$\lim_{L_1,L_2\to\infty} Z_{NC}[\theta, V, L_1, L_2] = \lim_{N\to\infty} Z_N[\theta, V, N], \text{ where } Z_N[\theta, V, N] = \int [dT(t)] \exp\left(-S_{NC(0+1)}[\theta, V(T)]\right),$$

$$[dT]_N = \prod_{-\infty<t<+\infty} \left(\prod_{l=1}^{N} dT_{ll}(t) \prod_{1\le l<m\le N} 2dReT_{lm}(t) ImT_{lm}(t) \right). \tag{4.12}$$

これはまさに、(0+1) 次元場の理論の行列模型に他ならない。そうすれば今度は Schrödinger 方程式に帰着するので、作用は次のようにして記述することができる。

$$H = -\frac{1}{2\theta}\Delta_T + \theta Tr V(T) + \Delta H_{\text{grad}}, \text{ where } \Delta H_{\text{grad}} = \left(-\frac{1}{2}[\hat{x}, T] \right)^2,$$

$$\Delta_T = -Tr\Pi_T^2 = \sum_{l=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial T_{ll}^2} + \frac{1}{2} \sum_{1\le l<m\le N} \left(\frac{\partial^2}{\partial ReT_{lm}^2} + \frac{\partial^2}{\partial ImT_{lm}^2} \right). \tag{4.13}$$

ここで、運動項にあたる $\Delta H_{\rm grad}$ は、前に考察したのと同様の理由により、落としてもかまわないものとする。この行列模型は、やはりそれぞれの行列の固有値で記述することにする。即ち、

$$T(t) = U(t)T_d(t)U^{-1}(t),\ \text{where}\ T_d(t) = \mathrm{diag}(\lambda_1(t), \cdots \lambda_N(t)),\ \text{and}\ U(t) \in \frac{SU(N)}{\mathcal{S}_N}. \tag{4.14}$$

ここで $\mathcal{S}_N$ は固有値の permutation を表す。このとき、エネルギーは演算子 (4.13) のノルム、すなわち

$$E_{g.s.} = \| H \| = \lim_{N\to\infty} Min_\Phi \frac{\langle\Phi|H|\Phi\rangle}{\langle\Phi|\Phi\rangle} = \frac{\int [dT]\Phi^\dagger(\lambda)H\Phi(\lambda)}{\int [dT]\Phi^\dagger(\lambda)\Phi(\lambda)}. \tag{4.15}$$

によって表すことができる。ここで、分子分母の積分は、2 次元の時間をさしはさまない場の理論の場合と同様にして、固有値の積分によって記述することができ、そこでは Vandermonde determinant が現われる。

$$\langle\Phi|H|\Phi\rangle = \int \prod_{l=1}^N d\lambda_l \Delta^2(\lambda) \left(\frac{1}{2}\sum_{l=1}^N |\partial_{\lambda_l}\Phi(\lambda)|^2 + V(\lambda)|\Phi(\lambda)|^2 \right),\ \text{and}\ \langle\Phi|\Phi\rangle = \int \prod_{l=1}^N d\lambda_l \Delta^2(\lambda)|\Phi(\lambda)|^2. \tag{4.16}$$

そこで、以下次の波動関数を中心にして考察をすすめる。

$$\Psi(\lambda_1, \cdots \lambda_N) = \Delta(\lambda)\Phi(\lambda_1, \cdots, \lambda_N) = \prod_{1\le l<m\le N} (\lambda_l - \lambda_m)\Phi(\lambda_1, \cdots, \lambda_N). \tag{4.17}$$

実は、このように $\Psi(\lambda)$ を主役にして考えることには次の二つの大きな意味を持っている。これは昔の 1 次元場の理論の行列模型を解析するうえで知られていた重要な手法である。

- まず、もとの $\Phi(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$ は固有値の入れ替えに対して **bosonic** であったが、Vandermonde 行列式をかければ、$\Psi(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$ は固有値の入れ替えについて **fermionic** である。
- 今度は、Schrödinger 方程式は、それぞれの固有値が相互作用しない、一粒子系の方程式に従い、簡便に処理できる。

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\lambda_1, \cdots, \lambda_N; t) = \sum_{l=1}^N \left(-\frac{1}{2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda_l^2} + \theta V(\lambda) \right) \Psi(\lambda_1, \cdots, \lambda_N). \tag{4.18}$$

すなわち、この系はそれぞれの対角成分の field について言えば、次の作用によって記述できるものと考える。

$$S = \theta \int dt \sum_{l=1}^N \left[\frac{1}{2}(\partial_t\lambda_l)^2 - V(\lambda_l) \right]. \tag{4.19}$$

さて、今度は理論の量子論の効果、すなわち (2+1) 次元の場の理論において同様にして 3 つの相が現われることは、この fermion たるの性質によって理解することができる。今回の解析においても量子論的な効果は $\mathcal{O}(N^2)$ のオーダーで生じることを次のようにして見ることにする。そこで、量子論的な真空における基底状態のエネルギーを調べることにする。ポテンシャルを鞍点のまわりで

$$V(\lambda) = V_0 + \frac{\Omega^2}{2}\lambda^2 + \cdots \tag{4.20}$$

と展開できるとして、3 次以降の効果を無視して考える。そうすれ上記の意味で一粒子系の Schrödinger 方程式として見做したときの作用 (4.19) は、調和振動子型のものとして考えることができる。

$$S_{\rm harm} = \theta \int dt \sum_{l=1}^N \left[\frac{1}{2}(\partial_t\lambda_l)^2 - \left(V_0 + \frac{\Omega^2}{2}\lambda_l^2 + \cdots \right) \right] \tag{4.21}$$

これは次の Hamiltonian で記述できる。ここで p_l は λ_l の正準運動量である。

$$H_{\rm harm} = \sum_{l=1}^N \left[\frac{1}{2\theta}p_l^2 + \theta \left(V_0 + \frac{\Omega^2}{2}\lambda_l^2 + \cdots \right) \right]. \tag{4.22}$$

一粒子状態におけるエネルギー準位を $e_1, e_2, e_3, \cdots$ として、Fermi energy を e_F とする。そうすれば全エネルギーと全粒子数はそれぞれ次で与えられる。但し、簡単のため以下では $\Omega = 1$ とする。

$$N = \sum_{l=1} \Theta(e_F - e_l) = \int \frac{d\lambda dp}{2\pi} \Theta\left(e_F - \frac{p^2}{2\theta} - \frac{1}{2}\theta\lambda^2 - \theta V_0\right), \tag{4.23}$$

$$E = \sum_{l=1} e_l \Theta(e_F - e_l) = \int \frac{d\lambda dp}{2\pi} \Theta\left(e_F - \frac{p^2}{2\theta} - \frac{1}{2}\theta\lambda^2 - \theta V_0\right) \left[\frac{p^2}{2\theta} + \frac{1}{2}\theta\lambda^2 + \theta V_0\right]. \tag{4.24}$$

ここで、関数 $\Theta(x)$ は、次を満足するものとする。

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{4.25}$$

そうすれば、それぞれの積分は次のようにして遂行することができる。まず、粒子数については、
$|p| \leq \sqrt{2\theta\left((e_F - \theta V_0) - \frac{1}{2}\theta\lambda^2\right)}$ であることから、

$$N = \int_{-\sqrt{2\theta\left((e_F-\theta V_0)-\frac{1}{2}\theta\lambda^2\right)}}^{\sqrt{2\theta\left((e_F-\theta V_0)-\frac{1}{2}\theta\lambda^2\right)}} \frac{d\lambda dp}{2\pi} = \int_{-\sqrt{\frac{2(e_F-\theta V_0)}{\theta}}}^{\sqrt{\frac{2(e_F-\theta V_0)}{\theta}}} d\lambda 2\sqrt{2\theta\left((e_F - \theta V_0) - \frac{1}{2}\theta\lambda^2\right)} = e_F - \theta V_0. \tag{4.26}$$

を得る。一方、粒子の全エネルギーについても同様に計算できて、

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\sqrt{2\theta\left((e_F-\theta V_0)-\frac{1}{2}\theta\lambda^2\right)}}^{\sqrt{2\theta\left((e_F-\theta V_0)-\frac{1}{2}\theta\lambda^2\right)}} \frac{d\lambda dp}{2\pi} \left(\frac{p^2}{2\theta} + \frac{\theta\lambda^2}{2} + \theta V_0\right) \\ &= N\theta V_0 + \int_{-\sqrt{\frac{2(e_F-\theta V_0)}{\theta}}}^{\sqrt{\frac{2(e_F-\theta V_0)}{\theta}}} \frac{d\lambda}{2\pi}\frac{8}{6\theta}\left(2\theta\left((e_F - \theta V_0) - \frac{1}{2}\theta\lambda^2\right)\right)^{\frac{3}{2}} \\ &\qquad + \int_{-\sqrt{\frac{2(e_F-\theta V_0)}{\theta}}}^{\sqrt{\frac{2(e_F-\theta V_0)}{\theta}}} \frac{d\lambda}{2\pi}\theta\lambda^2\left(2\theta\left((e_F - \theta V_0) - \frac{1}{2}\theta\lambda^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= N\theta V_0 + \frac{N^2}{2}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

を得る。前者は古典的なエネルギーの寄与であり、$\mathcal{O}(N\theta)$ のオーダーであるが、後者は $\mathcal{O}(N^2)$ のエネルギーの寄与であって量子論的な効果である。このように基底状態のエネルギーの量子補正が $\mathcal{O}(N^2)$ として振る舞ったことは、直感的には

Fermi pressure によって基底状態のエネルギーが増加した

ものとして解釈することができる。これは時間に依存しない 2 次元非可換場の理論と同じ振る舞いであり、それゆえに GMS phase, planar phase, disordered phase の 3 つの相が現われることが理解できる。

4.4 古典的な真空とソリトンについて

次に、理論の古典的な真空とソリトン解について調べ、ここでは古典的な極限 $\hbar \to 0$ において確かに古典論における結果に帰着できることを具体的に考察する。ここで、

$\Psi(\lambda, t)$ を、第二量子化した fermion

であるとすれば、Hamiltonian は次で表すことができる。

$$H = \int d\lambda \Psi^\dagger(\lambda, t) \left(-\frac{1}{\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda^2} + \theta V(\lambda)\right) \Psi(\lambda, t). \tag{4.28}$$

そうすれば鞍点法を用いれば固有値密度は次で表すことができる。

$$\partial_t \left(\frac{1}{\rho} \partial_t \partial_\lambda^{-1} \rho \right) = \partial_\lambda \left(\frac{1}{2} \rho^2 + V(\lambda) \right). \tag{4.29}$$

そうすれば、WKB 近似法によって固有値分布は次で得ることができる。

$$\rho_s(\lambda) \begin{cases} N g_{\text{eff}}^{-2} \sqrt{2(g_{\text{eff}}^2 E - V(\lambda))} & \text{for } V(\lambda) \leq g_{\text{eff}}^2 E, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad \text{with } \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_s(\lambda) = 1. \tag{4.30}$$

そこで、固有値分布については、double-well potential については次のような状況を考えれば、(N_1, N_2) instanton に対応することがわかる。

$$\int_{\mathcal{D}_\mathcal{L}} d\lambda \rho_s(\lambda) = n_1, \quad \int_{\mathcal{D}_\mathcal{R}} d\lambda \rho_s(\lambda) = n_2, \text{ where } n_1 + n_2 = 1. \tag{4.31}$$

ここで、固有値密度の台 (support) が $\mathcal{D}_L$、$\mathcal{D}_R$ の二つの繋がっていない領域に分れているものとする。で

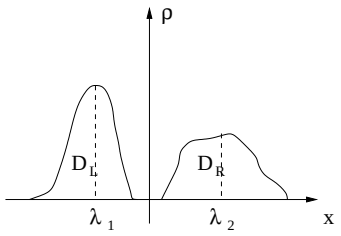

図 4: (2+1) 次元非可換場の理論における、固有値密度分布

は、これは古典論の極限をどのようなかたちで再現するのであろうか？この問いに答えるために、$\hbar \to 0$ の極限を考えることにする。ここで注意しおかなければいけないのは、(4.30) の WKB 近似の結果と、通常の量子力学における表式を比較すれば、

(4.30) 中の g_{eff}^{-2} が、$\frac{1}{\hbar}$ に対応している

ということである。従って、$\hbar \to 0$ の極限をとるということは、$g_{\text{eff}} \to 0$ の極限をとるということに等しい。先程の二つの領域 $\mathcal{D}_L$ 及び $\mathcal{D}_R$ の中心をそれぞれ λ_1, λ_2 とすれば、

$$\frac{\rho_s(\lambda)}{\hbar} \to n_1 \delta(\lambda - \lambda_1) + n_2 \delta(\lambda - \lambda_2) \tag{4.32}$$

として考えられる。このことを簡単に見ようと思えば、double-well ではないが、Gauss 型の potential

$$V(\lambda) = \frac{1}{2} \Omega^2 \lambda^2 \tag{4.33}$$

を考えれば良い。そうすればエネルギーは $E = N\hbar\Omega$ であることから、固有値密度は WKB 近似で

$$\rho_s(\lambda) = \begin{cases} \frac{N}{\hbar} \sqrt{2\left(N\hbar\Omega - \frac{1}{2}\Omega^2\lambda^2\right)}, & -\sqrt{\frac{2N\hbar}{\Omega}} \leq \lambda \leq \sqrt{\frac{2N\hbar}{\Omega}}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.34}$$

として記述できるが、これは古典論の極限では $\hbar \to 0$ にとると delta 関数型の固有値分布となることが理解できる。

5 最後に

以上で、2 次元及び (2+1) 次元の非可換場の理論におけるソリトン解の量子論的な側面と、$c = 0$ 及び $c = 1$ の行列模型との対応関係について考察をすすめた。両者に共通していえる特徴の最たるは、測度の部分に起因する Vandermonde determinant の log の項であり、これによって、GMS phase、planar phase、disordered phase の 3 つの相が見られることであった。

最後に、ごく簡単に近年提唱された超弦理論の構成的定義 [2] と、log の効果の関連について [8] 触れて本稿を締め括ることにしたい。次のような IKKT model の分配関数を考えることにする。

$$Z_{\rm IKKT} = \int dA e^{-S_b} \int d\psi d\bar{\psi} e^{-S_f}, \text{ where} \tag{5.1}$$

$$S_b = -\frac{1}{4g^2} Tr_{N\times N}[A_\mu, A_\nu]^2, \quad S_f = -\frac{1}{g^2} Tr_{N\times N} \left(\bar{\psi}_a (\Gamma^\mu)_{\alpha\beta} [A_\mu, \psi_\beta]\right). \tag{5.2}$$

ここでも、moduli 空間が少し変化する効果が見られるが、これは固有値同士の log による相互作用に起因するものである。この分配関数は、fermion について積分すると、

$$Z_{\rm IKKT} = \int dA e^{-S_b} \det \mathcal{M}, \text{ where } \mathcal{M}_{a\alpha,b\beta} = (\Gamma_\mu)_{\alpha\beta} Tr_{N\times N}(t^a, [A_\mu, t^b]) \tag{5.3}$$

であり、$\mathcal{M}$ は $2(N^2-1) \times 2(N^2-1)$ 行列である。今度は、分配関数の log の効果は、$\log\det \mathcal{M}$ の形で、fermion の積分に起因して生じる。

参考文献

[1] P. Ginsparg and G. W. Moore, "Lectures On 2-D Gravity And 2-D String Theory," hep-th/9304011.

[2] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, "A large-N reduced model as superstring," Nucl. Phys. B **498**, 467 (1997) [hep-th/9612115].

[3] N. Seiberg and E. Witten, "String theory and noncommutative geometry," JHEP **9909**, 032 (1999) [hep-th/9908142].

[4] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk and N. Seiberg, "Noncommutative perturbative dynamics," JHEP **0002**, 020 (2000) [hep-th/9912072].

[5] R. Gopakumar, S. Minwalla and A. Strominger, "Noncommutative solitons," JHEP **0005** (2000) 020 [hep-th/0003160].

[6] G. Bonnet, F. David and B. Eynard, J. Phys. A **33**, 6739 (2000) [cond-mat/0003324].

[7] T. Azuma, "Investigation of matrix theory via super Lie algebra," hep-th/0103003.

[8] J. Ambjorn, K. N. Anagnostopoulos, W. Bietenholz, F. Hofheinz and J. Nishimura, "On the spontaneous breakdown of Lorentz symmetry in Matrix models of superstrings," hep-th/0104260.

[9] J. Nishimura and F. Sugino, "Dynamical generation of four-dimensional space-time in the IIB matrix model," hep-th/0111102.

[10] E. Brezin, C. Itzykson, G. Parisi and J. B. Zuber, "Planar Diagrams," Commun. Math. Phys. **59**, 35 (1978).

[11] S.Coleman, '1/N' in Aspects of Symmetry, Cambridge University Press ,1985

[12] J. Distler and H. Kawai, "Conformal Field Theory And 2-D Quantum Gravity Or Who's Afraid Of Joseph Liouville?," Nucl. Phys. B **321**, 509 (1989).

[13] E. Brezin and V. A. Kazakov, "Exactly Solvable Field Theories Of Closed Strings," Phys. Lett. B **236**, 144 (1990).