素粒子論研究室速報: (hep-th/0211170)

Chiral Rings and Anomalies in Supersymmetric Gauge Theory

Freddy Cachazo, Michael R. Douglas, Nathan Seiberg and Edward Witten
発表者: 東 武大* (京都大学素粒子論研究室博士課程 2 年)

2003 年 02 月 12 日 研究室会議終了後 ~ 15:00

概 要

本稿は、京都大学物理学第二教室素粒子論研究室で ABC 順に行うことになっている「速報」の論文発表の原稿である。これは、論文中に登場する計算の詳細や背景となる知識を付け加えながら、個人的にまとめたものである。したがって、本稿に見当違いな部分があったとしても、原著者 Cachazo, Douglas, Seiberg, Witten にはその責は一切なく、責はすべて発表者である東武大にあることを断っておく。

繰り返すが、これはあくまで個人的な勉強をまとめたものに過ぎない。

目 次

1 Introduction **2**

2 chiral field に関する基本的な事項の復習 **3**
- 2.1 chiral 環の性質 . . . 3
- 2.2 chiral 環同士の関係について . . . 6
- 2.3 one-loop の効果について . . . 8
- 2.4 多重ループ効果、planar diagram と chiral ring の関係 . . . 9
- 2.5 有効ポテンシャルの一般形について . . . 13

3 一般化した小西アノマリーについて **14**

4 ゲージ理論と行列模型の双対性について **18**
- 4.1 ゲージ理論側の議論 . . . 19
- 4.2 行列模型側の解析について . . . 22

5 最後に **25**

6 謝辞 **26**

A 何故、superpotential を入れれば $\mathcal{N}=2$ から $\mathcal{N}=1$ に破れるか？ **26**

B 公式 (4.7) の証明 **26**

C point splitting 法による小西アノマリーの導出の別解 **28**

*mail:azuma@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp

1 Introduction

近年、Dijkgraaf-Vafa duality が大きく注目されている。[4, 5, 6] の論文では、topological string と、4 次元 $\mathcal{N}=1$ super Yang-Mills 理論、及び行列模型の間の双対性について議論された。これによって、super Yang-Mills 理論の super potential が厳密に計算できるという点は、Dijkgraaf-Vafa の提案の大きな収穫の一つであった。この意味で、topological string とゲージ理論の双対性が発見されたことから、topological string には何か深遠な物理的意味があるのではないかと考えられ、この分野は精力的に研究されてきた。しかも、行列模型を用いての $\mathcal{N}=1$

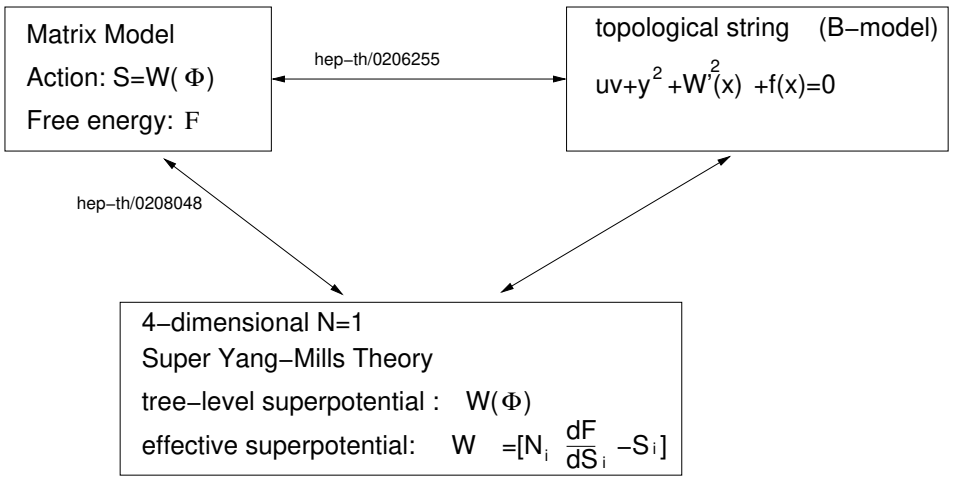


図 1: ゲージ理論・トポロジカルストリング及び行列模型の間の関係

super Yang-Mills 理論の superpotential は、行列模型の planar な極限 (large-N の極限) をとることによって計算をすることが可能である。この予想は [7] において、Feynman diagram を用いて摂動的に証明された。この論文の主旨は、行列模型と super Yang-Mills の対応を、chiral anomaly に着目することによって議論を行なうことにある。ここでいう行列模型とは、超弦理論の構成的定義として知られている IIB matrix model のことではなく、'90 年代にボゾニックな弦理論の非摂動的な定式化として着目された one-matrix model のことである [12, 17, 1]。この模型の作用は $S = TrW(M)$ として定義され、M は bosonic な $N \times N$ の hermitian matrix である。

以下、個人的に Dijkgraaf-Vafa 予想を面白いと考えている理由は以下の側面である。昔から、ゲージ理論と行列模型、超弦理論の間の関係については論じられてきた [2, 3, 11]。現在、超弦理論の非摂動的な定式化の有力候補として考えられているのが、以下の作用で定義される IIB matrix model(IKKT model)[2] である。

$$S = -\frac{1}{g^2} Tr\left(\frac{1}{4}[A_\mu, A_\nu][A^\mu, A^\nu] + \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu[A_\mu, \psi]\right). \tag{1.1}$$

単純に aesthetic な理由だけでいえば、この作用のように 10 個の bosonic matrix model で記述されるよりも、むしろ一つの行列で理論が記述されているほうが美しい理論であると思われる。Dijkgraaf-Vafa 予想は、'90 年代前半にボゾニックな弦理論の非摂動的な定式化として脚光を浴びた one-matrix model と、$\mathcal{N}=1$ のゲージ理論との対応を考えるものである。従って、super Yang-Mills 理論が IIB matrix model のような 10 個の行列で定義される理論ではなく、一つの行列で記述される理論と対応することは、興味深い点である[1]。

[1]そうした観点から、私たちは $osp(1|32, R)$ supermatrix model について研究を遂行したことがある。これは、$M = \begin{pmatrix} m & \psi \\ i\bar{\psi} & 0 \end{pmatrix}$ として記述される 33×33 の行列を用いて理論を記述しようとするものであり、IIB matrix model の拡張の可能性として追求したものである。こうした理論を考察した動機の一つに、ボゾンとフェルミオンが一つの行列に埋め込まれており理論が単純な構造をしている点がある

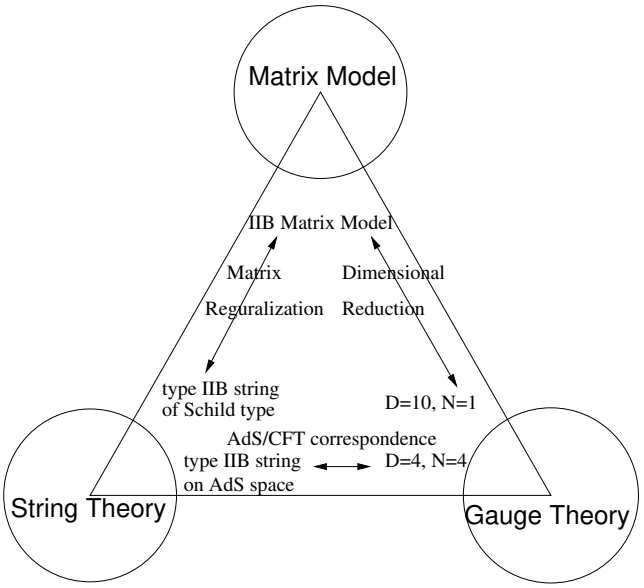


図 2: 行列模型、超弦理論、ゲージ理論の間の関係図

2 chiral field に関する基本的な事項の復習

まずは、chiral field の性質で必要な事柄の復習からはじめることにする。そのために、まずは notation について整理することにする。本稿では原則として Wess-Bagger の教科書に従うことにする[2]。

$$\begin{array}{ll} Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^\mu\bar\theta^{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\mu}, & \bar Q_{\dot\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} + i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \\ D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^\mu\bar\theta^{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\mu}, & \bar D_{\dot\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} - i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \end{array} \tag{2.1}$$

特に簡単のため、$y^\mu = x + i\theta\sigma^\mu\bar\theta$ という座標を導入すれば、次のように表せられる。

$$\begin{array}{ll} Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, & \bar Q_{\dot\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} + 2i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^\mu\frac{\partial}{\partial y^\mu}, \\ D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + 2i\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^\mu\bar\theta^{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial y^\mu}, & \bar D_{\dot\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}}. \end{array} \tag{2.2}$$

2.1 chiral 環の性質

非常に基礎的であるが、まずは chiral superfield 及び chiral operator の性質から説明を加える。

$$[\text{定義}]\Phi \text{ が } \textbf{chiral superfield} \text{ である } \Leftrightarrow \bar D_{\dot\alpha}\Phi(x^\mu,\theta,\bar\theta) = 0.$$

chiral superfield を記述する際には、上記の $y^\mu = x + i\theta\sigma^\mu\bar\theta$ の座標を導入するのが便利である。そうすれば、chiral superfield は次のようにして記述できる。

$$\Phi(y^\mu,\theta,\bar\theta) = A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y). \tag{2.3}$$

即ち、y 座標のもとでは $\bar D_{\dot\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}}$ であるから、chiral superfield の定義は、$\bar\theta$ 依存性が存在しないと言っているのと同じことである。そうすれば、次の変換性が理解できる (ここで、$\lfloor A,B\rfloor$ は $[A,B]$ と同じ意味である。このような記号を用いたのは TeX のエラーを回避するためであり、それ以外の意図はない)。

$$\begin{array}{lll} [Q_\alpha, A(y)] = \sqrt{2}\psi_\alpha(y), & \{Q_\alpha,\psi_\beta(y)\} = \sqrt{2}\epsilon_{\alpha\beta}F(y), & [Q_\alpha, F(y)] = 0, \\ \lfloor\bar Q_{\dot\alpha}, A(y)\rfloor = 0, & \{\bar Q_{\dot\alpha},\psi_\alpha(y)\} = \sqrt{2}i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}(\frac{\partial}{\partial y_\mu}A(y)), & [\bar Q_{\dot\alpha}, F(y)] = \sqrt{2}i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}(\frac{\partial}{\partial y_\mu}\psi^\alpha(y)). \end{array} \tag{2.4}$$

[2]但し、後で述べるように、field strength の定義は本稿と Wess-bagger の教科書とで異る。本稿では、$W_\alpha = -\frac{1}{8}\bar D^2 e^{-2V}D_\alpha e^{2V}$ であるのに対し、Wess-Bagger の教科書では $W_{\mathrm{WB}\alpha} = -\frac{1}{4}\bar D^2 e^{-V}D_\alpha e^{V}$ である。

ここで、重要なのは次の性質である。

[命題] $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0$ の必要十分条件は、$[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, A(y)] = 0$ である。

[証明] まず、左から右はすでに見たとおりであるから、右から左を証明すれば良い。一般の superfield の形が次のとおりであるとする。

$$\Theta(y,\theta,\bar{\theta}) = O_1(y) + \theta O_2(y) + \bar{\theta}O_3(y) + \theta\theta O_4(y) + \bar{\theta}\bar{\theta}O_5(y) + \theta\bar{\theta}O_6(y) + \theta\theta\bar{\theta}O_7(y) + \theta\bar{\theta}\bar{\theta}O_8(y) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}O_9(y). \quad (2.5)$$

そして、条件 $[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, O_1(y)] = 0$ が成立するとする。そうすれば、$\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\alpha}} + 2i\theta^{\alpha}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{\mu}\frac{\partial}{\partial y^{\mu}}$ であるから、$[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, O_1(y)] = -O_3(y)$ である。即ち、$\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}O_3(y)]$ のうち、$\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ の $-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\alpha}}$ の部分の寄与が、唯一 $O_1(y)$ の変換分に相当しており、その寄与は $-O_3(y)$ そのものである。従って、もとの仮定は $O_3(y) = 0$ であることを意味するのだ。そうすれば、$\{Q_{\alpha}, O_3] = 0$ より、$O_6 = 0$ が成立するなどの議論を以下繰り返す。そうすれば、最終的に、$O_3 = O_5 = O_6 = O_7 = O_8 = O_9 = 0$ が言えるので、最終的には

$$\Theta(y,\theta,\bar{\theta}) = O_1(y) + \theta O_2(y) + \theta\theta O_4(y). \quad (2.6)$$

であることがわかる。従って、Θ が chiral superfield であることが言える。[証明終]

上記の命題は、Φ が chiral superfield であるならば、$\theta, \bar{\theta}$ の最低次の項が chiral ring であることと同値であると言い換えることができる。chiral ring の定義は次のとおりである。

$$[\text{定義}]\ \mathcal{O}(y) \text{ が } \textbf{chiral ring} \text{ である} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \mathcal{O}(y)] = 0, & (\mathcal{O}(y) \text{ が } \textbf{bosonic} \text{ のとき}) \\ \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \mathcal{O}(y)\} = 0, & (\mathcal{O}(y) \text{ が } \textbf{fermionic} \text{ のとき}) \end{cases} \quad (2.7)$$

まず、chiral ring の非常に重要な性質として、次の事実を立証する。

[命題] $\mathcal{O}(x)$ が **chiral operator** であるとすれば、その積の期待値は座標依存性を失う。

ここで、$\mathcal{O}(x)$ は chiral operator であるから、$\{\bar{Q}^{\alpha}, \mathcal{O}(x)] = 0$ である。この命題は次のようにして示すことができる。まずは、次の量を評価する。そもそも supercharge の交換関係は、$\{Q_{\alpha}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{\mu}P_{\mu}$ を満足するものである。そうすれば、

$$2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{\mu}\frac{\partial\mathcal{O}(x)}{\partial x^{\mu}} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{\mu}[P_{\mu}, \mathcal{O}(x)] = \{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \{Q^{\alpha}, \mathcal{O}(x)]] \quad (2.8)$$

である。ここで最後の等式で Jacobi identity を用いた。特に、modulo $\{\mathcal{Q}_{\dot{\alpha}}, \cdots]$ で同一視を行なえば、これは chiral operator それ自体が座標依存性を持っていないことを主張している。

そうすれば、chiral operator の 2 つ以上の積の相関関数に関しては、次の性質が成立する。なお、以下の証明は簡単のために全ての $\mathcal{O}_{I_n}(y)$ がボゾンであるときについて行なっているが、フェルミオンが混ざっていても相関関数の座標独立性は成立する。

$$2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\langle\mathcal{O}^{I_1}(x_1)\mathcal{O}^{I_2}(x_2)\cdots\rangle = i\left\langle\{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, [Q^{\alpha}, \mathcal{O}^{I_1}(x_1)]\}\mathcal{O}(x_2)\cdots\right\rangle = -i\sum_{k>1}\left\langle[Q^{\alpha}, \mathcal{O}^{I_1}(x_1)]\cdots[\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \mathcal{O}^{I_k}(x_k)]\cdots\right\rangle = 0. \quad (2.9)$$

従って、相関関数の座標依存性が消失したことから、次のように相関関数を記述しても差し支えない。

$$\langle\mathcal{O}^{I_1}(x_1)\mathcal{O}^{I_2}(x_2)\cdots\mathcal{O}^{I_n}(x_n)\rangle = \langle\mathcal{O}^{I_1}\mathcal{O}^{I_2}\cdots\mathcal{O}^{I_n}\rangle. \quad (2.10)$$

従って、相関関数をどんなに遠くまで持っていっても値は変わらないはずであるから、相関関数の factorization が成立する。即ち次の重要な関係式が成立する。

$$\langle\mathcal{O}^{I_1}(x_1)\mathcal{O}^{I_2}(x_2)\cdots\mathcal{O}^{I_n}(x_n)\rangle = \langle\mathcal{O}^{I_1}\rangle\langle\mathcal{O}^{I_2}\rangle\cdots\langle\mathcal{O}^{I_n}\rangle. \quad (2.11)$$

次に紹介する事実は、Φ を chiral superfield、W_α を chiral な gauge field strength であるとしたときに、$Tr(\Phi^k W_\alpha \Phi^l W_\beta \cdots)$ という量が非常に簡略化されるという点である。より具体的には、上記の物理量が次の 3 とおりのいずれかに帰着せられる点である。

$$Tr\Phi^k, \quad Tr\Phi^k W_\alpha, \quad Tr\Phi^k W_\alpha W_\beta. \tag{2.12}$$

この事実を証明するうえで本質的なのは、$\mathcal{O}(x)$ が adjoint な値の chiral operator であるとしたときに、

$$\begin{array}{l} 0 = [\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, D_{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{O}] = [W_\alpha, \mathcal{O}] \quad (\mathcal{O} \text{ と } \mathcal{Q}^{\dot{\alpha}} \text{ が交換するとき}) \\ 0 = \{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, D_{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{O}\} = \{W_\alpha, \mathcal{O}\} \quad (\mathcal{O} \text{ と } \mathcal{Q}^{\dot{\alpha}} \text{ が反交換するとき}) \end{array} \tag{2.13}$$

が定数倍を別にして成立する点である。なお、ここで $D_{\alpha\dot{\alpha}}$ は時空に対する共変微分であって、

$$D_{\alpha\dot{\alpha}}\phi = \sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}(\partial_\mu\phi + [v_\mu, \phi]). \tag{2.14}$$

この事実について証明を加える前に、field strength の定義から与えることにする。ここでは次の Wess-Zumino gauge を用いて簡略化をしている。

$$V(x) = -\theta\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}v_\mu(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x). \tag{2.15}$$

これに対して、field strength を次で定義する。

$$\begin{aligned} W_\alpha &= -\frac{1}{8}\bar{D}^2 e^{-2V} D_\alpha e^{2V} \\ &= -i\lambda_\alpha(y) + \theta_\alpha D(y) + \theta\theta\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}(\partial_\mu\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(y)) - \frac{i}{2}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_\alpha{}^\beta\theta_\beta(\theta_\mu v_\nu(y) - \theta_\nu v_\mu(y)). \end{aligned} \tag{2.16}$$

さて、上記の命題を証明するにあたっては、$\theta, \bar{\theta}$ の最低次の項のみを与えればよいことがわかる。即ち、示すべきは、

$$\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} D_{\alpha\dot{\beta}}\mathcal{O}_{\text{lowest}}] \propto \{\lambda_\alpha, \mathcal{O}_{\text{lowest}}] \tag{2.17}$$

なる関係式である。この関係式は次のようにして証明できる。

$$\begin{aligned} \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} D_{\alpha\dot{\beta}}\mathcal{O}_{\text{lowest}}] &= \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}}(\partial_\mu\mathcal{O}_{\text{lowest}} + [v_\mu, \mathcal{O}_{\text{lowest}}]) = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}}([v_\mu, \mathcal{O}_{\text{lowest}}]) \\ &= \{[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}} v_\mu], \mathcal{O}_{\text{lowest}}] = 2\sqrt{2}i\{\lambda_\alpha, \mathcal{O}_{\text{lowest}}]. \end{aligned} \tag{2.18}$$

ここで、$\mathcal{O}$ が chiral operator であることから座標依存性が存在しないこと、及び Jacobi identity を用いた。さらに、次のスーパー変換則を用いている。

$$[\mathcal{Q}^\alpha, v_\mu] = -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\theta}^{\alpha\dot{\alpha}}_\mu\lambda_\alpha. \tag{2.19}$$

従って、上記の命題の証明が完結する。

- $\mathcal{O}(x) = \Phi$ であるとする。このときは、$[\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, [D_{\alpha\dot{\alpha}}, \mathcal{O}]] = [W_\alpha, \Phi] = 0$ が成立するから、$Tr\Phi^k W_\alpha \Phi^l W_\beta \cdots$ の中で、W_α と Φ は交換する。従って、$Tr\Phi^k W_\alpha W_\beta \cdots$ の形に全て帰着される。
- $\mathcal{O}(x) = W_\beta$ であるとする。このときは、$\{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, [D_{\alpha\dot{\alpha}}, W_\beta]\} = \{W_\alpha, W_\beta\} = 0$ であるから、trace の中で、$W_\alpha W_\beta \to -W_\beta W_\alpha$ として置き換えができる。従って、W^3 の項は消えるので意味をなさない。

以上によって上記の命題が証明された。

ついでに言えば、 先に、chiral 環については、$Tr\Phi^k$, $Tr\Phi^k W_\alpha$, $Tr\Phi^k W_\alpha W_\beta$ の 3 つに大別されると述べたが、実はこれらは互いに独立ではなく関係づいている量である。それは、Φ が有限の大きさの $N \times N$ 行列であるからである。従って、$k > N$ であるとすれば、ある多項式 $\mathcal{P}$ が存在して

$$Tr\Phi^k = \mathcal{P}_k(u_1, \cdots, u_N) \tag{2.20}$$

と書ける。ここで、$u_k = Tr\Phi^l$ である。しかし、これはあくまで古典的な結果であって、$k > 2N$ のときには量子補正が存在する。この点についてもう少し詳しく解説をしておく。

- 古典的には、上記の多項式は行列式 $P_N(z, \Phi_{cl}) = \det(z - \Phi_{cl})$ で与えられる。従って、

$$Tr\Phi^k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} dz \frac{z^l}{z - \Phi_{cl}} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} dz \frac{z^l P_N'(z)}{P_N(z)}. \tag{2.21}$$

  を得る (ここで、$\mathcal{C}$ は十分大きい contour である)。

- 一方、量子論的には、$\langle Tr\frac{1}{z-\Phi}\rangle = \frac{P_N'(z)}{\sqrt{P_N^2(z) - 4\Lambda^{2N}}}$ として補正されるので、

$$\langle Tr\Phi^l\rangle = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} dz \frac{z^l P_N'(z)}{\sqrt{P_N^2(z) - 4\Lambda^{2N}}} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^l P_N'(z)_{2m} C_m \Lambda^{2Nm}}{P_N^{2m-1}(z)} \tag{2.22}$$

  を得る。(和の範囲は???何故 $k > 2N$ に限られる???)

2.2 chiral 環同士の関係について

次の議論は、Veneziano-Yankielowicz potential との関係で、以下次の物理量に着目をする。

$$S = -\frac{1}{32\pi^2} TrW_\alpha W^\alpha. \tag{2.23}$$

これを **glueball** と見做せる所以について解説を加える。まず、W_α を展開すれば、

$$W_\alpha = -\frac{1}{8}\bar{D}^2 e^{-2V} D_\alpha e^{2V} = -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_\alpha V = -i\lambda_\alpha(y) + \mathcal{O}(\theta) \tag{2.24}$$

であるので、最低次の項を抜き出せば、

$$S = \frac{1}{32\pi^2}\lambda_\alpha(y)\lambda^\alpha(y) + \cdots \tag{2.25}$$

となり、これは **gaugino bilinear** に他ならない。従って、上記の場は glueball であると意味付けをすることができる。但し、glueball という言葉遣いはあまり適切でなく、本来は **gaugino condensation** と呼ぶべきなのであるが、慣習的には glueball と呼ばれてしまっている。

次に、これが chiral superfield であるときの著しい性質について見ることにする。以下の議論は $SU(N)$ ゲージ群に着目して論じることにする。まずは、chiral でなくても成立するのは、$S^{N^2} = 0$ である点である。これは W_α が fermionic な量であることから自明に理解できる関係式である。よって S は冪零な物理量である。しかしながら、chiral な場合に関して言えばこの冪は N^2 から N に著しく落とすことができるのである。即ち、次の事柄が言える。

$$(S^N)_{\text{摂動}} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, X_\alpha\} \overset{\text{chiral}}{=} 0 \tag{2.26}$$

一般の場合の証明は本論文の Appendix B に譲ることにするが、ごく簡単のために $su(2)$ の場合に特化した証明を行なう。A, B, C, D が $su(2)$ リー環の元であるならば、次の公式が成立する。

$$TrABCD = \frac{1}{2}(TrABTrCD + TrDATrBC - TrACTrBD) \tag{2.27}$$

このことは、具体的に例えば $A = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix}$ として $(a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R})$ 成分をあらわに書いて trace を計算することで示すことができる。そうすれば、Fermi 統計によって $TrW_1W_1 = TrW_2W_2 = 0$ であることから、

$$S^2 = (TrW_1W_2) = TrW_1W_1W_2W_2 \tag{2.28}$$

であり、特に $\{W_\alpha, W_\beta\} = \{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, [D_{\alpha,\dot{\alpha}}, W_\beta]\} = 0$ である点に留意すれば証明できる。

古典的には chiral superfield に対しては $S^N = 0$ であるが、ここで次の二つの疑問が生じる。

- 先に、cluster 則を証明したが、$\langle S^N \rangle = \langle S \rangle^N = 0$ より、$\langle S \rangle = 0$ となってしまわないか？
- この結果の量子補正はどうなるのか？

この点は、古くから 1983 年頃の Novikov, Shifman, Vainshtein, Zakharov らの研究 [15] で指摘されていることであるが、次の量子補正が存在する。

$$\langle S^N \rangle = \Lambda^{3N} \Leftrightarrow S^N = \Lambda^{3N} + \underbrace{\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, X^{\dot{\alpha}}\}}_{\text{chiral 環であれば消える}} \tag{2.29}$$

この点に関して、若干コメントをしておこう。

- まず、素朴な疑問として $S^{N^2} = 0$ という冪零性が、上記の量子補正に背悖しないのかという点がある。この点に関しては、ある $(N-1)$ 次の多項式 P が存在して

  $$(S^N - \Lambda^{3N}) P(S^N, \Lambda^{3N}) = 0 \tag{2.30}$$

  となると考えれば矛盾は生じない。ここで多項式 P の形は具体的には与えられていないが、以下の議論では具体形に関しては使わないし、また興味もない。

- 次に言えることは、cluster 則によって、$\langle S \rangle \neq 0$ であるような古典的な真空は有り得ない点である (過去に、$\langle S \rangle = 0$ になるのではないかという conjecture はあるらしいが、詳細については知りません)。

- この結果は、まさに Veneziano-Yankielowicz potential[13] の真空と対応していることがわかる。即ち、potential は

  $$W_{\mathrm{VY}} = S\left[\ln\left(\frac{\Lambda^{3N}}{S^N}\right) + N\right] \tag{2.31}$$

  であるが、これを S について変分した運動方程式は

  $$\frac{\partial W_{\mathrm{VY}}}{\partial S} = \ln\left(\frac{\Lambda^{3N}}{S^N}\right) = 0 \tag{2.32}$$

  なので、これより $\langle S^N \rangle = \Lambda^{3N}$ なる真空期待値が得られる。

- 他のゲージ群についても同様の結果が得られると推測できる。即ち、群 G に対応して大域的かつ離散的な chiral 対称性 $Z_{2h(G)}$ が存在する。ここで $h(G)$ は G の dual Coxeter number である。これに対して、ある定数 $c(G)$ が存在して

  $$S^h = c(G)\Lambda^{3h} + \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, X^{\dot{\alpha}}\} \tag{2.33}$$

  となると推測される。

2.3 one-loop の効果について

まずは、簡単のために gauge 群が破れない場合から考える。この節では、まずはじめに one-loop の摂動論の効果について論じることにして、しかる後に一般の multi-loop の効果について論じる。まずは、次の形の superpotential を仮定する。

$$W(\Phi) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g_k}{k+1} Tr\Phi^{k+1}. \tag{2.34}$$

ここで、$m = W''(a)$ であり、以下では特に $a = 0, g_0 = 0, g_1 = m$ の場合についてのみ論じることにする。

そこで、Φ を integrate out することで有効作用を求めたい。one-loop の効果に関しては、次の diagram を評価することで以下の結果を得ることができる。

$$\int d^4x d^2\theta \ln(\frac{m}{\Lambda_0})(NS + \frac{1}{2} w_\alpha w^\alpha). \tag{2.35}$$

ここで、$S = -\frac{1}{32\pi^2} W_\alpha W^\alpha$ であり、$w_\alpha = \frac{1}{4\pi} Tr W_\alpha$ である。また、Λ_0 は紫外カットオフである。但し、この結果

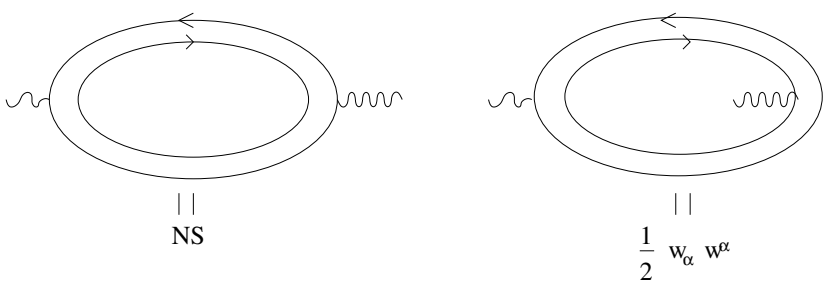


図 3: one-loop の効果で考える diagram。左側は内側の足が空回りしているので、N 倍を与え、外側に 2 つの gluon がついていることから $S = -\frac{1}{32\pi^2} W_\alpha W^\alpha$ の寄与を与える。右側は $\frac{1}{2} w_\alpha w^\alpha$ の寄与を与える。

は 4 次元においてしか成立しないものである。

さて、この one-loop の結果は次のようにしても求めることができる。そのためには superpotential の係数を $g_k \to g_k + \delta g_k$ として動かせばよい。このときの有効作用の変分は次で与えられる。

$$\left\langle \exp\left(-\int d^4x d^2\theta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta g_k}{k+1} Tr\Phi^{k+1} - (\text{c.c.}) \right) \right\rangle_\Phi . \tag{2.36}$$

ここで、$\langle \cdots \rangle_\Phi$ は、$S_i, w_{\alpha,i}$ で特徴づけられる back ground gauge field が存在するときの、massive field に対する経路積分を指す。正則性と超対称性により、上記の結果は定数 g_k を chiral superfield に持ち上げても成立するはずである。従って、これを g_k について変分すれば、

$$\frac{\partial W_{eff}}{\partial g_k} = \left\langle Tr \frac{\Phi^{k+1}}{k+1} \right\rangle_\Phi \tag{2.37}$$

そこで、$k = 1$ のときの結果は、

$$\frac{\partial W_{eff}}{\partial g_k} = \frac{NS + \frac{1}{2} w_\alpha w^\alpha}{m} \tag{2.38}$$

である。そのためには、次のダイアグラムを評価すれば良い。また、このダイアグラムを評価する上では次の積分公式が役立つであろう。

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{k^2 + m\bar{m}} \right)^2 \frac{\bar{m}}{k^2 + m\bar{m}} = \frac{1}{32\pi^2 m}. \tag{2.39}$$

ここでは $g_1 = m$ であるから、これは先程の one-loop の結果を再現していると言える。

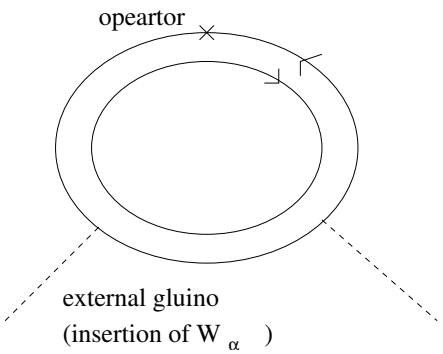


図 4: (2.37) を評価するために計算するダイアグラム。即ち、外場が存在するときに、$\langle Tr\Phi^2 \rangle$ を計算していることになる。

2.4 多重ループ効果、planar diagram と chiral ring の関係

以上で one-loop についての議論が終了したので、次は multi-loop の効果について考察を加えたい。adjoint field についての理論は次の二種類の重要な対称性がある。

- $U(1)_R$ 対称性。
- $U(1)_\Phi$ 対称性。これは $\Phi \to e^{i\alpha}\Phi$ についての対称性である。後の章で説明するが、この対称性のアノマリーが、小西アノマリーである [14, 16]。

特に、両者の線形結合として、$U(1)_\theta$ 対称性を、

$$Q_\theta = -\frac{3}{2}Q_\Phi + Q_R \tag{2.40}$$

として定義する。Δ を質量次元量 (即ち長さの逆数の次元) とすれば、次のような対応が理解できる。

	Δ	Q_Φ	Q_R	Q_θ
Φ	1	1	$\frac{2}{3}$	0
W_α	$\frac{3}{2}$	0	1	1
g_l	$2-l$	$-l-1$	$\frac{2}{3}(2-l)$	2
Λ^{2N}	$2N$	$2N$	$\frac{4N}{3}$	0

(2.41)

ここで、小西アノマリーの寄与について考えてみよう。

- one-loop の寄与は、glueball superfield である S の倍数だけ変動を受ける。
- 一方、高次の loop の寄与は効かない。この点に関しては、3 章でも触れるが、実は複雑な計算をしなくても charge の考察だけで簡単に示せてしまうのである。

従って、有効作用の g_k 依存性について縛りが生じる。即ち、$\frac{g_k}{g_1^{\frac{(k+1)}{2}}}$ を通してしか依存しえない。このことによって、有効 superpotential は次を満たすことが要求される。

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)g_k\frac{\partial W_{eff}}{\partial g_k} = 2\left(g_1\frac{\partial W_{eff}}{\partial g_1} + \sum_{k=2}^{\infty}(k+1)g_k\frac{\partial W_{eff}}{\partial g_k}\right) = 0. \tag{2.42}$$

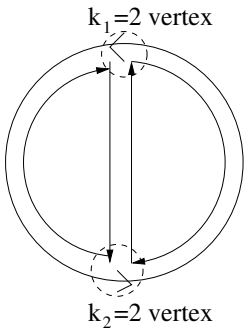
また、次元解析から考えれば有効作用の (質量) 次元は 3 である[3]。従って、上記の拘束条件と併せると次の形の依存性しか持ち得ない。

$$W_{eff} = W_\alpha^2 F\left(\frac{g_k W_\alpha^{k-1}}{g_1^{\frac{(k+1)}{2}}}\right). \tag{2.43}$$

ここで、W_α^2 は S か $w_\alpha w^\alpha$ のいずれかに対応するはずである。これは次のようにしても言い換えることができる。

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(2-k)g_k\frac{\partial}{\partial g_k} + \frac{3}{2}W_\alpha\frac{\partial}{\partial W_\alpha}\right)W_{eff} = 3W_{eff}. \tag{2.44}$$

この計算において、関数 F の中を微分が叩いたものは全てキャンセルされ、外側の W_α^2 を叩いたもののみが生き残る。ここで、planar な Feynman diagram が次数 k_i+1 の vertex を持っていたとする。そうすれば、index loop の数 L は $L = 2 + \frac{1}{2}\sum_i(k_i-1)$ で与えられる。genus g の場合はこの結果は $L = 2-2g+\frac{1}{2}\sum_i(k_i-1)$ に拡張される。この事実から、次の重要な事実を導出することができる。



There are L=3 index loops and L'=2 loops.

chiral superfield は、全て planar な Feynman diagram の寄与に起因している。

このことを見るためには、一つの index loop に 3 つ以上の gauge insertion のある寄与 (例えば $TrW_\alpha W^\alpha W_\beta W^\beta$) が non-planar では必ず入らざるを得ないことを見ればよい。こうした量は既に見たように non-chiral である。

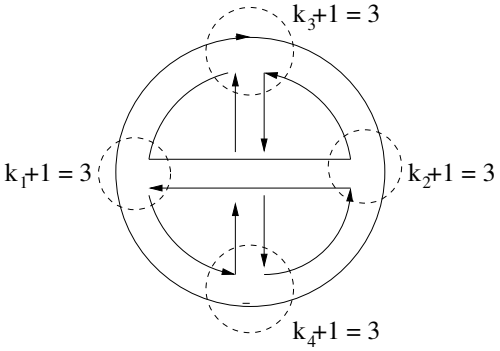
それぞれの index loop は、gauge insertion が 2 つ (1 つ)[0 つ] のときに、$S(w_\alpha)[N]$ の寄与を与える。non-planar の場合であれば、少なくとも一つの **index loop は 3 つ以上の gauge insertion をしなければいけない!!!**。何故ならば、W_{eff} の一般形より、(k_i+1) の vertex がある $(i = 1, 2, \cdots, s)$ とき、W_α^{k-1} と g_k は必ずセットで生じている。。したがって、W_α の個数は $2+\sum_{i=1}^{s}(k_i-1)$ である。

- まず planar な場合であれば、$L = 2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}(k_i-1)$ であったから、次の二通りの入れ方が存在するはずである。
  - $L-1$ 個の loop に、gauge insertion を 2 つずつ行ない、残る一つの loop には何も gauge insertion をしない。これは NS^{L-1} の寄与を与える。
  - $L-2$ 個の loop に、gauge insertion を 2 つずつ行なう。残る二つの loop には gauge insertion を 1 つずつ行なう。これは $S^{L-2}w_\alpha w^\alpha$ の寄与を与える。

  以上により、planar diagram の寄与は、$NS^{L-1}+S^{L-2}w_\alpha w^\alpha$ であり、特に one-loop であれば (但し、index loop は 2 つなので $L=2$)、先程の結果を再現する。

[3] 勿論、積分した後の作用は dimensionless である。$\int d^4x d^2\theta W_{eff}$ は無次元量であるが、$[x]=-1$, $[\theta]=\frac{1}{2}$ の質量次元を持つので、全体が無次元量であるためには、$[W_{eff}]=3$ の質量次元を持てばよいことが理解できる。しつこいようであるが、$[\theta]=\frac{1}{2}$ であることは次のようにして見ることができる。$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^\mu\bar\theta^{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ であるが、$[\theta]=a$ とすれば、1 項目は次元 $-a$、2 項目は次元 $1+a$ より、$-a = 1+a$ より $a=\frac{1}{2}$ である。

- 次に genus が 1 以上の場合について。このときは、$L \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}(k_i - 1)$ である。例えば、上の図のような場



g=1 genus

L= 2 −2 + (1+1+1+1) / 2 = 2 index loops

We have 2 + (1+1+1+1) = 6 field strengths W α

合に関しては、4 つの vertex が存在して、全て $k_1 + 1 = k_2 + 1 = k_3 + 1 = k_4 + 1 = 3$ 次である。また、この diagram の genus は $g = 1$ である。従って、index loop の数は

$$L = 2 - 2 \times 1 + \frac{1}{2}(1 + 1 + 1 + 1) = 2 \tag{2.45}$$

であり、挿入するのに必要な field strength W_α の数は

$$2 + \sum_i (k_i - 1) = 2 + (1 + 1 + 1 + 1) = 6 \tag{2.46}$$

である。したがって、non-chiral な寄与が出ないために、全ての index loop に高々2 つまでしか gauge insertion を許さないとすれば、入れられる W_α の数は、高々$\sum_{i=1}^{s}(k_i - 1)$ であり、足りない。従って、**non-planar** であれば、必ず **non-chiral** な寄与をさしはさまざるを得ないのである。

次に、簡単に一般のゲージ群が破れた場合のケースについて考える。今度は superpotential が

$$W'(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)^{N_i} \tag{2.47}$$

であり (即ち $x = a_i$ が N_i 重解)、したがってゲージ群が次のように破れるとする。

$$U(N) \to \prod_{i=1}^{n} U(N_i) \tag{2.48}$$

そうすれば、今度は有効ポテンシャルは次の物理量を用いて書くことができる。

$$S_i = -\frac{1}{32\pi^2} TrW_{\alpha i} W^{\alpha i}, \quad w_{\alpha i} = \frac{1}{4\pi} TrW_{\alpha i}. \tag{2.49}$$

ここで、各々の gauge 群に対する chiral な量は次のようにして定義することができる。

$$S_i = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_i} dz \frac{1}{32\pi^2} TrW_\alpha W^\alpha \frac{1}{z - \Phi}, \tag{2.50}$$

$$w_{\alpha i} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_i} dz \frac{1}{4\pi} TrW_\alpha \frac{1}{z - \Phi}. \tag{2.51}$$

ここで、C_i は、複素平面上における点 $z = a_i$ を囲む (それ以外の臨界点を囲まない) 十分に小さい contour のことである。この定義はあくまで半古典的な意味でのみ意味をなすものである。というのは、Φ は古典的な意味においてのみ

$$\Phi = \mathbf{diag}(\underbrace{a_1, \cdots, a_1}_{N_1\text{個}}, \underbrace{a_2, \cdots, a_2}_{N_2\text{個}}, \cdots, \underbrace{a_n, \cdots, a_n}_{N_n\text{個}}) \tag{2.52}$$

となるからである。即ち、古典的なときに限り、S_i や $w_{\alpha i}$ はゲージ群 $U(N_i)$ の中の量であることに留意をしておきたい。

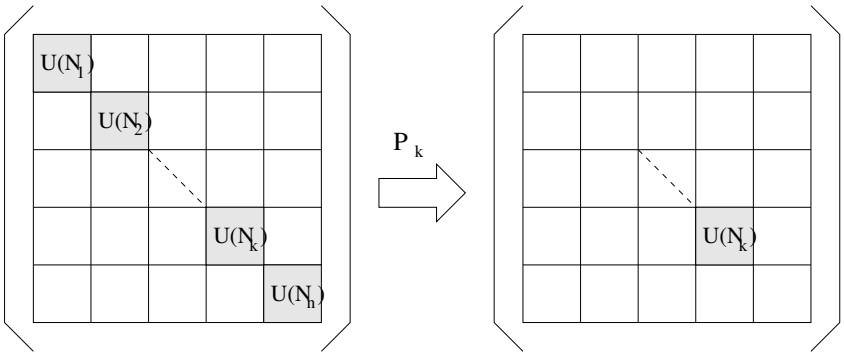
さて、resolvent が、確かに破れた後のゲージ群に対する射影演算子に相当していることをもう少し詳しく解説しておく。(2.52) が成立するとき、

$$TrM\frac{1}{z-\Phi_{cl}} = \sum_{m=1}^{N}\frac{M_{mm}}{z-a_m} \tag{2.53}$$

であることから、上記の contour 積分は、次のようにして評価せられることを意味する。

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_i} dzTrM\frac{1}{z-\Phi} = \sum_{m=1}^{N}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_i} dz\frac{M_{mm}}{z-a_m} = \sum_{\lambda_m\in C_i} M_{mm} = TrMP_i \tag{2.54}$$

つまり、ここでいう projector P_k は、下記の図のような役割を果たす。



ゲージ群が破れない場合と、破れたときの主な違いは以下の点である。

- まずは、massive な場を integrate out する必要がある点がある。
- 次に、potential の形に関する次元解析はそのまま通用するものの、具体形 $W_{eff} = W_\alpha^2 F\left(\frac{g_k W_\alpha^{k-1}}{g_1^{\frac{(k+1)}{2}}}\right)$ の中の gauge field strength は $W_{\alpha i}$ の違う種類のものが混ざった形であることに留意せねばならない。
- 次の違いは、最も決定的なものである。g_k の依存性が非常に複雑な形になる点である。そもそも、a_i は方程式

$$W'(x) = \sum_k g_k x^k = \prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{N_i} = 0 \tag{2.55}$$

の解であったことを思いだそう。即ち、a_i それ自体が複雑な形で g_k に依存しているのである! つまり、Feynman rule における r 次の vertex は g_{r-1} に単純に比例するのではなく、これ以上の高次の項の係数が複雑な形で入り組んでくるのである。

それでも、ゲージ群が破れた後でも、chiral ring が planar な diagram のみに起因することは同様にして示すことができる。

一般に genus g のグラフを考える。そうすれば L を index loop、L' を loop の数とすれば次の式が成立する。

$$L' = L - 1 + 2g. \tag{2.56}$$

そこで、次のように loop の数 L'(index loop の数 L とは違う) を数えるために、物理量を置き換えることにする。

$$\begin{array}{lcl} W_{eff} & \to & \frac{W_{eff}}{\hbar}, \\ Tr\Phi^\dagger e^V \Phi & \to & \frac{Z}{\hbar} Tr\Phi^\dagger e^V \Phi, \quad (Z \text{ は real vector superfield である}) \\ \tau_{\rm bare} W_\alpha^2 & \to & \frac{1}{\hbar}\tau_{\rm bare} W_\alpha^2. \end{array} \tag{2.57}$$

そうすれば、$W_{eff}^{L'}$ を、W_{eff} の中の L'-loop の効果であるとすれば、$W_{eff}^{L'}$ は $\hbar^{L'-1}$ のオーダーである。何故ならば、ダイアグラムに loop(index loop ではない) が一つ増えるごとに、(♯ propagator) - (♯ vertex) が一つ増えるからである。 従って、次の関係式を得る。

$$\hbar \frac{\partial}{\partial \hbar} W_{eff}^{L'} = (L'-1) W_{eff}^{L'} \tag{2.58}$$

一方、変数を置き換えた後は $\frac{W_{eff}}{\hbar} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \frac{g_k}{\hbar} Tr\Phi^{k+1}$ であるから、g_k の依存性は $\frac{g_k}{\hbar}$ のセットでしか効かない。従って、L-*index* loop の genus g の部分に着目すれば、

$$\hbar \frac{\partial}{\partial \hbar} W_{eff}^{L,g} = -\sum_k g_k \frac{\partial}{\partial g_k} W_{eff}^{L,g} = (L'-1) W_{eff}^{L,g} = (L - 2 + 2g) W_{eff}^{L,g} \tag{2.59}$$

を得る。従って、(2.42) 及び (2.44) の結果はゲージ群が破れた場合についても通用するので、次の結果を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha,i} W_{\alpha,i} \frac{\partial}{\partial W_{\alpha i}} W_{eff}^{L,g} &\overset{(2.44)}{=} 2W_{eff}^{L,g} - \sum_k \frac{2(2-k)}{3} g_k \frac{\partial}{\partial g_k} W_{eff}^{L,g} = 2W_{eff}^{L,g} - \sum_k \frac{2(3-k-1)}{3} g_k \frac{\partial}{\partial g_k} W_{eff}^{L,g} \\ &\overset{(2.42)}{=} 2 - 2\sum_k g_k \frac{\partial}{\partial g_k} W_{eff}^{L,g} \overset{(2.59)}{=} (2L - 2 + 4g) W_{eff}^{L,g}. \end{aligned} \tag{2.60}$$

この式の結果の意味するところについて考えよう。planar な diagram でなければ、$W_{\alpha,i}$ の冪 $(2L-2+4g)$ は常に $2L$ よりも大きい。従って、一つの index loop につき、必ずどこかには **3** 個以上の **gauge field strength** を割り当てなければいけない。このことは、ゲージ群が破れない場合と同じ意味で non-planar なグラフは non-chiral な寄与を含まなければいけないことを意味する。

2.5 有効ポテンシャルの一般形について

ここまでの議論で分かったことは、ゲージ群が破れないときだけでなく、破れたあとでも有効ポテンシャルの一般形が

$$\int d^4x d^2\theta \left(\omega(S_k) + \sum_{i,j=1}^{n} t_{ij}(S_k) w_{\alpha i} w_j^\alpha \right) \tag{2.61}$$

に限られることを見た。この寄与は全て planar な Feynman diagram のみに起因するものであって、議論も次元解析に基づくものであった。次に、このポテンシャルの形を絞っていくが、以下の議論はごく簡単な対称性の考察に基づくものである。特に、この作用には、

W_α の **Grassmann-odd** な変数の並進に対する対称性

がある。特に、低エネルギーの極限ではゲージ群が $\prod_i U(N_i)$ になることから、$W_{\alpha i}$ の夫々を並進させる対称性に相当する。この並進を

$$W_\alpha \to W_\alpha - 4\pi\psi_\alpha \tag{2.62}$$

であるとすれば、低エネルギーにおいてゲージ群が破れたときには、夫々の物理量の並進は次のとおりである。

$$\delta S_i = -\psi^\alpha w_{\alpha i}, \quad \delta w_{\alpha i} = -N_i \psi_\alpha. \tag{2.63}$$

そこで、簡単のために次の $\mathcal{S}_i$ という物理量を導入する。

$$\mathcal{S}_i = -\frac{1}{2} Tr \left(\frac{1}{4\pi} W_{\alpha i} - \psi_\alpha\right)\left(\frac{1}{4\pi} W_i^\alpha - \phi^\alpha\right) = S_i + \psi_\alpha w_i^\alpha - \psi^1\psi^2 N_i \tag{2.64}$$

$\mathcal{S}_i$ は明らかに上記の変換に対して不変な物理量である。そうすれば、上記の変換に対して不変な有効ポテンシャルは次で書ける。

$$W_{eff} = \int d^2\psi \mathcal{F}_p(\mathcal{S}_i). \tag{2.65}$$

ここで関数 $\mathcal{F}_p(x)$ の形は一意には決定されない。但し、$\mathcal{F}_p(\mathcal{S}_i = 0) = 0$ の条件を課せば $\mathcal{F}_p$ は一意に決まる。また、ψ についての Berezin 積分を行なえば、次の結果を得る。

$$W_{eff} = \int d^2\psi \mathcal{F}_p(\mathcal{S}_k) = \sum_i N_i \frac{\partial \mathcal{F}_p(S_k)}{\partial S_i} + \frac{1}{2}\sum_{ij} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_p(S_k)}{\partial S_i \partial S_j} w_{\alpha i} w_j^\alpha . \tag{2.66}$$

これはまさに Dijkgraaf-Vafa 予想で提唱された形である。

最後に、$SU(N)$ 群の場合について若干コメントをしておく。$U(N_i)$ のときと、$SU(N_i)$ のときの glueball の差は以下のとおりである。

$$S_i = \hat{S}_i - \frac{1}{2N_i} w_{\alpha i} w_i^\alpha. \tag{2.67}$$

ここで、S_i は $U(N_i)$ の量であり、$\hat{S}_i$ は $SU(N_i)$ の量である。そこで、有効作用を $\hat{S}_i$ を用いて表わす。即ち、

$$W_{eff} = \hat{\omega}(\hat{S}_k) + \sum_{i,j}^{n} \tau_{ij}(\hat{S}_k) w_{\alpha i} w_j^\alpha \tag{2.68}$$

としてかけるとすれば、τ_{ij} は次のようにして書くことができる。

$$\tau_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}_p(S_k)}{\partial S_i \partial S_j} - \delta_{ij} \frac{1}{N_i} \sum_l N_l \frac{\partial^2 \mathcal{F}_p(S_k)}{\partial S_i \partial S_l} \tag{2.69}$$

として得られる。さて、この式の意味するところについて考察してみよう。これは明らかに

$$\sum_j \tau_{ij} N_j = 0 \tag{2.70}$$

である。このことは、$\prod_i U(N_i) = (\prod_i SU(N_i)) \times U(1)$ のうち、overall な $U(1)$ が decouple することを意味している。$U(1)$ は摂動論的な補正からは decouple しているが、古典的な運動エネルギーには含まれている。

3 一般化した小西アノマリーについて

次に、行列模型とゲージ理論の間の対応を見るために、小西アノマリーについて議論をする。これは SQCD におけるカイラルアノマリーである。通常のゲージ理論であれば、藤川の方法によってカイラルアノマリーの導出

が知られている。藤川の方法のポイントは、カイラルアノマリーを経路積分のカイラル変換に伴う測度の変分と捉えた点にある。そこで、同様の議論を SQCD についても行なう。そのためには、次の汎関数微分を正則化するところから始まる。なお、point-splitting 法による小西アノマリーの導出の別解に関しては、Appendix C に譲ることにする。

$$\frac{\delta\Phi^i(y',\theta')}{\delta\Phi^j(y,\theta)} = \delta^i_j\langle y',\theta'|y,\theta\rangle. \tag{3.1}$$

SQCD におけるゲージ変換は次で表せられる。

$$\Phi \to e^{\Lambda}\Phi, \quad \bar{\Phi} \to \bar{\Phi}e^{\Lambda^\dagger}, \quad e^{2V} \to e^{-\Lambda^\dagger}e^{2V}e^{-\Lambda}. \tag{3.2}$$

これに対する共変微分は次で定義される。

$$\frac{\bar{D}^2e^{-2V}D^2e^{2V}}{16}\Phi \tag{3.3}$$

そうすれば、上記の量が Φ と同じゲージ変換に従うことは次で理解できる。

$$\begin{aligned}\frac{\bar{D}^2e^{-2V}D^2e^{2V}}{16}\Phi \quad &\to \quad \frac{\bar{D}^2(e^{-\Lambda^\dagger}e^{2V}e^{-\Lambda})^{-1}D^2(e^{-\Lambda^\dagger}e^{2V}e^{-\Lambda})}{16}\Phi = \frac{\bar{D}^2e^{\Lambda}e^{-2V}e^{\Lambda^\dagger}D^2e^{-\Lambda^\dagger}e^{2V}e^{-\Lambda}e^{\Lambda}}{16}\Phi \\ &= \quad e^{\Lambda}(\frac{\bar{D}^2e^{-2V}D^2e^{V}}{16}\Phi)\end{aligned} \tag{3.4}$$

実際、ゲージ場が 0 の極限 $(V \to 0)$ をとれば、

$$\frac{\bar{D}^2e^{-2V}D^2e^{2V}}{16}\Phi \to \frac{\bar{D}^2D^2}{16}\Phi = \Box\Phi \tag{3.5}$$

である。そこで、delta 関数の正則化を藤川の方法と同様の手法で行なう[4]。

$$\begin{aligned}\langle y',\theta'|y,\theta\rangle \quad &= \quad \lim_{\tau\to 0}\langle y',\theta'|\exp\left(\frac{\bar{D}^2e^{-2V}D^2e^{2V}}{16}\tau\right)|y,\theta\rangle \\ &= \quad \lim_{\tau\to 0}\int\frac{d^4kd^2\kappa}{(2\pi)^4}\langle y',\theta'|\exp\left(\frac{\bar{D}^2e^{-2V}D^2e^{2V}}{16}\tau\right)|k,\kappa\rangle\langle k,\kappa|y,\theta\rangle \\ &= \quad 2\lim_{\tau\to 0}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}d^2\kappa\left\{\exp\left(\frac{\bar{D}^2e^{-2V}D^2e^{2V}}{16}\tau\right)e^{iky'+i\kappa\theta'}\right\}e^{-iky-i\kappa\theta}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

今は、$y = x + i\theta\sigma\bar{\theta}$ の座標を用いて評価をしているので、共変微分は次のようにして記述される。

$$\bar{D}^2e^{-2V}D^2e^{2V} = \left(\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\beta}}}\right)e^{-2V}\epsilon^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta^\beta} + 2i\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + 2i\sigma^\nu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right)e^{2V} \tag{3.7}$$

これが $e^{iky+i\kappa\theta}$ にかかると、次を与える。

$$\begin{aligned}&\left(\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\beta}}}\right)e^{-2V}\epsilon^{\alpha\beta}\left(D_\beta + i\kappa_\beta - 2k_\mu\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\right)\left(D_\alpha + i\kappa_\alpha - 2k_\nu\sigma^\nu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\right)e^{2V} \\ = \quad &-16k^2 - \kappa^2\bar{D}^2 + \bar{D}^2e^{-2V}D^2e^{2V} - 16i\kappa^\alpha W_\alpha + 4\bar{D}^{\dot{\alpha}}e^{-2V}k_\mu\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}D^\alpha e^{2V} - 4i\bar{D}^{\dot{\alpha}}k_\mu\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\kappa^\alpha.\end{aligned} \tag{3.8}$$

[4]但し、次の 2 倍のファクターに注意する必要がある。

$$\begin{aligned}\langle\theta|\theta'\rangle \quad &= \quad 2\int d^2\kappa\exp(-i\kappa(\theta-\theta')) = -\frac{1}{2}\epsilon^{\gamma\delta}\int d\gamma d\delta(1 - i\kappa^\alpha(\theta-\theta)_\alpha - \frac{1}{2}\kappa^\alpha(\theta-\theta')_\alpha\kappa^\beta(\theta-\theta')_\beta + \cdots) \\ &= \quad -\frac{1}{4}\epsilon^{\gamma\delta}\int d\kappa_\gamma d\kappa_\delta\kappa^\alpha\kappa^\beta(\theta-\theta')_\alpha(\theta-\theta')_\beta = -\frac{1}{4}\epsilon^{\gamma\delta}\frac{\partial}{\partial\kappa^\gamma}\frac{\partial}{\partial\kappa^\delta}\kappa^\alpha\kappa^\beta(\theta-\theta')_\alpha(\theta-\theta')_\beta \\ &= \quad -\frac{1}{4}\epsilon^{\gamma\delta}(\delta^\alpha_\delta\delta^\beta_\gamma - \delta^\alpha_\gamma\delta^\beta_\delta)(\theta-\theta')_\alpha(\theta-\theta')_\beta = +\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}(\theta-\theta')_\alpha(\theta-\theta')_\beta = \frac{1}{2}((\theta-\theta')_1(\theta-\theta')_2 - (\theta-\theta')_2(\theta-\theta')_1) \\ &= \quad (\theta-\theta')_1(\theta-\theta')_2.\end{aligned}$$

として、Grassmann-odd な変数の bracket を定義しているがために、2 倍が生じている点に留意しよう。

最後の計算では、$\bar{\theta}$ の 0 次のオーダーについてのみ拾っている[5]。また、ここでは $W_\alpha = -\frac{1}{8}\bar{D}^2 e^{-2V} D_\alpha e^{2V}$ であることも用いている。そうすれば、次の寄与を得る。

$$2\lim_{\tau\to 0}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^2\kappa e^{-k^2\tau} \exp\left\{\frac{1}{16}(-\kappa^2\bar{D}^2 + \bar{D}^2 e^{-2V} D^2 e^{2V} - 16i\kappa^\alpha W_\alpha + 4\bar{D}^{\dot{\alpha}} e^{-2V} k_\mu \sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}} D^\alpha e^{2V} - 4i\bar{D}^{\dot{\alpha}} k_\mu \sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\kappa^\alpha)\tau\right\}. \quad (3.9)$$

ここで、指数関数を Taylor 展開して、$\int d^2\kappa$ の Grassmann 積分で生き残る項のみを抽出する。また、$D^3 = \bar{D}^3 = 0$ である点も注意しておこう。次に、$\tau \to 0$ の極限をとるのであるから、τ の 1 次以上の項もまた全て排除される。次の積分を評価する。ここで、Wick rotation をする際には、$(k_{0E}, k_{1E}, k_{2E}, k_{3E}) = (-ik_0, k_1, k_2, k_3)$ であるとしている。

$$\int d^4k e^{-k^2\tau} = i\int d^4k_E e^{-k_E^2\tau} = 2\pi^2 i\int_0^\infty dk_E k_E^3 e^{-k_E^2\tau} = \frac{i\pi^2}{\tau^2} \quad (3.10)$$

これを用いると、最終的に生き残るのは次の寄与のみであることが理解できる。

$$\begin{aligned}
\langle y', \theta' | y, \theta\rangle &= 2\lim_{\tau\to 0}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int d^2\kappa e^{-k^2\tau} \times \frac{1}{2} \times \left\{(-i\tau)^2 W_\alpha\kappa^\alpha W_\beta\kappa^\beta\right\} \\
&= 2\lim_{\tau\to 0}\int d^2\kappa \frac{i}{16\pi^2\tau^2} \times \frac{1}{2} \times (-i\tau)^2 W_\alpha\kappa^\alpha W_\beta\kappa^\beta \\
&= -2\lim_{\tau\to 0}\int d^2\kappa \frac{i}{16\pi^2\tau^2} \times \frac{1}{2} \times (-i\tau)^2 W_\alpha W_\beta\kappa^\alpha\kappa^\beta \\
&= -2\lim_{\tau\to 0}\frac{i}{16\pi^2\tau^2} \times \frac{1}{2} \times (-i\tau)^2 W_\alpha W_\beta(\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}) \\
&= +2\lim_{\tau\to 0}\frac{i}{16\pi^2\tau^2} \times \frac{1}{2} \times (-i\tau)^2 \times \frac{1}{2} \times W_\alpha W^\alpha \\
&= -\frac{i}{32\pi^2} W_\alpha W^\alpha \quad (3.11)
\end{aligned}$$

[5]ここで、多少蛇足ではあるが、最初の項の計算について詳しく見よう。言うまでもなく、これは次の寄与に起因する。

$$4\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\alpha\beta}k_\mu k_\nu(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\gamma}}\bar{\theta}^{\dot{\delta}})\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\gamma}}\sigma^\nu{}_{\alpha\dot{\delta}}.$$

ここで、$\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\beta}}}\bar{\theta}^{\dot{\gamma}}\bar{\theta}^{\dot{\delta}} = \delta^{\dot{\delta}}_{\dot{\alpha}}\delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\beta}} - \delta^{\dot{\delta}}_{\dot{\beta}}\delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\alpha}}$ であるから、これを代入すれば

$$(\text{与式}) = 8\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\alpha\beta}k_\mu k_\nu \sigma^\mu{}_{\beta\dot{\beta}}\sigma^\nu{}_{\alpha\dot{\alpha}}$$

を得る。あとは、具体的に成分ごとに書き下して行けばよい。結果として効くのは $\mu = \nu$ のときのみであるので、その部分の寄与のみ列挙する。

- $\mu = \nu = 0$ のとき。$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるから、次の寄与を与える。

  $$8\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\alpha\beta}k_0k_0\sigma^0{}_{\beta\dot{\beta}}\sigma^0{}_{\alpha\dot{\alpha}} = 8k_0k_0(\epsilon^{12}\epsilon^{12}\sigma^0{}_{22}\sigma^0{}_{11} + \epsilon^{21}\epsilon^{21}\sigma^0{}_{11}\sigma^0{}_{22}) = 8k_0k_0((-1)\times(-1) + 1\times 1)\times 1\times 1 = 16k_0k_0.$$

- $\mu = \nu = 1$ のとき。$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ であるから、次の寄与を与える。

  $$8\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\alpha\beta}k_1k_1\sigma^1{}_{\beta\dot{\beta}}\sigma^1{}_{\alpha\dot{\alpha}} = 8k_1k_1(\epsilon^{12}\epsilon^{21}\sigma^1{}_{12}\sigma^1{}_{21} + \epsilon^{21}\epsilon^{12}\sigma^1{}_{21}\sigma^1{}_{12}) = 8k_1k_1((-1)\times 1 + 1\times(-1))\times 1\times 1 = -16k_1k_1.$$

- $\mu = \nu = 2$ のとき。$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ であるから、次の寄与を与える。

  $$8\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\alpha\beta}k_2k_2\sigma^2{}_{\beta\dot{\beta}}\sigma^2{}_{\alpha\dot{\alpha}} = 8k_2k_2(\epsilon^{12}\epsilon^{21}\sigma^2{}_{12}\sigma^2{}_{21} + \epsilon^{21}\epsilon^{12}\sigma^2{}_{21}\sigma^2{}_{12}) = 8k_2k_2((-1)\times 1 + 1\times(-1))\times(-i)\times i = -16k_2k_2.$$

- $\mu = \nu = 3$ のとき。$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ であるから、次の寄与を与える。

  $$8\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\alpha\beta}k_3k_3\sigma^3{}_{\beta\dot{\beta}}\sigma^3{}_{\alpha\dot{\alpha}} = 8k_3k_3(\epsilon^{12}\epsilon^{12}\sigma^3{}_{22}\sigma^3{}_{11} + \epsilon^{21}\epsilon^{21}\sigma^3{}_{11}\sigma^3{}_{22}) = 8k_3k_3((-1)\times(-1) + 1\times 1)\times 1\times(-1) = -16k_3k_3.$$

- あとは同様にして、$\mu \neq \nu$ の寄与が全てキャンセルできることが確認できるが、この詳細は省略する。

以上により、上記の項の寄与は全部で次のように与えられることがわかる。

$$(\text{与式}) = -16(-k_0k_0 + k_1k_1 + k_2k_2 + k_3k_3) = -16k^2.$$

を得る。ここで、次の Berezin 積分を用いた。

$$\int d^2\kappa\kappa^\alpha\kappa^\beta = -\frac{1}{4}\epsilon^{\gamma\delta}\int d\kappa_\gamma d\kappa_\delta\kappa^\alpha\kappa^\beta = -\frac{1}{4}\epsilon^{\gamma\delta}(\frac{\partial}{\partial\kappa^\gamma}\frac{\partial}{\partial\kappa^\delta})\kappa^\alpha\kappa^\beta = -\frac{1}{4}\epsilon^{\gamma\delta}(\delta^\alpha_\delta\delta^\beta_\gamma - \delta^\alpha_\gamma\delta^\beta_\delta) = +\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta} \tag{3.12}$$

さらに、${T^A}_{ij} = -i{f^A}_{ij}$ として、両辺に T^i を書けると、最終的に次を得る。

$$T^i\frac{\delta\Phi^i(y',\theta')}{\delta\Phi^j(y,\theta)} = \delta^i_j\langle y',\theta'|y,\theta\rangle = -\frac{i}{32\pi^2}[W_\alpha,[W^\alpha,T^j]]. \tag{3.13}$$

次に、カイラル変換 $\delta\Phi = \epsilon\Phi$ に伴う superfield のカレント

$$J = Tr\bar{\Phi}e^{\mathrm{ad}V}\Phi \tag{3.14}$$

に対して、superpotential が存在する場合には、次のカレントアノマリーが存在することを意味する。

$$\bar{D}^2J = Tr\Phi\frac{\partial W(\Phi)}{\partial\Phi} + \frac{1}{32\pi^2}Tr_{\mathrm{adj}}(\mathrm{ad}W_\alpha)(\mathrm{ad}W^\alpha) = Tr\Phi\frac{\partial W(\Phi)}{\partial\Phi} + \frac{N}{16\pi^2}TrW_\alpha W^\alpha - \frac{1}{16\pi^2}TrW_\alpha TrW^\alpha. \tag{3.15}$$

ここで、1 項目の $Tr\Phi\frac{\partial W(\Phi)}{\partial\Phi}$ は古典的な寄与である。

次に両辺の期待値をとることにする。

- まず、$\bar{D}^2J$ は $\bar{Q}^{\dot{\alpha}}$-commutator であるから、これは supersymmetric vacuum であれば消える。よって、$\langle\bar{D}^2J\rangle = 0$ が成立する。
- また、$\langle TrW_\alpha\rangle = 0$ であることと、cluster rule により、$\langle TrW_\alpha W^\alpha\rangle = \langle TrW_\alpha\rangle^2 = 0$ であることもすぐに分かる。

従って、両辺の期待値をとれば次が得られる。

$$\left\langle Tr\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial\Phi}\right\rangle = \sum_{k\geq 0}(k+1)g_k\frac{\partial}{\partial g_k}W_{eff} = -2\frac{N}{32\pi^2}\langle TrW_\alpha W^\alpha\rangle = 2NS \tag{3.16}$$

を得る。ここで、既に出てきた $\frac{\partial W_{eff}}{\partial g_k} = \left\langle Tr\frac{\Phi^{k+1}}{k+1}\right\rangle_\Phi$ であることを用いている。この一つの解は、one-loop の diagram の寄与と同一であり、

$$\int d^4xd^2\theta\ln(\frac{m}{\Lambda_0})\left(NS + \frac{1}{2}w_\alpha w^\alpha\right) + (\mathrm{c.c.}) \tag{3.17}$$

である。この super-current の形は、以前の one-loop の結果と一致している。

higher-loop の寄与については、**non-chiral** な効果しか与えない

このことは、対称性の議論だけで簡単に示すことができる。アノマリーに関して、$U(1)_\Phi \times U(1)_\theta$ の対称性を考えれば、既に与えた表よりアノマリーの対称性は

$$(U(1)_\Phi, U(1)_\theta) = (0,2) \tag{3.18}$$

である。このとき、摂動論的には $U(1)_\theta$ 対称性により、W_α^2 あるいは $g_k\Phi^{k+1}$ の組み合わせしか有り得ないので、one-loop のアノマリーの形以上の摂動の高次の補正は現われない。(charge だけの議論であれば、Λ の補正の可能性は消せないし、実際にこうした項は (例えば $g_{2Nl+k-1}\Lambda^{2Nl}Tr\Phi^k$ などは $\mathrm{charge}(U(1)_\Phi, U(1)_\theta) = (0,2)$ を持つ)、非摂動的な instanton 効果と見做せるが、こうした非摂動的な効果は、4 章での議論では効いてこない)。

次に、一般化した小西アノマリーについて見ることにする。先程の結果は $\delta\Phi = \epsilon\Phi$ に対するネーターカレントのアノマリーであった。今度は一般の変換

$$\delta\Phi = f(\Phi, W_\alpha) \tag{3.19}$$

に対するネーターカレントのアノマリーを考える。即ち、次の量を評価したい。

$$\bar{D}^2\langle J_f\rangle = \bar{D}^2\langle Tr\bar{\Phi}e^{\mathrm{ad}V} f(\Phi, W_\alpha)\rangle. \tag{3.20}$$

ここでも、結合定数の最低次のみを考えればよい。何故ならば $U(1)_\Phi \times U(1)_\theta$ の charge の対称性からこれで摂動論の全てのオーダーを尽くしていることが言えるからである。**one-loop** の場合であれば、$\bar{\Phi}$ は、$f(\Phi, W_\alpha)$ の中の Φ の一つだけと **contract** するはずである。従って、次のことが言える。

$$\bar{D}^2\langle Tr\bar{\Phi}e^{\mathrm{ad}V} f(\Phi, W_\alpha)\rangle = \sum_{ijkl} A_{ij,kl}\frac{\partial f(\Phi, W_\alpha)_{ji}}{\partial\Phi_{kl}},\ \text{where } A_{ij,kl} = \bar{D}^2\langle\bar{\Phi}_{ij}e^{\mathrm{ad}V}\Phi_{kl}\rangle. \tag{3.21}$$

そうすれば、先程の場合と同様にして one-loop の効果は

$$\bar{D}^2 J_f = Trf(\Phi, W_\alpha)\frac{\partial W(\Phi)}{\partial\Phi} + \frac{1}{32\pi^2}\sum_{i,j}\left[W_\alpha, \left[W^\alpha, \frac{\partial f}{\partial\Phi_{ij}}\right]\right]_{ji} \tag{3.22}$$

であることがわかる。$U(1)_\Phi \times U(1)_\theta$ の対称性を考えれば、上記の項以外の摂動論的な補正は全く受けないことがわかる。従って、同様にして期待値をとれば、次の一般化した Ward 恒等式を得ることができる。

[**SQCD** における一般化した **Ward** 恒等式]

$$\left\langle Trf(\Phi, W_\alpha)\frac{\partial W}{\partial\Phi}\right\rangle = -\frac{1}{32\pi^2}\left\langle\sum_{i,j}\left(\left[W_\alpha, \left[W^\alpha, \frac{\partial f(\Phi, W_\alpha)}{\partial\Phi_{ij}}\right]\right]\right)_{ij}\right\rangle. \tag{3.23}$$

4 ゲージ理論と行列模型の双対性について

次に、行列模型とゲージ理論の双対性について議論をすすめる。以下の議論の基になっているのは、ゲージ理論と行列模型とでは大きく異っている。

- ゲージ理論においては、factorization は chiral operator の cluster 則に起因している。
- 一方、行列模型においては、factorization は large-N の性質に基づいている。

しかし、両者の共通点として、ゲージ理論のカイラル環と、行列模型の large-N の極限はいずれも *planar* な *diagram* に基づいているという点がある。以下では superpotential$W(\Phi) = \sum_{k=0}^{n}\frac{g_k}{k+1}Tr\Phi^{k+1}$ の場合を考える。これについて、カイラルな演算子の母関数を次で導入する。

$$\mathcal{R}(z,\psi) = -\frac{1}{2}Tr\left(\frac{1}{4\pi}W_\alpha - \psi_\alpha\right)^2\frac{1}{z-\Phi} = R(z) + \psi_\alpha w^\alpha(z) - \psi^1\psi^2 T(z),\ \text{where} \tag{4.1}$$

$$T(z) = Tr\frac{1}{z-\Phi} = \sum_{k\geq 0} z^{-1-k}Tr\Phi^k, \tag{4.2}$$

$$w_\alpha(z) = \frac{1}{4\pi}TrW_\alpha\frac{1}{z-\Phi}, \tag{4.3}$$

$$R(z) = -\frac{1}{32\pi^2}TrW_\alpha W^\alpha\frac{1}{z-\Phi}. \tag{4.4}$$

4.1 ゲージ理論側の議論

まずは、次の形の変換から考えることにする。

$$\delta\Phi_{ij} = f_{ij}(\Phi, W_\alpha) = -\frac{1}{32\pi^2}\left(\frac{1}{z-\Phi}W_\alpha W^\alpha\right)_{ij}. \tag{4.5}$$

これを Ward 恒等式に代入すると、次の関係式を得る。

$$\left\langle -\frac{1}{32\pi^2}\sum_{i,j}\left[W_\alpha, \left[W^\alpha, \frac{\partial}{\partial\Phi_{ij}}\frac{W_\alpha W^\alpha}{z-\Phi}\right]\right]_{ij}\right\rangle = \left\langle Tr\left(\frac{W'(\Phi)W_\alpha W^\alpha}{z-\Phi}\right)\right\rangle. \tag{4.6}$$

ここで、次の恒等式を用いる。但し、$\chi_1^2 = \chi_2^2 = 0$ であるとして、Φ と χ_α が交換することも仮定する。

$$\sum_{i,j}\left[\chi_1, \left[\chi_2, \frac{\partial}{\partial\Phi_{ij}}\frac{\chi_1\chi_2}{z-\Phi}\right]\right]_{ij} = \left(Tr\frac{\chi_1\chi_2}{z-\Phi}\right)^2. \tag{4.7}$$

この公式の証明は Appendix. B. に譲る。従って、chiral operator の factorization 則を用いると、次を得る。

$$\langle R(z)R(z)\rangle = \langle R(z)\rangle^2 = \langle TrW(\Phi)R(z)\rangle. \tag{4.8}$$

そこで、行列模型との loop 方程式との関係を見るために、次のような置き換えをする。

$$R(z)^2 = W'(z)R(z) + \frac{f(z)}{4} \tag{4.9}$$

ここで、$f(z)$ は次で定義される正則な関数である。

$$f(z) = 4Tr\frac{(W'(\Phi) - W'(z))W_\alpha W^\alpha}{z-\Phi}. \tag{4.10}$$

換言すれば、$Tr\frac{W'(\Phi)W_\alpha W^\alpha}{z-\Phi} \to \mathcal{O}(\frac{1}{z})$ が十分遠くで成立することから、

$$-\frac{1}{32\pi^2}Tr\frac{W'(\Phi)W_\alpha W^\alpha}{z-\Phi} = [W'(z)R(z)]_- \tag{4.11}$$

である。 この結果は Ward identity が次のように表わされることを意味している。

$$R(z)^2 = [W'(z)R(z)]_-. \tag{4.12}$$

ここで、$[f(z)]_-$ は Laurent 展開の負冪の項のみを残した部分を意味する。後でみるように、これはまさに行列模型におけるループ方程式と同じ形をしている。

以上でまずループ方程式について議論できたので、次に厳密な有効ポテンシャルの形の決定の議論を行なう。今度は、次の変換に対する Ward 恒等式を考える。

$$\delta\Phi_{ij} = f_{ij}(\Phi, W_\alpha) = \mathcal{R}(z,\phi)_{ij} \tag{4.13}$$

そうすれば、次の Ward 恒等式を得る。

$$\left\langle \frac{1}{4(4\pi)^2}\sum_{i,j}\left[W_\alpha, \left[W^\alpha, \frac{\partial}{\partial\Phi_{ij}}\frac{(\frac{1}{4\pi}W_\alpha - \phi_\alpha)^2}{z-\Phi}\right]\right]_{ij}\right\rangle = \langle TrW'(\Phi)\mathcal{R}(z,\phi)\rangle. \tag{4.14}$$

従って、全く同様にして次の結果を得る。

$$\mathcal{R}(z,\psi)^2 = Tr(W'(\Phi)\mathcal{R}(z,\psi)) = W'(z)\mathcal{R}(z,\psi) + \frac{1}{4}f(z,\psi) \tag{4.15}$$

ここで、$f(z,\psi)=f(z)+\psi_\alpha\rho^\alpha(z)-\psi^1\psi^2c(z)$ である。そうすれば、各々の成分について次の結果を得る。

$$R^2(z)=W'(z)R(z)+\frac{1}{4}f(z), \tag{4.16}$$

$$2R(z)w_\alpha(z)=W'(z)w_\alpha(z)+\frac{1}{4}\rho_\alpha(z), \tag{4.17}$$

$$2R(z)T(z)+w_\alpha(z)w^\alpha(z)=W'(z)T(z)+\frac{c(z)}{4}. \tag{4.18}$$

これらの結果は、いずれも一般化した小西アノマリーから別々に導出することの出来る独立した方程式である。

次に、ゲージ理論側で superpotential を導出する過程について説明を加える。まず、先程得られたループ方程式を $\mathcal{R}(z,\psi)$ について解くことは、単純な二次方程式の解に過ぎないので、簡単に行なうことができる。

$$\mathcal{R}(z,\psi)=\frac{1}{2}\left(W'(z)-\sqrt{W'(z)^2+f(z,\psi)}\right) \tag{4.19}$$

ここで、$f(z,\phi)=f(z)+\psi_\alpha\rho^\alpha(z)-\psi^1\psi^2c(z)$ であるが、ボゾニックな多項式 $f(z)$, $c(z)$、及びフェルミオニックな多項式 $\rho^{1,2}(z)$ はいずれも n 次の多項式である。従って、上記の $\mathcal{R}(z,\phi)$ は $2n$ 個のボゾニックな係数と、$2n$ 個のフェルミオニックな変数によって縛られている。

符号は、無限遠において $\mathcal{R}(z,\psi)\sim\frac{1}{z}$ であるという要請から得ることができる。まずは、ψ の 0 次の寄与に関していえば、$f(z)=\sum_{i=0}^{n-1}f_iz^i$ の係数 f_i によって決定される。いま、もとを正せば $W(z)$ は $(n+1)$ 次、$f(z)$ は $(n-1)$ 次の多項式である。$R(z)$ は、z-平面上で branch を持つリーマン面 (これを Σ と呼べば、$W'(z)^2+f(z)$ は $2n$ 次の多項式なので、Σ は genus $n-1$ 次の多項式である) において一価である。

そこで、次の量を考える。

$$\mathcal{S}_i=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_i}\frac{1}{2}Tr\left(\frac{1}{4\pi}W_\alpha-\psi_\alpha\right)\left(\frac{1}{4\pi}W^\alpha-\psi^\alpha\right)\frac{1}{z-\Phi}=S_i+i\psi_\alpha w^\alpha-\psi^1\psi^2N_i'=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_i}dz\mathcal{R}(z,\psi) \tag{4.20}$$

である。そこで、$f(z,\psi)$ の展開係数との関係について見ることにする。特に $\psi^\alpha=0$ の成分について見れば、次の関係がある。

$$S_i=\frac{1}{4\pi i}\oint_{C_i}dz(W'(z)-\sqrt{W'(z)^2+f(z)})=-\frac{1}{4\pi i}\oint_{C_i}dz\sqrt{W'(z)^2+f(z)}. \tag{4.21}$$

ここで、1 項目は単純に正則関数の複素平面上での積分なので自明に消える。そうすれば、$f(z)=\sum_{i=0}^{n-1}f_iz^i$ の係数で展開をすることで次を得る。

$$\frac{\partial S_i}{\partial f_j}=-\frac{1}{8\pi i}\oint_{C_i}dz\frac{z^j}{\sqrt{W'(z)^2+f(z)}} \tag{4.22}$$

この積分に関して、若干解説を付け加えておきたい。詳細に関しては森田氏の修士論文に譲ることにするが、ここでは簡単にコメントをするにとどめる。

- これを、$0\le j\le n-2$ についてそれぞれ積分をすることで、$n-1$ 個の、genus $g=n-1$ のリーマン面 Σ 上での正則な 1-形式の集合が得られる。なお、現在考えているリーマン面が genus $n-1$ であるのは、平方根 $\sqrt{W'(z)^2+f(z)}$ が $2n$ 次の多項式であって n 個の cut を持つからである (同じ意味において、$y=\sqrt{(z-a)(z-b)}$ は cut が一つであり、従って planar なリーマン面となる。$y=\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}$ は genus 1 の torus で定義せられる)。つまり、上記の微分で、$(n-1)\times(n-1)$ の周期行列がつくれたことになる。しかも、この周期行列は行列式が 0 でないため、正則行列である。

- 次に、最高次の $j=n-1$ の場合について考える。そのためには、$R(z)$ の無限遠での寄与を考えればよい。

一見すれば全ての周期積分が独立であるように思えるかも知れない。にもかかわらず、なぜ $(n-1)\times(n-1)$ の周期積分に別けたのかといえば、これは次の事情に起因するものである。Riemann 面を考察する上では、複素平

面上における無限遠点も平面上に存在すると考える。従って、全ての特異点 $a_1, \cdots, a_n$ を囲むループは結局は自明な閉曲線 (1 点に縮約できる曲線) と等価になってしまうからである。即ち、サイクルに関しては次のことが言えるからである。

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_n = 0. \tag{4.23}$$

つまり、(4.22) とは別に、S_i と f_j を結び付ける式が必要となる。そのために、$z \to \infty$ における振る舞いについて見ることにする。$R(z) = -\frac{1}{32\pi^2} Tr \frac{W_\alpha W^\alpha}{z-\Phi}$ のすべての極を含む十分大きな経路で積分をすると、$S = \sum_i S_i$ である。したがって、

$$R \sim \frac{S}{z} \tag{4.24}$$

として振る舞う。一方、$R(z)$ の $\mathcal{O}(\frac{1}{z})$ の項は次のようにして評価することができる。

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{1}{2}(W'(z) - \sqrt{W'(z)^2 + f(z)}) = \frac{1}{2}W'(z)\left(1 - \sqrt{1 + \frac{f(z)}{W'(z)^2}}\right) \\ &= -\frac{1}{2}W'(z)\left(\frac{f(z)}{2W'(z)^2} - \frac{f(z)^2}{8W'(z)^4} + \cdots\right) = -\frac{f_{n-1}}{4g_n z} + \mathcal{O}(\frac{1}{z^2}) \end{aligned} \tag{4.25}$$

を得る。従って、関係式

$$S = -\frac{f_{n-1}}{4g_n} \tag{4.26}$$

を得ることができた。これによって、S_i から f_j が完全に求まることを意味する。**ということは、$R(z) = \frac{1}{2}(W'(z) - \sqrt{W'(z)^2 + f(z)})$ であったことから、S_i を与えれば、$R(z)$ が解ける**という結論に達する。但し、具体的な積分の評価に関しては楕円積分の知識を必要とする。この問題に関してはここでは深入りしないことにする。

次に有効ポテンシャルの決定の議論に移る。ここでは、**adjoint matter** に依存する項について議論を行なう。先に述べた事実によって、

$$\mathcal{R}(z, \phi) = R(z, \mathcal{S}_i) \tag{4.27}$$

として、引数を S_i から $\mathcal{S}_i$ に持ち上げれば $\mathcal{R}(z, \phi)$ を得る。

既に議論したように、ψ だけ並進させた対称性を尊重する必要があるので、有効ポテンシャルは次の形でかけることが要求される。

$$W_{eff} = \int d^2\psi \mathcal{F}_p(\mathcal{S}_i, g_k). \tag{4.28}$$

従って、$\frac{\partial W_{eff}}{\partial g_k} = \left\langle Tr \frac{\Phi^{k+1}}{k+1} \right\rangle_\Phi$ であったことを思い出すと、次を得る。

$$\frac{\partial W_{eff}}{\partial g_k} = \int d^2\psi \frac{\mathcal{F}_p(\mathcal{S}_i, g_j)}{g_k} = \frac{1}{k+1}\langle Tr\Phi^{k+1}\rangle_\Phi = -\frac{1}{2(k+1)} \int d^2\psi \left\langle Tr\left(\frac{1}{4\pi}W_\alpha - \psi_\alpha\right)^2 \Phi^{k+1} \right\rangle_\Phi . \tag{4.29}$$

これだけでは当然 superpotential は一意には決まらないのであるが、$\mathcal{F}_p$ が $\mathcal{S}_i$ のみの関数であって $\mathcal{F}_p(\mathcal{S}_i = 0)$ であることを仮定するならば、次で一意に決定せられる。

$$\frac{\partial \mathcal{F}_p}{\partial g_k} = -\frac{1}{2(k+1)} \left\langle Tr\left(\frac{1}{4\pi}W_\alpha - \psi_\alpha\right)^2 \Phi^{k+1} \right\rangle_\Phi \tag{4.30}$$

superpotential の結合定数に依存する部分に関しては、

$$\frac{\partial W_{eff}}{\partial g_k} = -\frac{1}{k+1}\int d^2\psi \langle (\mathcal{R}(z,\psi) \text{ の } z^{-k-2} \text{ の係数})\rangle_\Phi \tag{4.31}$$

であることを用いて、完全に決定することができる。

結合定数に依存しない、matter の関与しない項に関しては、次の二つの寄与が考えられる。

- Veneziano-Yankielowicz 的なポテンシャル。これは **gauge** 場の寄与である。

$$W_{eff}^{SYM} = 2\pi i\tau \sum_i S_i + \sum_i \hat{S}_i(\log(\Lambda_0^{3N_i}/\hat{S}_i^{N_i}) + N_i). \tag{4.32}$$

- もう一つは、one-loop の寄与であり、

$$W_{eff}^{1loop} = \int d^4x d^2\theta \ln(\frac{m}{\Lambda_0})(NS + \frac{1}{2}w_\alpha w^\alpha). \tag{4.33}$$

として表せられる。

4.2 行列模型側の解析について

以上で、ゲージ理論側の解析が終わったので、次に行列模型側の解析に議論を移る。以下の目標は、次の二点である。

- Schwinger-Dyson 方程式を調べることによって、resolvent が同一の方程式に従うことを示す。
- 自由エネルギーが同一の形であることを示すこと。

ここで、$\hat{N}$ を行列の大きさとするが、これはゲージ理論における N とは全く異なる性質のものである。

- ゲージ理論では、あくまで planar な diagram のみが効くことにしても、cluster 則が成立することも、あくまでカイラル環の性質に依存している。従って、$N \to \infty$ であることは何一つ仮定していない。
- 一方行列模型では、以下の議論で本質的なのは $\hat{N} \to \infty$ である点である。従って、planar diagram も cluster 則も、全て、$\hat{N} \to \infty$ の産物である。

まず、行列模型における自由エネルギーは次の経路積分で定義されるものである。

$$\exp\left(-\frac{\hat{N}^2}{g_m^2}F_{m.m.}\right) = \int d^{\hat{N}^2}M \exp\left(-\frac{\hat{N}}{g_m}trW(M)\right). \tag{4.34}$$

ここで't Hooft 極限は、$W(M)$ や g_m を固定して $\hat{N} \to \infty$ とする極限のことである。また、tr はこの $\hat{N} \times \hat{N}$ の行列のトレースをさす。

まず、ゲージ理論と行列模型の間の対応を見るために、次の loop 方程式を考察することにする。そのために、

$$\int d^{\hat{N}^2}M tr\left(T^A\frac{1}{z-M}\right)\exp\left(-\frac{\hat{N}}{g_m}trW(M)\right) \tag{4.35}$$

について Schwinger-Dyson 方程式を解く。そこで、$M \to M + T^A$ としても、単なる積分変数の変換なので値も変わらないし、また積分測度もまた影響を受けない。従って、次を得る。

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^{\hat{N}^2}M tr\left(T^A\frac{1}{z-M}T^A\frac{1}{z-M}\right)\exp\left(-\frac{\hat{N}}{g_m}trW(M)\right) \\ &- \frac{\hat{N}}{g_m}\int d^{\hat{N}^2}M tr\left(T^A\frac{1}{z-M}\right)tr(T^AW'(M))\exp\left(-\frac{\hat{N}}{g_m}trW(M)\right) \end{aligned} \tag{4.36}$$

ここで、$tr(T^A A T^A B) = trAtrB$ 及び $tr(T^A A)tr(T^A B) = tr(AB)$ であることを用いると[6]、 次を得る。

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^{\hat{N}^2} M tr\left(\frac{1}{z-M}\right) tr\left(\frac{1}{z-M}\right) \exp\left(-\frac{\hat{N}}{g_m} trW(M)\right) \\ &- \frac{\hat{N}}{g_m}\int d^{\hat{N}^2} M tr\left(\frac{1}{z-M}W'(M)\right) \exp\left(-\frac{\hat{N}}{g_m} trW(M)\right) \\ &= \left\langle tr\left(\frac{1}{z-M}\right) Tr\left(\frac{1}{z-M}\right)\right\rangle - \frac{\hat{N}}{g_m}\left\langle tr\left(\frac{1}{z-M}W'(M)\right)\right\rangle. \end{aligned} \tag{4.37}$$

そこで、行列模型の resolvent を、

$$R_m(z) = \frac{g_m}{\hat{N}} tr \frac{1}{z-M} \tag{4.38}$$

として定義すると、$\hat{N} \to \infty$ における行列模型の factorization によって、次を得る。

$$\langle R_m(z)^2\rangle = \langle R_m(z)\rangle^2 = \left\langle tr\left(\frac{1}{z-M}W'(M)\right)\right\rangle = \langle W'(z)R_m(z)\rangle + \frac{1}{4}f_m(z). \tag{4.39}$$

ここで、$f_m(z)$ は $n-1$ 次の多項式であり、次で定義される。

$$f_m(z) = 4tr\frac{W'(\Phi) - W'(z)}{z-\Phi}. \tag{4.40}$$

これによって、**行列模型とゲージ理論が同じ形の Schwinger-Dyson 方程式に従う**ことが理解できる。ここで注意してほしいのは**何度も強調するように、最初の式の cluster 則はあくまで $\hat{N} \to \infty$ の極限の産物である**という点である。

そこで、ゲージ理論と行列模型が equivalent であるためには、$R(z)$ と $R_m(z)$ が完全に duality を持つことが主張できれば良い。Schwinger-Dyson 方程式によって、

$$R(z) = \frac{1}{2}(W'(z) - \sqrt{W'(z)^2 + f(z)}) \tag{4.41}$$

$$R_m(z) = \frac{1}{2}(W'(z) - \sqrt{W'(z)^2 + f_m(z)}) \tag{4.42}$$

であることを思い起こせば、$f(z) = f_m(z)$ であることが示せればよい。従って、

$$\begin{aligned} S_i &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_i} R(z)dz = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_i} dz \frac{1}{32\pi^2} TrW_\alpha W^\alpha \frac{1}{z-\Phi} \\ &\Updownarrow \quad \text{(equivalent!)} \\ \frac{g_m \hat{N}_i}{\hat{N}} &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_i} dz R_m(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_i} dz \frac{g_m}{\hat{N}}\left\langle tr\frac{1}{z-M}\right\rangle. \end{aligned} \tag{4.43}$$

がいえればよい。この関係は、まさに Dijkgraaf Vafa が当初に主張していた duality の内容にあたる。

[6] この公式は次のようにして証明される。$U(N)$ リー環の基底は $\sum_a (t^a)_{ij}(t^a)_{kl} = \delta_{il}\delta_{jk}$ を満たすことから、

$$\sum_a tr(t^a A)tr(t^a B) = (t^a)_{ij}A_{ji}(t^a)_{kl}A_{lk} = \delta_{il}\delta_{jk}A_{ji}B_{lk} = A_{kl}B_{lk} = tr(AB)$$

が満たされる。後者の公式についても同様にして、

$$\sum_a tr(t^a A t^a B) = (t^a)_{ij}A_{jk}(t^a)_{kl}A_{li} = \delta_{il}\delta_{jk}A_{jk}B_{li} = trAtrB$$

として証明できる。

行列模型の自由エネルギーは明らかに次を満たしている。

$$\frac{\partial F_{m.m.}}{\partial g_k} = \left\langle \frac{1}{k+1} Tr M^{k+1} \right\rangle \tag{4.44}$$

であって、これはゲージ理論の場合の自由エネルギーの式と同一である。従って、次の意味で両者の自由エネルギーは対応がつくはずである。

$$F_{m.m.}(S_i, g_k) = \mathcal{F}_p(S_i, g_k)|_{\psi=0} + \mathcal{H}(S_i). \tag{4.45}$$

ここで、g_k に依存しない項 $\mathcal{H}(S_i)$ の不定性は常に伴っている。

行列模型側の利点としてあるのは、自由エネルギーを簡単に具体的に計算できる点である。最も簡単な場合として次の場合について考察をする。

- superpotential を $W = \frac{m}{2}\Phi^2$ であるとする。
- ゲージ群は、破れないとする。

そうすれば、このときの自由エネルギーは次で得られる。

$$\exp\left(-\frac{\hat{N}^2 F_{m.m.}(S,m)}{g_m^2}\right) = \int \frac{d^{\hat{N}^2} M}{\mu^{\hat{N}^2}} \exp\left(-\frac{\hat{N} m}{2 g_m} Tr M^2\right) = \left(\frac{2\pi g_m}{\hat{N} m \mu^2}\right)^{\frac{\hat{N}^2}{2}} \tag{4.46}$$

である。そこで、先程の仮定を認めるならば、

$$S = \sum_i S_i = \frac{g_m}{\hat{N}} \sum_i \hat{N}_i = g_m \tag{4.47}$$

であることが、(4.43) より言えるので、自由エネルギーは次で書ける。

$$F_{m.m.}(S,m) = \frac{S^2}{2} \log\left(\frac{m\mu^2 \hat{N}}{2\pi S}\right) \tag{4.48}$$

そこで、このことを具体的に見るために、この結果から具体的に有効ポテンシャルを計算してみよう。一般的な考察により、

$$W_{eff}^{matter} = \int d^2\psi \mathcal{F}(\mathcal{S}_k) = N\frac{\partial \mathcal{F}(S)}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}(S)}{\partial S^2} w_\alpha w^\alpha \tag{4.49}$$

であったから (ゲージ群の破れない場合)、これを代入して計算することで次を得る。

$$W_{eff} = \left(NS + \frac{1}{2} w_\alpha w^\alpha\right) \log\left(\frac{m\mu^2 \hat{N}}{2\pi S}\right) - \frac{NS}{2} - \frac{3}{4} w_\alpha w^\alpha \tag{4.50}$$

そこで、もう少し見やすくするために、

$$\frac{\hat{N}\mu^2}{2\pi} \leftrightarrow e^{\frac{3}{2}} \Lambda_0 \tag{4.51}$$

として同一視する。そうすれば、最終的に次を得る。

$$\begin{aligned}
W_{eff} &= \left(NS + \frac{1}{2} w_\alpha w^\alpha\right) \left\{\log\left(\frac{m}{S}\right) + \log\left(e^{\frac{3}{2}}\Lambda_0\right)\right\} - \frac{NS}{2} - \frac{3}{4} w_\alpha w^\alpha \\
&= \left(NS + \frac{1}{2} w_\alpha w^\alpha\right) \left\{\frac{3}{2} + \log\left(\frac{m\Lambda_0}{S}\right)\right\} - \frac{NS}{2} - \frac{3}{4} w_\alpha w^\alpha \\
&= \left(NS + \frac{1}{2} w_\alpha w^\alpha\right) \log\left(\frac{m\Lambda_0}{S}\right) + NS \\
&= \left(NS + \frac{1}{2} w_\alpha w^\alpha\right) \log\left(\frac{m}{\Lambda_0}\right) + \left(NS + \frac{1}{2} w_\alpha w^\alpha\right) \log\left(\frac{S}{\Lambda_0^3}\right) + NS \\
&= \underbrace{\left(NS + \frac{1}{2} w_\alpha w^\alpha\right) \log\left(\frac{m}{\Lambda_0}\right)}_{\text{one-loop}} + \underbrace{\hat{S} \log\left(\frac{\Lambda_0^{3N}}{\hat{S}^N}\right) + N\hat{S}}_{\text{Veneziano-Yankielowicz}} .
\end{aligned} \tag{4.52}$$

ここで、最後の変形においては、$S = \hat{S} - \frac{w_\alpha w^\alpha}{2N}$ であることと、w_α の Grassmann 性を用いた。この結果は、**1** 項目は **one-loop** の **diagram** の評価と一致し、**2** 項目は **Veneziano-Yankielowicz potential** と一致している。

一方、ゲージ理論側では、

$$\mathcal{F}_p(S, m) = \frac{S^2}{2} \log m \tag{4.53}$$

であることから、これを W_{eff} の式に代入すると得られるのは one-loop の効果のみ $\sim \log m$ のみであって、**Veneziano-Yankielowicz potential** は得られない。

以上の比較によって、具体的な $\mathcal{H}(S)$ の形は

$$\mathcal{H}(S) = \hat{S} \log \left(\frac{\Lambda_0^{3N}}{\hat{S}^N} \right) + N\hat{S} \tag{4.54}$$

であることがわかる。

低エネルギーの有効ポテンシャルは、$U(1)$ gauge に対する対称性を持つので、

$$W_{eff}^{full} = 2\pi i \tau_{bare} \sum_i S_i + \sum_i N_i \frac{\partial \mathcal{F}(S_i, g_k)}{\partial S_i} + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 \mathcal{F}(S_i, g_k)}{\partial S_i \partial S_j} w_{\alpha i} w_j^\alpha \tag{4.55}$$

である。従って、Dijkgraaf-Vafa 予想が正しければ、

$$\mathcal{F}(S_i, g_k) = F_m(S_i, g_k) \tag{4.56}$$

が成立する。ここで、$\mathcal{F}(S_i, g_k)$ と書いたのは、adjoint matter だけではなくゲージ場の寄与である Veneziano Yankielowicz 項も含めた量である[7]。従って、このことは**行列模型の解析は、adjoint matter だけではなく、gauge 場の寄与をも含めて一致するのである。** このことから、Dijkgraaf-Vafa は**行列模型の寄与である F_m が gauge 場の dynamics を含んでいる**と考えた。

$\mathcal{H}(S_i)$ は matter に依存しない Veneziano-Yankielowicz potential の寄与に他ならないので、

$$\mathcal{H}(S_i) = \sum_i N_i H(S_i), \text{ where } \frac{\partial H(S_i)}{\partial S_i} = S_i(1 - \log S_i). \tag{4.57}$$

である。

このように、ゲージ理論と行列模型の対応がついたわけであるが、両者の相違点についてはまだわかっていない部分が多い。この問題点について最後に纏めておこう。

- factorization の原因は、ゲージ理論では chiral 環の性質であったのに対して、行列模型では large-$\hat{N}$ の極限の性質である。
- ゲージ理論では場は本質的に複素数であったのに対して、行列模型では M は Hermite 行列であり、本質的には実数である。
- N_i などのゲージ理論の量に対応する、行列模型側の量は何なのか？

5 最後に

最後に、Dijkgraaf-Vafa 予想に関して以下の点をまとめておく。

- まず、現時点では $\mathcal{N} = 1$ super Yang-Mills 理論と、bosonic one-matrix model の完全な同一視が出来たわけではない。この論文では、chiral anomaly を通して両者が一致することを見るが、あくまで一つの傍証と考えるべきであろう。ゲージ変換はそもそもどのように対応しているのか？

[7] 言い換えれば、今まで $\mathcal{F}_p$ と書いてきた量は、全体から gauge 場の寄与を差し引いたものである。

- bosonic one-matrix model はもとを正せば、二次元量子重力として定式化されたものであった。ここでいう「二次元重力」とは、弦理論の世界面上の重力理論をさす。Dijkgraaf-Vafa 予想でも、行列模型と重力の関係については、次の論文 (hep-th/0211216,0211241) で議論されている [8, 9]。この one-matrix model においては、$\mathcal{O}(\frac{1}{N})$ のオーダーの planar からの補正が、R^2(R は Ricci scalar) の冪の量であって、これが重力の効果に対応していると考えられている。但し、[8, 9] の論文で言う重力とはあくまで **bulk** における重力の効果である。

- この論文で紹介する研究に関しては、後に Seiberg[10] の仕事によって、fundamental field を含む場合に関して拡張された。そして、fundamental field のある系においてもゲージ理論と行列模型の対応が実証された。なお、Seiberg の論文に関しては、対応する行列模型の作用のみ記述するにとどめる。

$$S_{\text{Seiberg}} = \frac{\hat{N}}{\hat{g}} \left[TrW(\hat{\Phi}) + \hat{\tilde{Q}}_{\bar{f}} m_f{}^{\bar{f}} \hat{Q}^f \right]. \tag{5.1}$$

ここで、$\hat{\Phi}$ は $\hat{N} \times \hat{N}$ 行列、$\hat{\tilde{Q}}$ は $\hat{N} \times N_f$ 行列、Q は $N_f \times \hat{N}$ 行列である。勿論、N_f は flavour の数である。

6 謝辞

今回の速報を行なうにあたり、2003 年 1 月 25 日 (土) の第 31 回三都セミナーにおける議論は非常に参考になった。世話人の皆様、発表者の方、及び当日有意義な議論をされた参加者の皆様に感謝する。また、本速報を行なうにあたっては、森田健氏の修士論文を参考にさせて頂いた。

A 何故、superpotential を入れれば $\mathcal{N}=2$ から $\mathcal{N}=1$ に破れるか？

この質問の答えは単純である。何故ならば $\mathcal{N}=2$ の理論ははじめから superpotential がないからである。従って、superpotential を入れれば、自明に $\mathcal{N}=1$ super Yang-Mills 理論に soft に破れざるを得ない。

B 公式 (4.7) の証明

This section is in English, because I do not feel like taking the vacuous trouble to translate this section into Japanese. This note is devoted to corroborating the following formulae, which emerge in the analysis of the Ward identity stemming from the Konishi anomaly:

$$\sum_{ij} \left[\chi_1, \left[\chi_2, \frac{\partial}{\partial \Phi_{ij}} \frac{\chi_1 \chi_2}{z-\Phi} \right] \right]_{ij} = \left(Tr \frac{\chi_1 \chi_2}{z-\Phi} \right)^2, \tag{B.1}$$

$$\sum_{ij} \left[\chi_1, \left[\chi_2, \frac{\partial}{\partial \Phi_{ij}} \frac{1}{z-\Phi} \right] \right]_{ij} = -2 \left(Tr \frac{\chi_1}{z-\Phi} \right) \left(Tr \frac{\chi_2}{z-\Phi} \right) + \left(Tr \frac{1}{z-\Phi} \right) \left(Tr \frac{[\chi_1, \chi_2]}{z-\Phi} \right), \tag{B.2}$$

$$\sum_{ij} \left[\chi_1, \left[\chi_2, \frac{\partial}{\partial \Phi_{ij}} \frac{\chi_\alpha}{z-\Phi} \right] \right]_{ij} = \left(Tr \frac{\chi_\alpha}{z-\Phi} \right) \left(Tr \frac{[\chi_1, \chi_2]}{z-\Phi} \right) \quad (\alpha = 1, 2). \tag{B.3}$$

Here, we assume the following properties: Φ and $\chi_{1,2}$ commute with each other, and $\chi_1^2 = \chi_2^2 = 0$.

Proof of (B.1)

First, we note the following formula of the derivative of the inverse matrix:

$$\delta g^{ij} = -g^{ik} \delta g_{kl} g^{lj}. \tag{B.4}$$

This can be proven by noting that $\delta(\delta_i^j) = 0$ as follows:

$$0 = \delta(\delta_k^j) = \delta(g_{ki}g^{ij}) = (\delta g_{ki})g^{ij} + g_{ki}(\delta g^{ij}).$$

Then, by multiplying g^{kl} to the both hand sides, we obtain

$$g^{kl}g_{ki}(\delta g^{ij}) = (\delta g^{lj}) = -g^{lk}(\delta g_{ki})g^{ij}.$$

Then, the derivative $\frac{\partial}{\partial\Phi_{ij}}(\frac{1}{(z-\Phi)})_{kl}$ can be evaluated as follows:

$$\frac{\partial}{\partial\Phi_{ij}}(\frac{1}{(z-\Phi)})_{kl} = -\frac{\partial}{\partial(z-\Phi)_{ij}}(\frac{1}{(z-\Phi)})_{kl} = (\frac{1}{z-\Phi})_{ki}(\frac{1}{z-\Phi})_{lj}. \tag{B.5}$$

Now, χ_1 and χ_2 are fermionic, and thus the product $\chi_1\chi_2$ is bosonic. Therefore, the sign does not change if χ_1 jumps over $\frac{\partial}{\partial\Phi_{ij}}\frac{\chi_1\chi_2}{z-\Phi}$.

It is easy to evaluate the commutator with the help of this formula:

$$\begin{aligned}\left[\chi_2, \frac{\partial}{\partial\Phi_{ij}}\frac{\chi_1\chi_2}{z-\Phi}\right]_{pn} &= (\chi_2)_{pk}(\frac{\partial}{\partial\Phi_{ij}}\frac{\chi_1\chi_2}{z-\Phi})_{kn} - (\frac{\partial}{\partial\Phi_{ij}}\frac{\chi_1\chi_2}{z-\Phi})_{pk}(\chi_2)_{kn} \\ = \quad (\chi_2)_{pk}(\frac{1}{z-\Phi})_{ki}(\frac{1}{z-\Phi})_{jl}(\chi_1)_{lm}(\chi_2)_{mn} &- (\frac{1}{z-\Phi})_{pi}(\frac{1}{z-\Phi})_{jl}(\chi_1)_{lm}(\chi_2)_{mk}(\chi_2)_{kn}.\end{aligned}$$

Then, the commutator in question is evaluated as follows. This time, $\left[\chi_2, \frac{\partial}{\partial\Phi_{ij}}\frac{\chi_1\chi_2}{z-\Phi}\right]$ is fermionic and thus the sign *does flip* when χ_1 jumps it over.

$$\begin{aligned}\left[\chi_1, \left[\chi_2, \frac{\partial}{\partial\Phi_{ij}}\frac{\chi_1\chi_2}{z-\Phi}\right]\right]_{ij} &= (\chi_1)_{ip}(\chi_2)_{pk}(\frac{1}{z-\Phi})_{ki}(\frac{1}{z-\Phi})_{jl}(\chi_1)_{lm}(\chi_2)_{mj}, &\text{(B.6)}\\ &- (\chi_1)_{ip}(\frac{1}{z-\Phi})_{pi}(\frac{1}{z-\Phi})_{jl}(\chi_1)_{lm}\underbrace{(\chi_2)_{mk}(\chi_2)_{kj}}_{=(\chi_2^2)_{lk}=0}, &\text{(B.7)}\\ &+ (\chi_2)_{ik}(\frac{1}{z-\Phi})_{ki}\underbrace{(\chi_1)_{pj}(\frac{1}{z-\Phi})_{jl}(\chi_1)_{lm}}_{(\frac{\chi_1^2}{z-\Phi})_{pm}=0}(\chi_2)_{mp}, &\text{(B.8)}\\ &- (\chi_1)_{pj}(\frac{1}{z-\Phi})_{ii}(\frac{1}{z-\Phi})_{jl}(\chi_1)_{lm}\underbrace{(\chi_2)_{mk}(\chi_2)_{kp}}_{(\chi_2^2)_{mp}=0}. &\text{(B.9)}\\ &= \left(Tr\frac{\chi_1\chi_2}{z-\Phi}\right)^2,\end{aligned}$$

where we have utilized $\chi_1^2 = \chi_2^2 = 0$ in verifying that the terms (B.7), (B.8) and (B.9) cancel.

Proof of (B.2)

The proof goes in the same way as in the previous case. First, we evaluate the commutator $\left[\chi_2, \frac{\partial}{\partial\Phi_{ij}}\frac{1}{z-\Phi}\right]$, noting that $\frac{\partial}{\partial\Phi_{ij}}\frac{1}{z-\Phi}$ is bosonic:

$$\left[\chi_2, \frac{\partial}{\partial\Phi_{ij}}\frac{1}{z-\Phi}\right]_{pn} = (\chi_2)_{pm}(\frac{1}{z-\Phi})_{mi}(\frac{1}{z-\Phi})_{nj} - (\chi_2)_{mn}(\frac{1}{z-\Phi})_{pi}(\frac{1}{z-\Phi})_{mj}. \tag{B.10}$$

Then, the commutator is evaluated as

$$\sum_{ij}\left[\chi_1, \underbrace{\left[\chi_2, \frac{\partial}{\partial\Phi_{ij}}\frac{1}{z-\Phi}\right]}_{\text{fermionic}}\right]_{ij}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\chi_1)_{ip}(\chi_2)_{pk}(\frac{1}{z-\Phi})_{ki}(\frac{1}{z-\Phi})_{jj} - (\chi_1)_{ip}(\frac{1}{z-\Phi})_{pi}(\frac{1}{z-\Phi})_{jk}(\chi_2)_{kj} \\
&+ (\chi_2)_{ik}(\frac{1}{z-\Phi})_{ki}(\frac{1}{z-\Phi})_{jp}(\chi_1)_{pj} - (\frac{1}{z-\Phi})_{ii}(\frac{1}{z-\Phi})_{jk}(\chi_2)_{kp}(\chi_1)_{pj} \\
&= -\left(Tr\frac{\chi_1}{z-\Phi}\right)\left(Tr\frac{\chi_2}{z-\Phi}\right) + \left(Tr\frac{\chi_2}{z-\Phi}\right)\left(Tr\frac{\chi_1}{z-\Phi}\right) + \left(Tr\frac{1}{z-\Phi}\right)\left(Tr\frac{[\chi_1,\chi_2]}{z-\Phi}\right) \\
&= -2\left(Tr\frac{\chi_1}{z-\Phi}\right)\left(Tr\frac{\chi_2}{z-\Phi}\right) + \left(Tr\frac{1}{z-\Phi}\right)\left(Tr\frac{[\chi_1,\chi_2]}{z-\Phi}\right). \qquad \text{(B.11)}
\end{aligned}
$$

Proof of (B.3)

Again, we repeat the same procedure in the corroboration of this result. First, we note that $\frac{\partial}{\partial\Phi_{ij}}\frac{\chi_2}{z-\Phi}$ is fermionic, and thus that

$$
\left[\chi_2, \frac{\partial}{\partial\Phi_{ij}}\frac{\chi_2}{z-\Phi}\right]_{pn} = (\chi_2)_{pl}(\frac{1}{z-\Phi})_{li}(\frac{1}{z-\Phi})_{mj}(\chi_2)_{mn} + (\frac{1}{z-\Phi})_{pi}(\frac{1}{z-\Phi})_{mj}(\chi_2)_{ml}(\chi_2)_{ln}. \qquad \text{(B.12)}
$$

Then, the commutator is evaluated as

$$
\begin{aligned}
&\sum_{ij}\left[\chi_1, \underbrace{\left[\chi_2, \frac{\partial}{\partial\Phi_{ij}}\frac{\chi_2}{z-\Phi}\right]}_{\text{bosonic}}\right]_{ij} \\
&= (\chi_1)_{ip}(\chi_2)_{pl}(\frac{1}{z-\Phi})_{li}(\frac{1}{z-\Phi})_{jm}(\chi_2)_{mj} + (\chi_1)_{ip}(\frac{1}{z-\Phi})_{pi}(\frac{1}{z-\Phi})_{jm}\underbrace{(\chi_2)_{ml}(\chi_2)_{lj}}_{(\chi_2^2)_{mj}=0} \\
&- (\chi_2)_{il}(\frac{1}{z-\Phi})_{li}(\frac{1}{z-\Phi})_{jm}(\chi_2)_{mp}(\chi_1)_{pj} - (\frac{1}{z-\Phi})_{ii}(\frac{1}{z-\Phi})_{jm}\underbrace{(\chi_2)_{ml}(\chi_2)_{lp}}_{(\chi_2^2)_{mp}=0}(\chi_1)_{pj} \\
&= \left(Tr\frac{\chi_2}{z-\Phi}\right)\left(Tr\frac{[\chi_1,\chi_2]}{z-\Phi}\right). \qquad \text{(B.13)}
\end{aligned}
$$

Likewise, we evaluate the following commutator:

$$
\sum_{ij}\left[\chi_1, \left[\chi_2, \frac{\partial}{\partial\Phi_{ij}}\frac{\chi_1}{z-\Phi}\right]\right]_{ij} = \left(Tr\frac{\chi_1}{z-\Phi}\right)\left(Tr\frac{[\chi_1,\chi_2]}{z-\Phi}\right). \qquad \text{(B.14)}
$$

C point splitting法による小西アノマリーの導出の別解

This section is devoted to the derivation of Konishi anomaly via the point-splitting method. The Noether current of the $U(1)_\Phi$ transformation $\delta\Phi = \epsilon\Phi$ is

$$
J = Tr\bar{\Phi}e^{2V}\Phi. \qquad \text{(C.1)}
$$

In order to perform the point-splitting method, we introduce the following cutoff:

$$
J = \lim_{\epsilon\to 0} Tr((\bar{\Phi}e^{2V})_{x+\epsilon}U(x+\epsilon, x-\epsilon)\Phi_{x-\epsilon}), \text{ where} \qquad \text{(C.2)}
$$

$$
U(x+\epsilon, x-\epsilon) = P\exp(\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} dx^m F_m) = P\exp\left(\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} dx^m \left(\frac{i}{4}\bar{\sigma}_m^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{D}_{\dot{\alpha}}e^{-2V}D_\alpha e^{2V}\right)\right). \qquad \text{(C.3)}
$$

F_m is a gauge covariant quantity, which is transformed as

$$
F_m \to e^{-i\Lambda}F_m e^{i\Lambda} + e^{-i\Lambda}\partial_m e^{i\Lambda}. \qquad \text{(C.4)}
$$

Then, the covariant derivative of the current is

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}\bar{D}^2 J &= -\frac{1}{4}Tr\left((\bar{D}^2(\bar{\Phi}e^{2V})_{x+\epsilon})U(x+\epsilon,x-\epsilon)\Phi_{x-\epsilon}\right)-\frac{1}{4}Tr\left((\bar{\Phi}e^{2V})_{x+\epsilon}(\bar{D}^2U(x+\epsilon,x-\epsilon)\Phi_{x-\epsilon})\right)\\ &\quad -\frac{1}{2}Tr\left((\bar{D}_{\dot{\alpha}}(\bar{\Phi}e^{2V})_{x+\epsilon})\bar{D}^{\dot{\alpha}}(U(x+\epsilon,x-\epsilon)\Phi_{x-\epsilon})\right). \qquad \text{(C.5)}\end{aligned}$$

Here, $\bar{D}_{\dot{\alpha}}U$ and $\bar{D}^2U$ are computed as

$$\begin{aligned}\bar{D}_{\dot{\alpha}}U &= 2\epsilon^{\epsilon}\bar{D}_{\dot{\alpha}}F_m+\mathcal{O}(\epsilon^2), \qquad \text{(C.6)}\\ \bar{D}^2U &= 4\epsilon^m\epsilon^n(\bar{D}_{\dot{\alpha}}F_m)(\bar{D}^{\dot{\alpha}}F_n)+\mathcal{O}(\epsilon^2). \qquad \text{(C.7)}\end{aligned}$$

Next, we derive the following propagator

$$\langle(\bar{\Phi}e^{2V})_{x+\epsilon}\Phi_{x-\epsilon}\rangle. \qquad \text{(C.8)}$$

In order to derive this propagator, we introduce the following source term:

$$\begin{aligned}S(J) &= \int d^4xd^2\theta d^2\bar{\theta}Tr\bar{\Phi}e^{2V}\Phi+\int d^4xd^2\theta TrJ\Phi+\int d^4xd^2\bar{\theta}Tr\bar{J}\bar{\Phi}\\ &= \int d^4d^2\theta d^2\bar{\theta}Tr\left[\frac{1}{2}(\Phi,\bar{\Phi})\begin{pmatrix}0 & e^{-2V}\\ e^{2V} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi\\ \bar{\Phi}\end{pmatrix}+\frac{1}{2}(\Phi,\bar{\Phi})\begin{pmatrix}-\frac{D^2}{4\Box} & 0\\ 0 & -\frac{\bar{D}^2}{4\Box}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J\\ \bar{J}\end{pmatrix}\right]. \qquad \text{(C.9)}\end{aligned}$$

Then, the equation of motion is given by

$$-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\bar{D}^2 & 0\\ 0 & D^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & e^{-2V}\\ e^{2V} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi\\ \bar{\Phi}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}J\\ \bar{J}\end{pmatrix}=0. \qquad \text{(C.10)}$$

This can be solved as

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\Phi\\ \bar{\Phi}\end{pmatrix} &= \int \underbrace{d^8z}_{=d^4xd^2\theta d^2\bar{\theta}}\Delta(z,z')\begin{pmatrix}\frac{D^2}{4\Box} & 0\\ 0 & \frac{\bar{D}^2}{4\Box}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J\\ \bar{J}\end{pmatrix}, \text{ where} \qquad \text{(C.11)}\\ \Delta(z,z') &= \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{16}\bar{D}^2e^{-2V}\frac{1}{\frac{1}{16}D^2e^{2V}\bar{D}^2e^{-2V}}D^2\\ \frac{1}{16}D^2e^{2V}\frac{1}{\frac{1}{16}\bar{D}^2e^{-2V}D^2e^{2V}}\bar{D}^2 & 0\end{pmatrix}. \qquad \text{(C.12)}\end{aligned}$$

By substituting this result into the action, we obtain

$$\begin{aligned}S(J) &= \int d^8zTr\left[\frac{1}{2}(\Phi,\bar{\Phi})\begin{pmatrix}\frac{D^2}{4\Box} & 0\\ 0 & \frac{\bar{D}^2}{4\Box}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\bar{D}^2}{4} & 0\\ 0 & \frac{D^2}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & e^{-2V}\\ e^{2V} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi\\ \bar{\Phi}\end{pmatrix}+(\Phi,\bar{\Phi})\begin{pmatrix}-\frac{D^2}{4\Box} & 0\\ 0 & -\frac{\bar{D}^2}{4\Box}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J\\ \bar{J}\end{pmatrix}\right]\\ &= -\frac{1}{2}\int d^8z(J,\bar{J})\begin{pmatrix}\frac{D^2}{4\Box} & 0\\ 0 & \frac{\bar{D}^2}{4\Box}\end{pmatrix}\Delta(z,z')\begin{pmatrix}\frac{D^2}{4\Box} & 0\\ 0 & \frac{\bar{D}^2}{4\Box}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J\\ \bar{J}\end{pmatrix} \qquad \text{(C.13)}\end{aligned}$$

Then, we obtain the propagator as

$$\langle\bar{\Phi}(z)\Phi(z')\rangle=\frac{i}{16}(D^2e^{2V}\frac{1}{L}\bar{D}^2), \text{ where } L=\frac{1}{16}\bar{D}^2e^{-2V}D^2e^{2V}. \qquad \text{(C.14)}$$

And, $L\bar{D}^2$ is computed as

$$L\bar{D}^2=(\Box-\frac{1}{2}W^{\alpha}D_{\alpha}-2F^m\partial_m+F)\bar{D}^2. \qquad \text{(C.15)}$$

Thus, the propagator is expanded in terms of the power of ϵ as

$$\langle\bar{\Phi}e^{2V}(x+\epsilon,\theta,\bar{\theta})\Phi(x-\epsilon,\theta,\bar{\theta})\rangle=\frac{i}{16}\langle e^{-2V}D^2e^{2V}\frac{1}{L}\bar{D}^2\rangle=\frac{1}{16\pi^2\epsilon^2}(1-2\epsilon^mF_m+\cdots). \qquad \text{(C.16)}$$

Utilizing these results, we finally derive the Konishi anomaly (the notation in this appendix differs from that of Wess-Bagger, and thus the coefficients differ):

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}\bar{D}^2 J &= \underbrace{-\frac{1}{4}Tr\left((\bar{D}^2(\bar{\Phi}e^{2V})_{x+\epsilon})U(x+\epsilon,x-\epsilon)\Phi_{x-\epsilon}\right)}_{\text{no contribution}} - \frac{1}{4}Tr\left((\bar{\Phi}e^{2V})_{x+\epsilon}(\bar{D}^2U(x+\epsilon,x-\epsilon)\Phi_{x-\epsilon})\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}Tr\left((\bar{D}_{\dot{\alpha}}(\bar{\Phi}e^{2V})_{x+\epsilon})\bar{D}^{\dot{\alpha}}(U(x+\epsilon,x-\epsilon)\Phi_{x-\epsilon})\right) \\
&= -\frac{1}{4}Tr\frac{1}{16\pi^2\epsilon^2}\epsilon^m\bar{D}_{\dot{\alpha}}F_m 2\epsilon^n\bar{D}^{\dot{\alpha}}F_n - \frac{1}{2}Tr(-2)\frac{1}{16\pi^2\epsilon^2}\epsilon^m\bar{D}_{\dot{\alpha}}F_m 2\epsilon^n\bar{D}^{\dot{\alpha}}F_n \\
&= \frac{1}{16\pi^2}Tr\bar{D}_{\dot{\alpha}}F_m\bar{D}^{\dot{\alpha}}F_n\frac{\epsilon^m\epsilon^n}{\epsilon^2} = \frac{1}{16\pi^2}(-\frac{1}{4})Tr\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\sigma}_m^{\beta\dot{\beta}}W_\beta\bar{\sigma}^n_{\alpha\dot{\alpha}}W_\alpha\frac{\epsilon^m\epsilon^n}{\epsilon^2} \\
&= -\frac{1}{16\pi^2}\times\frac{1}{4}\times 2\times\frac{1}{2}TrW^2 = -\frac{1}{64\pi^2}TrW^2. \qquad \text{(C.17)}
\end{aligned}$$

This completes the derivation of Konishi anomaly.

参考文献

[1] P. Ginsparg and G. W. Moore, "Lectures On 2-D Gravity And 2-D String Theory," hep-th/9304011.

[2] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, "A large-N reduced model as superstring," Nucl. Phys. B **498**, 467 (1997) [hep-th/9612115].

[3] J. M. Maldacena, "The large N limit of superconformal field theories and supergravity," Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998) [Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999)] [hep-th/9711200].

[4] R. Dijkgraaf and C. Vafa, "Matrix models, topological strings, and supersymmetric gauge theories," Nucl. Phys. B **644**, 3 (2002) [hep-th/0206255].

[5] R. Dijkgraaf and C. Vafa, "On geometry and matrix models," Nucl. Phys. B **644**, 21 (2002) [hep-th/0207106].

[6] R. Dijkgraaf and C. Vafa, "A perturbative window into non-perturbative physics," hep-th/0208048.

[7] R. Dijkgraaf, M. T. Grisaru, C. S. Lam, C. Vafa and D. Zanon, "Perturbative computation of glueball superpotentials," hep-th/0211017.

[8] A. Klemm, M. Marino and S. Theisen, "Gravitational corrections in supersymmetric gauge theory and matrix models," hep-th/0211216.

[9] R. Dijkgraaf, A. Sinkovics and M. Temurhan, "Matrix models and gravitational corrections," hep-th/0211241.

[10] N. Seiberg, "Adding fundamental matter to 'Chiral rings and anomalies in supersymmetric gauge theory'," arXiv:hep-th/0212225.

[11] G. 't Hooft, "A Planar Diagram Theory For Strong Interactions," Nucl. Phys. B **72**, 461 (1974).

[12] E. Brezin, C. Itzykson, G. Parisi and J. B. Zuber, "Planar Diagrams," Commun. Math. Phys. **59**, 35 (1978).

[13] G. Veneziano and S. Yankielowicz, "An Effective Lagrangian For The Pure N=1 Supersymmetric Yang-Mills Theory," Phys. Lett. B **113**, 231 (1982).

[14] K. Konishi, "Anomalous Supersymmetry Transformation Of Some Composite Operators In Sqcd," Phys. Lett. B **135**, 439 (1984).

[15] V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, "Instantons And Exact Gell-Mann-Low Function Of Supersymmetric O(3) Sigma Model," Phys. Lett. B **139**, 389 (1984).

[16] K. i. Konishi and K. i. Shizuya, "Functional Integral Approach To Chiral Anomalies In Supersymmetric Gauge Theories," Nuovo Cim. A **90**, 111 (1985).

[17] E. Brezin and V. A. Kazakov, "Exactly Solvable Field Theories Of Closed Strings," Phys. Lett. B **236** (1990) 144.