素粒子論研究室速報: Wilson Loops in N=4 SYM theory (hep-th/ 0003055)

J.K.Erickson, G.W.Semenoff and K.Zarembo
発表者: 東 武大* (素粒子論研究室修士課程 2 年)

2000 年 04 月 19 日 研究室会議終了後 ~ 15:00

概 要

本稿は、京都大学物理学第二教室素粒子論研究室で修士課程 2 年生が年度開けに行うことになっている「速報」の論文発表の原稿である。これは、論文中に登場する計算の詳細や背景となる知識を付け加えながら、個人的にまとめたものである。したがって、本稿に見当違いな部分があったとしても、Erickson ら原著者にはその責は一切なく、責はすべて発表者である東武大にあることを断っておく。

繰り返すが、これはあくまで個人的な勉強をまとめたものに過ぎない。

目 次

1 Introduction **2**
- 1.1 Black p-brane . . . 3
  - 1.1.1 type IIB superstring の古典的重力による black hole の記述 . . . 4
  - 1.1.2 N=4SYM による black hole の記述 . . . 6
- 1.2 対称性から見た AdS/CFT 対応 . . . 6
  - 1.2.1 super conformal group $SO(5,1)$ . . . 7
  - 1.2.2 SL(2,Z) duality . . . 8

2 Wilson Loop について **9**
- 2.1 $\mathcal{N}=4$SYM における作用と Feynman diagram . . . 11
- 2.2 Wilson loop の諸々の近似法 . . . 11
  - 2.2.1 最低次の order での展開 . . . 13
  - 2.2.2 ladder diagram . . . 14

3 従来知られている AdS 空間古典的超重力からの解析 **15**
- 3.1 円状の Wilson line に関する計算結果 . . . 16
- 3.2 反平行な直線に関する計算結果 . . . 16

4 ladder 近似で排除された diagram に関する考察 **17**
- 4.1 loop 補正 Σ_2 の計算 . . . 18
- 4.2 internal vertex operator を持った diagram Σ_3 の計算 . . . 20
- 4.3 紫外発散のキャンセルについて . . . 22

*mail:azuma@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp

5 円状の Wilson loop について **23**
5.1 ladder 近似の定量的評価 24
5.2 $\Sigma_2 + \Sigma_3$ のキャンセル 25

6 反平行な Wilson line について **27**
6.1 ladder 近似の定量的評価 27
6.2 $\Sigma_2 + \Sigma_3$ のキャンセル 29

A カタラン数について **31**
A.1 母関数を用いる方法 31
A.2 直接数え上げる方法 31
A.3 0 次元場の理論の考え方を用いる方法 33

1 Introduction

1997 年に Maldacena 氏が AdS/CFT 対応を提唱したことは、近年の素粒子論研究において大きな位置を占めている [1]。これによって様々な、負の宇宙項をもつ空間であるところの anti de-Sitter 空間における超弦理論と、ゲージ理論のもつ関係が推測されている。その中でももっともよく研究され、またもっとも有用性が高いと考えられているのは、5 次元空間である AdS_5 空間における type IIB superstring と、$\mathcal{N} = 4$ の 4 次元 Super Yang-Mills Theory(以下 SYM) の間にある対応関係である。Maldacena によるこの conjecture は非常に大きな利点を齎した。これまで Yang-Mills 理論は Feynman diagram を考えることによる摂動論的にしか諸々の物理量を計算するアプローチが存在しなかった。したがって、弱結合の場合にしか物理を解析することができなかった。しかし AdS/CFT 対応の提唱によって、強結合の Yang-Mills 理論の物理を解析するすべを与えてくれる可能性を秘めているのである。

さて、このようなすばらしい可能性を持った AdS/CFT 対応であるが、直接的に両者の対応関係を証明することにはいまだ成功していない。ここで取り上げる論文は、そのような対応関係の証明の第一歩となる視点を与えてくれるものである。AdS/CFT 対応については、次の 3 つのレベルで対応があるだろうと考えられている。

- 最も弱い statement:AdS/CFT 対応は、$\mathcal{N} = 4$ SYM の強結合の極限のみについての知見のみを与えるものであり、しかも SYM の gauge 群を $SU(N)$ としたときに、$N \to \infty$ の極限にたいしてのみ成立するものである。ここでいう large N limit は t'Hooft limit と呼ばれるものであり、large N QCD についての詳しい説明は [8] を参照のこと。

- もう少し強い statement:AdS/CFT 対応は t'Hooft limit でしか成立しないものの、すべての結合定数の領域にたいして適用しうるものである。

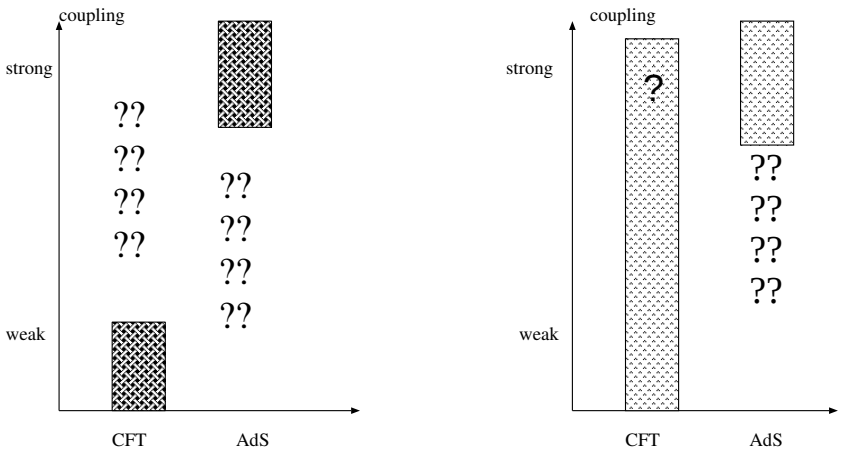
- 最も強い statement:AdS/CFT 対応はすべての結合定数の領域について成立するだけでなく、ゲージ群 $SU(N)$ がどんなに小さなものであろうとも成立するという考え方。

AdS 理論による強結合の極限における諸々の物理量の計算、及び $\mathcal{N} = 4$ SYM による摂動論的な計算結果が一致することであれば、様々な文献で [1][12] 述べられてきた。Adler-Jackiw-Bell anomaly や 3 点関数は具体的な計算によっていずれも $\mathcal{N} = 4$ SYM の非繰込み定理によって protect された物理量であることが分かっている。即ち、CFT による摂動論的な領域、および AdS 空間の古典的 SUGRA による強結合領域の計算に関する限りは結合定数に因らない[1] 値を得ることが判明している。これらの非繰込み定理によっ

[1] 繰り返すが、決してこれは CFT の強結合、AdS の弱結合の領域にそのまま結果を拡張できると主張しているのではない！

て protect された物理量について分かっていることを図にまとめれば、下記の図 1 の左側のように表せられる。しかしながら、AdS 空間の古典的 SUGRA における弱結合の計算、および $\mathcal{N} = 4$ SYM の強結合領域における直接の物理量の計算は困難である。そのため、結局のところはこれまで考察されてきた事柄では AdS/CFT の直接の対応を見ることはできなかった。とどのつまり、Adler-Jackiw-Bell anomaly や 3 点関数の考察は、AdS/CFT 対応の直接の検証という点では、結局何も言えていないのである。

そこで、この論文の目指すところは強結合の $\mathcal{N} = 4$ SYM に対する知見を与えることにある。本論文では以下に述べる観点から論じることにする。この論文の果たす役割を図に書けば、記の図 1 の右側のように表せられる。



Ads/CFT correspondence, obtained by the AJB anomaly and 3-point function, which are both protected by non-renormalization theorem

The suggestion by the authors, with respect to the AdS/CFT correspondence of Wilson Loops.

図 1: この論文の提案する事柄

- 本論文では Wilson Loop の計算のみに焦点をあてて論じたものであり、その他の object については考察していない。また、ここで考える Wilson loop は円上の loop と、反平行な直線の二つに限定した。
- 特に円上のループについてすべての結合定数の領域について計算するための良い近似法を提案する。これは本論文では **ladder diagram** と呼ぶものであり、その定義は後の記述に譲る。その理想的な近似のもとで、**SUGRA** 解との一致を確かめる。それによって、**AdS/CFT** 対応が上記の最弱のレベルで成立していることに関する知見を得ようと試みる。
- 反平行な直線については、CFT の計算と、AdS 空間の SUGRA における結果はそれなりにいい一致を見せている。後述するように定性的な振る舞いは確に再現しているが、円状の Wilson loop と比較すれば一致の度合いは良くない。このことは自然な帰結である。反平行な直線は BPS object ではないからである。

1.1 Black p-brane

まずは、本題に入る前に本文中で登場する「強 (弱) 結合」と「古典重力 / Yang-Mills 理論」の対応関係についての予備知識として、black p-brane の問題について簡単に復習しておく。詳細は [1] ,[5] ,[12] などの文献を参照されたい。特に [12] は途中の計算が非常に詳しく書かれてある。black p-brane の問題は、実は

Polchinski が D-brane の重要性について発見する以前に発見されていた事実であり、black hole の物理が type IIB string の古典的重力解と、D-brane の 2 とおりによって記述できるという点で興味深い問題である。この事実が、AdS/CFT 対応の発端となったものである。string 理論に関してまだ学習していない M1 諸氏は [6] の文献をしっかりと読もう。

1.1.1 type IIB superstring の古典的重力による black hole の記述

まずは、type IIB の superstring の低エネルギーにおける作用から、Schwarzschild-like な metric が生じることについて考えてみよう。このことについてある論文は [5] である。graviton、dilaton および R-R (p+1) form に対する type IIB superstring の作用の形は、

$$S = \frac{1}{(2\pi)^7 l_s^8} \int d^{10}x\sqrt{-g}(e^{-2\phi}(\mathcal{R} + 4(\nabla\phi)^2) - \frac{1}{2}|F_{p+2}|^2) \tag{1}$$

によって表せられる。ここで、l_s は string length、F_{p+2} は、(p+1) form ポテンシャルの field strength をそれぞれ表す。これに対して古典解を得たいが、このような複雑な方程式を解くことは殆んど不可能である。ここでは p-brane に対応する解を探しているので、metric の ansatz を次のように仮定して、その ansatz のもとで解を考察することにする。

$$ds^2 = ds^2_{10-p} + e^{\alpha}\sum_{i=1}^{p} dx^i dx^i \tag{2}$$

ここで、ds^2_{10-p} は $(10-p)$ 次元における Lorenzian-signature metric である。この metric は球対称であるとする。そして R-R source が中心にあるものとして、charge が

$$\int_{S^{8-p}} *F_{p+2} = N \tag{3}$$

を満たしているとする。ここでは特に extremal solution について考える。そうすれば、上記の作用より生じる Euler-Lagrange 方程式を解いた解は次式で与えられることが知られている。

$$ds^2 = -\sqrt{f(\rho)}dt^2 + \sqrt{f(\rho)}\sum_{i=1}^{p} dx^i dx^i + f(\rho)^{-\frac{3}{2}-\frac{5-p}{7-p}}d\rho^2 + r^2 f(\rho)^{\frac{1}{2}-\frac{5-p}{7-p}}d\Omega^2_{8-p} \tag{4}$$

ここで、$f(\rho) = 1 - (\frac{r_{sch}}{\rho})^{7-p}$ であって、r_{sch} はこの解における Schwarzschild 半径を与える。そして dilaton field は

$$e^{-2\phi} = g_s^{-2} f(\rho)^{-\frac{p-3}{2}} \tag{5}$$

であることが判明し、ここで g_s は string の結合定数である。そしてこの文章では Yang-Mills の理論の結合定数を g で表すことにして、両者の関係として、

$$(2\pi)^{p-2} g_s \alpha'^{\frac{p-3}{2}} = \frac{g^2}{2} \tag{6}$$

が成立していることが知られている [6]。ここで Polchinski の notation とは違って $\frac{1}{2}$ の factor がついていることに注意したい。このことを確かめるには、具体的に Dp-brane の振幅の値を計算し、Born-Infeld action の $F^a_{\mu\nu}$ についての展開の最低次 (F^a_{ij} は traceless であるから 1 次の項は消えるので、2 次の項を考えることになる) を求め、これを Yang-Mills action の作用の項 $\frac{1}{2g^2_{YM}}trF^2$ と比較すれば導出できる。ここで注意しておきたいのは、式 **(49)** と同じものを表すのは **Polchinski** の教科書に書いてある $\frac{1}{4g^2}trF^2$ とは違うのだということである。つまり、Lie algebra の基底について展開を行えば、

$$\frac{1}{2g^2}trF^2 = \frac{1}{4g^2}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} \tag{7}$$

を満足するのだということは、notation の対応を考える上で見落とさないようにしたい。[2]

そして、black hole の単位体積辺りの質量を M とすれば、先にのべた RR charge についての関係式も含めると、

$$M = \frac{r_{sch}^{7-p}}{(2\pi)^7 d_p l_p^8}, \quad N = \frac{r_{sch}^{7-p}}{d_p g_s l_s^{7-p}} \tag{8}$$

が成立する。ここで、l_p は Planck length の長さに相当するものであり、$l_p = g_s^{\frac{1}{4}} l_s$ なる関係式で結ばれている。d_p は、$d_p = 2^{5-p}\pi^{\frac{5-p}{2}}\Gamma(\frac{7-p}{2})$ なる定数である。[3] この定数はあまり顧られることのない物理量であるが、こと Erickson らの仕事に関しては具体的な定量評価において本質的な役目を果たすので、注意しておくこと。

以上によって、type IIB の metric から Schwarzschild-like な作用が得られるという事実が立証された。そして、Schwarzschild 半径は、string scale を用いて次の式によって記述されるのである。

$$r_{sch} = d_p^{\frac{1}{7-p}} (g_s N)^{\frac{1}{7-p}} l_s \propto (g^2 N)^{\frac{1}{7-p}} l_s \tag{9}$$

さて問題を考えやすくするために次のように変数変換を行う。$r^{7-p} = \rho^{7-p} - r_{sch}^{7-p}$ であるとして定義をする。そうすれば metric は次のようにして書き直すことができる。

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{H(r)}}(-dt^2 + \sum_{i=1}^{p} dx_i^2) + \sqrt{H(r)} r^2 \sum_{a=1}^{9-p} \theta^a \theta^a \tag{10}$$

ここで、$H(r) = 1 + \frac{r_{sch}^{7-p}}{r^{7-p}}$ を表す。ここで、古典的重力による black hole の描像が有効である範囲を考える。式 (9) によって、Schwarzschild 半径は string scale に比例することが判明したが、もし Schwarzschild 半径が srtring scale よりも遥かに大きい (つまり $r_{sch} \gg l_s$ である) とするならば、string scale のオーダーの補正があったとしても物理には殆んど効いてこないことが理解できる。したがって、古典的な重力による記述が妥当であるための条件は、

$$g^2 N \gg 1 \tag{11}$$

であることが分かる。

ここで、式 (10) について考えよう。特に D3 brane による black hole の記述について考える。このとき Schwarzschild 半径を R とすると、次式を満たしている。

$$R^4 = 4\pi g_s N \alpha^2 = g^2 N \alpha'^2 \tag{12}$$

上記の $g^2 N \gg 1$ の極限のもとでは、

$$H(r) = \frac{R^4}{r^4} \tag{13}$$

を満たしている。したがって、near horizon においては式 (10) で表せられる metric は確に $AdS_5 \times S^5$ 空間の metric を表していることが理解できる。即ちこのときの metric は

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2}(-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{R^2}{r^2} dr^2 + R^2 d\Omega_5^2 \tag{14}$$

として表せられる。

[2] もう一度言うが、これはあくまで notation の問題である。AdS/CFT 対応で考えるのは type IIB superstring であるから、type I のときに現れたような orbifold による $\frac{1}{2}$ とは完全に異質な要因に根差していることは知っておこう。

[3] この定数の導出は (notation の違いは若干あるが) [6] の演習問題 14-6 に書いてある。即ち、Schwarzshild-like な計量に現れる関数 $f(\rho)$ を $g_s N$ の最低次の order について展開して、この Schwarzshild-like metric を Born-Infeld action に代入し、その結果を Dp-brane の振幅と比較すればいいのである。

1.1.2 N=4SYM による black hole の記述

以上で type IIB superstring の古典解としての black hole についての理解を得たわけであるが、black hole の記述の仕方として別な手段がある。N 枚の Dp-brane を用いた系の別の極限として N=4SYM がある。すでに [6] の文献で学習したように、Dp-brane は、(p+1) 次元の時空に広がるものであって、その上で string が終端する。世界面の duality によって、Dp-brane は closed string の source であると見做すことができる。Dp-brane は string の世界面を用いるので、したがって string の摂動論のよい記述であると考えられる。終端に N 枚の Dp-brane が存在しているとすれば、このときの結合定数は g_s ではなく g_sN であると考えることができる。これは、それぞれの Dp-brane に終端している open string の boundary loop は Chan Paton factor N を伴うがためである。そして、$g_sN \propto g^2N$ はまさに **Dp-brane** で記述せられる **Yang-Mills** 理論の結合定数であるとし理解できるのである。したがって、Dp-brane による black hole の描像が妥当であるための条件は、

$$g^2N \ll 1 \tag{15}$$

であることがわかる。また、このとき $H(r) \sim 1$ であることから、式 (10) は次のように記述せられる。

$$ds^2 = -dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_5^2 \tag{16}$$

この議論の主旨は、Dp-brane による物理が、effective に $\mathcal{N} = 4$SYM 理論によって記述できるということである[4] 。したがって、perturvative な弱結合な領域における記述がうまく行く、という論理である。まず、Dp-brane の低エネルギーにおける有効理論は、Born-Infeld 作用によって記述せられることは有名事実である [6][13]。この作用の形は次式で表せられる。

$$S_{Dp} = -\mu_p \int d^{p+1}\xi Tr\{e^{-\phi}[-\det(G_{ab} + B_{ab} + 2\pi\alpha F_{ab})]^{\frac{1}{2}}\} \tag{17}$$

簡単のため background field を無視して考えてみよう。そこで、行列式に関する次の公式を用いる。

$$[\det(1+M)]^{\frac{1}{2}} = \exp(\frac{1}{2}tr(M - \frac{M^2}{2} + \frac{M^3}{3} - \frac{M^4}{4} + \cdots)) \tag{18}$$

これを用いれば、Born-Infeld action は $l_s \to 0$ の極限で、$F^{a\mu\nu}F^A_{\mu\nu}$ の項が (F^a の 0 次の項を別にして) 支配的になる。これは $\mathcal{N} = 4$SYM が Dp-brane の理論の有効理論であることを意味する。このことはさらに様々な興味深い点を含んでいるのであるが、これについては [12] を参照されたい。

このように、同じ対象物が 2 つの異なる理論で記述でき、しかもそれぞれの記述の仕方の有効な範囲が相補的であるということは大きな意味を持つものであった。

1.2 対称性から見た AdS/CFT 対応

先にものべたように、現在のところ AdS/CFT 対応の直接の対応関係を、未だ人類は手にしていない。それでも AdS 空間の古典的重力理論と、$\mathcal{N} = 4$SYM の間に対応関係が存在するだろうという optimistic な視点を支えているのが、両者の対称性の一致である。

[4] 但し、下記に示す Born-Infeld 作用は U(1)gauge 理論に関しては well-defined であるが、それ以外の non-Abelian な理論についてはきちんとしたことはあまり分かっていない。

1.2.1 super conformal group $SO(5,1)$

まず、AdS 空間の super-conformal な対称性について見ることは易しい。これについては [12] に詳しく述べられている。まず、$(p+2)$ 次元空間である AdS_{p+2} 次元空間とは

$$X_0^2 - X_{p+2}^2 - \sum_{i=1}^{p+1} X_i^2 = R^2 \tag{19}$$

なる方程式で記述される双曲面で、そのうえにおける metric が、

$$ds^2 = -dX_0^2 + dX_2^{p+2} + \sum_{i=1}^{p+1} dX_i^2 \tag{20}$$

によって表せられる。この式からも容易にみてとれるように、AdS_{p+2} 空間は対称性 $SO(p+2,1)$ を持つことがわかる。つまり、それぞれの座標について Killing vector $M_{\mu\nu} = -i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$ を考えればいいからである。

一方、$\mathcal{N}=4$SYM は共形な場の理論である。共形性は非繰込み定理、Callan Symanzik beta function が 0 であることから理解できる。このような理論の super conformal group は [11] に詳しく論じられている。この代数の構成要素は以下のものからなることが分かる。このことを理解するには共形場の理論の定義から始まって考えるのが分かりやすい。共形場の理論では、変数変換 $x^\mu \to x'^\mu$ に対して、

$$g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\mu\nu} = \Omega_x g_{\mu\nu} \tag{21}$$

となる理論のことをいう。つまり変数変換に対して metric が定数倍せられるのみでありその形を変えない理論のことをいう。とくに微小変換 $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$ に対しては、

$$ds'^2 = ds^2 + (\partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\nu\epsilon_\mu)dx^\mu dx^\nu \tag{22}$$

を得ることができるが、その変化分が $\eta_{\mu\nu}$ に比例すれば良い。このような変換の種類については、2 次元の理論であれば無限通り存在する。何故ならば 2 つの変数を複素数の実部と虚部として読み替えたときに、Cauchy-Riemann の関係式からすべての正則関数による変換 $z \to f(z)$ が共形変換であることが理解できるからである。しかし、一般の $\mathrm{d}(d \geq 3)$ 次元に対しては、このような共形変換は $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$ 通りだけ存在することが分かる。その変換をすべて列挙すれば下記の表のようになる。

変換の種類	変数の変換のし方	対応する演算子	変換の個数
並進変換	$x'^\mu = x^\mu + a^\mu$	$P_\mu = -i\partial_\mu$	d
拡大縮小変換	$x'^\mu = \alpha x^\mu$	$D = -ix^\mu\partial_\mu$	1
回転変換	$x'^\mu = M^\mu_\nu x^\nu$	$L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$	$\frac{1}{2}d(d-1)$
特殊共形変換	$x'^\mu = \frac{x^\mu - b^\mu x^2}{1-2\mathbf{bx}+b^2x^2}$	$K_\mu = -i(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^2\partial_\mu)$	d

この表において、とくにここで問題にしている 4 次元の共形場の理論ではギリシア文字は 1,2,3,4 を走るものとして用いている。また、これらの演算子の交換関係は次で得ることができる。

$$[D, P_\mu] = iP_\mu, \quad [D, K_\mu] = -iK_\mu \tag{23}$$

$$[K_\rho, L_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu}K_\nu - \eta_{\rho\nu}K_\mu), \quad [P_\rho, L_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu) \tag{24}$$

$$[K_\mu, P_\nu] = 2i(\eta_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu}), \quad [L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}) \tag{25}$$

ここで、$\eta_{\mu\nu}$ は $SO(4)$ 代数にあたるものである。そこで、次のように変数変換してみる。

$$L_{-1,\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu), \quad , L_{0,\mu}\frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu), \quad , L_{-1,0} = -D \tag{26}$$

そうすれば新しい代数は $SO(5,1)$ 代数になり、

$$[L_{ab}, L_{cd}] = i(\eta_{ad}L_{bc} + \eta_{bc}L_{ad} - \eta_{ac}L_{bd} - \eta_{bd}L_{ac}) \tag{27}$$

ここで、$\eta_{ab} = diag(-1,1,1,1,1,1)$ である。また、a,b,c,d, は- 1,0,1,2,3,4 を走るものとする。以上により、両者の superconformal group が一致することが理解できた。

1.2.2 SL(2,Z) duality

もう一つの、両者の対称性の一致の証拠として、$SL(2,Z)$ duality をあげることができる。つまりいずれの理論も $SL(2,Z)$ 変換を施しても同一の理論に返ってくるということである。このことはいずれの理論にとっても非常に良く知られた事実である。

まずは AdS_5 空間上の type IIB superstring の低エネルギーの理論についての SL(2,Z) 対称性について論じる。前に式 (1) でのべた作用は、R-R field に対する graviton, dilaton および R-R (p+1) form に対する作用であった。ここで問題にする type IIB の作用は、一般の場合であり特定の form の R-R field のみを考慮した式 (1) とは異なる。一般の form の field をすべて足しあわせるので、R-R field のみならず NS-NS field についても考える。そこで、一般の場合の作用は、次の 3 項の和であるとして理解できる。

$$S_{NS} = \frac{1}{(2\pi)^7 l_s^8}\int d^{10}x\sqrt{-g}e^{-2\phi}(\mathcal{R} + 4(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}|H_3|^2) \tag{28}$$

$$S_R = -\frac{1}{2(2\pi)^7 l_s^8}\int d^{10}x\sqrt{-g}(|F_1|^2 + |\tilde{F}_3|^2 + \frac{1}{2}|\tilde{F}_5|^2) \tag{29}$$

$$S_{CS} = -\frac{1}{2(2\pi)^7 l_s^8}\int d^{10}x C_4 \wedge H_3 \wedge F_3 \tag{30}$$

ここで、$\tilde{F}_3 = F_3 - C_0 \wedge H_3$、$\tilde{F}_5 = F_5 - \frac{1}{2}C_2 \wedge H_3 + \frac{1}{2}B_2 \wedge F_3$ の意味で用いている。これに対して、

$$S_{IIB} = S_{NS} + S_R + S_{CS} \tag{31}$$

であるとして記述することができる。これについて、とりあえず SL(2,R) 対称性から先に理解することにする。そのために作用を次のようにして書き換えることにする。

$$G_{E\mu\nu} = e^{-\frac{\phi}{2}}g_{\mu\nu}, \quad \tau = C_0 + ie^{-\phi} \tag{32}$$

$$\mathcal{M}_{ij} = \frac{1}{Im\tau}\begin{bmatrix} |\tau|^2 & -Re\tau \\ -Re\tau & 1 \end{bmatrix}, \quad F_3^i = \begin{bmatrix} H_3 \\ F_3 \end{bmatrix} \tag{33}$$

そうすれば、S_{IIB} は次のようにして書くことができる。

$$S = \frac{1}{(2\pi)^7 l_s^8}\int d^{10}x\sqrt{-G_E}(\mathcal{R}_E - \frac{\partial_\mu\bar{\tau}\partial^\mu\tau}{2(Im\tau)^2} - \frac{1}{2}|F_1|^2 - \frac{1}{2}\mathcal{M}_{ij}F_3^iF_3^j - \frac{1}{4}|\tilde{F}_5|^2) - \frac{\epsilon_{ij}}{4(2\pi)^7 l_s^8}\int C_4 \wedge F_3^i \wedge F_3^j \tag{34}$$

このように書き直せば、この作用は次の SL(2,R) 変換について不変であることが理解できる。

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad F_3'^i = \Lambda^i_j F_3^j, \quad ,\Lambda^i_j = \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}, \quad \tilde{F}_5' = \tilde{F}_5, \quad G'_{E\mu\nu} = G_{E\mu\nu} \tag{35}$$

ここで、a, b, c, d は $ad - bc = 1$ を満足する実数である。ここまでで SL(2,R) 対称性について理解したが、実は後にこの中でも物理的に意味をなすのはその部分群にあたる SL(2,Z) 対称性であることが判明した。そのことを見るためには BPS bound が不変であるための条件を課せばよい。そのための条件が SL(2,Z) なのである。

ここまでで type IIB 理論の SL(2,Z) 対称性について理解したが、これと同じ対称性は $\mathcal{N} = 4$SYM についても見ることができる [10]。この場合、Witten 効果と呼ばれるものが存在しており、Lagrangian に

$$S_\theta = \frac{\theta}{32\pi^2} F^a_{\mu\nu} * F^{a\,\mu\nu} \tag{36}$$

の項を付け加えることができる。そうすれば、$\mathcal{N} = 4$SYM の作用は field strength に関係するところだけ見れば、次のようにして記述することができる。

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4g^2} F^{a\,\mu\nu} F^a_{\mu\nu} + \frac{\theta}{32\pi^2} F^a_{\mu\nu} * F^{a\,\mu\nu} + (other) && (37) \\ &= \frac{1}{32\pi} Im(\frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^2})(F^{a\,\mu\nu} + i * F^{a\,\mu\nu})(F^a_{\mu\nu} + i * F^a_{\mu\nu}) + (other) && (38) \end{aligned}$$

この Lagrangian は次の形の一つの複素パラメーターによって記述が可能である。

$$\tau = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^2} \tag{39}$$

この理論は $\theta \to \theta + 2\pi$ としても不変であるから、$\tau \to \tau + 1$ について不変であることが分かる。また、$\tau = 0$ のときには、$\tau \to -\frac{1}{\tau}$ によって理論は不変である。 そこで、次の SL(2,Z) 対称性を考えることができる。

$$\tau \to \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{Z}, \quad ad - bc = 1 \tag{40}$$

以上の議論から、type IIB superstring の古典重力理論、および $\mathcal{N} = 4$SYM の双方に SL(2,Z) 対称性が存在することが分かった。この事実もまた AdS/CFT 対応を裏付けるための強力な根拠の一つである。

2 Wilson Loop について

次に、本論文の議論の中心となる Wilson loop に関する説明を行う。そもそもの Wilson loop の定義は、gauge 不変な path に依存した演算子であって、$\mathcal{N} = 4$SYM で gauge 群が SU(N) である場合は、

$$W = \frac{1}{N} Tr\mathcal{P} \exp(i \oint A^a_\mu T^a dx^\mu) \tag{41}$$

として定義される[5] 。以下、スペースの都合上、$A_\mu = A^a_\mu T^a$ の意味で略記することもある。有名な事実として、反平行な Wilson line に対してであれば Wilson line の期待値は quark と anti-quark の間に働くポテンシャルを $V(L)$(ここで L は両者の間の距離を表す) とするときに、

$$\langle W \rangle = \exp(-V(L)) \tag{42}$$

[5] ここで $\mathcal{P}$ は path-ordered product を表すものであり、これは non-abelian な gauge 理論に関する Wilson loop が gauge 不変量であるために不可欠なものである。類似概念として Feynman diagram を導出するときに用いた time-ordered product があったが、これは $T\{\exp(-i\int_{t_0}^t dt' H_I(t'))\} = 1 + (-i)\int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \cdots$ で定義された量であった 。

であることが知られている。$\mathcal{N}=4$SYM における Wilson loop と AdS_5 上の SUGRA との対応は [2][3] に説明されている通りである。

しかし、Wilson loop の AdS/CFT 対応を論じる際には上記の式 (41) で考えるのでは問題がある。何故なら、$\mathcal{N}=4$SYM は基本表現に quark を含んでいないからである。そこで、一工夫を必要とする [4][2]。まず始めに $\mathcal{N}=4$SYM の setup として N 枚ではなく $N+1$ の Dp-brane を用意するのである。そして、1 枚の Dp-brane を残りの N 枚の Dp-brane から切り放して、無限遠に持っていくことにする。これはゲージ群を $SU(N+1)\to U(1)\times SU(N)$ に破ったことに対応する。t'Hooft limit を考えている限りでは、この遠くに飛ばした brane によって生成せられる field を無視することができる。もとの $\mathcal{N}=4$SYM における SU(N+1)gauge 群の作用は

$$\hat{S}=\frac{1}{2g^2}(\frac{1}{2}\hat{F}_{\mu\nu}^2+(\hat{D}_\mu\hat{\phi}_i)^2-\frac{1}{2}[\hat{\phi}_i,\hat{\phi}_j]^2+i\bar{\psi}D_M\Gamma^M\psi) \tag{43}$$

であり、この gauge 群を上記で述べた方法で破っていくのである。ここでハットをつけたのは SU(N+1) 群に対する変数である。

- ここでギリシア文字は 1,2,3,4 方向を走る。
- i,j は 5,6,7,8,9,10 を走り、$AdS_5\times S^5$ 空間の S^5 に対応する。
- 大文字の alphabet は 1 ~ 10 を走り、ギリシア文字と小文字 alphabet を合わせたものである。

そこで、gauge 群を $SU(N+1)\to SU(N)\times U(1)$ に破るときに、次のようにすればいい。

$$\hat{A}_\mu=\left(\begin{array}{c|c} A_\mu & w_\mu \\ \hline w_\mu^\dagger & a_\mu \end{array}\right)\quad \hat{\phi}_i=\left(\begin{array}{c|c} \phi_i & w_i \\ \hline w_i^\dagger & M\theta_i \end{array}\right) \tag{44}$$

そして、この 1 枚の Dp-brane と残りの N 枚の Dp-brane の間に open string を張ることにする。そうすれば、この open string の基底状態は、W-boson および破れた後の SU(N) 群における superpartner である。こうして工夫することで、基本表現に非常に重い粒子が存在することと等価である状況を作り出すことができるのである。この W-boson の 4 点相関関数は第一量子化した描像において、path における積分として見做すことができるのである。即ちこの W-boson の 4 点関数について、$\int dy w^\dagger(x)w(x)w^\dagger(y)w(y)$ を考えるとき、これは点 x を通るすべての loop を網羅したことになる。その loop の重みとして Wilson loop の寄与があらわれるであろうということは、定性的に理解できる。その途中の詳しい計算は [4] に書いてあるのでそちらに譲ることにするが、これに従って計算を実行すれば、実際 $SU(N+1)\to SU(N)\times U(1)$ に対応する Wilson loop を得ることができる。

また、作用の中に gauge 場だけでなく scalar 場 $\phi_i^a(x)$ が生じていることは一見意外なように思えるが、定性的には自然に理解できる事柄である。Dp-brane に終端している string は、**brane** を引っ張っているので electric field の source であるだけではなく、scalar charge をも運んでいるからである。

結論を書けば、AdS/CFT 対応において私たちが問題にすべき Wilson loop の式は以下で得られることが分かる。まず Minkowski 空間では次式で表せられる。

$$W_{min}=\frac{1}{N}Tr\mathcal{P}\exp\oint d\tau(iA_\mu^a(x)T^a\dot{x}^\mu+i\phi_i^a(x)|\dot{x}|T^a\theta^i(\tau)) \tag{45}$$

ここで足の走り方は上で述べたのと全く同じであり、dot を上につけたものはパラメーター τ に対する微分を表す。そして、θ^i は球面 S^5 上の座標であって、$\sum_{i=2\omega+1}^{10}\theta^i\theta^i=1$ を満足する。また、この Wilson loop の中に $\sum_{i=2\omega+1}^{10}\theta^i\theta^i=1$ をみたす座標が入ってきたことは、black p-brane の metric の $g^2N\ll 1$ の極限からも理解できる。metric は

$$ds^2=-dt^2+dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+dr^2+r^2d\Omega_5^2 \tag{46}$$

であることに合致した結果となっている。

特にここでは **Euclid** 化した後の **Wilson loop** を考えることにする。そうすれば、

$$W = \frac{1}{N} Tr\mathcal{P} \exp \oint d\tau (iA_\mu^a(x)T^a \dot{x}^\mu + \phi_i^a(x)|\dot{x}|T^a\theta^i(\tau)) \tag{47}$$

2.1 $\mathcal{N} = 4$SYM における作用と Feynman diagram

ここで式 (47) の具体的な解析に入る前に、$\mathcal{N} = 4$SYM における作用と Feynman diagram について具体的に述べることにする。lagrangian から Feynman diagram を読み取る方法については例えば [7] などの場の理論の教科書に書いてある。具体的な作用の形は SU(N+1) 群の場合には式 (43) に書いた通りであるが、基本的にはこれを SU(N) 群に直して (つまりハットをとって) そのまま使えば良い。ただし、通常の Yang-Mills 理論の場合と同様にして、gauge 固定の際に Fadeev Popov ghost term 及び $\frac{1}{2}\xi(\partial_\mu A_\nu^a)^2$ の項を付け加える必要がある。そうすれば、全体の作用は次で記述せられる。

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \frac{1}{2g^2}(\frac{1}{2}(F_{\mu\nu}^a)^2 + (\partial_\mu\phi_i^a + f^{abc}A_\mu^b\phi_i^c)^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi^a + f^{abc}A_\mu^b\psi^c) \\ &+ if^{abc}\bar{\psi}^a\Gamma^i\phi_i^b\psi^c - \sum_{i<j} f^{abc}f^{ade}\phi_i^b\phi_j^c\phi_i^d\phi_j^e + \partial_\mu\bar{c}^a(\partial_\mu c^a + f^{abc}A_\mu^b c^c) + \xi(\partial_\mu A_\mu^a)^2) \end{aligned} \tag{48}$$

として得ることができる。以下この論文では Feynman t'Hooft gauge を採用する。即ち $\xi = 1$ であるとする。そうすれば、Feynman diagram は以下で得ることができる。

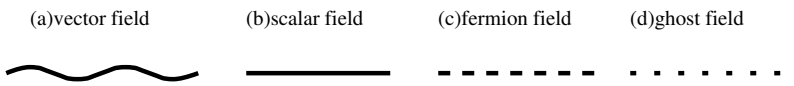


図 2: $\mathcal{N} = 4$SYM における propagator の一覧

そして、それぞれに対する Feynman rule は次式で表せられる。一方、vertex operator に対する Feynman

図番号	Feynman rule
(a)	$g^2\delta^{ab}\frac{\delta_{\mu\nu}}{p^2}$
(b)	$g^2\delta^{ab}\frac{\delta_{\mu\nu}}{p^2}$
(c)	$g^2\delta^{ab}\frac{-\gamma\cdot p}{p^2}$
(d)	$g^2\delta^{ab}\frac{1}{p^2}$

表 1: propagator に対する Feynman rule

rule は次の通りとなる。

2.2 Wilson loop の諸々の近似法

ここで AdS/CFT 対応で考える Wilson loop は式 (47) にて表せられることを理解した。そこで、この式の exponential を展開することによって、様々な situation における展開式を得ることができる。以下にそれをまとめることにする。

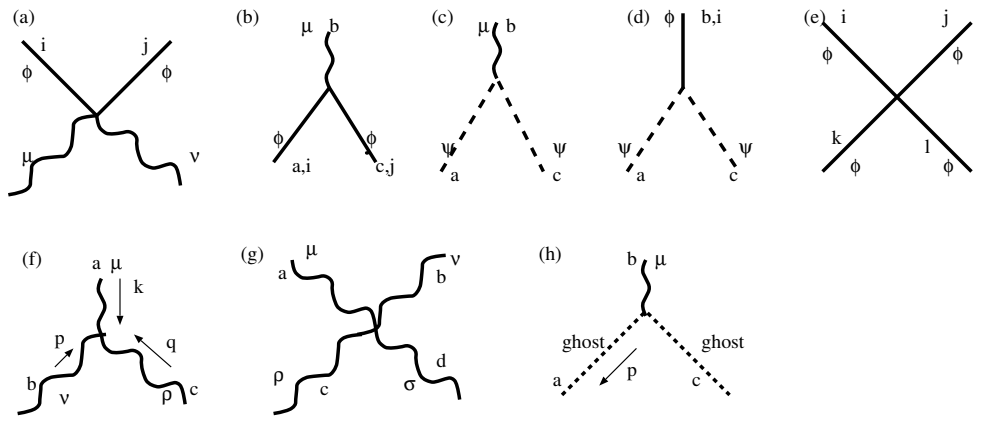


図 3: $\mathcal{N} = 4$SYM における vertex operator の一覧

図番号	Feynman rule
(a)	$2g^{-2}\delta_{\mu\nu}\delta_{ij}$
(b)	$g^{-2}f^{abc}p^{\mu}$
(c)	$ig^{-2}\gamma^{\mu}f^{abc}$
(d)	$ig^{-2}\Gamma^{i}f^{abc}$
(e)	$-2g^{-2}i(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})$
(f)	$-g^{-2}f^{abc}(\delta_{\mu\nu}(k-p)^{\rho}+\delta_{\nu\rho}(p-q)^{\mu}+\delta_{\rho\mu}(q-k)^{\nu})$
(g)	$g^{-2}(f^{abe}f^{cde}(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}-\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho})+f^{ace}f^{bde}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma}-\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho})+f^{ade}f^{bce}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma}-\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}))$
(h)	$g^{-2}f^{abc}p^{\mu}$

表 2: vertex operator に対する Feynman rule

2.2.1 最低次の order での展開

まずは、最低次の order の展開について考える。Wilson loop の期待値を考えるにあたっては、登場する gauge 場について Wick contraction をとる必要がある。したがって、Wilson loop の期待値を考えるにあたっては exponential の展開の 1 次は考えることはできない。実際にはじめて効いてくるのは展開の 2 次の order である。そこで、具体的に展開式を書き下す。

$$\langle W\rangle = \frac{1}{N}Tr\mathcal{P}(1+\frac{1}{2}\oint d\tau_1 d\tau_2 \langle (iA^a_\mu(x)T^a\dot{x}^\mu(\tau_1)+\phi^a_i(x)T^a|\dot{x}(\tau_1)|\theta^i)(iA^b_\nu(x)T^b\dot{x}^\nu(\tau_2)+\phi^b_i(x)T^b|\dot{x}(\tau_2)|\theta^i)+\cdots)\rangle \quad (49)$$

この式の Wick contraction をとるにあたって必要は関係式は、さきに求めた $\mathcal{N}=4$SYM の Feynman rule である。表 1 によって、次のように得られる。

$$\langle A^a_\mu(\tau_1)A^b_\nu(\tau_2)\rangle = g^2\delta^{ab}\delta_{\mu\nu}\frac{1}{p^2},\quad \langle \phi^a_i(\tau_1)\phi^b_j(\tau_2)\rangle = g^2\delta^{ab}\delta_{ij}\frac{1}{p^2} \quad (50)$$

また、これは運動量空間において得られた結果であるから、Wilson line の期待値を考える際には位置空間に Fourier 変換をしなければいけない。そこで、一般の 2ω 次元に対しての次の公式を用いる。

$$\int \frac{d^{2\omega}p}{(2\pi)^{2\omega}}e^{ip\cdot x}(p^2)^s = \frac{\Gamma(\omega-s)}{4^s\pi^\omega\Gamma(s)}\frac{1}{(x^2)^{\omega-s}} \quad (51)$$

そうすれば次のように変換できる。

$$\langle A^a_\mu(x(\tau_1))A^b_\nu(x(\tau_2))\rangle = \frac{g^2\delta_{\mu\nu}}{4\pi^2x^2}\delta^{ab},\quad \langle \phi^a_i(x(\tau_1))\phi^b_j(x(\tau_2))\rangle = \frac{g^2\delta_{ij}}{4\pi^2x^2}\delta^{ab} \quad (52)$$

として得ることができる。これを用いて位置空間における $\langle A_\mu(\tau_1)A_\nu(\tau_2)\rangle$ の計算を詳しく考える。まず、SU(N) 群の随伴表現行列に関する有名な事実を準備のために幾つか列挙する。

- まずは、随伴表現の次元は $SU(N)$ 群に対しては N^2-1 次元であることが知られている[6] そして、その表現行列は $tr(T^aT^b)=\frac{\delta^{ab}}{2}$ であるように定義する。
- その自然な帰結として $T^aT^b=\frac{N^2-1}{2N}\mathbf{1}_N$ である。[7] t'Hooft limit ではほぼ $T^aT^b=\frac{N}{2}\mathbf{1}_N$ であることが分かる。

したがって、次のように計算ができることが分かる。

$$\langle A_\mu(\tau_1)A_\nu(\tau_2)\rangle = \sum_{a,b=1}^{N^2-1}\frac{g^2\delta_{\mu\nu}}{4\pi^2x^2}T^aT^b\delta^{ab} = \sum_{a=1}^{N^2-1}\frac{g^2\delta_{\mu\nu}}{4\pi^2x^2}T^aT^a = \frac{g^2N\delta_{\mu\nu}}{8\pi^2x^2}\mathbf{1}_N \quad (53)$$

そこで、Wick contracrtion の取り方は、$\overbrace{\tau_1\tau_2}$ しか有り得ない。また、path-ordered product の積分について、

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f}d\tau_1\int_{\tau_i}^{\tau_1}d\tau_{\tau_i}\cdots\int_{\tau_i}^{\tau_{n-1}}d\tau_n = \frac{1}{n!}\int_{\tau_i}^{\tau_f}\prod_{k=1}^{n}d\tau_k \quad (54)$$

であることが分かる。したがって求める Wilson line の期待値は次で表せられる。

$$\langle W\rangle = 1+\frac{g^2N\Gamma(\omega-1)}{8\pi^2}\oint_{\tau_1>\tau_2}d\tau_1d\tau_2\frac{|\dot{x}(\tau_1)||\dot{x}(\tau_2)|-\dot{x}(\tau_1)\cdot\dot{x}(\tau_2)}{|x(\tau_1)-x(\tau_2)|^{2(\omega-1)}} \quad (55)$$

$$= 1+\frac{g^2N\Gamma(\omega-1)}{16\pi^2}\oint d\tau_1d\tau_2\frac{|\dot{x}(\tau_1)||\dot{x}(\tau_2)|-\dot{x}(\tau_1)\cdot\dot{x}(\tau_2)}{|x(\tau_1)-x(\tau_2)|^{2(\omega-1)}} \quad (56)$$

[6] このことを確かめたければ、$SU(N)$ 群の Lie 代数が traceless な Hermite 行列であることを用いれば良い。その独立な成分の数を数えれば次元は得られる。

[7] これは両者の trace をとればわかることであり、 まず、$\sum_{a,b=1}^{N^2-1}tr(T^aT^b)=\sum_{a,b=1}^{N^2-1}\frac{\delta^{ab}}{2}=\frac{N^2-1}{2}$ であることが分かる。一方、$\sum_{a,b=1}^{N^2-1}trT^aT^b=\frac{N^2-1}{2N}tr(\mathbf{1}_N)=\frac{N^2-1}{2}$ である。

を得ることができる[8] [9] 。

2.2.2 ladder diagram

さて、本論文で中心的な役割を果たす近似法である、ladder diagram について解説する。まず、これは Wilson loop の指数の展開の 2n 次でのみ定義できる概念である。ladder diagram の定義は、

- 2n 点 $x(\tau_1), x(\tau_2), \cdots, x(\tau_{2n})$ に対する外場にたいして、Wick contraction をとるときに、vector field の propagator が交点を持たないようような diagram のみを抽出する。
- さらに、内線について loop 補正を持つようなダイアグラム、および propagator の内部に vertex を持つものを排除する。

ここでは t' Hooft limit で問題を考えているので、前者の条件で特定の diagram を排除したとしても、gauge 不変性に抵触しないことは large N QCD においてよく知られている事柄である [8]。つまり、large N QCD の場合は、図のように Feynman diagram において、scalar 場を 1 重線、ゲージ場を 2 重線で描写し、diagram 全体では N の order は、Feynman diagram のつくる面の Euler number の総和として得ることができる。このことを用いれば、同じ 2n 点の外場にたいして、一番有利なのは vector field の diagram が交点を持たない場合であることが分かる。

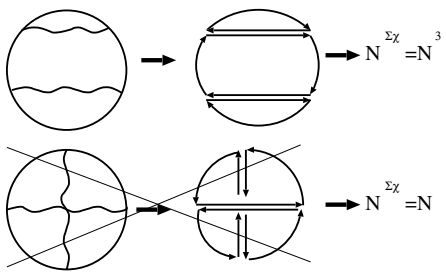


図 4: gauge 場を内線に含んだ場合の diagram の N の order(例として 4 点のみ)

この論文で提唱する近似法は、さらに簡略化を行うための方法を与える。例えば、4 点の外場があって gauge 場が全く交わりを持たない場合は、N^3 の order が最も主要であることを見た。しかしながら、t'Hooft limit で同一の order であるような diagram はこれだけではない。他に考えられるケースを図示すれば次のようになる。ここで、Σ_2 は 2 点の外場があったときに、vector field の propagartor について、1 loop の補正を与えたものである。また、Σ_3 とは、Wilson loop の内部に gauge 場の vertex を持つような diagram のことをさす。これら二種類の daigram はいずれも同様に large N QCD からの考察によって N^3 の order の寄与を与えることがわかる。本論文がこれから主張したいことは、この **2** つの「タチの悪い」**diagram** の寄与が互いに **cancel** するであろうということである。この事柄は厳密にすべての order での証明に成功している訳ではない。あくまで本論文では g^4N^2 の **order** までしかこの cancellation については論じていない。しかしながら、後でみるように結果として彼らの提唱するところの ladder 近似の計算が、AdS 空間による強結合の極限による計算結果と一致することから、高次の order についての cancellation については肯定的に解釈するよすがを得られるといえる。

[8] 4 次元を考える分には $\Gamma(\omega - 1)$ は実質的に 1 なので、明記しないできたが、ここでは後の議論のために戻しておくことにした。以下でもこのように $\omega = 2$ を代入した後の式と、そのままにしてある式が混在することがある。

[9] 原論文では式 (56) に関して分母が $4\pi^2$ となっていたが、これは著者らの間違いである。

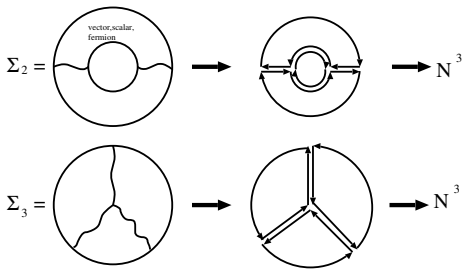


図 5: N^3 の order の寄与を与えうる他の配置

さて、このような ladder 近似を行った時の Wilson loop の値 g^4N^2 の order までで計算してみよう。このときは指数の Taylor 展開の 4 次の order のみを抽出して考えればいい。展開した項は、下記のごとく書き下せる。

$$\frac{1}{N}Tr\mathcal{P}(\oint_{\tau_1>\tau_2>\tau_3>\tau_4}\prod_{k=1}^{4}d\tau_k\prod_{k=1}^{4}(iA_\mu\dot{x}^\mu(\tau_k)+\phi_i(\tau_k)|\dot{x}|\theta^i)) \tag{57}$$

しかし、ここでは ladder 近似を採用しているので、どのような Wick contraction の取り方でも許される訳ではない。ここでは path order product をとっているので、4 点 τ_1 ~ τ_4 は順番に並んでいるとしてもいい。そこで、Wick contraction の取り方として $\overbrace{\tau_1\tau_2}\overbrace{\tau_3\tau_4}$、$\overbrace{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}$、の 2 通りが存在する。この二つを区別して考えないといけないのは、変数のパラメーターに関して path ordered product を考えているので、順番について区別をせねばならないのである。結果として ladder 近似による値を Σ_1 定義すれば、後は式 (53) を用いることで、次式にて表せられる[10] 。

$$\Sigma_1=\frac{g^4N^2}{32\pi^4}\oint_{\tau_1>\tau_2>\tau_3>\tau_4}(\prod_{k=1}^{4}d\tau_k)\frac{(|\dot{x}(\tau_1)||\dot{x}(\tau_2)|-\dot{x}(\tau_1)\cdot\dot{x}(\tau_2))\cdot(|\dot{x}(\tau_3)||\dot{x}(\tau_4)|-\dot{x}(\tau_3)\cdot\dot{x}(\tau_4))}{(|x(\tau_1)-x(\tau_2)|^2|x(\tau_3)-x(\tau_4)|^2)^{\omega-1}} \tag{58}$$

3 従来知られている AdS 空間古典的超重力からの解析

次に、従来知られている AdS 空間の古典的 SUGRA による解析の結果について復習を行う [1][2][3]。まずはすでに述べたように反平行な Wilson loop については Wilson loop の期待値は式 (42) によって与えられる。一般には AdS 空間上の type IIB superstring を考察するとき、

$$\langle W\rangle=\exp(-S) \tag{59}$$

であることが知られている。ここで与えられた Wilson loop についての AdS/CFT 対応について何点か言及をしておこう。

- Super-Yang-Mills 理論に置いては反平行な直線 (つまり長方形の loop) を考えたときに、Wilson loop の期待値が $\langle W\rangle=\exp(-TV(L))$ であることがわかっている。ここで $V(L)$ は quark と anti-quark の間の L だけ離したときの potential である。AdS/CFT 対応においては、quark と anti-quark の間に張ってある「紐」が、type IIB superstgring と同類の概念であるだろうと推測している。したがってこのことは対応としては自然なものであると考えてもいい。

[10] 原論文では分母は 6 であったが、これも著者らの間違いである。

- もし理論が強結合の領域にあるとすれば、この string の作用はある fundamental srtring worldsheet の面積であり、その世界面は次の 2 つの条件を満たすものである。
  - AdS 空間の境界においては、Wilson loop を表している。
  - S^5 空間上においては $\theta^i(\tau)$ に沿って存在している
- 私たちは以前に AdS/CFT 対応を考える時に CFT の側の作用は式 (47) によって考えないといけないことを述べた。これは AdS_5 空間上の type IIB string 理論との対応で次のように考えられる。式 (47) は $\mathcal{N} = 4$SYM において gauge 群を $SU(N+1) \to SU(N) \times U(1)$ に破ったものであった。これは Dp-brane の描像ではもとは (N+1) の Dp-brane が存在していたところを、1 枚だけ引き離し、引き離した 1 枚と残りの N 枚の brane の間に superstring が張ってある状況と対応している。これは AdS_5 空間においては 10 次元空間に存在して両端が AdS_5 空間の双曲面上に終端している string と対応しているのである。

3.1 円状の Wilson line に関する計算結果

通常は S を求めるにあたって後述する minimal surface の考え方を用いて計算を行う。しかしながら円状の Wilson loop の場合は conformal 不変性を用いて考える方が容易である。ここで円状の Wilson loop の半径を a とする。特殊共形変換は直線を円に移すことが知られている。もとの直線であれば、minimal area surface は明らかに境界と交差して horizon み向かう平面である。これは Poincare 座標を用いれば

$$\vec{x} = \sqrt{a^2 - z^2}(\vec{e_1}\cos\theta + \vec{e_2}\sin\theta) \tag{60}$$

として表される。ここで、$\vec{e_1}$、$\vec{e_2}$ は、円の向きを表す 4 次元における 2 つの直交するベクトルである。また、Poincare 座標では AdS_5 空間上の metric を

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2) \tag{61}$$

として記述するものである。ここで R は AdS_5 空間を表す超平面の半径であり、$\alpha' = \frac{1}{2}$ であるとすれば、$R^4 = g^2 N \alpha'^2$ である。したがって、minimal surface はこの metric より

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int ds^2 = \frac{R^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{2\pi} d\theta \int_\epsilon^a \frac{adz}{z^2} = \frac{R^2}{\alpha'}(\frac{a}{\epsilon} - 1) \tag{62}$$

として得ることができる。ここで ϵ は IR cutoff を表す量である。これは場の理論における UV cutoff に対応する。そこで、発散する部分を除去することで、次式を得る。

$$\langle W \rangle = e^{-S} \sim e^{\frac{R^2}{\alpha'}} = \exp(\sqrt{g^2 N}) \tag{63}$$

3.2 反平行な直線に関する計算結果

次に反平行な Wilson line に関する計算結果を引用する。このとき、$SU(N) \times U(1)$ 理論における quark と anti-quark の間の potential を計算することができる。この Wilson loop に関して、L は 2 つの反平行な直線の間の距離であり、T は直線の長さを表す。このときの minimal surface を求めるにあたって 次の形の作用から考える。

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d\tau d\sigma \sqrt{\det g_{MN}\partial_\mu X^M \partial_\nu X^N}$$

$$= \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d\tau d\sigma \sqrt{\alpha'^2 \det \begin{pmatrix} \frac{U^2}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{U^2}{R^2}+\frac{R^2(\partial_\sigma U)^2}{U^2} \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{T}{2\pi}\int d\sigma \sqrt{(\partial_\sigma U)^2 + \frac{U^4}{R^4}} \tag{64}$$

ここで、AdS_5 空間上における metric の形が

$$ds^2 = \alpha'(\frac{U^2}{R^2}dx^2 + \frac{R^2}{U^2}dU^2) \tag{65}$$

であることを用いており、$U = \frac{r}{\alpha}$ の意味で用いている。minimal surface を求めるためには Euler-Lagrange 方程式を解けばよく、

$$\partial_\sigma(\frac{\delta S}{\delta(\partial_\sigma U)}) - \frac{\delta S}{\delta U} = \partial_\sigma(\frac{2\partial_\sigma U}{\sqrt{(\partial_x U)^2 + \frac{U^4}{R^4}}}) - \frac{\frac{4U^3}{R^4}}{\sqrt{(\partial_\sigma U)^2 + \frac{U^4}{R^4}}} = 0 \tag{66}$$

によって求められる。これを計算することによって、

$$U(\partial_\sigma^2 U) - 4(\partial_\sigma U)^2 - 2\frac{U^4}{R^4} = 0 \tag{67}$$

を得ることができる。この条件は、

$$\frac{1}{U^8}((\partial_\sigma U)^2 + \frac{U^4}{R^4}) = (const.) = \frac{1}{U_0^4 R^4} \tag{68}$$

と読み替えることができる。このことは 式 (68) の左辺をを σ について微分すれば式 (67) の左辺になることから理解できる。したがって、

$$(\frac{\partial U}{\partial \sigma})^2 = \frac{1}{R^4}(\frac{U^8}{U_0^4} - U^4) \tag{69}$$

である。これを (積分公式集などを参照して) 積分すれば、σ は座標の空間成分の意味で用いているので、L は

$$\frac{L}{2} = \frac{R^2}{U_0}\frac{\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{4})^2} \tag{70}$$

として表せられる。これらを代入して、quarl と anti-quark の間の potential を計算することができる。結果として発散する部分を正則化することで、

$$E = -\frac{4\pi^2(g^2N)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{4})^4 L} \tag{71}$$

となり、通常の正電荷と負電荷の間の potential と同様、距離に反比例した結果を得ることができる。したがって、このときの Wilson loop の期待値は、

$$\langle W\rangle = \exp(\frac{4\pi^2(g^2N)^{\frac{1}{2}}T}{\Gamma(\frac{1}{4})^4 L}) = \exp(0.228\sqrt{g^2N}\frac{T}{L}) \tag{72}$$

であることがわかる。

4 ladder 近似で排除された diagram に関する考察

ここでは $\mathcal{N} = 4$SYM における解析を t'Hooft limit で行うことにしていた。$N \to \infty$ の極限でも生き残る項として、ladder 近似で抽出する Σ_1 だけでなく、loop 補正を含んだ Σ_2 および、内部に vertex を含んだ Σ_3 も存在してしまう。この論文の主張するところは g^4N^2 の order に関する限り $\Sigma_2 + \Sigma_3 = 0$ となって cancel することである。ここでは両者の定量的な評価について考える。

4.1 loop 補正 Σ_2 の計算

ここでは g^4N^2 の order まででしか問題を考えないので、1-loop の計算のみで十分である。そこで、vector field と scalar field に関する one loop 補正を具体的に求める。但し計算は 2ω 次元のもとで行う。諸々の計算テクニックは [7] を参照されたい。計算は長く面倒なので、すべてに対する計算過程をあらわに書くことはしないが、一つだけやっておくことにする。

まずは下図の (a) の場合の計算から始める。ここで前に述べた Feynman rule を適用する。(a) の diagram

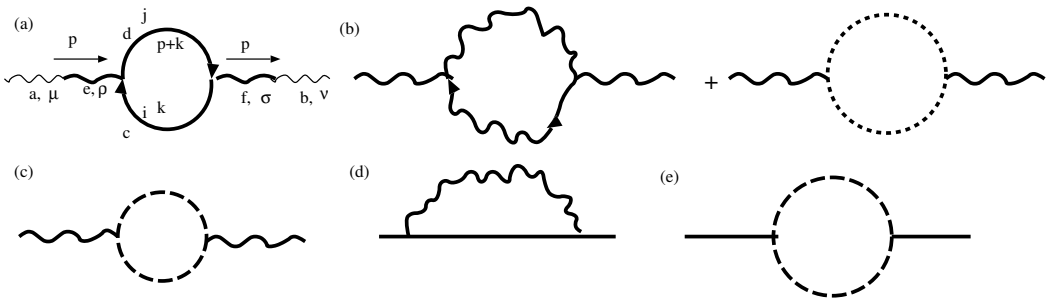


図 6: (a)(b)(c) は vector 場、(d)(e) は scalar 場に与える one-loop 補正の diagram

の one-loop は次式で表現できる。

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} tr[\frac{g^2}{k^2}\frac{g^2}{(p+k)^2} g^{-2} f^{ced}(-k)^\rho (-g^{-2}f^{dfc})(p+k)^\sigma \delta_{ij}] \tag{73}$$

この計算を実行していくために以下の事柄を用いる。

- Lie 代数の構造定数に関する公式として $f^{acd}f^{bcd} = N\delta^{ab}$ が知られている。
- 分母については、通常の Feynman parameter の方法を用いる。そうすれば、

$$\frac{1}{k^2}\frac{1}{(k+p)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2(1-x)+(k+p)^2x)^2} = \frac{1}{(l^2-\Delta)^2} \tag{74}$$

  であることがわかる。ここで $\Delta = -x(1-x)p^2$ および $l^\mu = k^\mu + xp^\mu$ の意味で用いている。
- δ_{ij} の和をとれば当然 scalar 場の個数 $10-2\omega$ になるが、以下ではとりあえず 1 つの scalar 場当たりの量を計算する。さしあたっては δ_{ij} の表記は省略する。

こうすれば、与式は次のように計算できる。

$$-N\delta^{ef}\int_0^1 dx \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(l^2-\Delta)^2}(l-xp)^\rho (l-(1-x)p)^\sigma \tag{75}$$

次に多次元の積分を容易ならしめるために Wick contraction を用いる。即ち第 0 成分 (時間成分) に関して $l^0 = il_E^0$ と置き換える。さらに l^μ の奇数次は、奇関数になって積分に効かないので落としておく。そうすれば、

$$(a) \to (-1)\times(-1)N\delta^{ef}\int_0^1 dx \int \frac{d^{2\omega}l_E}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(l_E^2+\Delta)^2}(-l_E^\rho l_E^\sigma + x(1-x)p^\rho p^\sigma) \tag{76}$$

あとは、この積分を実行するにあたり以下の公式を用いる。

$$\int \frac{d^{2\omega}l_E}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{l^\rho l^\sigma}{(l_E^2+\Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^\omega}\frac{\delta^{\rho\sigma}}{2}\Gamma(1-\omega)(\frac{1}{\Delta})^{1-\omega} \tag{77}$$

$$\int \frac{d^{2\omega}l_E}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{1}{(l_E^2+\Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^\omega}\frac{\Gamma(2-\omega)}{\Gamma(2)}(\frac{1}{\Delta})^{2-\omega} \tag{78}$$

そうすれば、式 (76) は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}(a) &= -\delta^{ef}N\int_0^1 dx\frac{1}{(4\pi)^\omega}\frac{\delta^{\rho\sigma}}{2}\Gamma(2-\omega)\frac{1}{1-\omega}(-x(1-x))^{\omega-1}\frac{1}{(p^2)^{1-\omega}} \\ &+ N\delta^{ef}\int_0^1 dx\frac{1}{(4\pi)^\omega}p^\rho p^\sigma\Gamma(2-\omega)(-x(1-x))^{\omega-2}\frac{1}{(p^2)^{2-\omega}}x(1-x) \\ &= N\delta^{ef}\frac{1}{(4\pi)^\omega}\frac{1}{(p^2)^{1-\omega}}\Gamma(2-\omega)\frac{(-1)^{\omega-1}}{1-\omega}(\delta^{\rho\sigma}-\frac{p^\rho p^\sigma}{p^2})(\int_0^1 dx x^{\omega-1}(1-x)^{\omega-1})\end{aligned} \tag{79}$$

として得られる。最後に公式

$$\int_0^1 dx x^{\omega-1}(1-x)^{\omega-1} = \frac{(\Gamma(\omega))^2}{\Gamma(2\omega)} \tag{80}$$

を使えばよく、この公式は部分積分を繰り返すことによって容易に証明ができる。最終結果は $10-2\omega$ 個の scalar 場をすべて足し合わせて次式で得られる。

$$(a) = -\delta^{ef}N\frac{\Gamma(2-\omega)\Gamma(\omega)\Gamma(\omega-1)}{(4\pi)^\omega\Gamma(2\omega)}(10-2\omega)\frac{\delta^{\rho\sigma}-\frac{p^\rho p^\sigma}{p^2}}{(p^2)^{1-\omega}} \tag{81}$$

さて、one-loop 補正の入った propagator を記述するためには、(tree level の vector 場 propagator)×(one-loop 補正)×(tree level の vector 場 propagator) を考えなければいけないことに気付く。そうすれば、最終的に次式で得られることが分かる。

$$\frac{g^2\delta_{\mu\rho}\delta^{ae}}{p^2}(a)^{ef}_{\rho\sigma}\frac{g^2\delta_{\nu\sigma}\delta^{fb}}{p^2} = -\delta^{ab}g^4N\frac{\Gamma(2-\omega)\Gamma(\omega)\Gamma(\omega-1)}{(4\pi)^\omega\Gamma(2\omega)}(10-2\omega)\frac{\delta^{\mu\nu}-\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}}{(p^2)^{3-\omega}} \tag{82}$$

そのほかの diagram の計算はあらわには書かないが、結果のみ書けば、下記の表のようになる。

diagram	計算結果
(a)	$-\delta^{ab}g^4N\frac{\Gamma(2-\omega)\Gamma(\omega)\Gamma(\omega-1)}{(4\pi)^\omega\Gamma(2\omega)}(10-2\omega)\frac{\delta^{\mu\nu}-\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}}{(p^2)^{3-\omega}}$
(b)	$\delta^{ab}g^4N\frac{\Gamma(2-\omega)\Gamma(\omega)\Gamma(\omega-1)}{(4\pi)^\omega\Gamma(2\omega)}(6\omega-2)\frac{\delta^{\mu\nu}-\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}}{(p^2)^{3-\omega}}$
(c)	$-\delta^{ab}g^4N\frac{\Gamma(2-\omega)\Gamma(\omega)\Gamma(\omega-1)}{(4\pi)^\omega\Gamma(2\omega)}(16\omega-16)\frac{\delta^{\mu\nu}-\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}}{(p^2)^{3-\omega}}$
(d)	$\delta^{ab}g^4N\frac{\Gamma(2-\omega)\Gamma(\omega)\Gamma(\omega-1)}{(4\pi)^\omega\Gamma(2\omega)}(8\omega-4)\frac{\delta_{ij}}{(p^2)^{3-\omega}}$
(e)	$\delta^{ab}g^4N\frac{\Gamma(2-\omega)\Gamma(\omega)\Gamma(\omega-1)}{(4\pi)^\omega\Gamma(2\omega)}(-16\omega+8)\frac{\delta_{ij}}{(p^2)^{3-\omega}}$

表 3: one loop 補正の計算結果

以上の計算より、vector 場と scalar 場の one-loop 補正 (それぞれ Δ^{ab}_{ij}、D^{ab}_{ij}) は次のようになり、両者ともにほぼ同様の式の形をすることが分かる。

$$\Delta^{ab}_{\mu\nu} = g^2\delta^{ab}\frac{\delta_{\mu\nu}}{p^2} - \delta^{ab}g^4N\frac{\Gamma(2-\omega)\Gamma(\omega)\Gamma(\omega-1)}{(4\pi)^\omega\Gamma(2\omega)}(8\omega-4)\frac{\delta^{\mu\nu}-\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}}{(p^2)^{3-\omega}} \tag{83}$$

$$D^{ab}_{ij} = g^2\delta^{ab}\frac{\delta_{ij}}{p^2} - g^4N\frac{\Gamma(2-\omega)\Gamma(\omega)\Gamma(\omega-1)}{(4\pi)^\omega\Gamma(2\omega)}(8\omega-4)\frac{\delta^{ij}\delta^{ab}}{(p^2)^{3-\omega}} \tag{84}$$

ここまで $\mathcal{N}=4$ SYM における propagator の 1-loop 補正を計算した。次にこれが Wilson loop の最低次の order にたいしてどのように効いてくるかを検証する。運動量空間における propagator の補正はまさに式 (84) で見た通りであり、

$$-g^4N\frac{\Gamma(2-\omega)\Gamma(\omega)\Gamma(\omega-1)}{(4\pi)^\omega\Gamma(2\omega)}(8\omega-4)\frac{\delta^{ij}\delta^{ab}}{(p^2)^{3-\omega}} \tag{85}$$

である。これを公式 (51) を用いて位置空間変数に変換すれば、

$$-\delta^{ab}g^4N\frac{\Gamma^2(\omega-1)}{32\pi^{2\omega}(2-\omega)(2\omega-3)}\frac{1}{(x^2)^{2\omega-3}} \tag{86}$$

を得ることができる。

さて同様のことを vector field の one loop 補正に関して考えればいいのであるが、表式はほぼ scalar 場に関する場合とほぼ同様である。Fourier 変換の公式 (51) を用いれば、one-loop 補正を受けた vector field の Fourier 変換は次のようにえることができる。

$$\frac{g^2\Gamma(\omega-1)}{4\pi^\omega(x^2)^{\omega-1}}(1-g^2N\frac{\Gamma(\omega-1)}{8\pi^\omega(2-\omega)(2\omega-3)(x^2)^{\omega-2}} \tag{87}$$

を得ることができる。Wilson loop に対する one-loop 補正は、上記の結果との比からその係数を求めることが可能である。係数を $\mathcal{Z}$ とすれば、式 (56) によって、

$$1:-g^2N\frac{\Gamma(\omega-1)}{8\pi^\omega(2-\omega)(2\omega-3)(x^2)^{\omega-2}}=\frac{g^2N\Gamma(\omega-1)}{16\pi^2}:\mathcal{Z} \tag{88}$$

であると考えられる。これを用いれば

$$\mathcal{Z}=-\frac{g^4N^2\Gamma^2(\omega-1)}{128\pi^{2\omega}(2-\omega)(2\omega-3)} \tag{89}$$

を得ることができる。したがって、ladder 近似に基づく g^4N^2 の order の項は、次式で得ることができる。

$$\Sigma_2=-g^4N^2\frac{\Gamma^2(\omega-1)}{128\pi^{2\omega}(2-\omega)(2\omega-3)}\oint d\tau_1d\tau_2\frac{|\dot{x}(\tau_1)||\dot{x}(\tau_2)|-\dot{x}(\tau_1)\cdot\dot{x}(\tau_2)}{[(x(\tau_1)-x(\tau_2))^2]^{2\omega-3}} \tag{90}$$

4.2 internal vertex operator を持った diagram Σ_3 の計算

さて、ladder 近似を行ったときに排除されなければいけない diagram の形がもう一つ存在する。これは 3 点関数であって vertex を内部に持つようなものである。g^4N^2 の order では次の 2 通りの場合のみを考察すれば十分である。このとき、図中の (a)(b) の配置にたいする Wilson loop の寄与を考える。このときは指数関数の taylor 展開の 3 次の項のみを考えればいい。

まずは (a) の配置について詳しく考察することにする。internal vertex の寄与について、これは gauge 場の作用の field strength に関する項に起因するものである。もとの $\mathcal{N}=4$SYM における式の $\frac{1}{4g^2}(F^a_{MN})^2$ を考えよう。field strength のうち実際に効くもののみをあげれば、より具体的には次のようになる。

$$F^a_{MN}=\begin{cases}\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+f^{abc}A^b_\mu A^c_\nu & (M,N)=(\mu,\nu)\\ \partial_\mu\phi^a_i+f^{abc}A^b_\mu\phi^c_i & (M,N)=(i,\mu)\end{cases} \tag{91}$$

したがって、(a) の場合の vertex は式 (91) で $F^a_{MN}F^{aMN}$ で $(M,N)=(\mu,\nu)$ の場合から抽出されたものと理解できる。さてここで以下の要因から 4 倍の factor が出ることが理解できる。

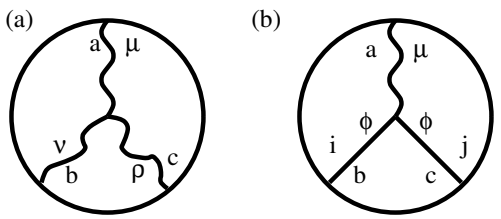


図 7: N^3 のときの Σ_3 に寄与する 3 次の order の項

- まず式 (91) の上の場合で、$\partial_\mu A^a_\nu$ と $-\partial_\nu A^a_\mu$ のいずれをとるかで 2 通りがある。いずれを選ぼうとも、第二項目の A^b_μ と A^c_ν は交換は対称であるものの、f^{abc} の足の交換については反対称であるから、結局はマイナスの符号は打ち消して、同じことである。

- また、$\partial_\mu A^a_\nu$ を $F^a_{\mu\nu}$、$F^{a\,\mu\nu}$ のいずれから抽出するかで 2 通り存在する。

したがって、$\frac{1}{4g^2}\times 4=\frac{1}{g^2}$ として効いてくることを理解することができる。したがって、次の式を考えればいいことがわかる。

$$\frac{i^3}{3!g^2N}\oint d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\langle Tr\mathcal{P}[A^a_\mu(x^{(1)})\dot{x}^{(1)\mu}T^aA^b_\nu(x^{(2)})\dot{x}^{(2)\nu}T^bA^c_\rho(x^{(3)})\dot{x}^{(3)\rho}T^c](-\int d^4y f^{abc}\partial_\mu A^a_\nu(y)A^b_\mu(y)A^c_\nu(y))\rangle \quad (92)$$

ここで略表記として $x^{(i)}=x(\tau_i)$ の意味で用いている。これを計算するために、以下の事柄に注意しながら計算をしていけばいい。

- まずは trace の計算について考える。ここでの trace は gauge 群の generator についてとればいい。N が有限の場合は trace に対する cycric rule が存在しているので、$Tr(T^aT^bT^c)=\frac{1}{2}Tr(T^a[T^b,T^c])$ が成立する。これに対して $[T^a,T^b]=f^{abc}T^c$ の公式を適用すればいい。そうすれば、

$$Tr(T^aT^bT^c)=\frac{1}{2}Tr(f^{bcd}T^aT^d)=\frac{1}{2}f^{bcd}Tr(\frac{1}{2}\delta^{ad}\mathbf{1}_N) \quad (93)$$

  が成立する。そこで、d^4y 積分中にあった f^{abc} をかけて次のように計算できる。

$$f^{abc}Tr(T^aT^bT^c)=\frac{1}{4}f^{abc}f^{bcd}\delta^{ad}Tr(\mathbf{1}_N)=\frac{1}{4}NTr(\mathbf{1}_N)=\frac{N^2}{4} \quad (94)$$

  という結論に行き着くことができる。

- 次に gauge 場同士の Wick contraction を考える。位置空間においては用いる公式は

$$\langle A_\mu(x(\tau_1))A_\nu(x(\tau_2))\rangle=\frac{g^2N\delta_{\mu\nu}}{8\pi^2x^2}\mathbf{1}_N \quad (95)$$

  である。Wick contraction は $A_*(x(\tau_i))$ と $A_\sharp(y)$ の間でのみとることにする。また、$\partial_\mu A^a_\nu(y)$ と contract する gauge 場の選び方が 3 通り存在する。微分演算子が作用するのは代表して $x^{(1)}$ であるとしても一般性を失わない。そして残りの contract のし方が 2 通り、計 $3\times 2=6$ 通り存在している。ここで

$$\Delta(x^i-y)=\frac{\Gamma(\omega-1)}{4\pi^\omega}\frac{1}{((x^i-y)^2)^{\omega-1}} \quad (96)$$

  なる量を定義する。そうすれば、

$$\langle A^a_\mu(x(\tau_1))A^b_\nu(x(\tau_2))\rangle=g^2\delta^{ab}\delta_{\mu\nu}\Delta(x^i-y)\mathbf{1}_N \quad (97)$$

がいえる。そして、3 つの Wick contraction の積なので都合

$$6g^6\mathbf{1}_N\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\int d^{2\omega}w\Delta(x^{(1)}-w)\Delta(x^{(2)}-w)\Delta(x^3-w) \tag{98}$$

という項を得られる。

(a) について詳しく考察したが、(b) についても全く同様に考えることができ、

$$\frac{i}{2!1!g^2N}\oint d\tau_1d\tau_2d\tau_3\langle Tr\mathcal{P}[\phi_i^a(x^{(1)})|\dot{x}^{(1)i}|T^aA_\nu^b(x^{(2)})\dot{x}^{(2)\nu}T^b\phi_j^c(x^{(3)})|\dot{x}^{(3)j}|T^c](-\int d^4yf^{abc}\partial_\mu\phi_i^a(y)A_\mu^b(y)\phi_j^c(y))\rangle \tag{99}$$

の Wick contraction を計算していけばいい。

(a) と (b) の計算結果を合わせれば、Σ_3 は次で得ることができる。

$$\Sigma_3=-\frac{g^4N}{4}\oint d\tau_1d\tau_2d\tau_3\epsilon(\tau_1\tau_2\tau_3)(|\dot{x}^{(1)}||\dot{x}^{(3)}|-\dot{x}^{(1)}\cdot\dot{x}^{(3)})\dot{x}^{(2)}\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\int d^{2\omega}w\prod_{l=1}^{3}\Delta(x^{(l)}-w) \tag{100}$$

あとは分母を Feynman parameter の公式

$$\frac{1}{ABC}=2\int_0^1dx\int_0^1dy\int_0^1dz\frac{\delta(1-x-y-z)}{(xA+yB+zC)^3} \tag{101}$$

を用いて表せばよく、最終結果を次式で得る。

$$\begin{aligned}\Sigma_3 &= g^4N^2\frac{\Gamma(2\omega-2)}{128\pi^{2\omega}}\int_0^1d\alpha d\beta d\gamma(\alpha\beta\gamma)^{\omega-2}\delta(1-\alpha-\beta-\gamma)\oint d\tau_1d\tau_2d\tau_3\epsilon(\tau_1\tau_2\tau_3)\\ &\times \frac{(|\dot{x}^{(1)}||\dot{x}^{(3)}|-\dot{x}^{(1)}\cdot\dot{x}^{(3)})[\alpha(1-\alpha)\dot{x}^{(2)}\cdot x^{(1)}-\alpha\gamma\dot{x}^{(2)}\cdot x^{(3)}-\alpha\beta\dot{x}^{(2)}\cdot x^{(2)}]}{[\alpha\beta|x^{(1)}-x^{(2)}|^2+\alpha\gamma|x^{(1)}-x^{(3)}|^2+\beta\gamma|x^{(3)}-x^{(2)}|^2]^{2\omega-2}}\end{aligned} \tag{102}$$

4.3 紫外発散のキャンセルについて

まず、ladder 近似で考えた項 Σ_1 は有限な量であった。一方 ladder 近似において排除した項 Σ_2 および Σ_3 はいずれもそれぞれは発散を持つ量であるしかしながらこの発散は Σ_2 と Σ_3 にたいして、一般の Wilson loop の形状にたいして打ち消しあい、したがって $\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3$ は有限な寄与を与えることを以下で理解する。

まずは Σ_3 の発散から考える。ここで

$$G(\tau_i)=\int d^4w\Delta(w-x^{(1)})\Delta(w-x^{(2)})\Delta(w-x^{(3)}) \tag{103}$$

なる積分を定義する。ここで $\Delta(y-x^i)=\frac{\Gamma(\omega-1)}{4\pi^\omega}\frac{1}{(y-x^i)^{2(\omega-1)}}$ の意味で定義をしている。この積分は $x^{(2)}\to x^{(1)}$ の時に発散をする。そこで、発散は積分の中でも $w\sim x^{(1)}\ \ or\ \ x^{(2)}$ であるときに存在する。積分が支配的なのはいうまでもなくこの近傍においてである。したがって $|w-x^{(3)}|\sim|x^{(1)}-x^{(3)}|$ であるとして近似をおいてもよい。したがって、δ を infrared cutoff であるとすれば、支配的な部分のみを抜き出して次のように書くことができる。

$$G(\tau_i)=\Delta(x^{(1)}-x^{(3)})\int^\delta d^4w\Delta(w-x^{(1)})\Delta(w-x^{(2)}) \tag{104}$$

また、次元解析によりこの積分の δ 依存性は、$\frac{x^{(1)}-x^{(2)}}{\delta}$ の形を通してのみ存在することが理解できる。そこで、積分は

$$G(\tau_i)=\frac{1}{64\pi^6}\frac{1}{|x^{(1)}-x^{(3)}|^2}\int_{|x^{(1)}-x^{(2)}|}^\delta\frac{d^4w}{w^4} \tag{105}$$

の形で得られることが分かる。ここで $\int_{|x^{(1)}-x^{(2)}}^{\delta} \frac{d^4w}{w^4}$ の積分について、球面積分の公式

$$\int d\Omega_p = \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2})} \tag{106}$$

を用いれば計算でき、したがって

$$G(\tau_i) = \frac{2\pi^2}{64\pi^6}\frac{1}{|x^{(1)}-x^{(3)}|^2}\int_{|x^{(1)}-x^{(2)}}^{\delta}\frac{dw}{w} = \frac{-1}{32\pi^4|x^{(1)}-x^{(3)}|^2}\log(\frac{x^{(1)}-x^{(2)}}{\delta}) \tag{107}$$

であるとして理解できる。つまり $G(\tau_i)$ は高々log 発散しか生じないことが分かる。あとはこれを式 (100) に代入すれば、次の式を得ることができる。

$$\Sigma_3 = \frac{g^4N^2}{128\pi^4}\oint \tau_1\tau_2\tau_3\epsilon(\tau_1\tau_2\tau_3)(|\dot{x}^{(1)}||\dot{x}^{(3)}| - \dot{x}^{(1)}\cdot\dot{x}^{(3)})\dot{x}^2\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}(\frac{\log(\frac{|x^{(1)}-x^{(2)}|}{\delta})}{|x^{(1)}-x^{(3)}|^2}) \tag{108}$$

を得る。そこで、計算を簡単にするために Taylor 展開を行って $x^{(1)}-x^{(2)} = \dot{x}^{(2)}\tau$ とする。ここで、$\tau = \tau_1 - \tau_2$ の意味である。これを用いて単純に微分を行うことで、次式で書ける。またここで $|x^{(1)}-x^{(3)}|^2 \sim |x^{(2)}-x^{(3)}|^2$ としている。

$$\Sigma_3 = -\frac{g^4N^2}{128\pi^4}\oint \tau_2\tau_3\frac{|\dot{x}^{(2)}||\dot{x}^{(3)}| - \dot{x}^{(2)}\dot{x}^{(3)}}{|x^{(2)}-x^{(3)}|^2}\int d\tau sgn\tau\frac{\dot{x}^2\cdot(x^{(1)}-x^{(2)})}{|x^{(1)}-x^{(2)}|^2} \tag{109}$$

最後に τ の積分の上限を ϵ とすることで

$$\Sigma_3 = -\frac{g^4N^2}{64\pi^4}\oint d\tau_2 d\tau_3\frac{|\dot{x}^{(2)}||\dot{x}^{(3)}| - \dot{x}^{(2)}\cdot\dot{x}^{(3)}}{|x^{(2)}-x^{(3)}|^2}\log\epsilon \tag{110}$$

として得られる。これはまさに Σ_2 の発散とキャンセルする。何故なら式 (90) において、$\frac{1}{2-\omega}$ の pole は $-2\log\epsilon$ として得られるからである。この関係式は 1 loop 計算の発散の正則化において dimensional reduction を用いた結果と、Pauli Villars 正則化の方法を比較することによって理解することができる。

5 円状の Wilson loop について

これまでいろいろと準備を行ってきたが、ようやく具体的な Wilson loop について解析を行う準備が整った。まずは円状の Wilson loop についての考察を行うことにする。円状の Wilson loop は、$\mathcal{N}=4$SYM のもとでは、ladder 近似を正しいものと信じる限り、なんとすべての結合定数の領域にたいして、しかも比較的容易に値を評価することが可能なのである。

また、ここでは半径が 1 の Wilson loop についてしか考察しないが、Wilson loop の期待値を計算する分には半径に依存しない量であるからそれで十分である。理由として、定性的な議論と、定量的な議論の 2 つの側面から説明することができる。

- 定性的には半径に依存しないことは、$\mathcal{N}=4$SYM が conformal field theory であったことから、起こるべくして起こったことであると自明に理解できる。
- 定量的な説明のよすがとなる事柄は、すでに具体的な期待値の計算で、もう済んでいる。いうまでもないが、半径に依存しないことは 4 次元の $\mathcal{N}=4$SYM、つまり $\omega = 2$ の場合についてのみ当てはまることである。低次の order では、式 (56)(58)(90) (102) より自明に理解できる。円状なのでパラ

メーターは動径方向には影響をなんらおよぼさないので、τ 微分を行っても半径の order は同じことである。これらの表式を具体的に見れば、$\omega = 2$ である限り、分母と分子の x(または $\dot{x}$) の次数は同じであるから、Wilson loop の期待値は半径に依存しない。より一般には Wilson loop の式 (47) の具体的な形、そして gauge 場の propagator の位置空間の値、つまり式 (52) によって自明である。

そこで、半径が 1 であるとすれば、具体的には次のようにパラメーターをおくことができる。

$$x(\tau) = (\cos\tau, \sin\tau, 0, 0) \tag{111}$$

そうすれば、Wilson loop の計算は簡単に評価を行うことが可能となるのである。Wilson loop の計算に必要な物理量を列挙すれば下記の通りとなる。

- まず、$|x^{(i)}| = \sqrt{\cos^2\tau_i + \sin^2\tau_i} = 1$ である。
- $|x^{(i)} - x^{(j)}|^2 = |(\cos\tau_i - \cos\tau_j, \sin\tau_i - \sin\tau_j, 0, 0)|^2 = 2(1 - \cos\tau_{ij})$。ここで $\tau_{ij} = \tau_i - \tau_j$ である。
- $x^{(i)} \cdot \dot{x}^{(j)} = (\cos\tau_i, \sin\tau_i, 0, 0) \cdot (-\sin\tau_j, \cos\tau_j, 0, 0) = \sin\tau_{ij}$
- $\dot{x}^{(i)} \cdot \dot{x}^{(j)} = (-\sin\tau_i, \cos\tau_i, 0, 0) \cdot (-\sin\tau_j, \cos\tau_j, 0, 0) = \cos\tau_{ij}$

5.1 ladder 近似の定量的評価

まずは、この論文が提唱するところの ladder 近似の結果を具体的に評価する。当然、問題は t'Hooft limit で考察する。ladder diagram ということは、円状で graph を書いたときに vector 場の propagator が交わることがなく、内部に頂点を持つことを loop 補正を持つことも禁止している。そこで、外場は偶数個の点より発していると考えればいい。そこで、式 (47) の exponential の $2n$ 次の展開を考えればよいことが分かる。これは次式で表せられる。

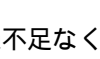
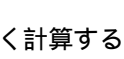
$$\langle W\rangle_n = \frac{1}{N}\int_0^{2\pi} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_0^{\tau_{2n-1}} d\tau_{2n} Tr(\langle \prod_{k=1}^{2n} (iA(\tau_k) + \phi(\tau_k))\rangle) \tag{112}$$

本来は指数関数の $2n$ 次の展開では $\frac{1}{2n!}$ の項が出てくるべきなのだが、積分を $\prod_{k=1}^{2n}\int_o^{2\pi} d\tau_k$ の代わりに式 (112) のものを使うことでこの order を cancel できる。あとは、ladder diagram の条件に合うような contraction を求めれば良い。$2n$ 次の時の ladder diagram の個数を N_n とする (この個数勘定はあとで議論する)。一つ一つの contraction は、上記に列挙した値より自明に、

$$\langle (iA^a(\tau_i) + \phi^a(\tau_i))((iA^b(\tau_j) + \phi^b(\tau_j))\rangle = \mathbf{1}_N \frac{g^2 N\delta^{ab}}{8\pi^2} \frac{|\dot{x}^{(1)}||\dot{x}^{(2)}| - x^{(1)}\cdot x^{(2)}}{|x^{(1)} - x^{(2)}|^2} = \frac{g^2 N\delta^{ab}}{16\pi^2}\mathbf{1}_N \tag{113}$$

となる。ここで colour factor は $T^aT^b = C(r)\delta^{ab}\mathbf{1} = \frac{N}{2}\delta^{ab}\mathbf{1}$ であることを用いた。円状の Wilson loop であったことから、なんとそれぞれの位相角パラメーターにすら依存しない結果が出てきたのである。このことは以下の解析を極めて容易にするものである。contraction をとる回数は当然 n 回であるから、式 (112) は次のように表せられる。

$$\langle W\rangle_n = (\frac{1}{N}Tr(\mathbf{1}))(\frac{g^2}{8\pi^2}\frac{N}{2})^n \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}N_n = (\frac{g^2 N}{4})^n \frac{N_n}{(2n)!} \tag{114}$$

次に、具体的に $2n$ 点の ladder diagram の個数勘定に入る。前に 4 点の場合で、Wick contraction の取り方として過不足なく計算するために  、  、の 2 通りが存在することを述べた。これと全く同じことを $2n$ 点になったときにも考える。この場合の数はカタラン数と呼ばれているものと同じであり、次の 3 通りの方法によって証明することができる。

- 生成母関数を用いる方法
- 直接数え上げる方法。ここで述べるのがカタラン数のおおもとの定義であり、これが ladder 近似で許される diagram の数え方と等価であることはここで説明する。
- 0 次元の場の理論に結び付けて考える方法

3 通りの方法のいずれを用いても、カタラン数が $N_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ であることが分かる。それぞれの証明の方法に関しては appendix を参照されたい。後は式 (114) の結果たしあげればよい。これは数学公式集で調べれば分かることであり、次式の結果を得る。

$$\langle \mathsf{W} \rangle_{\mathsf{ladders}} = \sum_{\mathsf{k}=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{g}^2\mathsf{N}/4)^{\mathsf{n}}}{(\mathsf{n}+1)!\mathsf{n}!} = \frac{2}{\sqrt{\mathsf{g}^2\mathsf{N}}} \mathsf{I}_1(\sqrt{\mathsf{g}^2\mathsf{N}}) \tag{115}$$

であるとして求められる (ここで I_1 は変形 Bessel 関数である)！この結果の強結合の極限を考えてみよう。そうすれば

$$\langle W \rangle_{ladders} \to \frac{\exp(\sqrt{g^2N})}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}(g^2N)^{\frac{3}{4}}} \tag{116}$$

が $g^2N \to \infty$ の時の漸近形としてえることができる。この結果は前に求めた強結合の AdS_5 空間の古典 SUGRA で計算したときの解である式 (63) の結果と良く一致している。このように両者がうまく一致したということは、この論文で考える ladder 近似の正当性を示唆するものといえる。この論文では $\Sigma_2 + \Sigma_3 = 0$ であることを低次の order でのみ示すものであるが、それ以上の order については次の 2 通りの解釈が考えられる。

- 高次の order についてであっても、$\Sigma_2 + \Sigma_3 = 0$ であることは厳密に成立するのではないかという予測。もしこれが言えたとすれば、ladder 近似は t'Hooft limit に関する限りでは厳密な結果を与えるものとして解釈できるであろう。
- 上記よりも弱い推測、即ち、$\Sigma_2 + \Sigma_3$ は必ずしも消えるとは限らないが、その指数関数の order に対する寄与は ladder 近似の項に比べて遥かにゆっくりであるという推測ができる。

5.2 $\Sigma_2 + \Sigma_3$ のキャンセル

次に円状の Wilson loop について ladder 近似から排除したものが、キャンセルしてくれることを g^4N^2 の order で証明する。半径 1 の Wilson loop に対しては、式 (102) は次のように表せられる。

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &= g^4N^2 \frac{\Gamma(2\omega-2)}{2^{5+2\omega}\pi^{2\omega}} \int_0^1 d\alpha d\beta d\gamma (\alpha\beta\gamma)^{\omega-2} \delta(1-\alpha-\beta-\gamma) \oint d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \epsilon(\tau_1\tau_2\tau_3) \\ &\times \frac{1}{\Delta^{2\omega-2}} (1-\cos\tau_{13})[\alpha(1-\alpha)\sin\tau_{12} + \alpha\gamma\sin\tau_{23}] \end{aligned} \tag{117}$$

この節では、$\Delta = \alpha\beta(1-\cos\tau_{12}) + \beta\gamma(1-\cos\tau_{23}) + \alpha\gamma(1-\cos\tau_{13})$ であるとして定義をする。さて、以下の議論で必要になる等式についてまとめておこう。

$$\frac{\partial}{\partial\tau_1}\epsilon(\tau_1\tau_2\tau_3) = 2\delta(\tau_{12}) - 2\delta(\tau_{13}) \tag{118}$$

[式 **(118)** の証明] この公式を示すにあたっては Heaviside 関数の微分が Dirac のδ 関数になることを用いる。即ち、$\frac{\partial H(\tau_1-\tau_0)}{\partial\tau_1} = \delta(\tau_1-\tau_0)$ であることを用いる。反対称関数 $\epsilon(\tau_1\tau_2\tau_3)$ を Heaviside 関数を用いて表せば、

$$\epsilon(\tau_1\tau_2\tau_3) = -1 + 2(H(\tau_{12}) - H(\tau_{13}) + H(\tau_{23}))$$

にて表すことができる。従ってこれを τ_1 について微分をすることで、$\frac{\partial}{\partial\tau_1}\epsilon(\tau_1\tau_2\tau_3)=2\delta(\tau_{12})-2\delta(\tau_{13})$ であることが分かる。[証明終]

$$\oint d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \epsilon(\tau_1\tau_2\tau_3)[\frac{-\sin\tau_{13}}{\Delta^{2\omega-2}}(\alpha\beta(1-\cos\tau_{12})+\alpha\gamma(1-\cos\tau_{23})+\beta\gamma(1-\cos\tau_{13}))$$
$$+\frac{2\omega-3}{\Delta^{2\omega-2}}(1-\cos\tau_{13})(\alpha\beta\sin\tau_{12}+\gamma\alpha\sin\tau_{13})]=2\oint d\tau_1 d\tau_2\frac{1}{(\gamma(1-\gamma))^{2\omega-3}}\frac{1}{(1-\cos\tau_{12})^{2\omega-4}} \quad (119)$$

[式 **(119)** の証明] この公式を証明するには、次の関係式に気付けばいい。

$$\frac{\partial}{\partial\tau_1}\{\frac{1-\cos\tau_{13}}{\Delta^{2\omega-3}}\}=\frac{\sin\tau_{13}}{\Delta^{2\omega-3}}-(2\omega-3)\frac{1-\cos\tau_{13}}{\Delta^{2\omega-2}}(\alpha\beta\sin\tau_{12}+\gamma\alpha\sin\tau_{13})$$

従って、この方程式は次のようにして変形できる。

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \oint d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\epsilon(\tau_1\tau_2\tau_3)(-\frac{\partial}{\partial\tau_1}\frac{1-\cos\tau_{13}}{\Delta^{2\omega-3}})\\ &= \oint d\tau_2 d\tau_3\{[(-1+\cos\tau_{13})\frac{1}{\Delta^{2\omega-3}}]_0^{2\pi}+\int d\tau_1\frac{1-\cos\tau_{13}}{\Delta^{2\omega-3}}(2\delta(\tau_{12})-2\delta(\tau_{13}))\}\\ &= 2\oint d\tau_1 d\tau_2\frac{1}{\{\gamma(1-\gamma)\}^{2\omega-3}}\frac{1}{(1-\cos\tau_{12})^{2\omega-4}}\end{aligned}$$

ここで 1 行目から 2 行目の等式に移るにあたり公式 (118) を用いた [証明終]。

ここで、式 (119) の変数をうまく入れ替えて $(1-\cos\tau_{13})$ の項が出てくるようにすることで、次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned}2\oint d\tau_1 d\tau_2\frac{1}{(\gamma(1-\gamma))^{2\omega-3}}\frac{1}{(1-\cos\tau_{12})^{2\omega-4}} &= \oint d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\epsilon(\tau_1\tau_2\tau_3)\{\frac{1-\cos\tau_{13}}{\Delta^{2\omega-2}}(\alpha(1-\alpha)\sin\tau_{12}+\alpha\gamma\sin\tau_{23})\\ &+ (2\omega-4)\frac{1-\cos\tau_{13}}{\Delta^{2\omega-2}}(\alpha\beta\sin\tau_{12}+\gamma\alpha\sin\tau_{13})\} \quad (120)\end{aligned}$$

この式の 1 項目はまさしく Σ_3 の項にあらわれる部分であることが理解できる。2 項目については次のように計算することができる。

$$\begin{aligned}(\text{二項目}) &= -\frac{2\omega-4}{2\omega-3}\oint d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\epsilon(\tau_1\tau_2\tau_3)(1-\cos\tau_{13})\frac{\partial}{\partial\tau_1}\frac{1}{\Delta^{2\omega-3}}\\ &= \frac{2\omega-4}{2\omega-3}\{\oint d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\epsilon(\tau_1\tau_2\tau_3)\frac{\sin\tau_{13}}{\Delta^{2\omega-3}}+2\oint d\tau_1 d\tau_2\frac{1}{(\gamma(1-\gamma))^{2\omega-3}}\frac{1}{(1-\cos\tau_{12})^{2\omega-4}}\} \quad (121)\end{aligned}$$

このことは部分積分、及び公式 (118) によって証明できる。最終的に、Σ_3 の中にあらわれる公式として、以下の式が証明された。

$$\oint d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\epsilon(\tau_1\tau_2\tau_3)\frac{1-\cos\tau_{13}}{\Delta^{2\omega-2}}(\alpha(1-\alpha)\sin\tau_{12}+\alpha\gamma\sin\tau_{23})=$$
$$= -\frac{2\omega-4}{2\omega-3}\oint d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\epsilon(\tau_1\tau_2\tau_3)\frac{\sin\tau_{13}}{\Delta^{2\omega-3}}+\frac{2}{2\omega-3}\oint d\tau_1 d\tau_2\frac{1}{(\gamma(1-\gamma))^{2\omega-3}}\frac{1}{(1-\cos\tau_{12})^{2\omega-4}} \quad (122)$$

で得ることができる。ここで式 (122) の 2 項目は $\omega=2$ の極限において消える量である。従って、現実に Σ_3 に効いてくるのは式 (122) の 1 項目のみである。後は Feynman parameter の積分については、数学公式集を参照する他はなく、結論として次の式を得る。

$$\Sigma_3=g^4N^2\frac{\Gamma^2(\omega-1)}{2^{2\omega+4}\pi^{2\omega}(2-\omega)(2\omega-3)}\oint d\tau_1 d\tau_2\frac{1}{(1-\cos\tau_{12})^{2\omega-4}} \quad (123)$$

をえる。これはまさしく式 (90) と一致するものであり、

$$\Sigma_2=-g^4N^2\frac{\Gamma^2(\omega-1)}{2^{2\omega+4}\pi^{2\omega}(2-\omega)(2\omega-3)}\oint d\tau_1 d\tau_2\frac{1}{(1-\cos\tau_{12})^{2\omega-4}} \quad (124)$$

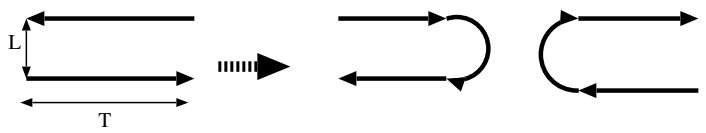
である。従って 4 次元においては確かに g^4N^2 の order では $\Sigma_2+\Sigma_3=0$ であることが立証されたのである。

6 反平行な Wilson line について

先ほど円状の Wilson line に関して、ladder 近似のもとでは $\mathcal{N}=4$CFT における強結合領域における結果と、AdS_5 空間上における古典的 SUGRA による強結合領域の解が驚くほどの一致を見せた。反平行な直線に関しては確に、解の定性的な形に関しては AdS_5 の古典的 SUGRA の計算と、$\mathcal{N}=4$SYM の計算は合致している。しかしながら、定数倍について着目してみると、後で具体的な計算で示すように、先ほどのような目覚ましい一致は見ることができない。このことは定性的に考えれば起こるべくして起こったことである。

円状の loop も反平行な loop も BPS satulated state ではない。しかし反平行な直線の方がよりいっそう **BPS state** から掛け離れているのである。BPS saturated state であるということは、エネルギーが取りうる最低値の安定な状態 (BPS bound) に存在していることを意味する。しかしながら、反平行な Wilson line の場合は二つの観点から BPS から掛け離れた存在であることが理解できる。

- 反平行な直線の Wilson line の場合はエネルギー的にもっと有利であるような配置が存在する。例えば、図のように二つに分かれてつながった方がよりエネルギー的に有利なので、反平行な Wilson line 自体は BPS state であるとは言えない。



- 具体的な potential の形からも最低エネルギーの安定した配位が存在できないことが分かる。AdS_5 上ではすでに計算した通り、potential は強結合の領域では 2 つの直線の間隔に反比例した値となる。また、$\mathcal{N}=4$CFT の側でも、後で示すとおり 2 つの直線の距離に反比例した potential を結合の強弱を問わず得ることができる。このことは 2 本の Wilson line を近づければ近づけるほどエネルギー的に安定な状態を実現できることを意味し、BPS saturated state が存在することが考えにくいことを示唆する。

また、反平行な直線の Wilson loop が BPS saturated state でないということは、AdS_5 空間の古典的 SUGRA における計算と、$\mathcal{N}=4$SYM の結果が、円状の diagram ほどには一致しないことが予測できる。この定性的な考察と併せて考えれば、先に述べたように、notation を $(2\pi)^{p-2}g_s\alpha'^{\frac{p-3}{2}}=g^2$ としてとってしまって $\frac{1}{2}$ を忘れてしまえば、物理的に倒錯した結果を見ることが理解できるであろう。これを表にしてまとめれば次のようになるのである。すなわち、この表からも自明に分かるように、もし誤って $(2\pi)^{p-2}g_s\alpha'^{\frac{p-3}{2}}=g^2$

loop の種類	ladder 近似	AdS for $(2\pi)^{p-2}g_s\alpha'^{\frac{p-3}{2}}=g^2$	$AdSfor(2\pi)^{p-2}g_s\alpha'^{\frac{p-3}{2}}=\frac{g^2}{2}$
円状	$\exp(\sqrt{g^2N})$	$\exp(\sqrt{2g^2N})$	$\exp(\sqrt{g^2N})$
反平行直線	$\exp(0.318\cdots)$	$\exp(0.323\cdots)$	$\exp(0.228\cdots)$

なる notation を採択してしまったとすれば、円よりも反平行直線の方が AdS、CFT 両計算の一致の具合いが良くなってしまい、先の定性的な考察にあからさまに背悖した結果を見るのである。

6.1 ladder 近似の定量的評価

以下の議論は [9] に基づくものである。まずは $\Gamma(S,T)$ を 2 つの反平行な直線の ladder diagram の和であるとする。ここではより一般的に 2 つの反平行な直線の長さが異なっている時でも計算することができる。ここで S,T は 2 つの Wilson line の長さをそれぞれ表し、いずれも $S,T \gg L$ を満たしているとする。そうすれば、ladder diagram の和について次の Bethe Salpeter 方程式によって積分方程式を得ることができる。

$$\Gamma(S,T) = 1 + \int_0^S ds \int_0^T dt \Gamma(s,t) \frac{g^2 N}{4\pi^2((s-t)^2+L^2)} \tag{125}$$

を満たしている。この方程式は次の diagram による表示から理解できるものである。このとき、言うまで

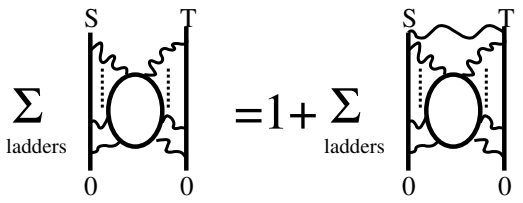


図 8: Bethe Salpeter 方程式による反平行な Wilson line の計算のし方

もなく境界条件として、$\Gamma(S,0) = \Gamma(0,T) = 1$ である。また、quark と anti-quark の間の potential は

$$V(L) = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log \Gamma(T,T) \tag{126}$$

によって計算することができる。この積分方程式の核は、式 (125) を微分することによって次の方程式に従うことがわかる。

$$\frac{\partial^2 \Gamma(S,T)}{\partial S \partial T} = \frac{g^2 N}{4\pi^2((S-T)^2+L^2)} \Gamma(S,T) \tag{127}$$

を満足する。この方程式はうまく変数変換をすれば変数分離を行うことが可能である。そうすれば式 (127) における方程式の微分演算子の部分は次で書き直すことが可能である。

$$x = \frac{S-T}{L}, y = \frac{S+T}{L} \to \frac{\partial^2}{\partial S \partial T} = \frac{1}{L^2}(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \tag{128}$$

したがって、ansatz$\Gamma(x,y) = \sum_n c_n \psi_n(x) \exp(\frac{\Omega_n y}{2})$ を仮定するとき、次の Schroedinger-like な方程式を得ることができるのである。

$$(-\frac{d^2}{dx^2} - \frac{g^2 N}{4\pi^2(x^2+1)})\psi_n(x) = -\frac{\Omega_n^2}{4}\psi_n(x) \tag{129}$$

あとは計算のテクニカルな問題であるし私自身理解できていないので、計算過程は省略するが、結論のみを述べることにする。

$$\Gamma(T,T) = \begin{cases} \exp(\frac{T}{L}(\frac{g^2N}{4\pi} - \frac{g^4N^2}{8\pi^3}\log\frac{1}{g^2N} + \cdots)) & [g^2N \ll 1] \\ \exp(\frac{T}{L}(\frac{\sqrt{g^2N}}{\pi} - 1 + \cdots)) \sim \exp(0.318\sqrt{g^2N}\frac{T}{L}) & [g^2N \gg 1] \end{cases} \tag{130}$$

このように強結合の領域では確かに AdS_5 で求めたときと同じように、quark と anti-quark の potential が距離に反比例するという振る舞いをみてとれることが分かる。しかしながら、円状の loop のように比例定数まで一致する訳ではない。その理由の考察は冒頭に述べた通りである。

6.2 $\Sigma_2 + \Sigma_3$ のキャンセル

反平行な Wilson lione に対しても、円状の Wilson loop と同様に $\Sigma_2 + \Sigma_3 = 0$ が g^4N^2 の order で成立することは、具体的な計算によって確認することができる。さて、まず式 (102) には 4 倍の factor をかける必要があるのだが、このことは次のようにして理解することができる。

- まず $|\dot{x}^{(1)}||\dot{x}^{(3)}| - \dot{x}^{(1)} \cdot \dot{x}^{(3)}$ が nonzero であるためには τ_1 と τ_3 は反対側の line に存在しなければいけない。したがって、$x^{(1)}$ と $x^{(3)}$ の配置は 2 通りに限定される。
- Feynman parameter は $1 - \alpha - \beta - \gamma = 0$ を満足しないといけなかったから、$\alpha(1-\alpha)\dot{x}^{(2)} \cdot x^{(1)} - \alpha\gamma\dot{x}^{(2)} \cdot x^{(3)} - \alpha\beta\dot{x}^{(2)} \cdot x^{(2)}$ が 0 でない寄与を持つためには $x^{(2)}$ は、$x^{(1)}$ と同じ側に存在しなければいけない。このような配置は 2 通り存在する。

したがって、各点の座標は次のように記述することが可能である。

$$x^{(1)} = (\tau_1, \frac{L}{2}, 0, 0), x^{(2)} = (\tau_2, \frac{L}{2}, 0, 0), x^{(3)} = (-\tau_3, -\frac{L}{2}, 0, 0) \tag{131}$$

このとき、次のようにして internal vertex を持った diagram を評価することができる。

$$\begin{aligned}
\Sigma_3 &= g^4N^2 \frac{\Gamma(2\omega-2)}{2^5\pi^{2\omega}} \int_0^1 d\alpha d\beta d\gamma (\alpha\beta\gamma)^{\omega-2} \delta(1-\alpha-\beta-\gamma) \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \epsilon(\tau_1\tau_2\tau_3) \\
&\times \frac{\alpha\beta(\tau_1-\tau_2) + \gamma\alpha(\tau_1+\tau_3)}{[\alpha\beta(\tau_1-\tau_2)^2 + \beta\gamma((\tau_2+\tau_3)^2+L^2) + \gamma\alpha((\tau_3+\tau_1)^2+L^2)]^{2\omega-2}} \\
&= -g^4N^2 \frac{\Gamma(2\omega-3)}{2^6\pi^{2\omega}} \int_0^1 d\alpha d\beta d\gamma (\alpha\beta\gamma)^{\omega-2} \delta(1-\alpha-\beta-\gamma) \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \epsilon(\tau_1\tau_2\tau_3) \\
&\times \frac{\partial}{\partial\tau_1} \frac{1}{[\alpha\beta(\tau_1-\tau_2)^2 + \beta\gamma((\tau_2+\tau_3)^2+L^2) + \gamma\alpha((\tau_3+\tau_1)^2+L^2)]^{2\omega-3}}
\end{aligned} \tag{132}$$

として得ることができる。そこで、公式 (118) を適用して部分積分を実行すれば、次の計算結果を得ることができる。但し Feynman parameter の積分は数学公式集を参照のこと。

$$\begin{aligned}
\Sigma_3 &= g^4N^2 \frac{2\omega-3}{2^5\pi^{2\omega}} \int_0^1 d\alpha d\beta d\gamma \frac{(\alpha\beta\gamma)^{\omega-2}\delta(1-\alpha-\beta-\gamma)}{(\gamma(1-\gamma))^{2\omega-3}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau_2 d\tau_3}{[(\tau_2+\tau_3)^2+L^2]^{2\omega-3}} \\
&= g^4N^2 \frac{\Gamma^2(\omega-1)}{32\pi^{2\omega}(2\omega-3)(2-\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau_2 d\tau_3}{[(\tau_2+\tau_3)^2+L^2]^{2\omega-3}}
\end{aligned} \tag{133}$$

これはまさに loop 補正を持った場合の計算結果をちょうど打ち消すものである。式 (90) より、

$$\Sigma_2 = -g^4N^2 \frac{\Gamma^2(\omega-1)}{32\pi^{2\omega}(2\omega-3)(2-\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau_2 d\tau_3}{[(\tau_2+\tau_3)^2+L^2]^{2\omega-3}} \tag{134}$$

したがってこれは $\Sigma_2 + \Sigma_3 = 0$ を与える。この結果はは、実は円状の Wilson loop の時よりも強いことを言っている。円状の loop の場合であれば、時空の次元が通常の 4 次元の時にたいしてのみ $\Sigma_2 + \Sigma_3 = 0$ の cancellation が起こった。しかしながら、反平行な直線に関していえば g^4N^2 の order に関していえば、4 次元時空にかぎらず、**10** 次元未満の任意の次元の時空にたいして **cancellation** が起こるということを示唆しているのである。

参考文献

[1] O.Aharony, S.S.Gusber, J.Maldacena, H.Ooguri, Y.Oz, , **hep-th/9905111**

[2] J.Maldacena ,**hep-th/9803002**

[3] S.J.Rey and J.Yee ,**hep-th/9803001**

[4] N.Drukker, D.J.Gross and H.Ooguri ,**hep-th/9904191**

[5] G.T.Horowitz and A.Strominger, *Nucl. Phys.***B360** (1991) 197

[6] J. Polchinski, 'String Theory' Cambridge University Press ,1998

[7] M.E.Peskin and D.V.Schroeder , 'An Introduction to Quantum Field Theory' Perseus Books, 1995

[8] S.Coleman, '1/N' in Aspects of Symmetry, Cambridge University Press ,1985

[9] J.K.Erickson, G.W.Semenoff and K.Zarembo , **hep-th/9911088**

[10] J.A.Harvey **hep-th/9603086**

[11] M.F.Sohnius , Phys. Rep. **128** (1985) 39

[12] 森山翔文 「 AdS/CFT 対応に対する対称性からの考察 」 修士論文 (京都大学), 1999

[13] 橋本幸士「弦の場の理論におけるディリクレ膜」修士論文 (京都大学),1997 http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/ hasimoto/papers/shuuron/shuuron.html

[14] 秋山仁・ピーター = フランクル 「 完全攻略数学オリンピック 」 日本評論社 ,1991

[15] E.Brezin, C.Itzykson, G.Parisi ands J.B.Zuber. Common. Math. Phys **59** (1978) 35

A　カタラン数について

ここでは、本文中で登場したカタラン数について 3 通りの導出のしかたを与える。

A.1　母関数を用いる方法

カタラン数を求める方法としては、次のようにして母関数を用いる方法がある。このような diagram の数え方として、円状で見れば同じ diagram であっても、例えば 4 点の場合でも分かるように $\overset{\frown}{\tau_1}\overset{\frown}{\tau_2}\overset{\frown}{\tau_3}\overset{\frown}{\tau_4}$ と $\overset{\frown\frown\frown}{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}$ は別のものとして数える必要があった。したがってこれを直線にのばして (つまり円順列と見るのではなく) 個数を数える、即ち $2n$ 点の場合の直線に伸ばした diagram の個数を N_n とするのが正しい。これを下記の図中で n を ◯ で囲んだもので表す。過不足なく数えるには、図のように足しあげるのが正しい。このとき、diagram の総数の母関数を次で定義する。

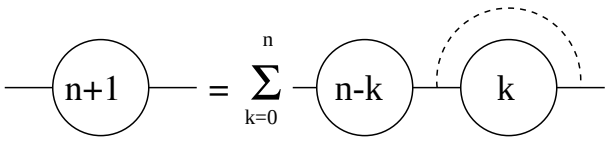


図 9: $2(n+1)$ 点の ladder diagram の個数の数え方

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k N_k \tag{135}$$

したがって各係数について $N_{l+1} = \sum_{k=0}^{l} N_k N_{l-k}$ が成立していないといけない。よって母関数は $zf(z)+1 = f(z)$ を満たさなければいけない。ここでの 1 の定数は N_0=1 であることに起因している。このような関数を求めることはただ 2 次方程式を解けばいいだけのことであり、$f(z) = \frac{1}{2z}(1 \pm \sqrt{1-4z})$ を得る。このうち母関数として意味をなすのは $\lim_{z\to 0} f(z)$ が無限大に発散しない方の回であり、そうでない方を棄却する。そうすれば、

$$f(z) = \frac{1}{2z}(1 - \sqrt{1-4z}) \tag{136}$$

を得る。これの原点の回りの Taylor 展開[11] を考える。このとき両辺に $2z$ をかけて $2zf(z) = 1-\sqrt{1-4z}$ について Leibniz rule を適用して $n+1$ 回微分する。$2zf^{(n+1)}(z) + 2_{n+1}C_1 f^{(n)}(z) = 2^{n+1}(2n-1)!!(1-4z)^{-\frac{1}{2}-n}$ に $z=0$ を代入する。そうすれば $f^{(n)}(0) = \frac{2^n(2n-1)!!}{n+1}$ を得る。したがって、原点のまわりの Taylor 展開は次式で表せられる。

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)\frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k(2k-1)!!}{k!(k+1)} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} z^k \tag{137}$$

を得ることができる。したがって、場合の数は $N_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ であることが判明する。

A.2　直接数え上げる方法

さてこの場合の数は別の方法でも示すことができる。なんと、ここで問題にしている数え上げと等価な問題が 1990 年の数学オリンピックの日本国内本選の 5 番で [14] 出題されていたのである！ここでその問題と

[11] 残念ながら私は、この関数が原点において C^∞ 級であることを理解していない。以下の議論ではこの点についての不明さはとりあえず無視させて頂く。

解答を紹介しておこう。

問題 **5:n** 人の子供と **n** 人の大人があるホテルに宿泊する。宿泊料は **5000** 円であり、子供は **5000** 円札しか持っておらず、大人は **10000** 円札しか持っていない。最初は受付は一切おつりを用意していないとして、おつりが不足することなくすべての客を捌ける並び方の数を求めなさい。ただし子供一人一人、大人一人一人は区別をしないものとする。

[解答]:このような問題では数え上げを行うのにやや工夫を要する。数え上げを簡単に行うために問題を視覚化して考えよう。題意が成立するためには受付中のいかなるときも、捌いた大人の数が、捌いた子供の数を超えてはいけない。何故ならそのときには 5000 円札が不足するからである。そこで、ある時点で捌いた子供と大人の数をそれぞれ x,y で表すとして、点 (x, y) を座標平面の上で図のごとく動かして行くことを考える (図は n=6 のときを表している) このとき、常に $x \geq y$ を満たしていないといけないことから、点

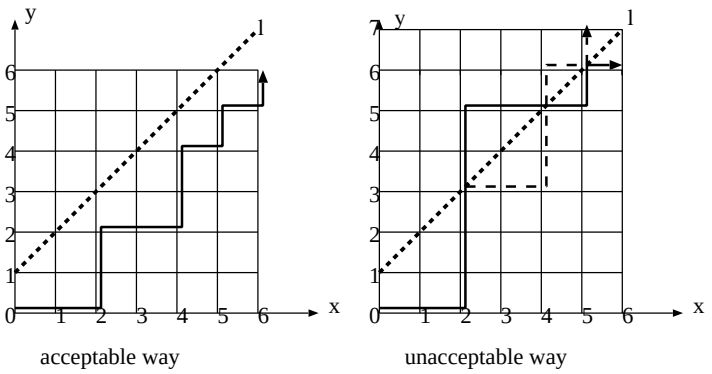


図 10: ladder diagram の個数の数え方その 2

(x, y) は図中の直線 l:$y = x + 1$ を一度たりともまたいではいけない。ここでほしい場合の数は、動点が直線 l をまたがずに原点から点 (n, n) まで升目にそって最短の経路で移動する場合の数と見做せる。

直線 l をまたいでもいい (おつりが不足してもいい) のであれば、その場合の数が ${}_{2n}C_n$ 通りであることは自明である。直線 l をまたぐ場合の数を排除したいときは、図 10 のようにして考える。はじめて直線 l と交わった点からあとの経路を、直線 l について線対称になるように折り返せば良い。そうすれば最後には必ず点 $(n-1.n+1)$ に行き着くので、その場合の数は ${}_{2n}C_{n-1}$ である。

以上によって、もとめる場合の数は ${}_{2n}C_n - {}_{2n}C_{n-1} = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ 通りであることが判明する [解答終]。

このような数え上げの場合の数が、まさにカタラン数のおおもとの定義なのである。さて、ここで数えた場合の数はちょうどここで問題にしている diagram の数え上げに対応しているのである。上の図の「可能な場合」に対応した升目の移動のしかたは、まさに下の図のような diagram に対応しているのである。つまり「子供」を vector 場の出る点、「大人」を vector の入る点と見做せば、それに対応する ladder 近似の条件を満たす diagram の書き方は一意的に決定されるのである。
ときを表している)

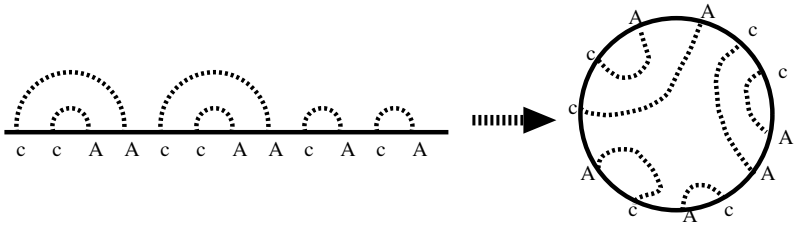


図 11: 図 10 の場合と、ladder diagram の書き方の対応

A.3 0 次元場の理論の考え方を用いる方法

最後に ladder 近似で許される diagram の数え上げの問題を、0 次元場の理論の行列模型 [12] を用いて考える方法について述べる。
この行列模型では変数は $N \times N$ 行列によって記述でき、$N \to \infty$ の極限をとって考えることにする。以下では M は $N \times N$ 行列 であり、なおかつ Hermite 行列であるものとする。そうすれば相互作用のない作用は次で記述することができる。

$$S = \frac{N}{2} TrM^2 \tag{138}$$

そうすればこの系の分配関数は次で表せられる。

$$Z = \int [dM] \exp(\frac{N}{2} TrM^2) \tag{139}$$

まずは、この系の Feynman diagram を理解することにしよう。
[Prop] $\langle M_{ij} M_{kl} \rangle = \frac{1}{N} \delta_{il} \delta_{jk}$ である。
(証明) ここで物理量の期待値とは、上記の分配関数を用いて、

$$\langle M_{ij} M_{kl} \rangle = \frac{1}{Z} \int [dM] M_{ij} M_{kl} \exp(-\frac{N}{2} TrM^2) \tag{140}$$

をさすものとする。ここで指数関数の部分を、対角成分と非対角成分に分けて考えることにする。行列の積と trace の定義によって、

$$TrM^2 = \sum_{i,j=1}^{N} M_{ij} M_{ji} = \sum_{i=1}^{N} M_{ii} + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} M_{ij} M_{ij}^{\dagger} \tag{141}$$

が成立する。ここで最後の等式において行列 M が Hermite であること、即ち $M_{ji} = M_{ij}^{\dagger}$ であることを用いた。そこで、指数部分を対角成分と非対角成分にわけて考えることにする。単なる実数の積分については次の事柄が成立するが、これと同じ考え方を行列の成分の積分についても当てはめるのである。

- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2}} dx = [x e^{-\frac{ax^2}{2}}]_{-\infty}^{\infty} + a \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{ax^2}{2}} dx = a \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{ax^2}{2}} dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} x x^{\dagger} e^{-a x x^{\dagger}} dx dx^{\dagger} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x x^{\dagger}} dx dx^{\dagger}$

さて、ここで問題にしている積分は対角成分と非対角成分に、完全に分離することができる。それぞれについて次のことが成立する。

[12] ここで言う行列模型は、最近流行している IKKT 模型や BFSS conjecture とは異なるものである。[15] で扱っているのは old matrix model であり、1990 年前後に注目された理論のことである。

- 対角成分の積分について。即ち $M_{ii}M_{ll}$ に関して、$i=l$ のもののみが生き残る。何故なら奇数次元の gaussian 積分は明らかに消える空である。
- 非対角成分について。今度は $M_{ij}M_{kl}$ のうちで生き残るのは $i=l.j=k$ のときである。ここでも奇数次元に対する場合は消えることを用いている

これを用いると、factor$\frac{1}{N}$ が出てきて、$\langle M_{ij}M_{kl}\rangle = \frac{1}{N}\delta_{il}\delta_{jk}$ となることが理解できる。(証明終)

このことは diagram を用いれば、下図のようにかくことができる。

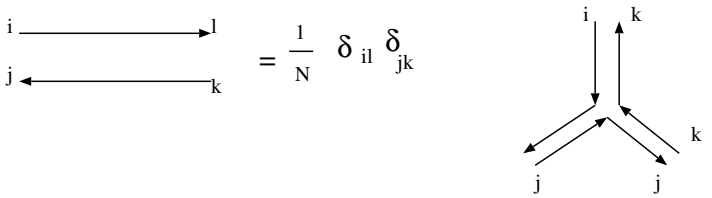


図 12: 0 次元場の理論の Feynman diagram。左は $< M_{ij}M_{kl} >$ に対する diagram、右は後述する 3 次の相互作用に対する vertex operator を表す。

次に ϕ^3 に対応する 0 次元場の理論に対する行列模型について考察することにする。このときの作用は次の形で表せられる。

$$S_{int} = N(\frac{1}{2}TrM^2 + \frac{\lambda}{3}TrM^3) \tag{142}$$

ここで、scalar 場の理論における symmetry factor が $\frac{1}{3!}$ であるのに対して、ここで $\frac{1}{3}$ になっている理由について考えることにしよう。先に求めた $\langle M_{ij}M_{kl}\rangle$ に対する Feynman diagram によって、3 点の vertex は図のようにして記述できることが分かる。つまり添字 i,j,k に対する任意性が 3!通りではなく、3 通りとなっていることに注意しよう。

さて、ここでの trace の期待値の計算においても、large N QCD で良く知られた事柄と全く同様の考え方が使えることを見ていくことにしよう。そこで N の冪の評価を次のように行うことにする。そこで、下記の図で表される場合について考えることにする。

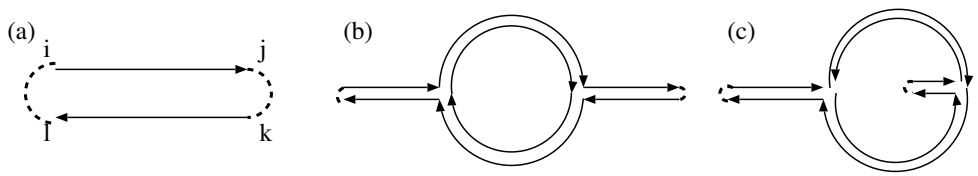


図 13: 各々の diagram に関する N の冪乗の評価。one-loop の場合について (b) は planar な配置、(c) は non-planar な配置を表す。

まずは (a) の配置から考えることにしよう。このとき、N の冪乗は次で考えることができる。

1. まずは、trace における overall factor として N^{-1} があらわれる。これについてはまだ説明していなかったが、trace を評価する上で、通常は overall に $\frac{1}{N}TrM$ の形を考える。ここで相手にする行列は $N\times N$ 行列であるので、$\frac{1}{N}Tr\mathbf{1}_N = \frac{1}{N}\times N = 1$ であるからである。

2. propagator はこの系では 1 つである。すでに求めたように propagator に関しては $\langle M_{ij}M_{kl}\rangle = \frac{1}{N}\delta_{il}\delta_{jk}$ であったから、propagator 一つ辺り $\frac{1}{N}$ の冪が生じる。
3. 最後に足のつなぎ方について。添字 i,l の繋ぎ方が N 通り、添字 j,k の繋ぎ方が N 通り、夫々独立に存在する。したがって、足の繋ぎ方より生じる場合の数は N^2 通りである。

以上によって、(a) の diagram に関しては $\frac{1}{N}\times\frac{1}{N}\times N^2 = N^0 = 1$ の order で生じることが判明するのである。

(b) 次に planar な one-loop の配置について考察を加える。このときの order 勘定は次のようになされる。

1. まずは、前述の場合と同様、overall factor として $\frac{1}{N}$ の冪の寄与を与える。
2. この系の TrM^3 の vertex の寄与に関しては、一つ辺り N の冪を与える。これは作用中に $\frac{N\lambda}{3}TrM^3$ の形で現れていることから自明である。ここでは vertex が 2 つあるので、N^2 の冪を与える。
3. 次に propagator が 4 つあるから、これも前述のケースと同様にして $\frac{1}{N^4}$ の寄与を与えることができる。
4. 足の繋ぎ方の場合の数について。前述のケースと同じく、外線についてはここでも 2 個所あるので、N^2 の寄与を与える。
5. 前述と異なるのは、今度は loop の内部の足の繋ぎ方の場合の数を数えなければいけない点にある。これについて loop 一つ辺り N の冪を与える。もちろんこれは 1-loop 系なので、N の寄与を与える。

したがって、planar な one-loop diagram に関しては、$\frac{1}{N}\times\frac{1}{N^4}\times N^2\times N^2\times N = 1$ の order の寄与を与えることが分かる。

しかしながら、non-planar な diagram の寄与に関しては、$O(1)(=O(N^0))$ よりも N の冪の寄与は低い。したがって、large N QCD で考えた場合と同様にして、non-planar な配置に関しては $N\to\infty$ の極限に関しては考えに入れなくてもよいのである。

以上のことをふまえて、カタラン数の計算に入ることにしよう。結論から言えば、カタラン数は次の式によって評価せられるのである。

$$N_n = \langle\frac{1}{N}TrM^{2n}\rangle = \frac{1}{Z}\int[dM]\frac{1}{N}TrM^{2n}\exp(-\frac{N}{2}TrM^2) \tag{143}$$

ここで Z は相互作用のない作用に関しての分配関数であって、次式で表せられる。

$$Z = \int[dM]\exp(-\frac{N}{2}TrM^2) \tag{144}$$

以下で、この式がカタラン数に一致することを論じていくことにしよう。まずは TrM^{2n} は次のようにあらわに表示することができる。

$$TrM^{2n} = M_{i_1i_2}M_{i_2i_3}M_{i_3i_4}\cdots M_{i_{2n-1}i_{2n}}M_{i_{2n}i_1} \tag{145}$$

そこでこの積分を次の diagram によって表示してみよう。このように、この状況は上記の左図のように書き表すことができる。即ち、作用の指数関数をかけたときの積分で、2 つずつ pair を組むやりかたを図示したものである。左図のままで考えても勿論いいのであるが、これを右図のように書き直した方がより見やすくなる。そして、足を繋ぐ場合の数を考えてみる。ここで左図のような planar な配置のみを許し、右図のような non-planar な配置を許さないのは、$N\to\infty$ に対して planar な配置の方が支配的であるからである。ここでは、large N QCD における Wilson loop の評価における ladder 近似で、内線の交わる場合を禁止したことと本質的に全く同じことが起こっているのである。A.2 節で見たようにカタラン数はこのよう

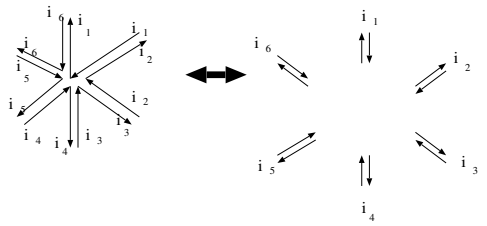


図 14: TrM^{2n} に対する積分の評価。以下、図は簡単のために $n=3$ の場合を表すとする。

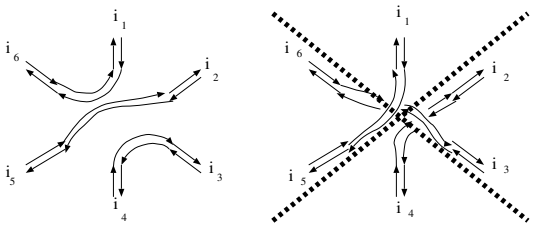


図 15: $n=3$ の場合について、左図は可能な planar な配置であり、右図は不可能な non-planar な配置である。

な diagram の個数と同じである。従って、カタラン数の数え上げの式 (143) が正当化されたことになる。

カタラン数の数え上げという点ではこれで議論は全て終わったのであるが、次にこのことを用いて円状の Wilson loop の計算を行う。円状の Wilson loop は ladder 近似下では式 (114) によって表せられるのである。そこで、同じく相互作用のない 0 次元場の理論に関しての期待値として次を考える。

$$\Omega(z) = \langle \frac{1}{N} Tr \frac{1}{1-zM} \rangle \tag{146}$$

ここでの分数は冪級数展開したものを象徴的に書いたものである。$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ は良く知られた展開式であるが、相互作用のない作用について期待値をとるときには積分する段階で奇数次の項は全て落ちてしまうのである。従って、これは次のように書き換えることができる。

$$\Omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \langle \frac{1}{N} TrM^{2n} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} N_n \tag{147}$$

であることが分かる。従って留数定理より自明に従う公式 $\oint_C \frac{dz}{2\pi i} \frac{e^z}{z^{2n+1}} = \frac{1}{(2n)!}$ を用いることによって、ladder 近似の diagram は次で表せられる。

$$\langle W \rangle_{ladder} = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} \frac{e^z}{z} \Omega(\frac{g^2 N}{4z}) \tag{148}$$

一方 $\Omega(z)$ は 0 次元の 1-loop 方程式に従い、これによって

$$\Omega(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z^2}}{2z^2} \tag{149}$$

と書くことができる。従って、ladder 近似における Wilson loop は次で計算されるのである。

$$\langle W \rangle_{ladder} = 4 \int_{-1}^{1} \frac{dx}{2\pi} \exp(\sqrt{g^2 N} x) \sqrt{1-x^2} = \frac{2}{\sqrt{g^2 N}} I_1(\sqrt{g^2 N}) \tag{150}$$