ベクトル場の回転変換性とその角運動量（スピン）

国広悌二 (2018 年 10 月改訂)

1 はじめに

電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ や磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ あるいはベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ などの 3 次元ベクトル場の空間回転に対する変換性を考察しよう。任意のベクトル場を $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ とする。$\boldsymbol{A}$ は時間にも依存していてよいが、以下での議論では時間は無関係なので時間変数は書かない。

2 ベクトル場の回転変換

$\boldsymbol{n}$ 方向の大きさ θ の能動的な座標の回転 $\boldsymbol{r}' \to \boldsymbol{r} = R(\theta; \boldsymbol{n})\boldsymbol{r}'$ を考える。微小変換では、オイラーの公式より、

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = \Delta\theta \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}'$$

よって、$\boldsymbol{r}' \simeq \boldsymbol{r} - \Delta\theta \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}$ となる。スカラーである波動関数 $\varphi(\boldsymbol{r})$ の場合の変換は、

$$\varphi(\boldsymbol{r}) \to \varphi'(\boldsymbol{r}) = \varphi(\boldsymbol{r}') = [1 - i\Delta\theta \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{n}/\hbar]\varphi(\boldsymbol{r})$$

となるのであった。これより有限回転に対しては

$$\varphi'(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{-i\theta \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{n}/\hbar}\varphi(\boldsymbol{r}).$$

この変換に対するベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の変換は $\boldsymbol{r}'$ にあるベクトル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}') = (A_x(\boldsymbol{r}'), A_y(\boldsymbol{r}'), A_z(\boldsymbol{r}'))$ をまず $\boldsymbol{n}$ 軸の周りに $\Delta\theta$ だけ回転させ、同時に座標も回転しているから、

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}') + \Delta\theta \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}'). \tag{1}$$

座標の変化は波動関数と同様にして後で処理することにする。まず、$\boldsymbol{A}$ のベクトル成分の変換を見やすい形に書き換えよう。第 2 項の i 成分は

$$\big(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')\big)_i = \epsilon_{ijk} n_j A_k(\boldsymbol{r}').$$

次のように 3×3 行列 S_j の (i,k) 成分を定義する：

$$(S_j)_{ik} = i\hbar\epsilon_{ijk}, \quad (j = x,\, y,\, z). \tag{2}$$

このとき、(1) の第 i 成分は

$$A_i(\boldsymbol{r}) = A_i(\boldsymbol{r}') \,-\, i(\Delta\theta/\hbar)\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{S})_{ik}A_k(\boldsymbol{r}') \tag{3}$$

と書ける。有限回転に対しては、ベクトル表示で

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{-i\theta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}/\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}') \tag{4}$$

となる。

さらに座標の変換を軌道角運動量を使って表現すると、ベクトル場の変換は結局、

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{-i\theta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}/\hbar}\mathrm{e}^{-\theta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{L}/\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{-i\theta\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{L})/\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{5}$$

と書ける。

3　$\boldsymbol{S}$ の性質：固有値と固有ベクトル

演算子 $\boldsymbol{S}$ の性質を調べよう。まずその行列成分は以下のように与えられる：

$$S_x = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \hbar\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

これらの交換関係は簡単な計算で以下のように角運動量の交換関係を満たすことが分かる：

$$[S_i,\, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k, \quad (i,\, j = x,\, y,\, z). \tag{7}$$

また、

$$\boldsymbol{S}^2 \;=\; S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 1(1+1)\hbar^2\mathbf{1}_3 \tag{8}$$

となる。ここに $\mathbf{1}_3$ は 3 次の単位行列である。したがって、$\boldsymbol{S}$ は大きさが 1 の角運動量演算子の表現になっていることが分かる。すなわち、ベクトル場は角運動量 1 を持っていると理解できる。

次に、S_z の固有ベクトルを求めよう。まず、S_z の固有値 λ は

$$|S_z - \lambda\mathbf{1}_3| = -\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$$

より、$\lambda = \pm 1, 0$ である。それぞれの規格化された固有ベクトルを $\boldsymbol{e}_{\pm}, \boldsymbol{e}_0$ と書くと、簡単な計算より、次のように選ぶことができる：

$$\boldsymbol{e}_{+1} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

ここで、x, y, z 方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_{x,y,z}$ を導入しよう：

$$\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

すると、S_z の固有ベクトルはそれぞれ、以下のように書ける：

$$\boldsymbol{e}_{+1} = \frac{-1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x + i\boldsymbol{e}_y), \quad \boldsymbol{e}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x - i\boldsymbol{e}_y), \quad \boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}_z. \tag{11}$$

3.1 ベクトル場の全角運動量とその固有ベクトル

ベクトル場の全角運動量として

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S} \tag{12}$$

を定義すると、ベクトル場の回転に対する変換は

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{-i\theta \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}/\hbar} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{13}$$

と表すことができる。

$\hat{\boldsymbol{J}}$ の固有値と固有ベクトルを構成しよう。これは、軌道角運動量 l とベクトル場の固有角運動量（スピンとよぶ）1 の合成の問題である。したがって、J の大きさは、$l = 0$ のとき、$J = 1$、$l \neq 0$ のとき、

$$J = l - 1, l, l + 1 \tag{14}$$

となる。

まず、$\hat{\boldsymbol{J}}$ と $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ および $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ が可換であることに注意しよう：

$$[\hat{J}_i, \hat{\boldsymbol{L}}^2] = 0, \quad [\hat{J}_i, \hat{\boldsymbol{S}}^2] = 0. \tag{15}$$

[問] これを示せ。

[略解] $[\hat{J}_i, \hat{\boldsymbol{L}}^2] = [\hat{J}_i, \hat{L}_k^2] = \hat{L}_k[\hat{J}_i, \hat{L}_k] + [\hat{J}_i, \hat{L}_k]\hat{L}_k$. ところが、

$$[\hat{J}_i, \hat{L}_k] = [\hat{L}_i + \hat{S}_i, \hat{L}_k] = [\hat{L}_i, \hat{L}_k] = i\hbar\epsilon_{ikj}\hat{L}_j.$$

よって、

$$
\begin{aligned}
[\hat{J}_i,\, \hat{\boldsymbol{L}}^2] &= i\hbar \left(\epsilon_{ikj} \hat{L}_k \hat{L}_j \,+\, \epsilon_{ikj} \hat{L}_j \hat{L}_k \right) \\
&= i\hbar \left(\epsilon_{ikj} \hat{L}_k \hat{L}_j \,+\, \epsilon_{ijk} \hat{L}_k \hat{L}_j \right) \\
&= i\hbar \epsilon_{ikj} \left(\hat{L}_k \hat{L}_j \,-\, \hat{L}_k \hat{L}_j \right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$[\hat{J}_i,\, \hat{\boldsymbol{S}}^2] = 0$ も同様にして示すことができる。

以上の可換性から、$\hat{J}^2,\, \hat{J}_z,\, \hat{\boldsymbol{L}}^2$ および $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ の同時固有状態が構成できることが分かる。実際、次のように構成できる：

$$
\boldsymbol{Y}^M_{Jl1}(\theta,\, \phi) = \sum_m (lM-m1m|JM) Y_{lM-m}(\theta, \phi) \boldsymbol{e}_m. \tag{16}
$$

このとき、

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{J}}^2 \boldsymbol{Y}^M_{Jl1}(\theta,\, \phi) &= \hbar^2 J(J+1) \boldsymbol{Y}^M_{Jl1}(\theta,\, \phi), & (17) \\
\hat{J}_z \boldsymbol{Y}^M_{Jl1}(\theta,\, \phi) &= M\hbar \boldsymbol{Y}^M_{Jl1}(\theta,\, \phi), & (18) \\
\hat{\boldsymbol{L}}^2 \boldsymbol{Y}^M_{Jl1}(\theta,\, \phi) &= \hbar^2 l(l+1) \boldsymbol{Y}^M_{Jl1}(\theta,\, \phi), & (19) \\
\hat{\boldsymbol{S}}^2 \boldsymbol{Y}^M_{Jl1}(\theta,\, \phi) &= 2\hbar^2 \boldsymbol{Y}^M_{Jl1}(\theta,\, \phi). & (20)
\end{aligned}
$$