古典電磁気学における電気および磁気双極子モーメントについて

国広悌二 (2018 年 10 月 21 日)

1 はじめに

量子力学的な角運動量と密接に結びついている磁気モーメントについてその古典論を整理しておく。名前の由来を理解するためにまず電気双極子モーメントの復習から始める。

2 電気双極子モーメント

微小距離 l だけ隔てて存在する q および $-q$ の電荷からなる系を考える。ただし、$q>0$。負の電荷から正の電荷に向かうベクトルを $\boldsymbol{l}$ とするとき、$\boldsymbol{p}\equiv q\boldsymbol{l}$ を電気双極子モーメントという。$\pm q$ の電荷の位置をそれぞれ、$\boldsymbol{x}_{\pm}=\boldsymbol{x}_p\pm\boldsymbol{l}/2$ とする。この系が位置 $\boldsymbol{x}$ に作る電位を $\phi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_p)$ と書こう。電気双極子の位置から観測点に向かうベクトルを $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_p\equiv\boldsymbol{r}$ と書く。双極子の長さに比べて観測点までの距離が十分大きいとき、すなわち、$|\boldsymbol{r}|\gg l$ のとき、$\phi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_p)$ は微分を使って

$$\phi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_p)=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\boldsymbol{p}\cdot\nabla_x\frac{1}{r} \tag{1}$$

と書ける。微分は観測点で取る。この双極子が位置 $\boldsymbol{x}$ に作る電場は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_p) &= -\boldsymbol{\nabla}_x\phi(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_p)\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(3\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{r}}{r^5}-\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right)-\frac{1}{3\epsilon_0}\boldsymbol{p}\,\delta(\boldsymbol{r}).\end{aligned} \tag{2}$$

電気双極子 $\boldsymbol{p}$ が与える電荷密度 $\rho_p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_p)$ を $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_p)=\rho_p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_p)/\epsilon_0$ により定義すると、

$$\rho_p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_p)=-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla}_x\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_p) \tag{3}$$

となる。

外電場 $\boldsymbol{E}_{外}(\boldsymbol{x})$ 中の電気双極子モーメントが持つ静電エネルギーは、$\boldsymbol{E}_{外}(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{\nabla}\,U_{外}(\boldsymbol{x})$ として、

$$V=\int d^3\boldsymbol{x}\,\rho_p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_p)U(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_{外}(\boldsymbol{x}_p) \tag{4}$$

となる。

3　定常電流の作る磁場と磁気モーメント

時間依存性が無視できるような電流がある局在した領域に存在するとしよう。局在しているので、電流は閉じて環電流になっている。その電流密度を $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ とする。電荷密度を $\rho(\boldsymbol{x})$ と書くと、電荷の保存則より、$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}$. ところが、定常であることより、

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J} = 0 \tag{5}$$

が得られる。この定常電流により、以下の表式で与えられる磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ が生じる：

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \mu_0\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}). \tag{6}$$

ただし、μ_0 は真空の透磁率である。ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ を次のように導入する：

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \tag{7}$$

クーロンゲージ $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 0$ を取ると、$\nabla^2\boldsymbol{A} = -\mu_0\boldsymbol{J}$ が得られるので、ベクトルポテンシャルは電流密度を用いて以下のように与えられる：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d\boldsymbol{x}'\,\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}. \tag{8}$$

一般の局在電流の作る磁場　(8) において、$|\boldsymbol{x}| \gg |\boldsymbol{x}'|$ として以下の（多重極）展開を行う：

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = \frac{1}{|\boldsymbol{x}'|} + \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}'|^3} + \dots$$

これを (8) に代入すると、少し計算したのち

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \simeq \frac{-\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}\times\boldsymbol{m} = \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\frac{\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{x}|} \equiv \boldsymbol{A}_M(\boldsymbol{x}) \tag{9}$$

が得られる。ただし、

$$\boldsymbol{m} \equiv \frac{1}{2}\int d\boldsymbol{x}'\,\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}') \tag{10}$$

とおいた。$\boldsymbol{m}$ は、後に分かる理由から、「磁気モーメント」と呼ばれる。この近似のもとで磁場は、

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \simeq \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}_M(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\frac{\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{x}|} \equiv \boldsymbol{B}_M(\boldsymbol{x}). \tag{11}$$

これは、磁気モーメントの作る磁場である。

(11) で与えられる $\boldsymbol{B}_M(\boldsymbol{x})$ を変形して、$\boldsymbol{m}$ が磁気モーメントと呼ばれる理由を説明しよう。(11) より、$\boldsymbol{B}_M$ の第 i 成分は

$$B_{M\,i} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\partial_i \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{x}|} - \nabla^2\frac{m_i}{|\boldsymbol{x}|}\right].$$

ここで、以下の等式に注意する：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}^2\frac{1}{|\boldsymbol{x}|} &= -4\pi\delta(\boldsymbol{x}),\\ \partial_i\partial_j\frac{1}{|\boldsymbol{x}|} &= \frac{1}{|\boldsymbol{x}|^3}(-\delta_{ij} + \frac{3x_ix_j}{|\boldsymbol{x}|^2}) - \delta_{ij}\frac{4\pi}{3}\delta(\boldsymbol{x}).\end{aligned} \tag{12}$$

これらを用いると、

$$\boldsymbol{B}_M = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^5} - \frac{\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{x}|^3}\right) + \frac{2\mu_0}{3}\boldsymbol{m}\delta(\boldsymbol{x}) \tag{13}$$

が得られる。μ_0 を $1/\epsilon_0$ に置き換えれば、原点での値を除いて、これは電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ の作る電場 (2) と同じ形をしている。これが、$\boldsymbol{m}$ を磁気モーメントと呼ぶ理由である。ただし、原点の部分の符号と係数が異なることに注意しよう。これは、磁気モーメントは微小距離離れた正負の「磁荷」で作られたものではないことを示している。

4 磁化電流

$\boldsymbol{B}_M(\boldsymbol{x})$ を（実効的に）作る電流（「磁化電流」）$\boldsymbol{J}_M(\boldsymbol{x})$ を

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}_M(\boldsymbol{x}) = -\nabla^2\boldsymbol{A}_M(\boldsymbol{x}) = \mu_0\boldsymbol{J}_M(\boldsymbol{x})$$

により定義する。(9) を用いると、

$$-\nabla^2\boldsymbol{A}_M(\boldsymbol{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\left(\nabla^2\frac{\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{x}|}\right) = \mu_0\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{m}\delta(\boldsymbol{x})).$$

ここで、$\boldsymbol{m}$ が定ベクトルであることに注意。よって、

$$\boldsymbol{J}_M(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{m}\delta(\boldsymbol{x})) \equiv \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}) \tag{14}$$

を得る。ここに、$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{m}\delta(\boldsymbol{x})$ は磁気モーメント密度の意味を持つ.

5　微小環状電流の磁気モーメントと軌道角運動量

磁気モーメント (10) を与える局在電流 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$ が強さ I の微小環状電流の場合、

$$\boldsymbol{m} = I\frac{1}{2}\int \boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r} = I\boldsymbol{S} \tag{15}$$

と表される。ここに、$\boldsymbol{S}$ は環状電流の作る閉曲線が囲む面積を大きさとし、方向がその法線方向に平行なベクトルである。この電流が電荷 q を持つ質量 m の荷電粒子により生じているとすると、

$$\text{右辺} = I\frac{1}{2}\int \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\,dt = I\frac{1}{2}\int \boldsymbol{L}dt = I\frac{\boldsymbol{L}}{2m}T$$

と書ける。ここに、$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times(m\boldsymbol{v})$ は粒子の角運動量、T は周期である。電流は単位時間当たりに断面を通り過ぎる電荷量であるから、$I = q/T$ の関係がある。よって、荷電粒子の軌道運動により生じる磁気モーメントは角運動量を用いて

$$\boldsymbol{m} = \frac{q}{2m}\boldsymbol{L} \tag{16}$$

となることが分かる。この関係式は量子力学の場合にも引き継がれる [1]。

6　外磁場中で磁気モーメントが受ける力とそのエネルギー

次に、外磁場 $\boldsymbol{B}_{\text{外}}(\boldsymbol{x})$ 中に置かれた磁気モーメント $\boldsymbol{m}$ が受ける力は、

$$\boldsymbol{F}_M(\boldsymbol{x}) = \int d\boldsymbol{x}'\,\boldsymbol{J}_M(\boldsymbol{x}')\times\boldsymbol{B}_{\text{外}}(\boldsymbol{x}') \tag{17}$$

と書ける。これは、ローレンツ力である。(14) を代入して、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_M &= -\int d\boldsymbol{x}'\,(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{\nabla}_{x'}\delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}))\times\boldsymbol{B}_{\text{外}}(\boldsymbol{x}') \\ &= (\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{\nabla}_x)\times\boldsymbol{B}_{\text{外}}(\boldsymbol{x}) \\ &= \boldsymbol{\nabla}_x(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_{\text{外}}(\boldsymbol{x}))\end{aligned} \tag{18}$$

この力を与えるポテンシャルを $\phi_M(\boldsymbol{x})$ と書くと、

$$\phi_M(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_{\text{外}} \tag{19}$$

[1] 量子力学の場合、磁気モーメントを表す記号は、$\hat{\boldsymbol{\mu}}$ を用いるが、ここでは磁気透磁率との混同を避けるため $\boldsymbol{m}$ の記号を用いた。

となる。これは、外電場中に置かれた電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ が持つ静電エネルギー (4) の表式と同じ形をしている。このように、外磁場中に置かれた磁気モーメントはその方向が磁場の方向と平行になるほどエネルギーが低くなる。

さて、この外磁場が位置 $\boldsymbol{x}_2$ にある磁気モーメント $\boldsymbol{m}_2$ により作られたものとすると、(13) より、

$$\boldsymbol{B}_{外}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\boldsymbol{m}_2\cdot\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^5} - \frac{\boldsymbol{m}_2}{|\boldsymbol{r}|^3}\right) + \frac{2\mu_0}{3}\boldsymbol{m}_2\delta(\boldsymbol{r}).$$

ただし、$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_2$. したがって、位置 $\boldsymbol{x}_1$ にある磁気モーメント $\boldsymbol{m}_1$ が持つエネルギーは

$$\begin{aligned} V_{12} &= -\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{B}_{外}(\boldsymbol{x}_1) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{r}_{12}\,\boldsymbol{m}_2\cdot\boldsymbol{r}_{12}}{|\boldsymbol{r}_{12}|^5} - \frac{\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{m}_2}{|\boldsymbol{r}_{12}|^3}\right) - \frac{2\mu_0}{3}\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{m}_2\delta(\boldsymbol{r}_{12}). \end{aligned} \tag{20}$$

となる。ただし、$\boldsymbol{r}_{12} \equiv \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$.