

# 変貌する弦理論

2001.8.2, 8.3

at Kijimadaira Nagano

講師 糸山 浩司 (大阪大学)

講義録作成 山田 明大 (大阪大学)

# 目次

<u>Lecture 1</u>	5
1 String Action Based on Two-Dimensional General Relativity	5
2 Lightcone Quantization of a Closed String	10
3 The Case of an Open String	15
4 Critical Dimension	15
5 Spectrum of Fermionic Strings	16
6 Orientation Flip	19
7 Chan-Paton Factors	20
<u>Lecture 2</u>	22
1 Circle Compactification and T-duality of a Closed String	22
2 T-duality of an Open String	24
3 T-duality of a Closed Unoriented String	25
4 String Perturbation Theory	27
5 Green's (Two Point) Functions	29
6 Boundary States	29
7 Dilaton Tadpoles, Disk/ $RP^2$ Partition Function and $SO(32)$ Type I Superstrings	32
8 Torus Partition Function	35
9 Modular Invariance	38
10 Modular Invariance for Fermions and Closed String Vacua	41
11 Heterotic String	44
12 Heterotic String Vacua in Lower (Nine) Dimensions	46

<u>Lecture 3</u>	48
1 Dp-brane	48
2 Spectrum of Heterotic $Spin(32)/\mathbb{Z}_2$ and that of Type I at Zero String Coupling	50
3 Statement of the TypeI-Heterotic Duality	53
4 Type I D-String = Elementary Heterotic String	54
5 Stable Spinorial State in Type I	56
 <u>Lecture 4</u>	 58
1 Introduction	58
2 Action of IIB matrix model & USp matrix model	59
3 Green-Schwarz superstrings and the Schild action	64
4 APD and matrix twist	66
5 [ susy, projector ] = 0	67
6 Loop operator via matrix	69
7 Spacetime dynamics and Berry phase	71
8 Schwinger-Dyson equation	76

# Preface

講義をはじめるとあって、参考文献について少し述べておきます。2001年の3月号および4月号のパーティという雑誌に、私を含めて何人かの人がひもの全体像に関する解説記事を書いています。数式はほとんどない記事ですので、現在どのような全体像になっていて、いまだんなことが問題になっているのかを感じて頂ければいいと思います。

講義の plan は表 1 のようになっています。

Lecture 1,2、つまり今日の講義では 80 年代の終わりまでに確立した摂動論に基づくひもの理論を簡潔に review したい。この講義室に 100 人近い聴衆がいらっしゃるわけですが、だれもがひもの専門家になる、つまりいまだ完成されていないひもの理論がどうあるべきかを考えるという立場で、研究を進めていく人ばかりではないと思います。むしろ物理の研究者として育っていきたいけれども、必ずしもひもの理論にこだわらないという人がおそらく多いでしょう。そういった場合でも、いままでに完成したと言っていい、1本のひもの摂動論に基づく定式化および計算は、場の理論を学んだ学生には今では容易に理解できます。この部分を題材をそろえてお話ししたい。

Lecture 3 の講義では、摂動論をふまえてそれに足し算で入って来るような非摂動的効果を議論します。これは、ひもの理論に自然な形で現れる D-brane に関する 95 年以來の発展です。ここでは、その一つの例を講義します。Lecture 4 では、純然たる非摂動効果を取り扱うことが原理的には可能な、行列模型によるひもの統一理論の定式化を述べます。これには多くの日本人が貢献しました。

<u>Lecture 1</u> :	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Some Generalities</li> <li>• Lightcone Quantization of a <math>\left\{ \begin{array}{l} \text{Bosonic} \\ \text{Ferimonic} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Closed} \\ \text{Open} \end{array} \right\}</math> String</li> </ul>
<u>Lecture 2</u> :	Ingredients for Perturbative String Unification
<u>Lecture 3</u> :	Nonperturbative Treatments <ul style="list-style-type: none"> <li>• Arguments for Type I - Heterotic Duality</li> </ul>
<u>Lecture 4</u> :	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Constructive Realization of String Theory via Matrices</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Properties of <math>USp</math> Matrix Model</li> </ul>

表 1: Plan of lecture

# Lecture 1

## 1 String Action Based on Two-Dimensional General Relativity

lightcone quantization に行く前に、一般的に1本のひもをどう取り扱えばいいかをお話したい。一番大事な式は Polyakov によって重要性が認識された (1.1) の action であります。

$$S[X^\mu, g_{ab}; \Sigma] = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d\tau_M d\sigma \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

1本のひもが掃く面を  $\Sigma$  で表します。その  $\Sigma$  を parametrize する二つの parameter として  $\tau_M$  と  $\sigma$  を用います。 $X^\mu$  というのは、古典的には紐がどういうふうに埋め込まれているかを表す変数で、それはひもの座標です。 $a, b$  は 0, 1 の値をとり、しばしば  $X^0 = \tau_M, X^1 = \sigma$  を表します。この  $X^\mu$  のほかに、action (1.1) では  $g^{ab}$  という 2 次元の intrinsic metric が力学変数として使われています。action の形としては  $D$  個の質量をもたない scalar 場が 2 次元の metric に一般共変な形で couple しているものをとります。 $\eta_{\mu\nu}$  というのはひもが住んでいる時空の metric で、いまの場合それは Minkowski 空間の metric にとっています。

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & D-1 \\ -1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

$X^\mu$  および  $g^{ab}$  はどちらも dynamical variable です。つまり functional integral をもちいる立場をとりますと、積分する変数です。しかし  $g^{ab}$  には微分が入っていないので、伝播しない補助場であり理論から追い出すことが可能です。action (1.1) は 2 次元の一般相対論に基づいていますが、ひもという立場をとると、あくまでも 1 本のひもが自由に伝播している action で、自由に伝播している点粒子の action というのが 1 次元の量子力学になるのと同様の理由で、これはあくまでも第 1 量子化です。しかしながら technique としては、2 次元の場の massless の理論、とくに conformal field theory が基本的な構造として姿を表しています。これが少し混同しやすい点です。

そこで以下の講義では、action (1.1) から得られるひもの摂動論に基づく素粒子の mass spectrum を主として論じます。散乱振幅も論じる必要がありますが、時間の都合上最小限に保つという立場をとります。こういう立場をとるときに一番便利なのが lightcone quantization です。現時点では、 $X^\mu$  というひもの埋め込み関数のみならず worldsheet 上に fermion をのせた model が、我々の考える素粒子の世界により近いものを与えると考えられています。この worldsheet 上に fermion をのせた一般共変な形の action を考えます。よって、埋め込み関数  $X^\mu$  および worldsheet 上の fermion  $\Psi^\mu$  を含む理論、つまり 2 次元の supergravity とこれらが couple している action を基本的な出発点とみなします。

$$S[X^\mu, \Psi^\mu, e, \psi_a] = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau_M d\sigma e \left[ \frac{1}{2} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu + \frac{1}{2} \bar{\Psi}^\mu \rho^a \partial_a \Psi_\mu + \frac{1}{2} i \psi_a \rho^b \rho^a \Psi^\mu \partial_b X_\mu \right] \quad (1.3)$$

ここで  $\sqrt{g}$  を zweibein  $e$  にかえました。さらに第 2 項として worldsheet fermion  $\Psi^\mu$  の kinetic term を加えました。第 3 項は supergravity の coupling ですが、2 次元の gravitino  $\psi_a$  があるので、それと couple する current として  $\Psi^\mu \partial X_\mu$  という形の current をつくります。これは supercurrent と呼ばれるものです。energy momentum tensor は 2 次元の metric  $g_{ab}$  に couple します。super 化すると、supercurrent と呼ばれるものがこんどは gravitino に couple します。これが 2 次元の supergravity の coupling です。 $\Psi^\mu$  というのは  $D$  個の Majorana fermion で、2 次元の立場でいうと 2 components  $\Psi^\mu = \begin{pmatrix} \psi_1^\mu \\ \psi_2^\mu \end{pmatrix}$  です。Majorana ですから  $\psi_1, \psi_2$  は実になります。ここで  $\rho^a$  と書いたのは 2 次元の Gamma 行列です。 $\gamma^a$  と書いてもいいのですが、時空の Gamma 行列と混同を避けるために  $\rho^a$  と書きました。具体的には以下の表示を選ぶことができます。

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^2 \equiv \rho^0 \rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

$$\{\rho^a, \rho^b\} = -2\eta^{ab}, \quad \eta^{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

action (1.1)、(1.3) の量子化には、いくつかの異なる方法があります。それを表 2 にあげておきました。

異なる gauge での量子論は一般に異なる理論とみなすべきです。一番本格的なやり方は、path integral を定義して積分してしまうという表 2 の 1. の立場で、boson の場合は  $DX$  とか  $Dg_{ab}$  というのを無限次元の積分と定義すればいいわけです。無限次元の積分を定義するためには、無限次元空間の不変な長さをまず定義することが必要になります。長さを与えると metric が定義できて、それゆえ volume element をつくることができます。無限次元の場合にも同様の考察が可能で、無限次元の積分に意味を与えて量子論的な考察が可能になります。このやり方は、例えば振幅を計算する場合に非常に便利です。

しかし、今回の講義では 2、3 箇所 refer する場合を除き、gauge を全部 fix するという表 2 の 2. の立場でいきます。この立場は、QED になぞらえると axial gauge や Coulomb gauge に対応する立場であります。これが 1 本の紐の lightcone gauge での量子化です。詳細を今日の前半の講義で述べることにします。

他に、表 2 の 1 と 2 の間にあたる 3. という立場もあります。gauge 固定をしたあとに残る BRS 対称性を司る ghost 場により、functional integral を行ったあとにでてくる determinant を表示する operator formalism です。path integral の 1. の立場と最後に述べた 3. の立場を併用させることにより、1 本のひもの共変的な理解が現代までに得られています。

重要な点は、いわゆる場の量子論における anomaly の問題です。これは 1 本のひもの理論において、すでに重要な役目を果たします。例えば、ここでは議論しませんが、massless graviton が flat space で必ず出現することはひもの理論での著しい帰結の 1 つですが、それもやはり scale 変換に対する anomaly があってこそはじめて結論できるものです。worldsheet の理論としては、あくまで量子化しなければひもの摂動論は得られない。一方、worldsheet の理論としてちゃんと量子化したからといってひもの量子論がつくれているかということ、これはそうではない。これはひもの古典論にとどまっている。これはまさに 1 本の紐としては第一量子化だけでも、それは technique としては 2 次元の場の理論の technique を使っているという tricky な事情に由来しています。

- 
1. Define the path integral measure

$$[DX^\mu], [Dg_{ab}]$$

as integrals over infinite dimensional metric space.

This leads us to a general formula for genus  $g$  partition function and S-matrices.

In this lecture

- ⇒ 2. Fix all local symmetries as a two-dimensional field theory as well as rigid symmetries.
    - ⇒ quantization in the lightcone gauge
  3. Somewhere in between 1.& 2.
    - ⇒ the quantization based on BRS and ghosts
- 

表 2: methods of quantization

今から lightcone gauge での量子化をおこなっていきます。lightcone gauge というのは gauge を全部 fix する、対称性があればそれをすべて fix してしまう立場です。一つのやり方は、 $g_{ab}$  という補助場を追い出してしまうことです。この講義では、最後のところまで古典論で扱って、gauge を完全に fix してから量子化するという立場をとります (これは必ずしも論理的ではありませんが<sup>1</sup>)。まず、 $g_{ab}$  を追い出すために、Polyakov action (1.1) を  $g_{ab}$  で変分すると運動方程式が得られます。

$$\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} \partial_c X^\mu \partial_d X_\mu = 0 \quad (1.5)$$

第 1 項は  $g_{ab}$  の変分からでてきて、第 2 項は  $\sqrt{-g}$  という determinant の変分<sup>1</sup>からでてきます。左辺の第 1 項に現れてくる  $\gamma_{ab} \equiv \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu$  は intrinsic metric ではなく induced metric と呼ばれるものです。これから  $X^\mu$  だけで action を書くと、最初に南部先生が書かれた reparametrization invariant な action が得られます。

$$S[g_{ab} \text{ eliminated}] = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_\Sigma d\tau_M d\sigma \sqrt{-\det \gamma_{ab}} = S_{\text{Nambu}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} (\text{area}) \quad (1.6)$$

これは  $\tau_M$ 、 $\sigma$  の任意の reparametrization に対して不変になっており、ひもの掃く面積をあらわしています。取り扱いにくいのは  $\sqrt{-}$  を含んでいる点で、この  $\sqrt{-}$  を reparametrization invariant の一部を使うことによりなくしてやるための条件が、次の subsidiary condition です。

$$\begin{aligned} \frac{\alpha'}{2} T(\tau_M, \sigma) &\equiv \frac{1}{2} (\dot{X} + X')^2 \approx 0 \\ \frac{\alpha'}{2} \bar{T}(\tau_M, \sigma) &\equiv \frac{1}{2} (\dot{X} - X')^2 \approx 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

・というのが  $\tau_M$  微分、' というのが  $\sigma$  微分を表しています。Polyakov action (1.1) から  $g^{ab}$  を取り除いた action (1.6) は  $\dot{X}^2 - X'^2$ 、つまり運動方程式が 2 次元の波動方程式になるような action と等価です。別の言い方をして同じ action に到達することも可能です。 $T$ 、 $\bar{T}$  は worldsheet 上の matter の energy momentum tensor です。energy momentum tensor  $T, \bar{T} \approx 0$  というのが、subsidiary condition であると理解することも可能です。

---

<sup>1</sup> $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ab}\delta g^{ab}$

action (1.1) の gauge を一部 fix した action は、

$$S[g_{ab} \text{ eliminated}] \approx \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d\tau_M d\sigma \underbrace{(\dot{X}^2 - X'^2)}_{-\partial_a X^\mu \partial^a X_\mu} \quad (1.8)$$

となります。

action (1.3) に対しても、いまの手続きを parallel に行うことができます。こんどは gravitino の変分をとると、worldsheet の supercurrent が弱い意味で 0 という条件がでできます。

$$\partial_a X \cdot \rho^a \Psi \approx 0 \quad (1.9)$$

こんどは  $X^\mu$  の波動方程式に加えて、 $\Psi^\mu$  に対する 2次元の Dirac 方程式がでできます。最終的には、1本のひもというのは 2次元の free な波動方程式および Dirac 方程式を取り扱う簡単な模型になっています。

$$S[g_{ab}, \psi_a, \text{ eliminated}] \equiv S_{\text{g.f.}}[X^\mu, \Psi^\mu] = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{2} \int d\tau_M d\sigma \left( (-)\partial_a X^\mu \partial^a X_\mu + i\bar{\Psi}^\mu \rho^a \partial_a \Psi_\mu \right) \quad (1.10)$$

さて、 $X^\mu$  に対する完全系展開を最初から書いておきましょう。これは covariant な量子化でも lightcone の量子化でも同じ notation を使うことが可能です。Minkowski signature を用いて 2次元曲面を parametrize するために、 $\tau_M$  と  $\sigma$  を導入します。それを肩にあげて  $z$  を展開に用います。

$$z = e^{i(\tau_M + \sigma)} = e^{\tau + i\sigma}, \quad \bar{z} = e^{i(\tau_M - \sigma)} = e^{\tau - i\sigma} \quad (1.11)$$

右向きに進行している波と左向きに進行している波があるわけですから  $\tau_M + \sigma$  と  $\tau_M - \sigma$  の両方があるわけですが、 $\tau_M - \sigma$  を肩に上げたものを  $\bar{z}$  とおきます。 $i\tau_M = \tau$  とかいて Euclid 化して  $\tau$  を実と考えると、 $z$  と  $\bar{z}$  というのは complex になります。すると  $z$  と  $\bar{z}$  は互いに複素共役になります。

まず、closed string coordinates  $X^\mu$  の完全系展開です。

$$X^\mu(\tau_M, \sigma) = X_0^\mu - \frac{i\alpha'}{2} P_0^\mu \log z \bar{z} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n^\mu z^{-n} + \tilde{\alpha}_n^\mu \bar{z}^{-n}) \quad (1.12)$$

波動方程式は Euclid 化の後 2次元の Laplace 方程式となり、その展開係数として紐の重心運動に  $P_0^\mu$  と  $X_0^\mu$ 、紐の振動の mode に  $\alpha$  と  $\tilde{\alpha}$  を導入します。 $P_0^\mu \equiv \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha_0^\mu \equiv \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \tilde{\alpha}_0^\mu$  になっています。 $X^\mu$  が Hermite になっているということから  $\alpha_n^{\mu*} = \alpha_{-n}^\mu$ 、 $\tilde{\alpha}_n^{\mu*} = \tilde{\alpha}_{-n}^\mu$  の条件がでできます。

次に open string coordinates  $X^\mu$  の完全系展開です。量子化すると、open string の場合には運動方程式に加えてひもの端点に対する boundary condition が必要です。action を変分すると、紐の許される boundary condition は、各 component ごとに Neumann  $\textcircled{N}$  あるいは Dirichlet  $\textcircled{D}$  となります。Neumann condition とは、ひもの端点が光速で走っている条件であり、 $\sigma$  方向の微分が端点で 0 という条件  $X'^\mu|_{\sigma=0,\pi} = 0$  です。この条件を課して得られる mode 展開は (1.13) です。

$$X^\mu(\tau_M, \sigma) = X_0^\mu - i\alpha' P_0^\mu \log z \bar{z} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu (z^{-n} + \bar{z}^{-n}) \quad (1.13)$$



この場合、 $P_0^\mu = 2\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\alpha_0^\mu$  になっているという点に留意しておいて下さい。Neumann condition では、右向きに進行した波は、はねかえって左向きの波になるので、 $\alpha$  と  $\tilde{\alpha}$  はもはや独立ではなく、 $\alpha = \tilde{\alpha}$  とおかなければなりません。

Dirichlet condition は、端点がピン止めされているという条件  $\delta X^\mu|_{\sigma=0,\pi} = 0$  です。一般的な展開としては次のようなものが得られます。

$$X^\mu(\tau_M, \sigma) = c^\mu - i\frac{c'^\mu - c^\mu}{2\pi} \log \frac{z}{\bar{z}} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu (z^{-n} - \bar{z}^{-n}) \quad (1.14)$$

定数  $c^\mu$ 、 $c'^\mu$  は、それぞれ端点  $\sigma = 0$ 、 $\sigma = \pi$  がピン止めされている位置を表します。図 1 がそれを示しています。こんどは Dirichlet condition ですから、右向きの波と左向きの波に  $\pi$  という位相の差がありますから -

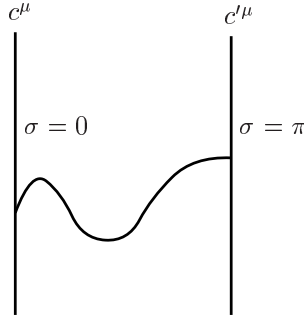


図 1: Open string with Dirichlet b.c.

の符号がでできます。これらは細かいことですが、こういったことをおろそかにしますと理解が進みません。

こんどは fermion です。 $\tau_M$ 、 $\sigma$  で parametrize される曲面上の fermion の展開を述べます。 $\tau_M$ 、 $\sigma$  ではなく、 $z$ 、 $\bar{z}$  の展開という立場もあります。worldsheet 上の fermion は  $\frac{1}{2}$  の次元を持っていますから、conformally equivalent ではあるが、異なる geometry にいくと、付加的な factor がついてきます。

closed string の場合には、 $\tau_M$ 、 $\sigma$  で parametrize される曲面は幅  $2\pi$  の strip で、 $\Psi^\mu$  というのは 2 次元 worldsheet 上の fermion としては 2 成分 Majorana fermion  $\Psi^\mu = \begin{pmatrix} \psi_1^\mu \\ \psi_2^\mu \end{pmatrix}$  です。各 component の boundary condition は、periodic か antiperiodic のどちらかであります。

$$\psi_{1,2}^\mu(\tau_M, \sigma + 2\pi) = \mp \psi_{1,2}^\mu(\tau_M, \sigma) \quad \begin{array}{l} \text{N(eveu) - S(chwarz)} \\ \text{R(amond)} \end{array} \quad (1.15)$$

antiperiodic にしても action の一価性が失われることはないので許されます。それで、antiperiodic の場合つまり  $\sigma$  を  $2\pi$  だけずらしたときに - がでるのを Neveu-Schwarz sector(NS) と呼び、一方 + になるのを Ramond sector(R) と呼びます。 $\psi_1$  と  $\psi_2$  両方存在しますから、4つの可能性がでできます。

$\psi_1^\mu$	NS	NS	R	R
$\psi_2^\mu$	$\overline{\text{NS}}$	$\overline{\text{R}}$	$\overline{\text{NS}}$	$\overline{\text{R}}$

$\psi$  は、幅  $2\pi$  の strip 上で NS sector では半整数で展開され、Ramond sector では整数で展開されます。同様に  $\tilde{\psi}^\mu$  は、 $\overline{\text{NS}}$  では半整数で展開され、 $\overline{\text{R}}$  では整数で展開されます。これで自由な Dirac 方程式を満たす解は、すべて作れました。これが自由な Dirac 方程式の展開です。

$$\psi^\mu = \begin{cases} \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} b_r^\mu z^{-r} & : \text{NS} \\ \sum_{m \in \mathbb{Z}} d_m^\mu z^{-m} & : \text{R} \end{cases} \quad \tilde{\psi}^\mu = \begin{cases} \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} \tilde{b}_r^\mu \bar{z}^{-r} & : \overline{\text{NS}} \\ \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{d}_m^\mu \bar{z}^{-m} & : \overline{\text{R}} \end{cases} \quad (1.16)$$

ここで rescale  $\psi_1^\mu \equiv \sqrt{\alpha'} \psi^\mu$   $\psi_2^\mu \equiv \sqrt{\alpha'} \tilde{\psi}^\mu$  を行ないました。

open string の場合には、上の考察に加えて boundary condition の考察が必要です。action (1.10) の変分をとってみると、端点での条件が導出されます。

$$\overline{\Psi}^\mu \rho^2 \delta \Psi_\mu \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} = -\psi_1 \delta \psi_1 \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} + \psi_2 \delta \psi_2 \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} = 0 \quad (1.17)$$

ここででてきた  $\rho^2$  というのは 2 次元の Gamma 行列で  $\gamma_5$  にあたり、さきほどの表示 (1.4) では対角行列になります。条件 (1.17) をみますと、第 1 項、第 2 項が独立な形で 0 になっているようにみえますが、それはすぐ強すぎるのがわかります。いま考えている方程式は、1 階の微分方程式です。1 階の方程式では、各 component を境界である値におくと、解は全部決まってしまう。初期値問題としてはいいけれども、一般の mode 展開としては強すぎます。我々が欲しい条件は、(1.17) が全体として 0 になるという条件で、これは  $\psi_1$  の mode と  $\psi_2$  の mode が端点で関係づいていることを意味します。一般性を失わずに、 $\sigma = 0$  では  $\psi_1 = \psi_2$ 、 $\sigma = \pi$  では  $\psi_1 = -\psi_2$  あるいは  $+\psi_2$  でなければならないと結論できます。この二つの可能性を NS、R と呼ぶことにします。

$$\begin{aligned} \psi_1^\mu(\tau_M, \sigma = 0) &= \psi_2^\mu(\tau_M, \sigma = 0) \\ \psi_1^\mu(\tau_M, \sigma = \pi) &= \begin{cases} -\psi_2^\mu(\tau_M, \sigma = \pi) & \text{NS} \\ \psi_2^\mu(\tau_M, \sigma = \pi) & \text{R} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.18)$$

open string では  $\tilde{\psi}$  というのは、 $\psi$  で  $\sigma$  を  $-\sigma$  にひっくり返したものであると考えることができます。 $\tilde{b}$  や  $\tilde{d}$  は  $b$ 、 $d$  に等しくなっています。

## 2 Lightcone Quantization of a Closed String

これだけのことを踏まえて lightcone gauge での 1 本のひもの量子化にいきます。出発点として、gauge fixed action (1.10) からはじめることにします。それをもう一度、ここに書いておきます。

$$S_{\text{g.f.}}[X^\mu, \Psi^\mu] = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{2} \int d\tau_M d\sigma \left( (-) \partial_a X^\mu \partial^a X_\mu + i \overline{\Psi}^\mu \rho^a \partial_a \Psi_\mu \right) \equiv S_B[X^\mu] + S_F[\Psi^\mu] \quad (1.19)$$

この gauge fixed action (1.19) は、2 次元の一般相対論あるいは 2 次元の supergravity に基づいた action (1.3) から出発して、論理的に得られたものです。しかし、この action (1.19) に加えて subsidiary condition (1.7) 及び (1.9) を忘れてはいけません。以下しばらく  $S_B[X^\mu]$  の部分のみを考察します。

この gauge fixed action (1.19) には、まだ worldsheet 上の reparametrization invariance の一部が残っています。変換

$$\begin{aligned}\tau_M + \sigma &\rightarrow \tilde{\tau}_M + \tilde{\sigma} = f(\tau_M + \sigma) \\ \tau_M - \sigma &\rightarrow \tilde{\tau}_M - \tilde{\sigma} = \bar{f}(\tau_M - \sigma)\end{aligned}\tag{1.20}$$

に対して gauge fixed action (1.19) は不変です。つまり、 $\tau_M + \sigma$  あるいは  $\tau_M - \sigma$  に関して二つの任意関数  $f, \bar{f}$  で表される自由度が止められずに残っているわけです。 $z$  と  $\bar{z}$  による holomorphic な factorization を破るような gauge fixing condition を導入しなければならない。よって、さらに gauge を固定します。

そのために、lightcone coordinates と呼ばれる表示

$$X^\pm = (X^0 \pm X^{D-1}) / \sqrt{2}\tag{1.21}$$

を導入します。これはちなみに lightcone gauge とは異なるものです。この表示に従うと、二つの vector  $X, Y$  の Minkowski dot (内積) は、次のようになります。

$$\begin{aligned}X \cdot Y &= -X^0 Y^0 + \sum_{i=1}^{D-1} X^i Y^i = \sum_{i=1}^{D-2} X^i Y^i - X^+ Y^- - X^- Y^+ \\ &= \eta_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu = \sum_{i=1}^{D-2} X^i Y_i + X^+ Y_+ + X^- Y_-\end{aligned}\tag{1.22}$$

これをみると、 $X^i Y^i - X^+ Y^- - X^- Y^+$  となっていますから、Minkowski metric

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} + & - & 1 & \cdots & D-2 \\ 0 & -1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \mu, \nu = +, -, 1, \dots, D-2\tag{1.23}$$

によって  $+-$  の添字が上げ下げされると考えてください。

では、lightcone gauge 条件の説明に入ります。この条件は、残った reparametrization invariance を完全に固定するものであれば、原理的には何でもいいのですが、bosonic coordinates  $X^\mu$  に対しては

$$\begin{aligned}X^+(\tau_M, \sigma) &= X^0 + \alpha' P_0^+ \tilde{\tau}_M \\ \alpha' P_0^+ \tilde{\sigma} &= \int_0^\sigma d\sigma' \frac{\partial X^+(\tau_M, \sigma')}{\partial \tau_M}\end{aligned}\tag{1.24}$$

と選びます。つまり、新しい  $\tilde{\tau}_M, \tilde{\sigma}$  を選んで、それがこの条件を満たすようにします。この条件は、string の振動を無視することになると、 $\tilde{\tau}_M, \tilde{\sigma}$  は  $\tau_M, \sigma$  に等しくなった条件だと理解できます。これ以後、 $\sim$  を省略して  $\tilde{\tau}_M = \tau, \tilde{\sigma} = \sigma$  と書くことにします。

以下では gauge (1.24) をとって、関数 2 つ分の gauge を固定することにします。この gauge condition では、 $X^+$  の  $\tau$  微分をとると  $\alpha' P_0^+$ 、 $\sigma$  微分をとると 0 になります。これで量子化に必要な gauge 条件が決まり、量

子化に必要な手続きが完了しました。ここまでの講義で、gauge を途中まで fix した action (1.19) や Virasoro 条件つまり stress energy tensor  $T, \bar{T} \approx 0$  という subsidiary condition (1.7)、(1.9)、そして lightcone gauge の条件 (1.24) をお見せしました。これからは、これらを使ってもとの gauge fixed action (1.19) を書き換えていけばいいわけです。いま時間として何を選ぶかといいますと、worldsheet の  $\tau$  ではなく、いまやそれと定数倍を除いて同一視されている  $X_0^+$  を選びます。Lightcone gauge とは、 $X_0^+$  が worldsheet 上の  $\tau$  と synchronized されている gauge であります。action (1.19) の第 1 項  $S_B[X]$  は、 $X^+$  に関する積分という形に書き換えてやることができます。

$$\begin{aligned} S_B^{\text{LC}}[X^\mu] &= \int_{-\infty}^{\infty} dX^+ L_B^{\text{LC}} \\ L_B^{\text{LC}} &= -P_0^+ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} \partial_+ X^- + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} \left( P_0^+ \partial_+ X^i \partial_+ X^i - \frac{1}{P_0^+ \alpha'} X'^i X'^i \right) \end{aligned} \quad (1.25)$$

$X^+$  を (1.24) のように gauge 固定したので、 $X^+$  の  $\tau$  微分はもはや定数で、 $P_0^+$  として  $\sigma$  積分の外に出すことができます。この後、力学変数に equal time commutator を課せばいいわけですが、それには  $X^\mu$  に共役な運動量 density  $\mathcal{P}^\mu$  をつくってやらなければなりません。

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^i(\tau_M, \sigma) &= \mathcal{P}_i(\tau_M, \sigma) = \frac{\partial L_B^{\text{LC}}}{\partial (\partial_+ X^i)} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^i \\ -\mathcal{P}^-(\tau_M, \sigma) &= \mathcal{P}_+(\tau_M, \sigma) = \frac{\partial L_B^{\text{LC}}}{\partial (\partial_+ X^+)} = 0 \\ -\mathcal{P}^+(\tau_M, \sigma) &= \mathcal{P}_-(\tau_M, \sigma) = \frac{\partial L_B^{\text{LC}}}{\partial (\partial_+ X^-)} = -\frac{1}{2\pi} P_0^+ \end{aligned} \quad (1.26)$$

$\mathcal{P}^i$  は本質的に  $\dot{X}^i$  であります。  $\mathcal{P}^-$  は  $X^+$  に共役な運動量で、 $X^+$  の gauge 条件 (1.24) より 0 となります。一方、 $\mathcal{P}^+$  は  $X^-$  に共役な運動量で、0 ではありません。  $\partial_+ X^-$  は  $\partial_+ X^+$  に couple していることと gauge 条件 (1.24) により、 $P_0^+$  を  $2\pi$  で割ったものになっています。  $2\pi$  は string の幅と考えられ、 $\mathcal{P}^+$  は constant density になっていることがわかります。

以下の目標は、まず lightcone Hamiltonian をつくり、そこから mass operator をつくって、 $(\text{mass})^2$  の eigenvalue を読みとり spectrum を調べることです。1 本のひもはどんな振動の mass spectrum をもっているかが知りたいことです。

lightcone Hamiltonian  $H_B^{\text{LC}}$  は、単に canonical procedure を経てつくることができます。

$$H_B^{\text{LC}} \equiv \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma (\mathcal{P}_i \partial_+ X^i + \mathcal{P}_- \partial_+ X^-) - L_B^{\text{LC}} = \frac{1}{2P_0^+ \alpha'^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} \left( \dot{X}^i \dot{X}^i + X'^i X'^i \right) \quad (1.27)$$

lightcone Hamiltonian  $H_B^{\text{LC}}$  は、transverse な oscillation だけに依存します。つまり  $X^+$  は固定したから振動 mode がないのは当然ですが、 $X^-$  の振動 mode もなくなってしまいます。ここで問題になってくるのが subsidiary condition、以前の Virasoro 条件 (1.7) です。

$X^-$  は Virasoro 条件 (1.7) を解くことによって、残りの transverse oscillator で表現することができます。一般的な mode 展開の式 (1.12) より、 $X^-$  の時間微分を  $\sigma$  積分すると、 $P_0^-$  になっていることがわかります。

$$P_0^- = \frac{1}{\alpha'} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} \dot{X}^- \quad (1.28)$$

この  $P_0^-$  は lightcone Hamiltonian  $H_B^{\text{LC}}$  と同じものはずです。実際、canonical procedure で求めた lightcone Hamiltonian  $H_B^{\text{LC}}$  と kinematical に  $\dot{X}^-$  を  $\sigma$  積分して求めた Hamiltonian  $P_0^-$  は、確かに一致しています。つまり、canonical quantization で得られた Hamiltonian  $H_B^{\text{LC}}$  は、+ 方向を時間にとった時間推進演算子になっています。

さらに量子化を進めることにしましょう。  $X^i$  と  $P^j$  に equal time commutator を課し mode に分解すると、次のような mode 間の equal time commutator が得られます。

$$[P^i(\tau_M, \sigma), X^j(\tau_M, \sigma')] = -i\delta(\sigma - \sigma')\delta^{ij} \Rightarrow \begin{cases} [\alpha_n^i, \alpha_m^j] = n\delta_{n+m,0}\delta^{ij} \\ [\tilde{\alpha}_n^i, \tilde{\alpha}_m^j] = n\delta_{n+m,0}\delta^{ij} \\ [P_0^i, X_0^j] = -i\delta^{ij} \end{cases} \quad (1.29)$$

ここまでの gauge fixed action(1.19) の第 1 項  $S_B^{\text{LC}}[X]$  の量子化です。

次に gauge fixed action (1.19) の第 2 項  $S_F^{\text{LC}}[\Psi]$  の量子化を考えます。(1.19) の第 1 項  $S_B^{\text{LC}}[X]$  と第 2 項  $S_F^{\text{LC}}[\Psi]$  は、相互作用していないので独立に扱ってさしつかえありません。(1.19) の第 2 項  $S_F^{\text{LC}}[\Psi]$  に関しては、lightcone gauge の条件として  $\Psi^+ = 0$  という条件を課します。第 1 項  $S_B^{\text{LC}}[X]$  と同様に、 $S_F^{\text{LC}}[\Psi]$  を書きかえてやります。

$$\begin{aligned} S_F^{\text{LC}}[\Psi^\mu] &= \int dX^+ L_F^{\text{LC}} \\ L_F^{\text{LC}} &= \frac{i}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\sigma}{2\pi\alpha'} \left( \bar{\Psi}^i \rho^0 \partial_+ \Psi^i + \frac{1}{\alpha' P_0^+} \bar{\Psi}^i \rho^1 \partial_\sigma \Psi^i \right) \end{aligned} \quad (1.30)$$

$\psi_a^i$  に共役な運動量は

$$\Pi_{\psi_a^i} \equiv \frac{\delta L_F^{\text{LC}}}{\delta(\partial_+ \psi_a^i)} = \frac{i}{4\pi\alpha'} \psi_a^i \quad (1.31)$$

です。

注意しなければならないのは、ここで扱っているのは Majorana fermion であり、 $(\bar{\Psi}\rho_0)^T = \Psi$  なる条件に従うという点です。よって、拘束系の量子化つまり Dirac bracket を用いなければなりません。それは少し避けて通ることにして、自由度だけを考えてみますと complex の Dirac spinor のとき 1 だったのだから、Majorana spinor の場合はちょうど半分にしてやれば十分であると理解することにします。equal time anticommutator は

$$\left\{ \Pi_{\psi_a^i}(\tau_M, \sigma), \psi_b^j(\tau_M, \sigma') \right\}_+ = \frac{1}{2} i \delta(\sigma - \sigma') \delta_b^a \delta^{ij} \quad (1.32)$$

となります。これは、次のように書きかえることができます。

$$\left\{ \psi_a^i(\tau_M, \sigma), \psi_b^j(\tau_M, \sigma') \right\}_+ = 2\pi\alpha' \delta(\sigma - \sigma') \delta_{ab} \delta^{ij} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} \{b_r^i, b_s^j\} &= \delta_{r+s,0} \delta^{ij}, & \{\tilde{b}_r^i, \tilde{b}_s^j\} &= \delta_{r+s,0} \delta^{ij} \\ \{d_r^i, d_s^j\} &= \delta_{r+s,0} \delta^{ij}, & \{\tilde{d}_r^i, \tilde{d}_s^j\} &= \delta_{r+s,0} \delta^{ij} \end{aligned} \quad (1.34)$$

かくして、fermion 部分からも lightcone Hamiltonian  $H_F^{\text{LC}}$  が得られました。

$$H_F^{\text{LC}} = -\frac{i}{4\pi\alpha'^2 P_0^+} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma \Psi^T \rho^1 \rho^2 \partial_\sigma \Psi \quad (1.35)$$

total lightcone Hamiltonian  $H^{\text{LC}} \equiv H_{\text{B}}^{\text{LC}} + H_{\text{F}}^{\text{LC}}$  が  $P_0^-$  に等しいことは、Virasoro condition (1.7) および super Virasoro condition (1.9) を使って導くことができます。

今は lightcone gauge という noncovariant な gauge で量子化をやっています。が、その物理的内容はやはり Minkowski 空間をとんでいく 1 本のひもの物理ですから、測定量は最終的に Lorentz invariant な量で定式化できます。Lorentz invariance を固定して、ある計算方法を進めているわけです。最終的に我々の計算する量は質量で、 $\alpha' M^2$  という形で導入します。

$$\alpha' M^2 \equiv 2\alpha' P_0^+ P_0^- - \alpha' P_0^i P_0^i \equiv 2 \left( N + \text{const} + \widetilde{N} + \widetilde{\text{const}} \right) \quad (1.36)$$

ここで、 $N$  は oscillator を normal ordered した number operator です。

$$N = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( : \sum_{i,n \neq 0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i : + : \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} r b_{-r}^i b_r^i : \right) & \text{NS} \\ \frac{1}{2} \left( : \sum_{i,n \neq 0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i : + : \sum_{r \in \mathbb{Z}} r d_{-r}^i d_r^i : \right) & \text{R} \end{cases} \quad (1.37)$$

$\widetilde{N}$  に対しても同様の式が成り立ちます。 $P_0$  は定数倍を除いて  $\alpha_0$  ですから、zero mode は mass operator に対しては取り除かれています。number operator とは言いますが、振動の level ごとに energy の重みをつけているので energy になっています。const および  $\widetilde{\text{const}}$  は normal ordering に付随して出てくる項です。const を計算すると、 $n$  に関する positive な integer の和がでできます。

$$\begin{aligned} \text{NS : const} &= \frac{(D-2)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n + \frac{(D-2)}{2} \sum_{r=1/2, 3/2, \dots} (-r) \\ &= \frac{(D-2)}{2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} n - \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n \right) \right) \\ &= \frac{(D-2)}{2} \left( \frac{3}{2} \right) \zeta(-1) = -\frac{(D-2)}{16} \\ \text{R : const} &= \frac{(D-2)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n + \frac{(D-2)}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (-m) = 0 \end{aligned} \quad (1.38)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} n$  は発散していますから、どうやって評価してやったらいいかわかりませんが、ひもの理論は mass をもたない 2次元の理論であります。したがって、いわゆる conformal invariance というのを尊重する正則化をとらなければなりません。これがいわゆる  $\zeta$  関数の正則化で、この正則化は positivity は満たしていません。boson 1 個に対する positive な integer に関する和が  $\frac{1}{2}\zeta(-1) = -\frac{1}{24}$  という - の数になっています。これでも理論的には consistent であると理解されています。別の論理的に整合性の高い方法でもこれを導出できます。NS に関しては  $-\frac{D-2}{16}$ 、Ramond に関しては、boson と fermion がちょうどつりあっているので 0 が得られます。NS に関しては、boundary condition がつりあっていないので自由度に食い違いがおきてこういう結果になります。 $\widetilde{N}$  に関する normal ordering の結果も同様の考察で得られます。

$\alpha' P_0^- P_0^+$  は無次元量で、それをしばしば  $L_0 + \overline{L}_0$  と書きます。 $L_0$  は zero mode を除いて  $N$  と同じものです。

$$\alpha' P_0^+ P_0^- = L_0^{(\text{cy}1)} + \overline{L}_0^{(\text{cy}1)}, \quad (1.39)$$

ここまでで閉じた紐の lightcone quantization が完了し、mass operator が得られました。したがって、いろいろな model に対して (1.36) の公式を使って、ひもの振動から得られる素粒子の mass というのを見てみる事が可能です。今回の話では mass operator の計算しかやりません。

### 3 The Case of an Open String

では open string の場合はどうか。mass operator は

$$\alpha' \mathcal{M}^2 = N + \text{const}, \quad \text{const} = \begin{cases} -\frac{(D-2)}{16} & \text{NS} \\ 0 & \text{R} \end{cases} \quad (1.40)$$

と計算できます。

closed	open
$P_0^+$	$2P_0^+$
$-\pi < \sigma < \pi$	$0 < \sigma < \pi$
$\alpha \quad b \text{ or } d$ $\tilde{\alpha} \quad \tilde{b} \text{ or } \tilde{d}$	$\alpha \quad b \text{ or } d$

左の表は、open string と closed string の違いを表しています。closed string の場合とほとんど同じですが、canonical quantization を丁寧に調べてみると、closed string の mass(1.36) で  $P_0$  となっていたところを 2 倍にしなければならないことがわかります。最初にお見せした mode expansion でもそのへんはうまく調節されています。ひもの幅は closed の場合  $2\pi$  にとったので、open の場合  $\pi$  にとるのが適当であります。これは notation です。open string の場合は、number operator  $N$  の overall の係数は 2 でなくて 1 になり、 $\tilde{N}$  はありません。constant は  $\zeta$  関数を使う同じ計算方法で  $-\frac{D-2}{16}$  または 0 になります。

### 4 Critical Dimension

今まで説明してきている lightcone gauge での量子化は、最後の最後まで量子化せずに古典論でいって、最終的に transverse oscillator に関してだけ canonical commutator を課するというやり方です。最初に Polyakov の action を書いた時点ですでに内在している量子論的な anomaly が、今の立場でどう表れてくるかを議論しましょう。anomaly とは、どういうやり方をやっても取り除けない量子効果です。つまり、量子化することによって保てない対称性のことです。いまの場合、それは Lorentz 変換です。つまり、Lorentz 変換を使って  $X^+(\tau, \sigma)$  を  $X_0^+ + \alpha' P_0^+ \tau$  に fix してやります。そのため、次の Lorentz algebra を check してやる必要があります。

$$[M^{\mu\nu}, M^{\kappa\rho}] = i\eta^{\nu\kappa} M^{\mu\rho} - i\eta^{\mu\kappa} M^{\nu\rho} - i\eta^{\nu\rho} M^{\mu\kappa} + i\eta^{\mu\rho} M^{\nu\kappa} \quad (1.41)$$

これは 70 年代に Goddard-Goldstone-Rebbi-Thorn によって実行されています。一番問題になってくるのは一部分を含む algebra で、 $X^-$  は transverse oscillator に関して bilinear です。Lorentz generator は  $X$  と  $P$  に関して (1.42) の形をしています。

$$M^{\mu\nu} \equiv \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} (X^\mu P^\nu - X^\nu P^\mu) \quad (1.42)$$

そのため、 $-$  の添字 1 個につき  $\alpha$  が 2 個ついてきます。古典的には、 $[M^{-i} M^{-j}]$  という commutator は 0 であるべきですが、量子論的には ordering の問題により一般の次元では消えない量になっているということがわかります。それが消えることを要求します。実は消えているのは bosonic string の場合には 26 次元、fermionic string の場合には 10 次元のときです。これが critical dimension と呼ばれる次元です。lightcone gauge での平坦時空での量子論が Lorentz invariant であるためには、時空は 10 次元でなくてはならないという結論が得られました。もう一つ重要なのは、さきほど計算してでてきた normal ordering に付随する  $N$  とか  $\tilde{N}$  の係数です。それは  $D-2$  に比例していました。基本的に  $\alpha' M^2$  というのは、振動がまったくないという状況を考えると、効いてくるのは constant だけです。その係数を intercept と呼ぶことにしますと、それは振動していない mode の energy で、closed bosonic では  $-4$ 、open bosonic では  $-1$ 、closed fermionic では  $-2$ 、open fermionic では  $-\frac{1}{2}$  になっています。この係数も非常に重要です。しかもこの係数が  $-$  であるということは、1 本のひもの一番低い mass の状態というのは実は負である、tachyon 粒子の状態であることを示しています。

## 5 Spectrum of Fermionic Strings

intercept もわかりましたから、1 本のひもの spectrum がわかります。spectrum を調べるのに、まず ground state をこの立場で決める必要があります。これは漸近状態をどうやって作るかに密接に関わっています。つまり、無限の過去、 $\tau = -\infty$  で operator  $X^\mu$ 、 $\psi^\mu$  を  $|0\rangle$  に作用させると regular でなければならないということを要求します。

$$X^i(\tau_M, \sigma), \psi^i(\tau_M, \sigma)|0\rangle \xrightarrow{|z| \rightarrow 0} \text{regular} \quad (1.43)$$

すると  $X^\mu$  や  $\psi^\mu$  の  $z$  に関する Laurent 展開の負ベキの係数 operator が、真空に作用すると消えていなければなりません。この要求 (1.43) から、NS sector、R sector に関して、正の添字を持つ mode operator が annihilation operator となる条件がでてきます。

ここで、0 という添字を持つ operator に関する注意を述べておきます。 $\alpha_0$  というのは実は  $P_0$  であったわけですね。 $P_0$  というのは運動量で、 $P_0$  は固有値  $P$  をもつことにします。 $P$  は、 $e^{iPX_0}$  という運動量  $P$  の固有状態。これは単にひもの重心部分に相当し、自由粒子の重心座標の量子力学になっています。

さて NS sector に関してですが、(1.43) から求まる条件は、

$$\text{NS: } \alpha_n^i |0\rangle = 0 \quad n \geq 1 \quad b_r^i |0\rangle = 0 \quad r = 1/2, 3/2, \dots \quad (1.44)$$

です。negative な添字を持つ mode  $\alpha_{-n}^i$ 、 $b_{-r}^i$  ( $n, r > 0$ ) は、creation operator としてはたります。  $\alpha_n$  は Minkowski 空間の transverse な添字をもち、tensor 的な状態を別の tensor 的な状態に map するような fock 空間の演算子であるわけです。NS sector は、一般に transverse な運動量  $p^i$  をもち整数及び半整数で指定される level の振動の占有数で指定できる状態たちからなっていることがわかります。 $|0\rangle$  はなにも添字をもっていないわけで、Lorentz 変換の立場から見ると singlet です。残りの oscillator は Lorentz 変換の vector の添字をもちますから、一般に tensor 的な状態です。一般的な state は次のようになっています。

$$\mathcal{H}_{\text{NS}} \equiv \{ \{ \alpha_{-n_1}^{i_1}, \dots, b_{-r_1}^{j_1}, \dots |p^i\rangle \} \} \quad \text{s.t.} \quad \hat{P}_0^i |p^i\rangle = p^i |p^i\rangle \quad (1.45)$$



spacetime statistics の立場から考えると、 $\mathcal{H}_{\text{NS}}$  に属する状態は spacetime boson になっていなければならないことがわかります。だから、たとえ  $b$  が奇数個含まれていて、worldsheet の立場から見て worldsheet fermion であったとしても、これは spacetime という立場から見ますと spacetime boson であるという結果がこの formalism から得られます。

一方、Ramond sector では、(1.43) から求まる条件は、

$$\mathbf{R}: \alpha_n^i | \rangle = 0 \quad n \geq 1 \quad d_m^j | \rangle = 0, \quad m \geq 1 \quad d_0^i | \rangle = ? \quad (1.46)$$

です。ここで、真空として用意した何も添字を書いていない  $| \rangle$  に関して問題が生じます。一番問題になってくるのが  $d_0^i$  の作用であります。  $d_0^i$  は Hermitian conjugate が自分自身  $d_0^{i\dagger} = d_0^i$  になっています。  $d_0^i$  と  $d_0^j$  の anticommutator  $\{d_0^i, d_0^j\} = 2\delta^{ij}$  というのは、ちょうど  $ij$  に関する Gamma 行列のような形をしています。つまりこれは Clifford 代数です。この  $d_0^i$  を、ground state であるところの添字の書いていない standard ket  $| \rangle$  に作用した結果がどうなるのかよくわからない。これを 0 にすると矛盾してしまう。むしろ  $d_0^i$  の 8 個の oscillator を全部同等に取り扱って、standard ket  $| \rangle$  から出発して、 $d_0^i$  を作用すると別の ground state にいっていると考えるのが妥当であります。したがって、ある degenerate な ground state が何個かあって、その何個かある状態の上でその代数が表現されていると考えるわけです。つまり standard ket  $| \rangle$  は、Clifford 代数の表現空間を与えていなければいけない。みなさんご存知のように、何成分か用意しないと Gamma 行列の表現は実現できません。それと同様に  $d_0^i$  の代数を実現するためには、1 個の singlet ground state では無理で、spinor の添字がこの ground state には必ず必要である。つまり、lightcone の Clifford 代数に関する spinor の添字をもった ground state  $| \rangle = |\alpha\rangle$  でなければならないことがわかります。Ramond sector は、そこから negative な添字をもつ  $\alpha$  とか  $d$  とかを作用することによって得られた状態であります。state は次のようになっています。

$$\mathcal{H}_{\mathbf{R}} \equiv \{ \{ \alpha_{-n_1}^{i_1}, \dots, d_{-m_1}^{j_1}, \dots | p^i, \alpha \rangle \} \} \quad (1.47)$$

spinor の添字が 1 個あって、あとは tensor の添字ですから、spacetime statistics の立場からいいますと、必ず spacetime fermion を表しているということがわかります。以上より、NS sector は spacetime boson、R sector は spacetime fermion を表していることがわかりました。

以上が open fermionic string の場合で、closed fermionic string の場合は  $-$  のついた部分とついていない部分のそれぞれに対して NS あるいは R sector を考え、それぞれに関して tensor 積をとります。

$$\mathcal{H}_{\bullet} \otimes \overline{\mathcal{H}}_{\bullet} \quad \begin{array}{l} \bullet \quad ; \quad \text{NS or R} \\ \overline{\bullet} \quad ; \quad \overline{\text{NS}} \text{ or } \overline{\text{R}} \end{array} \quad (1.48)$$

いよいよ open string と closed string の spectrum を表 3 に書きます。GSO projection に関してはあとで話すことにします。open string の ground state の振動のない状態  $|k^i\rangle$  は、Lorentz 変換に対して singlet で、 $\alpha'$  の unit で  $-\frac{1}{2}$  つまり tachyon になります。次の level は  $b_{-\frac{1}{2}}^i$  を 1 個それに作用した状態  $b_{-\frac{1}{2}}^i |k^i\rangle \zeta_i(k^\ell)$  で、massless の vector がでてきます。massless vector だから、 $b_{-\frac{1}{2}}^i$  に  $k$  space の波動関数  $\zeta_i(k^\ell)$  がかかっています。これは polarization vector と呼ばれるものです。一方、Ramond sector の ground state  $|\alpha, k^i\rangle$  は massless ですが、spinor の添字  $\alpha$  をもっていて、 $d_0^i$  からでてくる空間 8 次元の Clifford 代数の表現より 16 次元となり

		k space wave fn	$\alpha' \mathcal{M}^2$	name	
open string	NS	$ k^i\rangle$ $b_{-\frac{1}{2}}^i  k^i\rangle$	1 $\zeta_i(k^\ell)$	$-\frac{1}{2}$ 0	ground state scalar (tachyon) $\textcircled{1}$ massless vector $\textcircled{8}_v$
	R	$ \alpha, k^i\rangle$	$u_\alpha(k^\ell)$	0	16 dim spinor $\textcircled{8}_s \oplus \textcircled{8}_c$
closed string	(NS, $\overline{\text{NS}}$ )	$ k^i\rangle$ $b_{-\frac{1}{2}}^i \tilde{b}_{-\frac{1}{2}}^j  k^{i'}$	$\zeta_{ij}(k^\ell)$	-2 0	scalar $\textcircled{1}$ graviton $\oplus$ asym tensor $\oplus$ dilaton $\textcircled{8}_v \otimes \textcircled{8}_v = \textcircled{35} \oplus \textcircled{28} \oplus \textcircled{1}$
	(NS, $\overline{\text{R}}$ )	$ \tilde{\alpha}, k^{i'}\rangle$ $b_{-\frac{1}{2}}^i  \tilde{\alpha}, k^{i'}\rangle$	$\chi_{i\tilde{\alpha}}(k^\ell)$	-1 0	16 dim spinor $\textcircled{8}_s \oplus \textcircled{8}_c$ vector spinor $\textcircled{8}_v \otimes (\textcircled{8}_s \oplus \textcircled{8}_c) = \textcircled{8}_c \oplus \textcircled{56}_s \oplus \textcircled{8}_s \oplus \textcircled{56}_c$
	(R, $\overline{\text{NS}}$ )	tilde $\leftrightarrow$ no tilde from (NS, $\overline{\text{R}}$ )			$\textcircled{8}_c \oplus \textcircled{56}_s \oplus \textcircled{8}_s \oplus \textcircled{56}_c$
	(R, $\overline{\text{R}}$ )	$ \alpha, \tilde{\alpha}, k^\ell\rangle$		0	$(\textcircled{8}_s \oplus \textcircled{8}_c) \otimes (\textcircled{8}_s \oplus \textcircled{8}_c)$ $= [\textcircled{8}_v \oplus \textcircled{60}_T \oplus \textcircled{35} \oplus \textcircled{28} \oplus \textcircled{1}]^2$

表 3: low lying states

ます。空間 4 次元の Gamma 行列のことを思い出すと、Gamma 行列は  $2 \times 2$  の行列でもって非対角に組んで block 化することができます。つまり、通常の  $4 \times 4$  Gamma 行列は既約ではない。既約な 4 次元の Clifford 代数の spinor は 2 次元表現である。同様の理由で 8 次元の場合でも、16 次元の spinor は既約ではなくて、 $8 \oplus 8$  という違う spinor に既約分解されるということが check できます。これが open string の話しであります。

closed string の場合は、(1.48) のように、open string を 2 つを張り合わせればよいわけです。(NS,  $\overline{\text{NS}}$ ) の場合は、ground state  $|k^i\rangle$  の  $(\text{mass})^2$  は  $\alpha'$  の unit で  $-2$  の scalar です。次の状態  $b_{-\frac{1}{2}}^i \tilde{b}_{-\frac{1}{2}}^j |k^{i'}\rangle \zeta_{ij}(k^\ell)$  は、 $8 \otimes 8$  と tensor 積をつくって既約分解してやると、対称で traceless、反対称、そして singlet と既約分解できます。これは spacetime boson です。(NS,  $\overline{\text{R}}$ ) は、左が boson で右が fermion だから spacetime fermion、(R,  $\overline{\text{NS}}$ ) も同様に spacetime fermion です。これらの sector ではやはり tachyon が ground state ですが、その次の状態  $b_{-\frac{1}{2}}^i |\tilde{\alpha}, k^{i'}\rangle \chi_{i\tilde{\alpha}}(k^\ell)$  は、 $\overline{\text{R}}$  sector の spinor と NS sector の vector が張り合わさっているような vector spinor というのができます。その既約分解は表のような形になっています。R $\overline{\text{NS}}$  sector はいまの場合、 $\sim$  のついていないのとついていないのとをひっくり返せばいいわけで、省略します。同じものができます。最後に (R,  $\overline{\text{R}}$ ) ですが、R と  $\overline{\text{R}}$  がどちらも fermion 的に振る舞って、全体として spacetime boson を作ります。その既約分解というのはあとで述べる GSO projection を作用する前は表のような形をしています。これはずいぶんたくさんの状態があります。この既約分解の導出方法をやっている時間はないのですが、Gamma 行列を何回かかけて反対称化する、spinor や vector の tensor 積を対称化、反対称化してやれば自分で check することができます。

す。この種の Lie 代数の既約表現の分解は、昔の quark model にもよくでてくる問題であり、quark model の本などをみて必要なことを学ぶことが可能でしょう。

## 6 Orientation Flip

徐々に第一回目の講義が終わりに近づいてきました。あと orientation flip と Chan-Paton factor を論じて前半を終わりにします。まずひもに矢印をつけることが可能か、という問題です。

まず、closed string の場合です。普通は  $\sigma = 0$  を適当に選んで反時計回りに矢印を書きますが、図 2 のよう

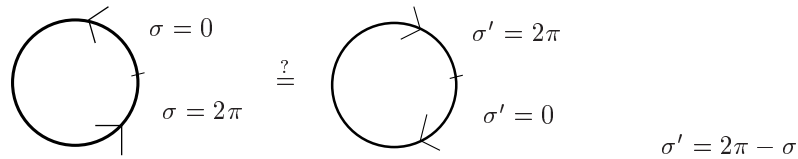


図 2: Flipped closed string

に反対向きに書いても構わないわけです。つまり、新たに  $\sigma' = 2\pi - \sigma$  を選んで  $\sigma'$  が増加していく方向に矢印をつけ直してみます。この二つの絵が、果たして違った絵なのかそれともまったく同等なのか、というのを量子論的に論じます。もちろん、 $\sigma' = 2\pi - \sigma$  というのは  $z$  と  $\bar{z}$  の入れ換えです。左の絵から右の絵に移るということは、 $z$  と  $\bar{z}$  を入れ換えるということに closed string では対応しています。この演算は、量子論では常に unitary operator による unitary 変換で実現できます。よって、Hilbert space にある  $\Omega$  という演算があって、左の絵から右の絵に移ることを実現してくれると考えることができます。

$$\begin{aligned}\Omega X^\mu(z, \bar{z})\Omega^{-1} &= X^\mu(\bar{z}, z) \\ \Omega \psi^\mu(z)\Omega^{-1} &= \tilde{\psi}^\mu(\bar{z})\end{aligned}\tag{1.49}$$

基本的な問いかけとして、物理的な状態空間に属する  $|\text{phys}\rangle$  に対して  $\Omega$  を作用させると + sign で元に戻るのか  $\Omega|\chi\rangle = |\chi\rangle$ ?, があります。この問いに対して、その答えが NO だったら考えている closed string というのは orientable、つまり時計回りと反時計回りの状態は別の状態である。この 2 つの絵は異なる物理的な状態かつ量子論的な状態というのを表します。一方もし YES なら、考えている状態空間のすべての物理状態に対して  $\Omega$  が invariant つまり +1 の eigenvalue をもっていると考えられます。この時、左と右の絵を量子論的に区別することが不可能です。この場合には矢印をつけるということに意味がないわけで、いま考えている closed string は nonorientable です。

では open string の場合はどうか。open string というのも同じ調子でやっていきます。ただし、図 3 にあるように、幅を  $\pi$  にとってありますから、 $\sigma' = \pi - \sigma$  になります。こういった演算を実現するような演算  $\Omega$  は次のようになります。

$$\begin{aligned}\Omega X^\mu(z, \bar{z})\Omega^{-1} &= X^\mu(e^{i\pi}\bar{z}, e^{i\pi}z) \\ \Omega \psi^\mu(z)\Omega^{-1} &= \tilde{\psi}^\mu(e^{i\pi}\bar{z})\end{aligned}\tag{1.50}$$

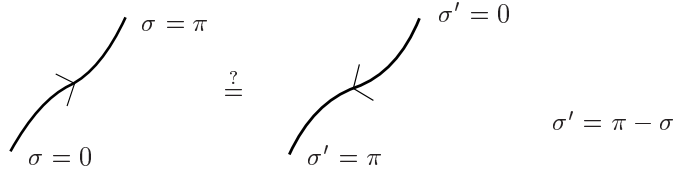


図 3: Flipped open string

よって  $\Omega = (-1)^N$  です (Neumann condition の場合)。closed string と同様の調子で、問いかけ  $\Omega|\chi\rangle = |\chi\rangle$  ? に対して NO だったらこの open string は orientable、もし YES だったらこの open string は nonorientable です。number operator  $N$  の eigenvalue が even の状態だけが生き残ります。ところが我々の観測する massless の vector は、vacuum に  $\alpha_{-1}^\mu$  というのをかけたものです。number operator の eigenvalue は 1 ですから odd です。したがって open string を nonorientable にすると、現実存在しているものを排除してしまうことになるので具合が悪いわけです。

## 7 Chan-Paton Factors

具合が悪いのをどうするかというと、材料を増やします。増やす材料というのが Chan-Paton factor という自由度です。今は単に 1 本の紐があるわけですが、open string の場合はひもの端点に何か色づけされた自由度、color の自由度をつけることが可能です。color の自由度というのは単に index の自由度だけです。他の属性をもたないわけで、 $ij$  の添字を ket vector に手で加えます。

orientable な場合の open string からはじめることにしましょう。状態空間というのは各 level での occupation number、つまりどういう oscillation がいくつあるかということ、それに重心運動量を加えてさらに 2 つの添字  $i, j$  で指定される状態たちであります。

$$\mathcal{H} = \{ \{ |N_m, p^\ell; ij \mid 1 \leq i, j \leq n \} \} \quad (1.51)$$

$i, j$  の添字を  $n$  行  $n$  列の行列の行列要素と考えますと、 $i, j$  を導入する代わりに別の  $n^2$  個の base に移ることもできます。つまり、 $U(n)$  の Lie algebra の元を base として導入して、その名前  $a$  に関して 1 から  $n^2$  まで和をとることにします。この base に移ってできた新たな ket vector を  $|N_m, p^\ell; a\rangle$  と書きます。

$$\sum_{i,j=1}^n |N_m, p^\ell; ij\rangle \lambda_{ij}^a \equiv |N_m, p^\ell; a\rangle \quad a = 1 \sim n^2 \quad \text{for } \lambda_{ij}^a \in U(n) \text{ Lie algebra} \quad (1.52)$$

これは worldsheet の立場から見るとほとんど trivial な構成ですが、この添字がつくる対称性が、時空の物理に行くと gauge 対称性に対応していることがわかります。つまり、worldsheet の立場から見ると flavor の対称性と思えるものが、我々の住んでいる時空から見ると gauge 対称性に昇格されて見えています。このような現象がひもの理論にしばしばでてきます。以上、orientable な場合です。

nonorientable な場合がやりたいことです。いまの場合、 $\Omega$  projection を作用すると、ひもの端点についてい

る Chan-Paton は、向きを反対に読むことで添字も反対向きに変わるわけです。

$$\Omega|N_m, p^\ell; ij\rangle = (-)^N|N_m, p^\ell; ji\rangle \quad (1.53)$$

このことをふまえて、さっきと同じように Lie 代数の generator からなる別の base に移るわけですが、 $\Omega$  を作用した結果、+か-の eigenvalue をもつ eigenstate になってほしいわけです。そのためには、 $i, j$  に関して対称化、反対称化してやればよいわけです。

$$\{\{\lambda_{ij}^a\}\} = \underbrace{\{\{\lambda_{ij}^{a(\text{sym})}\}\}}_{\# = \frac{n(n+1)}{2}} \oplus \underbrace{\{\{\lambda_{ij}^{a(\text{asym})}\}\}}_{\# = \frac{n(n-1)}{2}} \quad (1.54)$$

$n^2$  個の generator のうち対称化されている generator は  $\frac{n(n+1)}{2}$  個、反対称化されている generator は  $\frac{n(n-1)}{2}$  個あります。こうしてやると、+sign、-sign どちらかが出てきます。そして得られた新たな base

$$\sum_{i,j=1}^n |N_m, p^\ell; ij\rangle \lambda_{ij}^{a(\text{sym/asym})} \equiv |N_m, p^\ell; a, \text{sym/asym}\rangle \quad (1.55)$$

に関して  $\Omega$  を作用してやると、固有値として  $(-)^N$  という以前のものに加えて対称化するか反対称化するかに依存して +か-が出てきます。

$$\begin{aligned} \Omega|N_m, p^\ell, a; \text{sym/asym}\rangle &= (-)^N (\text{sgn}) |N_m, p^\ell, a; \text{sym/asym}\rangle \\ \text{where } \text{sgn} &= \begin{cases} + & \text{for sym} \\ - & \text{for asym} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.56)$$

$\Omega$  invariant な space をつくるためには、 $(-)^N (\text{sgn}) = 1$  になっていれればよいわけです。この条件を満たしつつ、しかも我々の観測する massless vector が生き残るようにするためには、 $N$  が odd なときが生き残ってほしいわけです。そのためには、antisymmetric の generator が Lie 代数であるようなものを選ばなければならない。それは  $Sp$  ではなくて  $SO$  である。 $SO(n)$  というのを Chan-Paton factor に選んでおけば、 $\Omega$  projection のあとで local な gauge 対称性として生き残ってくれるような模型がつくれるという結論に達します。ですから、nonorientable string の Chan-Paton factor に基づく gauge 自由度というのは  $SO$  です<sup>2</sup>。

---

<sup>2</sup>実は量子論的には、 $\Omega$  projection の作用に際し  $ij$  を取り換えるよりもゆるい条件を課すことが可能で、 $Sp$  がでてくることがあることが指摘されています。この講義ではやりません。

# Lecture 2

## 1 Circle Compactification and T-duality of a Closed String

さらに spectrum の解析を進めましょう。それに加えて、いわゆる T-duality の話をします。振幅の計算はしないと言いましたが、spectrum に関する最低限の議論をするためには、genus 0 の torus partition function の計算が最も明解な方法ですのでこれを論じます。真空の安定性を議論するためには、tadpole の解析が有効です。後半では、GSO projection および heterotic string の話をしたいのですが、少し時間の方がおしていますのでこれらは明日に持ち越したほうがいいかもしれません。

前回の講義で時空の次元が 10 というのがでてきました。ひもを我々の時空および素粒子に応用するとしますと、6 個の方向は非常に小さくなっていて我々の観測にはかからないと考えたいわけです。つまり、小さくなっているということを手で与えるのを認めて、1 本のひもを取り扱うことができなければなりません。

一つの coordinate、いま closed bosonic string 1 個だけをとって、その 24 番目の coordinate にのみ注目します。これを半径  $R$  の circle にコンパクト化するとはい体どうということなのか。それは  $\sigma$  を  $2\pi$  だけ shift すると、 $X^\mu$  はもとの  $X^\mu$  に戻ってくるということです。いま  $\sigma$  space の circle と  $X$  space の circle があって、 $\sigma$  circle が 1 回回るときに  $X$  circle は何回回ってもいいわけです。一般には  $\sigma = 2\pi$  での  $X$  の値は 0 ではなくて、 $2\pi R$  の整数倍だけの差があっても circle 上では許されるわけです。

$$X(\tau_M, \sigma + 2\pi) = X(\tau_M, \sigma) + 2\pi\ell R \quad (2.1)$$

そのときの整数  $\ell$  を winding number と呼ぶことにします。この新たな境界条件と consistent な mode 展開というのが必要になってきます。circle にコンパクト化した場合の  $X$  の展開は次の (2.2) の形をしています。

$$X = \hat{X}_0 + \alpha' \hat{P}_0 \tau_M + \alpha' \sigma \hat{w} + (\text{oscill. as before}) \quad (2.2)$$

この  $\hat{w}$  という operator が winding number を与えています。この展開について少し考えてみましょう。Laplace 方程式の解として、 $\tau$  に比例する項に加えて  $\sigma$  に比例する項は、一般には排除できず、むしろあるべきです。そして  $\alpha' \sigma \hat{w}$  と書いた係数  $\hat{w}$  が operator となりますが、その固有値がちょうど winding number の整数をはかっていることがわかります。いま circle にコンパクト化したわけですから、運動量は離散化されます。

$$\text{e.v. of } \hat{P}_0 = \frac{m}{R}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (2.3)$$

この場合、重心部分は平面波  $e^{iPX_0}$  という波動関数ですから、 $P$  は整数/半径ということになります。それが periodic boundary condition と consistent な eigenvalue であるわけです。一方、(2.2) の第 3 項  $\alpha' \sigma \hat{w}$  ですが、 $\sigma$  が  $2\pi$  だけずれたときに一般に  $2\pi\ell R$  の固有値が許されます。 $\hat{w}$  の固有値が  $\frac{2\pi\ell R}{2\pi\alpha'}$ 、つまり  $\hat{w}$  のとりうる固有値は  $\frac{\ell R}{\alpha'}$  です。

$$\text{e.v. of } \hat{w} = \frac{2\pi\ell R}{2\pi\alpha'} = \frac{\ell R}{\alpha'}, \quad \ell \in \mathbb{Z} \quad (2.4)$$

$\hat{P}$  と  $\hat{w}$  は一般に交換する演算子で、その固有値たちは  $P = \frac{m}{R}$ 、 $w = \frac{\ell R}{\alpha'}$  となっています。  $R$  を無限大にすると、 $\hat{w}$  の固有値としては  $\ell$  が 0 しか許されず、 $\hat{P}$  の固有値というのは連続的になって正しい答えになっていることが理解できます。(2.5) 式は mode 展開を別の形で書いたものです。

$$X \equiv X_R(z) + \overline{X}_L(\bar{z}) \quad (2.5)$$

これを  $z$  に依存する部分と  $\bar{z}$  に依存する部分を (2.7) と書くのが適当です。

$$\begin{aligned} X_R(z) &= X_R - i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0 \ln z + (\text{oscillators of right movers}) \\ \overline{X}_L(\bar{z}) &= X_L - i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\tilde{\alpha}_0 \ln \bar{z} + (\text{oscillators of left movers}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

以前は  $P_0$  は係数を除いて  $\alpha_0$  や  $\tilde{\alpha}_0$  に等しいと言いましたが、いまの場合  $\sigma$  に比例する項もあるので、 $\alpha_0$  と  $\tilde{\alpha}_0$  は異なった値をもちます。 $\alpha_0$  は係数を除いて  $\hat{P}_0 + \hat{w}$  で、 $\tilde{\alpha}_0$  は  $\hat{P}_0 - \hat{w}$  です。

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} (\hat{P}_0 \pm \hat{w}) \quad \text{e.v. of} \quad \alpha_0 = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left( \frac{m}{R} \pm \frac{\ell R}{\alpha'} \right) \quad (2.7)$$

ここで重心座標をむりやり二つに分けることができます。

$$X_{\frac{R}{L}} = \frac{1}{2} (\hat{X}_0 \pm \hat{Y}_0) \quad (2.8)$$

これは人為的で、全体としては  $\hat{Y}_0$  coordinate は現れていないのですが、わざと書いておきました。これは次の 2 節で明らかになります。

今度は mass operator をこの模型で測りましょう。

$$\begin{aligned} \alpha' \hat{\mathcal{M}}_{(25)}^2 &\equiv 2\alpha' P_0^+ P_0^- - \alpha' \sum_{i=1}^{D-3=23} (P_0^i)^2 \\ &= 2 \left( L_0^{(\text{cyl})} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{23} \alpha_0^{i2} \right) + 2 \left( \overline{L}_0^{(\text{cyl})} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{23} \tilde{\alpha}_0^{i2} \right) \\ &= 2 \left( N + \frac{1}{2} \alpha_0^{(24)^2} - 1 \right) + 2 \left( \tilde{N} + \frac{1}{2} \tilde{\alpha}_0^{(24)^2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

いま 1 方向を compact 化しているので、我々は 25 次元空間に住んでいると思います。すると、Lorentz invariance は 25 次元の Lorentz invariance です。運動量の subtraction は 23 までです。それで (2.9) の第 3 行目の式が得られます。Lecture 1 で話しました mass operator と違うところは、新たに  $\alpha_0^{24}$  の部分が姿を現している。mass operator の固有値には、compact 化した次元の振動および運動量に基づいた mass が上乘せされるわけです。

$$\text{e.v of } \alpha' \hat{\mathcal{M}}_{(25)}^2 = 2 \left( N + \frac{\alpha'}{4} \left( \frac{m}{R} + \frac{\ell R}{\alpha'} \right)^2 - 1 \right) + 2 \left( \tilde{N} + \frac{\alpha'}{4} \left( \frac{m}{R} - \frac{\ell R}{\alpha'} \right)^2 - 1 \right) \quad (2.10)$$

(2.10) が closed bosonic string の circle compact 化の公式です。

一つ式 (2.10) を見てわかることは、 $R$  と  $\frac{\alpha'}{R}$  を取り換えますと、spectrum が不変になっていることです。ここで、半径  $\frac{\alpha'}{R}$  をもつ別の理論で同じ計算をやることを考えてみましょう。別の理論のときには parameter、

oscillator、すべて  $d$  を添字としてつけて、同じ計算を  $d$  の添字のついた模型でやって spectrum を書いてみます。つまり、別の模型が同じ mass spectrum をもっているというのはどういう状態かを考えてみることにします。するとそういう対応は、

$$\alpha_{0d} = \alpha_0 \quad \tilde{\alpha}_{0d} = -\tilde{\alpha}_0 \quad R_d = \frac{\alpha'}{R} \quad \alpha_{nd} = \alpha_n \quad \tilde{\alpha}_{nd} = -\tilde{\alpha}_n \quad (2.11)$$

であることがわかります。nonzero mode に関してはいつも bilinear に入ってきていますので、別に sign を変える必要はないんですが、変えても構わない。こういった変換を考えますと、それは  $\bar{\cdot}$  のついた oscillator に  $-$  をつけるということを意味しています。T-dual 変換として、 $X_L$  に  $-\text{sign}$  をつける片側 parity 変換を定義します。

$$\hat{T}_{24} ; X(z, \bar{z}) \longrightarrow Y = X_R(z) - \bar{X}_L(\bar{z}) \quad (2.12)$$

$\frac{\alpha'}{R}$  であたえられる dual radius を  $R_d$  とします。 $\hat{T}_{24}$  変換と  $R \rightarrow R_d$  の置きかえで、mass spectrum は不変に保たれているということがわかります。

fermionic closed string の場合も同様で、やはり single side parity 変換を行ってやればよい。

$$\begin{aligned} \hat{T}_8 ; X^8(z, \bar{z}) &\longrightarrow Y^8(z, \bar{z}) = X_R^8(z) - \bar{X}_L^8(\bar{z}) \\ \psi_1^8(z) &\longrightarrow \psi_1^8(z) = \psi_1^8(z) \\ \tilde{\psi}_1^8(\bar{z}) &\longrightarrow \tilde{\psi}_1^8(\bar{z}) = -\tilde{\psi}_1^8(\bar{z}) \end{aligned} \quad (2.13)$$

fermion に対しては  $\tilde{\psi}$  という  $\bar{z}$  に依存する部分にだけ符号を変えてやればよい。ここで 8 は、10 次元の transverse coordinate の 1 つを表しています。

## 2 T-duality of an Open String

ではこの演算を盲目的に open string に適用してやればどうなるか、これはおもしろい問題です。いま Neumann boundary condition に従うような open bosonic string を考えます。時空は radius  $R$  の circle をもっているとします。いま得られた演算  $\hat{T}_{24}$  というのを盲目的に open string coordinate に適用してやります。つまり  $\bar{z}$  に依存する部分に  $-\text{sign}$  をつけるわけです。

$$\begin{aligned} \hat{T}_{24} : X(z, \bar{z}) &\longrightarrow Y(z, \bar{z}) = X_R(z) - \bar{X}_L(\bar{z}) \\ &= \hat{Y}_0 - i\alpha' \hat{P}_0 \ln \frac{z}{\bar{z}} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n} - i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} \bar{z}^{-n} \end{aligned} \quad (2.14)$$

closed string のときもそうですが、zero mode の出方が違ってきます。前は  $+$  だったので  $X_0$  が残ったわけですが、こんどは引き算ですのでもととの理論では消えてなくなっていた  $\hat{Y}_0$  という coordinate が姿をあらわすようになります。これはもともとの canonical quantization ではまったく姿を現さなかった座標変数であります。これは  $\hat{P}_0$  とは交換する演算子です。一方、 $\hat{P}_0$  は  $\log z/\bar{z}$ 、つまり  $\sigma$  にかかっている operator であります。したがって、dual な  $Y$  に関する理論では  $\hat{P}_0$  は momentum ではなくて、winding number になっています。それに加えて oscillator の部分では、 $z$  と  $\bar{z}$  で relative な sign  $-$  がつきます。T 変換を施してやると、Neumann



boundary condition に従う open string が Dirichlet boundary condition になっているということがわかります。実際、

$$\begin{aligned} Y(\sigma = 0) &= \hat{Y}_0 = c \\ Y(\sigma = \pi) &= \hat{Y}_0 + 2\pi\alpha'\hat{P}_0 = c + \frac{2\pi\alpha'm}{R} = c + 2\pi R_d m \end{aligned} \quad (2.15)$$

となり、新たな  $Y$  coordinate の  $\sigma = 0$  では  $\hat{Y}_0$  であって、 $\sigma = \pi$  では  $\hat{Y}_0 + 2\pi\alpha'\hat{P}_0$  になっています。 $Y$  と  $P$  は canonical conjugate ではないので同時に固有値をもてますから、これは両端が時空のある端点にピン止めされているという、Dirichlet boundary condition に従う operator を表していることがわかります。

$$\hat{T}_{24} : \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{D} \quad \text{in the 24th coordinate.} \quad (2.16)$$

### 3 T-duality of a Closed Unoriented String

ここで導入した  $T$  という演算と  $\Omega$  projection の関係を調べてみましょう。もう一度復習しておく、unoriented string というのは closed string の Hilbert space のうち、 $\Omega = 1$  の eigenvalue をもつ状態に制限して得られた string です。一方、左から  $\Omega^{-1}$ 、右から  $\Omega$  をかけることによって、 $\sim$  のついている oscillator と  $\sim$  のついていない oscillator が入れ替わるわけです。同様に zero mode  $\hat{X}_0$  や  $\hat{P}_0$ 、 $\hat{w}$  がこの変換に対してどのような変換を受けるかがわかります。

$$\hat{P}_0 = \Omega^{-1}\hat{P}_0\Omega \quad \hat{w} = -\Omega^{-1}\hat{w}\Omega \quad (2.17)$$

運動量は even つまり  $+$  sign でひっくり返り、winding number operator は  $\sigma$  にかかる operator だから  $\Omega$  の action に対して odd です。 $\hat{P}_0$  と  $\hat{w}$  は交換するので、同時対角化可能です。 $\hat{P}_0$  と  $\hat{w}$  の固有値方程式は

$$\hat{P}_0|m, \ell\rangle = \frac{m}{R}|m, \ell\rangle \quad \hat{w}|m, \ell\rangle = \frac{\ell R}{\alpha'}|m, \ell\rangle \quad (2.18)$$

となります。状態  $|m, \ell\rangle$  は  $\Omega$  演算に対して次の性質を持ちます。

$$\Omega|m, \ell\rangle = |m, -\ell\rangle \quad \text{or} \quad \Omega|x, \ell\rangle = |x, -\ell\rangle \quad (2.19)$$

$\Omega$  invariant な状態をつくるには、対称化を施してやればいい。

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(|m, \ell\rangle + |m, -\ell\rangle) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|x, \ell\rangle + |x, -\ell\rangle) \end{cases} \quad m, \ell \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_{-n}\tilde{\alpha}_{-m}|x, \ell\rangle + \alpha_{-m}\tilde{\alpha}_{-n}|x, -\ell\rangle) \quad \text{survive} \quad (2.20)$$

今度は、 $T$  演算と  $\Omega$  action とを次々と続けて作用してみましょう。最初に  $X$  に  $T$  演算を施して半径  $R_d$  の  $Y$  coordinate に移ります。ですが、 $Y$  coordinate での  $\Omega$  演算は  $-$  がついて戻ってくるということがわかります。

$$\Omega Y(z, \bar{z}) \Omega^{-1} = -Y(\bar{z}, z) \quad (2.21)$$

そのため、 $-$  sign を考慮しなければなりません。 $Y$  coordinate の理論では、 $\Omega$  演算をするとさっきとは逆の符号がでてきます。

$$\Omega \hat{Y}_0 \Omega^{-1} = -\hat{Y}_0 \quad \Omega \hat{w}^Y \Omega^{-1} = \hat{w}^Y \quad \Omega \hat{P}_0^Y \Omega^{-1} = -\hat{P}_0^Y \quad \Omega \alpha_n^Y \Omega^{-1} = -\tilde{\alpha}_n^Y \quad (2.22)$$

座標や運動量は  $-$  sign がつき、winding number は invariant です。invariant な状態をつくるには、座標のところを対称化させてやらなければならないということがわかります。

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( |y, \ell^Y\rangle + |-y, \ell^Y\rangle \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{-m}^{24Y} \tilde{\alpha}_{-n}^{24Y} |y, \ell^Y\rangle + \alpha_{-n}^{24Y} \tilde{\alpha}_{-m}^{24Y} |-y, \ell^Y\rangle \\ \alpha_{-m}^{24Y} \tilde{\alpha}_{-n}^{24Y} |y, \ell^Y\rangle - \alpha_{-n}^{24Y} \tilde{\alpha}_{-m}^{24Y} |-y, \ell^Y\rangle \end{pmatrix} \text{ survive} \quad (2.23)$$

座標のところを  $-$  sign をつけて対称化するとはどういうことを図 4 で表しています。  $y$  という点の上でつくっ

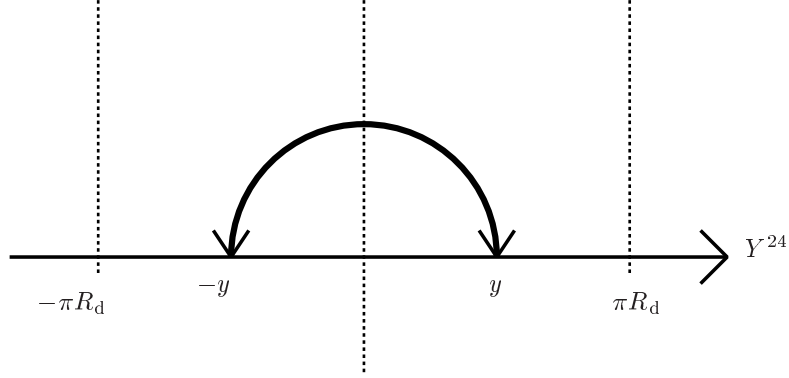


図 4: Orbifold

た状態だけでは  $\Omega$  invariant な状態はつくれず、いつもこれと  $Y^{24}$  という面に関する鏡映点を pair にして加えないと invariant な状態がつくれていないことがわかります。このように、  $Y$  coordinate の理論での  $\Omega$  action というのはおもしろい役目をしています。最初は半径  $R_d$  の circle が target space だと思っていたけれども、  $+y$  と  $-y$  はいつもペアにして対称化して考えなければいけないので、事実上  $y$  の動ける範囲というのは  $0$  から  $\pi R_d$  になっています。実は target space というのは circle ではなくて half circle になっています。割るという演算を含む compact 化を紐の理論では一般に orbifold と呼びます。ここで言う演算というのは  $\mathbb{Z}_2$  という作用で、次のような二つの代数的な element  $1$  と  $\hat{\mu}$  から成ります。

$$\mathbb{Z}_2 = \left\{ \left\{ 1, \hat{\mu} \left| \begin{array}{l} \hat{\mu}(y) = -y \\ \hat{\mu}(\sigma) = 2\pi - \sigma \end{array} \right. \right\} \right\} \quad (2.24)$$

$\hat{\mu}$  というのはどういう演算を施すのかというと、worldsheet 上で  $\sigma$  を  $2\pi - \sigma$  に変え、それだけでなく同時に行き先の時空上の点をその鏡映点に移します。これを 2 回続けて行くと identity です。これは  $1$  と  $\hat{\mu}$  から成る  $\mathbb{Z}_2$  symmetry となります。こういう特別な、  $\mathbb{Z}_2$  で紐の Hilbert 空間の商空間をつかって invariant な状態だけを取り出した理論ができます。  $Y$  という dual theory での  $\Omega$  invariant な状態は、 circle 上に compact 化した理論ではなくて、 half circle 上で compact 化された closed string の理論になっています。これを一般に orientifold と言います。

## 4 String Perturbation Theory

これで T-dual 変換に関する説明が一息つきました。これから、摂動論を説明します。そのためにはまず、摂動論を見て真空の安定性を議論したい、つまり摂動論を見て低い genus、つまり disk、 $RP^2$ 、torus とか annulus、Klein bottle の 0 点振幅あるいは 1 点振幅をみる必要があります。これらは、振幅そのものが重要というよりは、spectrum あるいは真空の安定性を調べるための便利な道具となっています。

Polyakov の action(1.1) を思い出してください。この形は 2 次元の一般相対論という立場から見ますと、 $D$  個の massless の scalar が 2 次元の intrinsic metric に couple するという相互作用を表しています。では当然、2 次元の Einstein 項や宇宙項はどうなっているかが問題になってきます。その項を  $\Delta S$  と書いておきます。

$$\Delta S = \mu_0^2 \int_{\Sigma} d^2\xi \sqrt{-g} + \frac{\ln \lambda}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2\xi \sqrt{-g} R^{(2)}(\xi) \quad (2.25)$$

$d^2\xi$  は  $d\sigma d\tau$  のことです。

(2.25) の第 1 項は宇宙項です。これは local な Weyl invariance を破っているもので、紐の理論ではこういった項は存在すべきではありません。けれども、もしこういう項が生成されたときに、これを消すための counter term として付け加えておきましょう。

次に (2.25) の第 2 項の Einstein term ですが、どうして最初からいれなかったかということ、それは 2 次元の一般相対論というのは空っぽだからです。実際物理的自由度を計算してみますと、0 どころか 2 次元の自由度は負になっています。2 次元の Einstein 項は、紐の掃く surface の topology だけを測っていて、Euler 数  $\chi(\Sigma)$  になっています。

$$\chi(\Sigma) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2\xi \sqrt{-g} R^{(2)} = 2 - 2h - b - c \quad (2.26)$$

ここで  $h$  は、surface についた handle の数、 $b$  は boundary の数、 $c$  は nonorientability の度合でそれを cross cap と言います。さらに、

$$e^{-\Delta S} = \lambda^{2h+b+c-2} \quad (2.27)$$

は  $\lambda$  のべきで、ひもの摂動論というのは  $\lambda$  に関する摂動展開となっています。 $\lambda$  の次数は Euler 数の  $-1$  倍で測られますから、ひもの摂動論の次数というのは Euler 数で測られるということがわかります。各々のひもの各次数では 2 次元の場の理論になっているのですが、ひもの摂動論そのものは、各 surface での計算が与えられて、さらにそれに関してありとあらゆる topological に等価でない surface に関して和をとらなければなりません。1 本のひもの理論に関して摂動論を展開しようとしみますと、一番低い次数とは spherical topology で、次の次数の 1 つとして boundary の 1 個ある disk(open string の掃く世界面)、その次の次数の 1 つとして、closed string の掃く世界面で sphere に穴の 1 個あいた torus という具合になっています。topological に異なる surface 達に関して重みをつけて和をとり、手で摂動級数を与えます。

$$\mathcal{Z} = \sum_{h,b,c \geq 0} \lambda^{-\chi(h,b,c)} \mathcal{Z}(h,b,c) \quad (2.28)$$

$\lambda$  というのは、いまのところ手で与えた free parameter です。理論の parameter は  $\frac{1}{2\pi\alpha'}$  で、それは単位長さ当たりの energy 密度、紐の tension ですが、それに加えて  $\lambda$  という free parameter を導入したように

(h,b,c)	(0,0,0)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,0,0)	(0,2,0)	(0,1,1)	(0,0,2)	
$\chi$	2	1	1	0	0	0	0	-1
external \ topology of states \ a surface	sphere	disk	$RP^2$	torus	cylinder (annulus)	Möbius strip	Klein bottle	
oriented closed	○	×	×	○	×	×	×	
unoriented open	×	○	×	×	○	○	×	
unoriented closed	○	○	○	○	○	○	○	

表 4: String states and topologies      ○ : allowed    × : disallowed

思えます。ところがもう少しすすんだ考察をしますと、そうではないということがわかります。自由に伝搬する 1 本のひもという立場を離れて、それに加えて外場としてひもの状態が凝縮した場合を考察します。この立場では、さきほど出てきました closed string spectrum で massless で Lorentz scalar である状態に対応する、dilaton の場  $\Phi(X)$  が

$$(\text{const}) \int d^2\xi \sqrt{-g} \Phi(X) R^{(2)}(\xi) \quad (2.29)$$

のように action に挿入されていることを示すことができます。したがって、この  $\lambda$  というのは手で与えた free parameter ではなくて、dilaton 場  $\Psi(X)$  が値をもつ、つまり dynamical な理由で値をもって  $\lambda$  が生成されたと考えることができます。 $\lambda$  というのは純然たる 1 本のひもの摂動論では free parameter であるけれども、何かもっと摂動を超える枠組ができた暁には、理論の中から output として決定されるある決まった数である。ひもの理論においては coupling constant は値が決まっています、それは勝手に調節できるような数ではない。おそらくその値は小さくはなくて、摂動はよくないであろうというのが予測であります。

いま、ひもの摂動論をもっと具体的に Euler 数をもって並べて表 4 に書いておきます。Euler 数は handle  $h$  と boundary  $b$  と cross cap  $c$  の数で決まります。例えば disk は boundary をもっていますけれども、hole とか cross cap はない。一方、すぐあとに出てくる  $RP^2$  は boundary を持っていませんが、cross cap を持っています。ひもが orientable である理論は closed string だけから成る理論です。unoriented な理論の場合は、open string と closed string の掃く世界面に関して、すべての topology を考察します。さらに各々の surface に関して、external states としてどういうものが可能かをこれ以降、考察していきます。これは散乱振幅を考察する際に重要です。

例えば sphere の topology に関しては、open string の external states はつけられません。一方、disk は open string の掃く geometry ですが、さらにこれに closed string を突っ込むことは可能です。つまり disk の中に cylinder がくっついている絵は書けます。一般的に open string の掃く geometry であっても、closed string の external states を挿入する、つまり演算子として挿入することができます。

## 5 Green's (Two Point) Functions

これで摂動論に入っていきます。まず、2次元の free な理論の 2 点関数  $X^\mu X^\nu$  の計算です。2 点関数と等価なものとして、もともとの operator の積と 0 に関して normal order されたものの差というものがあります。一般に、二つの演算子が 2 次元面上にのっかっている場合、常に radial ordering をとります。つまり左側に時刻の後のものをとります。これは  $z$  平面上に関する time ordering に対応するものです。後からおこった event はいつも左側にくる、そういう ordering がいつも了解されていると思ってください。これで  $X$  に関するもともとの積と normal order されたものとの差を計算しますと、zero mode のところから  $\log z$  がでてきて、それ以外の部分というのは幾何級数に  $\frac{1}{n}$  が掛かっているもので  $\log\left(1 - \frac{z'}{z}\right)$  になります。

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\left(X^\mu(z, \bar{z})X^\nu(z', \bar{z}') - :X^\mu(z, \bar{z})X^\nu(z', \bar{z}'):\right) &= -\frac{i\alpha'}{2} \ln|z|^2 [P_0^\mu, X_0^\nu] + \frac{\alpha'}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ \left(\frac{z}{z'}\right)^{-n} + \left(\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}\right)^{-n} \right] \eta^{\mu\nu} \\ &= -\alpha' \eta^{\mu\nu} \ln|z - z'| \end{aligned} \quad (2.30)$$

これをあわせて 2 次元の Green 関数というのは (2.31) になります。

$$\langle 0|X^\mu(z, \bar{z})X^\nu(z', \bar{z}')|0\rangle - \langle 0|X_0^\mu X_0^\nu|0\rangle = -\alpha' \eta^{\mu\nu} \ln|z - z'| \quad (2.31)$$

これは closed string の場合で、open string の場合は次のようになります。

$$X^\mu(z, \bar{z})X^\nu(z', \bar{z}') = :X^\mu(z, \bar{z})X^\nu(z', \bar{z}') : -\alpha' (\ln|z - z'| \pm \ln|z - \bar{z}'|) \quad \begin{matrix} \textcircled{N} \\ \textcircled{D} \end{matrix} \quad (2.32)$$

$\alpha$  と  $\tilde{\alpha}$  はもはや独立ではありません。  $\alpha = \tilde{\alpha}$  です。  $\alpha$  と  $\tilde{\alpha}$  の commutator は 0 ではありません。以前に存在した項に加えて、その image point に対応する correlation があるわけです。いま open string の掃く geometry というのは幅  $\pi$  の strip だったんだけど、それを  $z$  に変換しますとそれは上半面になっています。どうしてかということ  $z = e^{\tau+i\sigma}$  ですね。  $\sigma$  はいまや 0 から  $\pi$  です。  $z$  の言葉でいうと、open string の掃く geometry というのは upper half plane. boundary は実軸です。このことは何かというと、2次元の Laplace 方程式の鏡像問題と等価で、2次元の Laplace 方程式の Green 関数を求めなさいといわれたら、specific operator ではなくて単に鏡像でやればいわけです。 Neumann boundary condition ですから、  $z'$  が charge の位置だと思えば、boundary condition を満たすためには、  $z'$  に charge を置くや否や実軸に対称な  $\bar{z}'$  にところにも charge を置かなければならない。置くや否や boundary condition は一義的に十分満たされている。第 2 項は image charge の寄与であるということがわかります。  $\textcircled{D}$  の場合は符号がちょうどさかさまになっています。

## 6 Boundary States

次は boundary state の話をします。みなさん御存知のように、upper half plane から disk へは  $SL(2, \mathbb{R})$  変換で、つまり、  $\frac{az+b}{cz+d}$   $ad - bc = 1$ 、  $a, b, c, d$  は実という一次分数変換で map できます。ひもの理論では一次分数変換で map できる geometry 達は同等とみなしてさしつかえありません。つまり、upper half plane で計算し

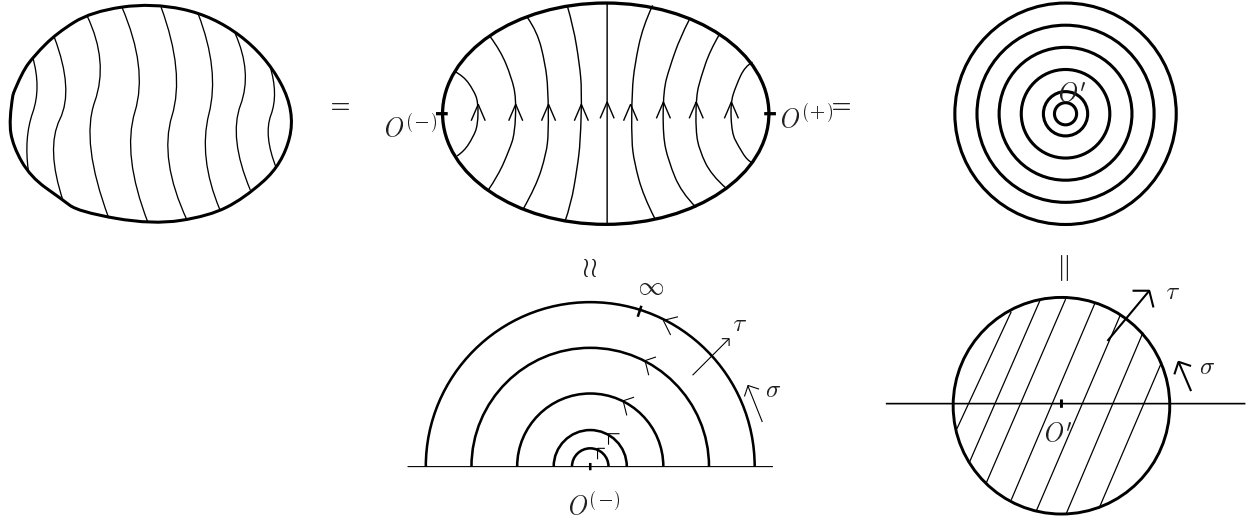


図 5: strings sweeping over the disk

てやっても disk で計算してやっても、最終的な答えは変わらないわけです。その様子を図 5 で表します。いま、disk で計算をすることにします。disk というのは open string の worldsheet geometry です。例えば、 $\tau = -\infty$  のところ (点  $O^-$ ) にある小さな open string が徐々に伸びて行って最終的に  $\tau = +\infty$  (点  $O^+$ ) で小さな open string で終わっている図 (真中上の図) を考えることができます。これを upper half plane に map してやると、複素平面において実軸上で  $\sigma$  微分が 0 ということですから、open string の掃く geometry は真中下の図で与えられます。これが今まで採ってきた第 1 の立場です。一方第 2 の立場として、disk を closed string の掃く geometry が途中で終わったと考えます。右上の図で同心円で切っているのがこの見方に対応しています。つまり、 $\tau = -\infty$  (点  $O'$ ) で closed string の状態が作られてそれは徐々に伝搬するんだけど、 $\tau = +\infty$  まで行かずに  $\tau = 0$  で終わっているというふうに考えることができます。その終わり方は、 $\tau$  微分が 0 で与えられます。つまり、 $z = 1$  の radius で  $\tau$  微分が 0 であるという条件を満たしていなければなりません。 $|0\rangle$  というものから始まった状態を  $\langle B|$  という bra vector で終了させて、closed string のもつ geometry から disk の geometry を引き出します。実際にどうすればいいかという、これを満たす  $\langle B|$  という状態を closed string の oscillator でつくってやる。

$$\langle B| \partial_\tau X^\mu(z, \bar{z}) \Big|_{|z|=1} = 0 \quad (2.33)$$

$\tau$  微分の代わりにそれと同等な  $z$  とその image point との差が  $|z| = 1$  で 0 であるという条件に書き換えてやることができます。

$$\langle B| \left( X^\mu(z, \bar{z}) - X^\mu \left( \frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{z} \right) \right) \Big|_{|z| \rightarrow 1} = 0 \quad (2.34)$$

(2.34) を展開していくと、(2.33) の  $\tau$  微分が 0 であるという条件と同等であるということがわかります。point をその image point に写すという演算を  $I$  としますと、 $I^2$  は単位演算子となります。一般に、 $I$  のべき数が 1 に戻ってくるような演算というのを involution と呼びます。disk geometry は、平面から involution  $I(z) = \frac{1}{\bar{z}}$

によって得られる conjugate point ともとの点との同一視をほどこして得られる geometry であります。いま、 $z$  を  $\frac{1}{z}$  に写すのではなく、 $z$  を  $-\frac{1}{z}$  に写す involution  $I(z) = -\frac{1}{z}$  による同一視を考えます。これはもはや disk にはなりません。sphere の描像でみるのがわかりやすく、北極があったら北極と南極を同一視しなさいということです。地球上では任意の点に対して conjugate な point が必ずあります。この同一視により作られた geometry というのを  $RP^2$  と呼びます。

$$\langle C | \left( X^\mu(z, \bar{z}) - X^\mu \left( -\frac{1}{z}, -\frac{1}{\bar{z}} \right) \right) \Big|_{|z| \rightarrow 1} = 0 \quad (2.35)$$

すると bra vector で表される  $\langle B |$  と  $\langle C |$  というのは一挙に計算できて、closed string の oscillator を使って作れます。答えは Bogoliubov 型の exponential だと思って見つけていくことにします。

$$\left\langle \begin{array}{c} B \\ C \end{array} \right| = \langle 0 | \exp \left( \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^\nu \mathcal{N}_m^{(B,C)} \tilde{\alpha}_{\nu m} \right) \quad (2.36)$$

point は、右から  $\alpha$  あるいは  $\tilde{\alpha}$  の annihilation が作用すると commutator として作用するという点です。結局、次のような条件が得られます。

$$0 = \langle 0 | \left( \alpha_n^\mu + \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^\nu \mathcal{N}_m^{(B,C)} \tilde{\alpha}_{\nu m}, \text{sgn}(n) \tilde{\alpha}_{-n}^\nu \right] \right) = \langle 0 | \left( \alpha_n^\mu + \mathcal{N}_n^{(B,C)} n \alpha_n^\mu \text{sgn}(n) \right) \quad (2.37)$$

where  $\text{sgn}(n) = \begin{cases} 1 & \text{for B} \\ (-1)^n & \text{for C} \end{cases}$

これより、boundary states  $\langle B |$  と  $\langle C |$  は、

$$\left\langle \begin{array}{c} B \\ C \end{array} \right| = \left\langle 0 \left| \exp \left( - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sgn}(m)}{m} \alpha_m^\nu \tilde{\alpha}_{\nu m} \right) \right. \quad (2.38)$$

となるのがわかります。この  $\langle B |$  と  $\langle C |$  を使って、disk 及び  $RP^2$  の 2 点関数を計算します。

$$\left\langle \begin{array}{c} B \\ C \end{array} \right| X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z', \bar{z}') \left| 0 \right\rangle \Big/ \left\langle \begin{array}{c} B \\ C \end{array} \right| 0 \rangle = \left\langle \begin{array}{c} B \\ C \end{array} \right| : X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z', \bar{z}') : \left| 0 \right\rangle \Big/ \left\langle \begin{array}{c} B \\ C \end{array} \right| 0 \rangle - \alpha' \eta^{\mu\nu} \ln |z - z'| \quad (2.39)$$

(2.39) の第 1 項に加えて、normal ordering されている項からの寄与がでてきます。以前は、 $\langle 0 |$  と  $|0\rangle$  ではさんでいたので 0 になっていましたが、 $\langle B |$ 、 $\langle C |$  で迎えてやっていますから、operator  $X$  が 2 つとも creation operator である部分が 0 でない寄与として残ります。

$$-\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \sum_{\substack{m>0 \\ \ell, n<0}} \left[ \left[ -\frac{\text{sgn}(m)}{m} \alpha_m^\nu \tilde{\alpha}_{m\nu}, \alpha_n^\mu \frac{z^{-n}}{n} \right], \tilde{\alpha}_\ell^\nu \right] + \left( \begin{array}{l} \alpha \leftrightarrow \tilde{\alpha}, \\ z \leftrightarrow \bar{z}, \\ z' \leftrightarrow \bar{z}', \end{array} \right) = -\alpha' \eta^{\mu\nu} (\ln |z - z'| + \ln |1 \mp z \bar{z}'|) \quad (2.40)$$

(2.40) が disk 上または  $RP^2$  上での two-point function となります。

## 7 Dilaton Tadpoles, Disk/ $RP^2$ Partition Function and $SO(32)$ Type I Superstrings

この節と次の節でそれぞれ Euler 数 1、Euler 数 0 つまり摂動論の低次の geometry を考察し、0 点及び 1 点振幅を見ていきます。Euler 数 1 の geometry には、disk と  $RP^2$  があります。disk は open string の掃く geometry で boundary 1 個、穴なし、cross cap なし。 $RP^2$  は unoriented な closed string の掃く geometry で、closed string ですから boundary はない、穴もない、cross cap が 1 個ある。この 2 つが摂動論では同じ次数の geometry となります。nontrivial なことは、これらの 1 点関数つまり tadpole が一般的には消えないという事実であります。みなさん場の理論を勉強していると思いますが、粒子の場の理論から導かれた摂動論においては、1 点関数は自動的に 0 になります。1 点関数が 0 であるということは、今考えている真空が摂動論の範囲ですら適正な真空ではないということを意味します。いまの場合、場の理論ではなくて 1 本のひもでやっています。1 本のひもで 1 点振幅を計算してみますと、これは 0 にならない。disk と  $RP^2$  を含むようなひもの摂動論は、一般的に不安定です。tachyon の考察を抜きにしても不安定となります。

以下このことをさらに詳しく見ていきます。残念ながら、この節の議論は今まで述べてきたこと以上のものをいくつか仮定せねばなりません。1 点関数を計算するためには、boundary state を用意して、dilaton の状態を external state として導入します。これは、dilaton を表す vertex operator と呼ばれる operator を 1 個挿入し、 $\langle B|$  と  $|0\rangle$  ではさんで計算することに対応します。dilaton は、 $\partial_z X^\mu \partial_{\bar{z}} X_\mu$  を worldsheet 上ありとあらゆるところで積分するという演算子として表されます。

$$\langle B| \int_{\text{unit disk}} dz d\bar{z} \partial_z X^\mu(z, \bar{z}) \partial_{\bar{z}} X_\mu(z, \bar{z}) |0\rangle / \langle B|0\rangle \quad (2.41)$$

この計算は、さきほどの 2 点関数の知識で処理できます。最終的に

$$(2.41) = \int_{\text{unit disk}} dz d\bar{z} \frac{1}{2} \lim_{z' \rightarrow z} (\partial_z \partial_{\bar{z}'} + \partial_z \partial_{z'}) (-\alpha' \ln |z - z'| - \alpha' \ln |1 - z\bar{z}'|) = \frac{\alpha'}{2} \int_{\text{unit disk}} dz d\bar{z} \frac{1}{(1 - |z|^2)^2} \quad (2.42)$$

になります。(2.42) は評価しにくい量ですが、被積分因子は  $SU(1, 1)$  という conformal 変換に対して不変です。この conformal 変換

$$z \rightarrow z' = \frac{Az + B}{Cz + D}, \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in SU(1, 1) \quad (2.43)$$

を使って、(2.42) を parameter の積分に convert してやることができます。 $SU(1, 1)$  対称性を fix することと同等です。

$$\langle B| \int_{\text{unit disk}} dz d\bar{z} \partial_z X^\mu(z, \bar{z}) \partial_{\bar{z}} X_\mu(z, \bar{z}) |0\rangle / \langle B|0\rangle = \frac{\alpha'}{2} \int dB d\bar{B} \quad (2.44)$$

(2.44) 自身は発散しています。Polyakov の functional integral に基づく考察を行うと、これとは別に  $SU(1, 1)$  conformal Killing vector の volume と呼ばれる量が、必ず分母に  $\frac{1}{V_{\text{disk}}(\text{CKV})}$  という形で現れます。これら 2 つの無限大を含む因子の積が、確定した有限値をとることを示すことができます。

$RP^2$  に関しても同様の計算で、0 でない有限の係数が得られます。



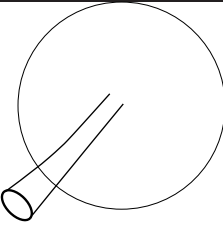
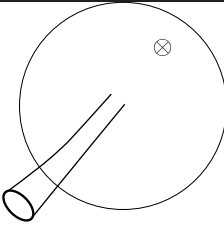
	Disk	$RP^2$
		
$SO(n)$ C-P factor	$\text{tr } 1 = n$	1
$\frac{\text{Determinants}}{\tilde{d}}$	1	$2^{13}, 2^5$
$\frac{\langle \langle \int \partial_z X_\mu \partial_{\bar{z}} X^\mu \rangle \rangle}{V_{\text{CKV}}}$	+1	-1
	$\Rightarrow n = \begin{cases} 2^{13} & \text{bosonic} \\ 2^5 = 32 & \text{fermionic} \end{cases}$	

表 5: 1-point fuctions of disk and  $RP^2$

このように disk 及び  $RP^2$  上の 1 点関数は 0 ではないのでひもの摂動論の真空は不安定で、平坦な時空中の摂動論は一般的には破綻しています。摂動論の範囲内でこの 1 点関数を cancel させるためには、Euler 数 1 の disk の合棒として  $RP^2$  が必要です。 $RP^2$  は nonorientable な surface ですから、必ず理論は nonorientable でなければなりません。もし orientable な open string を考えると合棒がないので cancel する手立てがない、したがって必ず破綻してしまう。表 5 に disk/ $RP^2$  の cancellation をまとめておきます。計算は両方の geometry に関してほとんど parallel に進みます。Polyakov の functional integral の計算から、表 5 にあげた物理量の disk と  $RP^2$  の比に 1 でない値がでてきます。それらを list しておきます。最後に残った項目ですが、disk は boundary をもっているので、open string の端点に対応した Chan-Paton factor の trace があります。trace 1 つまり  $n$  という factor が余分につきます。この 3 つの比の積がちょうど  $1 : -1$  になってほしいわけです。 $n = 2^5 = 32$  として選んでおけば tadpole を cancel することができます。つまり、open string を含む平坦時空の理論では Chan-Paton factor として  $SO(32)$  が選ばなければならないということがわかりました。tadpole を cancel させたのでこの摂動論は安定です。

では 0 点はどうか。zero momentum dilaton external state に対応する operator は  $\partial_z X \partial_{\bar{z}} X$  でした。これは action を tension で微分して得られます。0 点を tension で微分すると、dilaton の 1 点関数になっています。

$$A_{\text{Disk}/RP^2}^{(1)} \sim \lambda \frac{\partial}{\partial \left(\frac{1}{2\pi\alpha'}\right)} Z(\text{Disk}/RP^2) \quad (2.45)$$

1 点の計算から 0 点の値を読み取れることを意味しています。

ですが、まだ一つ残された問題があって、それは tachyon の問題です。以前に求めた spectrum からわかるように、一般に fermionic string というのは tachyon を含んでおり、これは上で考察した dilaton tadpole とは別に存在する真空の instability です。ここでは、tachyon を代数的に取り除いてやることにします。つまり、

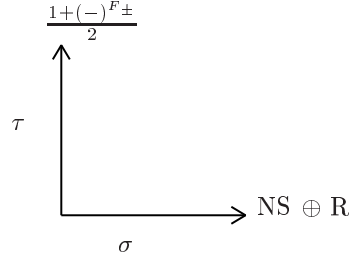


表 6: GSO projection of an open string

理論のいままで確立した形式を損なわないで tachyon を取り除いてやりたい。これは、fermion  $\psi^\mu$  とすべて反可換するような演算子  $(-1)^F$  を導入することで遂行できます。もし  $\psi^\mu$  が 4 次元の gamma 行列だったら、 $(-1)^F$  というのは  $\gamma_5$  に対応するものです。 $\frac{1+(-)^F}{2}$  という形の propagator でもって状態空間を半分に project したものが  $SO(32)$  の type I superstring であります。

実際この  $F$  というのをあらわにつくることが可能です。

$$(e^{i\pi})^{F\pm} = \begin{cases} -(-)^{\sum_{r=1/2,3/2,\dots} b_r^i b_r^i} & \text{NS} \\ \pm \gamma_{(16)}^9 (-)^{\sum_{m=1}^{D-2} d_m^i d_m^i} & \text{R} \end{cases} \quad (2.46)$$

NS sector に関しては、 $(-1)^F$  は  $b_r^i$  の number operator となっています。R sector に関しても  $d_m^i$  の number operator ですが、R sector には zero mode が存在します。zero mode  $d_0^i$  は本質的に gamma 行列ですから、transverse な 8 次元に対する  $\gamma_9$ 、つまり  $d_0^i$  全部を掛け合わせたものを導入しておけば反可換性ができます。projection operator  $\frac{1+(-)^F}{2}$  により、 $\text{NS} \oplus \text{R}$  という状態空間を半分だけ keep するという演算を、GSO projection と呼びます。

なぜ GSO projection が必要かを少し不正確になりますが、直観的に述べておきましょう。明らかに、worldsheet fermion が導入されたことに基づく話であります。action の level では、 $\psi$  は bilinear ですから、periodic でも antiperiodic でも一価性は損なわれません。いま状態空間を考察しましょう。すると例えば、 $b_{-\frac{1}{2}}$  が 1 個とか  $b_{-\frac{1}{2}}$  が 3 個の状態が、 $b_{-\frac{1}{2}}$  が 2 個の状態に加えて存在して、integer の level の他に half integer の固有値をもつ level というのがたくさんあるわけです。一般に、level の間隔は integer ではなくて half integer になります。これは危険です。半分に減らしてやって、integer spectrum が得られるようにつくるわけです。その間引きの仕方は consistent にやらなきゃいけないくて、それはすべての fermion の operator と反可換するようなものを通して行います。これが GSO projection です。

GSO projection のやり方を振り返ってみます。 $\sigma$  という方向には periodic boundary condition と antiperiodic boundary condition が許されています。また  $\tau$  方向に課した GSO projection も 2 つの sector の存在と読み替えることができます。図 6 にかいたように、 $\tau$  方向と  $\sigma$  方向について四つの可能性に対して和をとると考えることができます。

いままで operator formalism で話を進めてきました。上に述べたことは、 $\sigma$  と  $\tau$  を同等に扱う functional integral formalism という立場から見直していった方が便利です。 $\tau$  方向の 2 つの sector は上に述べたように、 $\frac{1+(-)^F}{2}$  に関係しています。1 の operator の挿入は、fermion に関して  $\tau$  方向に antiperiodic であることと同

等です。この事実は、有限温度の量子力学でよく姿を現します。fermion を  $\tau$  方向つまり時間方向に periodic と考えることは  $(-1)^{\text{number operator}}$  の挿入に対応しています。ですから GSO projection という idea は、 $\sigma$  方向に periodic、antiperiodic を考えるのみならず、 $\tau$  方向にも periodic と antiperiodic の 2 つの sector を考えて、足して  $\frac{1}{2}$  しなさい、計  $2 \times 2 = 4$  つの可能性があって、その 4 つの可能性を符号を全部+で足しなさい、そういう statement になっています。

## 8 Torus Partition Function

次に partition function の話をしましょう。partition function は、spectrum の解析に有用です。いま 26 次元の closed bosonic string を考えて、そのうち空間 1 次元が circle に compact 化されていると思ってください。この 1-loop の partition function  $\mathcal{Z}^{(h=1)}$  を計算します。

$$\mathcal{Z}_{(S^1 \text{ with } R)}^{(h=1)} = \left( \text{fish diagram} \right) = (\text{coeff}) \int_{\text{region}} \frac{d\tau_2}{\tau_2^\alpha} \text{Tr} e^{-2\pi\tau_2(L_0 + \bar{L}_0)} \quad (2.47)$$

comment を 1 つ言うと、場の理論と違って 1 本のひもの partition function ですから、いまの場合、disconnected diagrams の和ではなくて connected diagrams です。partition function  $\mathcal{Z}^{(h=1)}$  と書いたけれども、これは 1 個のひもの真空ゆらぎであり、free energy というのが適当です。

operator formalism でどのように書くかということ、lightcone の Hamiltonian があって、ある時間発展をしてもとの状態に戻ってくる。これがまさに、torus をあるところで切った図に対応します。もとの状態というのはどこでもいいわけですから、すべてのありとあらゆる状態に対して和をとらなければなりません。ただしある重みをつけて和をとらなければならない。(2.47) の integration region は、 $-\infty$  から  $+\infty$  にとるように思えるけれども、そうではないかもしれない。lightcone formalism に基づいた考え方では、 $\tau_2$  の重みがわからない、係数がわからない、そして積分範囲がわからない。それを除いては、1-loop free energy というのは (2.47) で書けることが、いまの考え方でわかります。

係数と  $\alpha$  に関しては、以下の方法で決めてやることができます。integral region(これを  $F$  と書く)については次の section でやります。この計算では何も相互作用を含んでいませんから、単にひもの振動を考察しているだけです。各 mode に基づく vacuum energy というのを計算してやって、それと比べてやればいい。ひもだということ (2.47) の表式をとっているけれども、これは各 mode の free energy、vacuum energy にすぎないわけだから、それをまず計算してやって、同じであるということを要求してやればいいわけです。1 個の free boson がありますと、1-loop の effective action は、

$$V = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln (L_0 + \bar{L}_0) \quad (2.48)$$

となります。tr ln は  $\ln \det$  です。場の理論の effective action では、boson 1 個 1 loop の積分をしますと、必ず  $-\frac{1}{2} \ln \det$  がでてきます。無限大を含む次のような積分表示

$$\int_0^1 dx x^{a-1} (\ln x)^{-1} = \ln a + \infty (\text{X}) \quad \left( \odot \text{ take } \frac{\partial}{\partial a} \right) \quad (2.49)$$

を使って、(2.48) を無限大の subtraction を許して (2.50) の形に convert することができます。

$$V = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{\tau_2} \text{Tr} e^{-2\pi\tau_2(L_0 + \bar{L}_0)} \quad (2.50)$$

各 mode の計算から得られた free energy は上の表式と等しいわけですから、 $\alpha$  は 1 で、係数は  $\frac{1}{2}$  であるということがわかります。

いままで話さなかったんですが、閉じたひもに関する次のような不変性があります。閉じたひもはいつも  $\sigma$  を 0 から  $2\pi$  まで動かして parametrize しているわけですが、端点をもたないわけですから、 $\sigma$  はどこで測っても物理は不変でなければなりません。理論は  $\sigma$  を  $\sigma + \Delta$  だけ shift しても不変になります。それは量子論では unitary 演算で実現できて、それは  $e^{2\pi i \Delta(L_0 - \bar{L}_0)}$  で与えられます。 $\sigma$  という点にあった  $X$  という演算を、 $\sigma + \Delta$  という点に移す unitary 演算です。量子論では、この不確定性を表す演算子を c 数  $e^{2\pi i \Delta \beta}$  として実現することが許されます (ray 表現)。ここで  $\beta$  は実数。ただし  $\Delta = 2\pi$  では 1 であってほしいので、 $\beta = \text{整数}$  となります。つまり  $\sigma$  reparametrization に対して理論が不変であるというこの条件は、 $L_0 - \bar{L}_0$  の spectrum が整数であるということと等価です。整数性が満たされていれば、次の式が恒等式として physical state 上で成り立ちます。

$$1 = \int_{-1/2}^{1/2} d\tau_1 e^{2\pi i \tau_1(L_0 - \bar{L}_0)} \quad (2.51)$$

(2.50) に (2.51) を挿入すると、(2.52) の形に 1-loop partition function が書けて、あとはこの積分を実行していただくになります。

$$\mathcal{Z}_{(S^1 \text{ with } R)}^{(h=1)} = \frac{1}{2} \int_F \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\tau_2} \text{Tr} q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0} \quad (2.52)$$

ここで、

$$q = e^{2\pi i(\tau_1 + i\tau_2)} = e^{2\pi i\tau} = q(\tau) \quad \bar{q} = e^{-2\pi i\bar{\tau}} = \bar{q}(\bar{\tau}) \quad (2.53)$$

です。

(2.52) を計算します。 $L_0$  及び  $\bar{L}_0$  の normal ordering による寄与  $(q\bar{q})^{-\frac{D-2}{24}}$  を含めて、3 つの factor の積と考えます。

$$\text{Tr} q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0} = \textcircled{\text{I}} \times \textcircled{\text{II}} \times \textcircled{\text{III}} \quad (2.54)$$

第 1 番目は noncompact な運動量に関する積分です。

$$\textcircled{\text{I}} \equiv \boxed{\text{noncompact momentum integrations}} = \int \frac{d^{D-1} k_\mu}{(2\pi)^{D-1}} e^{-2\pi\tau_2 \left(\frac{\alpha'}{2} k_\mu^2\right)} = \frac{i}{(4\pi^2 \alpha' \tau_2)^{\frac{D-1}{2}}} \quad (2.55)$$

circle compact 化していない方向の zero mode の運動量の積分で、それは単に Gauss 積分で、 $\tau_2$  の negative なべきを与えます。次に circle compact 化した項の trace ですが、可能な discrete な運動量の和です。

$$\textcircled{\text{II}} \equiv \boxed{\text{lattice sum}} = \sum_{(p, \bar{p}) \in \Gamma} q^{\frac{1}{2} p^2} \bar{q}^{\frac{1}{2} \bar{p}^2} \quad (2.56)$$

いま boson 1 個を circle compact 化していますから、winding number と momentum を指定する integer に関する和になります。

$$\text{e.v. of } \begin{pmatrix} \alpha_0^{24} \\ \tilde{\alpha}_0^{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ \bar{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left( \frac{m}{R} + \frac{lR}{\alpha'} \right) \\ \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left( \frac{m}{R} - \frac{lR}{\alpha'} \right) \end{pmatrix} \in \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{Z} \oplus \sqrt{\frac{1}{2\alpha'}} R \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{Z} \equiv \Gamma \quad (2.57)$$

以前に計算したように、 $\alpha_0$  と  $\tilde{\alpha}_0$  の固有値は、第 1 列は  $(1, 1)^T$  という vector にある係数をかけたものの整数倍、第 2 列は  $(1, -1)$  という vector にある係数をかけたものの整数倍になっています。この固有値のとり空間というのは、2 つの整数で生成される格子点上にあります。ですから 2 次元 vector の固有値は実は lattice を作っています。つまり、compact momentum に関する和というのは実は lattice に関する和であることがわかります。第 3 番目の factor は transverse oscillator で、これは string の振動に対応します。

$$\textcircled{\text{III}} = \boxed{\begin{array}{c} \text{transverse} \\ \text{oscillator} \\ \text{sum} \end{array}} = \left( (q\bar{q})^{-\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^m} \right)^{D-2} = |\eta(\tau)|^{-2(D-2)} \quad (2.58)$$

boson の振動というのが  $D-2$  個あるわけで、その各々に対して振動数が 1 から  $\infty$  までいろんな波長 (mode) が可能です。  $n$  番目の mode  $\alpha_{-n}$  が 0 個、1 個、2 個 と無限個まである寄与は

$$\frac{1}{1-q^n} = 1 + q^n + q^{2n} + \dots \quad (2.59)$$

という具合に幾何級数にまとまります。すべての mode を考察すると、この因子の  $n$  に関する無限積ができてきます。  $D-2$  個 scalar 場がある場合は最終的に (2.58) の形になります。ここで  $\eta$  というのは有名な Dedekind eta 関数と呼ばれているものです。

$$\eta(\tau) \equiv q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \quad (2.60)$$

以上、答えは、

$$\mathcal{Z}_{(S^1 \text{ with } R)}^{(h=1)} = \frac{i}{2} \int_F \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\tau_2} \left( \sum_{(p, \bar{p}) \in \Gamma} q^{\frac{1}{2}p^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}\bar{p}^2} \right) (4\pi^2 \alpha' \tau_2)^{-\frac{(D-1)}{2}} |\eta(\tau)|^{-2(D-2)} \quad (2.61)$$

次に  $\Gamma$  の性質を述べます。これは 2 次元の lattice です。2 次元 basis vector は (2.62) で表されます。

$$\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\frac{1}{2\alpha'}} R \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

いま  $\Gamma$  に属する 2 点の内積を Lorentz signature(1,1) でつくってみます。

$$\begin{pmatrix} p \\ \bar{p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p' \\ \bar{p}' \end{pmatrix} \equiv pp' - \bar{p}\bar{p}' = ml' + m'l \in \mathbb{Z} \quad (2.63)$$

特に 2 点を同一点ととりますと、これは  $2ml$  という形になります。つまりこれは  $1+1$  の Lorentz 空間を作る lattice で、その上の lattice vector の自分自身と内積は、常に even integer である。この lattice は even

Lorentzian であるといいます。実際この Lorentz lattice に boost をほどこしてやります。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p(R) \\ \bar{p}(R) \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v \\ \sinh v & \cosh v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(R) \\ \bar{p}(R) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(Re^{-v}) \\ \bar{p}(Re^{-v}) \end{pmatrix} \\ R &\longrightarrow Re^{-v} \end{aligned} \quad (2.64)$$

すると、 $R$  という parameter が rapidity によって変更を受け、新しい  $R$  での even Lorentzian lattice となります。

## 9 Modular Invariance

いままでの考察で残ったのが、 $F$  という積分領域であります。この  $F$  に関してはまだ何も話していません。領域  $F$  を決定するためには、積分領域がどういうもので不変になっているかが議論の焦点になっています。

$\sigma$  reparametrization invariance というのは、 $\tau_1$  を  $\tau_1 + 1$  に変える変換です。

$$\tau \rightarrow \tau + 1 \text{ inv.} \quad \Leftrightarrow \quad \text{e.v. of } (L_0 - \bar{L}_0) = \text{integer} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma \text{ reparametrization invariance} \quad (2.65)$$

これを反映して、integrand は  $L_0 - \bar{L}_0$  の spectrum が整数のところだけが keep されています。 $\tau$  を  $\tau + 1$  に変える変換で不変であるということを integrand はもっています。

integrand は、 $\tau$  を  $-\frac{1}{\tau}$  に変えるという不変性ももっています。

$$\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau} \text{ inv.} \quad \eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}} \eta(\tau) \quad \Leftarrow \quad \text{Poisson resummation formula} \quad (2.66)$$

これらは torus の 2 つの幾何学的な演算に対応しているということがわかっています。 $\tau$  を  $\tau + 1$  に変えるというのは、ドーナツを縦に切って、切り口を  $2\pi$  だけねじってもとに戻すといういわゆる Dehn twist というものに対応しています。一方、 $\tau$  を  $-\frac{1}{\tau}$  に変える変換は、torus には二つの nontrivial な homology cycle がありますが、これを単に取り換えることに対応します。2 番目の 2 つの cycle の演算の入れ替えというのは、関数論での Poisson resummation formula に同等であるということがよく知られています。Poisson resummation formula は、本質的には  $x$  space での周期関数を  $k$  space での周期関数に書き直すという操作で得られます。すると、 $x$  での周期が  $l$  だったら  $k$  での周期が  $\frac{1}{l}$ 、つまり逆数関係になっています。

これらの考察をふまえて、integrand をこれらの演算に不変な 4 つの factor に分けることができます。

$$\mathcal{Z}_{(S^1 \text{ with } R)}^{(h=1)} = \frac{1}{2} \int_F \underbrace{\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\tau_2^2} \tau_2 |\eta(\tau)|^4 \chi_{\Gamma}^{(c=1)}(\tau) \left(4\pi^2 \alpha' \tau_2 |\eta(\tau)|^4\right)^{-\frac{D-1}{2}}}_{\text{each factor is inv.}} \quad (2.67)$$

とくに、

$$\chi_{\Gamma}^{(c=1)}(\tau) = \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \sum_{(p, \bar{p}) \in \Gamma_{\text{even}, (1,1)}} q^{\frac{1}{2}p^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}\bar{p}^2} \quad (2.68)$$

の部分は、いわゆる compact 化した 1 つの scalar からの寄与だけを引き出したもので、これ自身で conformal field theory としての考察が可能です。これは circle 上の上の 1 個の free boson の  $c = 1$  character と呼ばれているものです。

少し天下りの的になってしまいますが、 $\tau$  を  $\tau + 1$  に変える変換や  $\tau$  を  $-\frac{1}{\tau}$  に変える変換というのは、 $SL(2, \mathbb{Z})$  の二つの独立な generator とみなすことができ、upper-half plane に作用しています。それは mapping class group (MCG) と呼ばれています。

$$\tau \rightarrow \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} \quad \text{MCG} = SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z} \\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \end{matrix} \right\} = \{S, T\}, \{\pm 1_2\} \quad (2.69)$$

ここで、 $S, T$  は

$$\begin{aligned} \tau &\rightarrow \tau + 1 & T &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \tau &\rightarrow -\frac{1}{\tau} & S &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.70)$$

となっています。

$F$  は upper-half plane を mapping class group で割ることによって得られ、図 6 のようになります。最終的

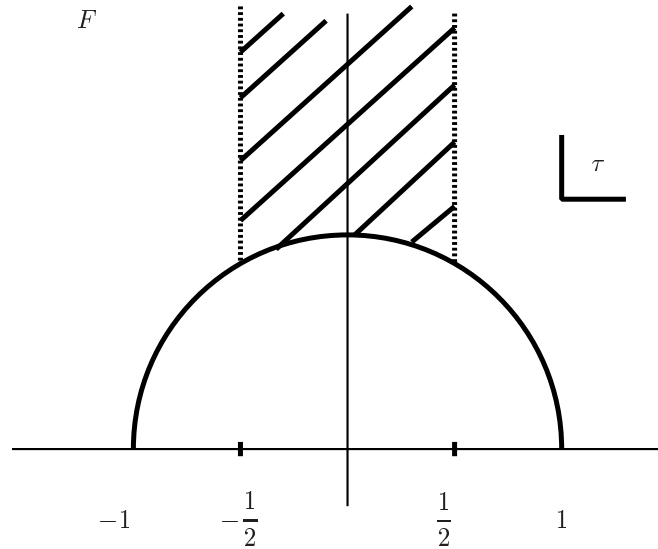


図 6: Fundamental region

に積分領域  $F$  は、upper half plane をもつひもが、1 loop でもっている invariance で割ってやることで残る斜線の領域です。これは fundamental region と呼ばれます。重要な点は、原点が斜線領域に属さず、取り除かれていることです。 $\tau_2$  を最初、粒子の proper time に相当すると思ったわけですね。 $\tau_2$  というのは 0 から  $\infty$  ままで、限りなく短い時間があったわけですね。ところがひものもっている invariance によって、short time の無限大を与えるような点というのは取り除かれているということがわかります。ひもにおいては、short time の極

限というのは、別の見方をすれば非常に長い time scale にみなしうということがわかりました。これが量子重力の理論たりうる大きな特徴になっています。

さてこんどは、 $c = 1$  character を一般化してみましょう。 $d$  個の scalar boson がある momentum lattice にのっているとします。この character は (2.71) の定義で与えられます。

$$\chi_{\Gamma}(\tau) \equiv \frac{1}{|\eta(\tau)|^{2d}} \sum_{(p, \bar{p}) \in \Gamma} q^{\frac{1}{2}p^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}\bar{p}^2} \quad (2.71)$$

$\Gamma$  というのを signature  $(d, d)$  の Lorentzian lattice だと思っています。あとで重要になってくるのは、この character が modular invariant になるのはどういう場合かということです。

$d$  個の boson の character (2.71) が modular invariant なのは、 $\Gamma$  が even で self-dual である場合に限るということを証明することができます。証明は詳しくは話せませんが、基本的には  $\tau$  を  $\tau + 1$ 、 $\tau$  を  $-\frac{1}{\tau}$  に変えたときの不変性を check します。 $\tau \rightarrow \tau + 1$  のもとでの不変性は、 $\Gamma$  を even にとっておくと満たされるのはほぼ明らかです。 $\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$  のもとでの不変性を check するためには、Poisson resummation formula を使う必要があります。

Poisson resummation formula の基本的な考え方は、つぎのようなものです。ある関数  $f$  があったとします。その引数を整数倍だけずらして、整数に関して和をとります。するとできあがった関数というのは、引数に関する周期関数になります。周期関数だったら Fourier 展開できます。

いま関数  $f$  としては  $\delta$  関数をとります。

$$\sum_{(p', \bar{p}') \in \Gamma} \delta((p, \bar{p}) - (p', \bar{p}')) = \frac{1}{V_{\Gamma}} \sum_{(p'', \bar{p}'') \in \Gamma^*} \exp(2\pi i (p'', \bar{p}'') \cdot (p, \bar{p})) \quad (2.72)$$

ここで  $(p, \bar{p})$  で  $2d$  個の実数を表しました。 $\delta$  関数の引数を lattice vector だけ shift し、すべての lattice vector について和をとります。それを Fourier 展開しますと、exponential の和となります。右辺の展開係数は単一で、その周期はもとの周期と逆数関係にあります。逆 lattice つまり dual lattice  $\Gamma^*$  に属する vector に関する和になっています。dual lattice  $\Gamma^*$  では、もとの lattice との内積が常に整数になっているような lattice の集合です。左辺は lattice による表現で、右辺は dual lattice による表現です。次のような 1 の表示を (2.71) に挿入することを考えます。

$$1 = \int d^{2d}(p, \bar{p}) \delta((p, \bar{p}) - (p', \bar{p}')) \quad (2.73)$$

この際、(2.71) の和は  $(p', \bar{p}')$  に関してと考えると下さい。その後 (2.72) を使います。少し計算すると、 $\tau$  を  $-\frac{1}{\tau}$  に変える変換に対する不変性が得られるのが、 $V_{\Gamma} = 1$  つまり  $\Gamma$  と  $\Gamma^*$  が等しい場合に限られることがわかります。 $\tau$  を  $-\frac{1}{\tau}$  に変える変換で不変なのは、 $\Gamma$  と  $\Gamma^*$  が等しい場合に限られます。

まとめてみましょう。 $(d, d)$  の Lorentzian lattice 上に compact 化された closed bosonic string が modular invariant なのは、lattice が even で self-dual な場合に限ります。Lorentzian lattice というのは、一般に parameter の存在を許します。circle compact 化での radius  $R$  はその例です。これらの parameter は理論に現れる新たな free parameter で、moduli と呼ばれます。modular invariance が保たれていないひもは、紫外発散を含んできます。fermionic string においては、一般に spectrum の整数性は保証されていませんから、 $\tau$  を  $\tau + 1$  に変え



る不変性は一般に保証されません。したがって modular 変換に対する anomaly をもっています。これは取り除かなければなりません。fermionic string を使った model building において、modular 不変性は最も基本的な役割を果たします。逆に言うと、fermionic string を使った model building においては、modular 変換さえ保っておけば矛盾のない模型がつくれます。

## 10 Modular Invariance for Fermions and Closed String Vacua

closed fermionic string の modular invariance をお話しする必要があります。open string には modular 変換は考えられませんが、spectrum の整数性を保つという立場から GSO projection を導入しました。idea としては、closed fermionic string に関して modular invariance を keep するためには、 $z$  の部分に GSO、 $\bar{z}$  の部分に  $\overline{\text{GSO}}$  を独立にほどこしたものを、考えてやれば十分です。必要とは限りません。図 7 がこのことを表しています。closed fermionic string に対しては、その character は (2.74) の形をしています。

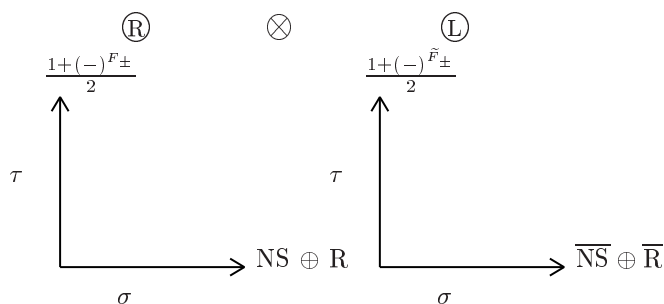


図 7: GSO projection of a closed string

$$\text{character} = \sum_{\alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}} \chi_{\alpha\beta}(\tau) \bar{\chi}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\bar{\tau}) \quad (2.74)$$

$\alpha, \bar{\alpha}$  は  $\sigma$  方向、 $\beta, \bar{\beta}$  は  $\tau$  方向を表し、どちらも periodic、antiperiodic な場合を考えて、全部独立に足してやる。これが GSO projection です。

詳細に入っている時間はありませんが、 $\chi_{\alpha\beta}$  の  $\alpha, \beta$  に関して和をとってやりますと、Jacobi の identity により答えが 0 になってしまうという事実があります。

$$\sum_{\alpha, \beta} \chi_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.75)$$

これは各 level で boson と fermion がつりあっているということを意味します。単に massless のところだけではなくて、各 level からです。これは時空の理論として supersymmetry が実現されていることを強く示唆しています。

もう一つ重要な点として、(2.46) の GSO の R sector の  $F_{\pm}$  にある符号の問題です。図 7 を見ればわかるように、left mover と right mover で同符号をとるか異符号をとるか差がでてきます。同符号 (+, +)、(-, -)

をとると、これは左と右で同じ spinor 表現を選んでいるということで、時空の理論としての立場からみると spacetime fermion は chiral ということに対応しています。これが IIB の場合です。一方違う符号 (+, -)、(-, +) をとると、nonchiral な spacetime fermion です。これが IIA の場合です。そのほかの modular invariant な選び方として一番自明なものに、diagonal modular invariant と呼ばれるものがあります。それは  $\alpha = \bar{\alpha}$  とおき、 $\beta = \bar{\beta}$  において和をとる場合で、(NS,  $\overline{\text{NS}}$ ) と (R,  $\overline{\text{R}}$ ) しか残りません。したがって spacetime fermion はなく、spacetime boson だけからなる理論で 0A、0B と呼ばれます。一般に tachyonic です。

最後に、先に書いた open あるいは closed fermionic string の spectrum に GSO projection をほどこして、Type I、Type IIA、Type IIB がどう得られるかをお見せしたい。表 3 がもともとの fermionic string です。

まず closed string のみからなる IIB は、表 7 です。GSO をほどこすと、状態が半分になります。もちろん open string はなくて closed string だけの世界で tachyon も取り除かれ、spinor の 16 次元のうち半分は取り除かれます。同じ spinor の表現をとり、 $\text{R}\overline{\text{R}}$  sector では  $\textcircled{35} \oplus \textcircled{28} \oplus \textcircled{1}$  というのができます。

		k space wave fn	$\alpha' \mathcal{M}^2$	name
closed string	(NS, $\overline{\text{NS}}$ )	$ k^i\rangle$	-2	scalar $\textcircled{1}$
		$b_{-\frac{1}{2}}^i \tilde{b}_{-\frac{1}{2}}^j  k^{i'}\rangle$ $\zeta_{ij}(k^\ell)$	0	graviton $\oplus$ asym tensor $\oplus$ dilaton $\textcircled{8}_v \otimes \textcircled{8}_v = \textcircled{35} \oplus \textcircled{28} \oplus \textcircled{1}$
	(NS, $\overline{\text{R}}$ )	$ \tilde{\alpha}, k^{i'}\rangle$	-1	16 dim/spinor $\textcircled{8}_s \oplus \textcircled{8}_c$
		$b_{-\frac{1}{2}}^i  \tilde{\alpha}, k^{i'}\rangle$ $\chi_{i\tilde{\alpha}}(k^\ell)$	0	vector spinor $\textcircled{8}_v \otimes (\textcircled{8}_s \oplus \textcircled{8}_c) = \textcircled{8}_c \oplus \textcircled{56} \oplus \textcircled{8}_s \oplus \textcircled{56}$
	(R, $\overline{\text{NS}}$ )	tilde $\leftrightarrow$ no tilde from (NS, $\overline{\text{R}}$ )		$\textcircled{8}_c \oplus \textcircled{56}_s \oplus \textcircled{8}_s \oplus \textcircled{56}_c$
	(R, $\overline{\text{R}}$ )	$ \alpha, \tilde{\alpha}, k^\ell\rangle$	0	$(\textcircled{8}_s \oplus \textcircled{8}_c) \otimes (\textcircled{8}_s \oplus \textcircled{8}_c)$ $= [\textcircled{8}_c \oplus \textcircled{56}_c \oplus \textcircled{35} \oplus \textcircled{28} \oplus \textcircled{1}]^2$

表 7: Low lying states in Type IIB (/は GSO により取り除かれた状態)

chirality を逆に選びますと IIA になり、表 8 です。IIB とほとんど同じですが、fermion として nonchiral な理論になります。

最後に Type I。Type I は IIB にさらに  $\Omega$  projection をほどこし、それに open string を加えた理論で、表 9 です。tachyon は、open string でも closed string でも取り除かれ、 $\text{NS}\overline{\text{NS}}$  の antisymmetric tensor は取り除かれます。 $\text{NS}\overline{\text{R}}$  と  $\overline{\text{NS}}\text{R}$  二つのうち 1 個のみが  $\Omega$  projection で keep する。 $\text{R}\overline{\text{R}}$  は bilinear spinor を対称化するので、 $\text{NS}\overline{\text{NS}}$  で  $\textcircled{28}$  が取り除かれたのですが、 $\text{R}\overline{\text{R}}$  で  $\textcircled{28}$  が選ばれているという構造になっています。

		k space wave fn	$\alpha' \mathcal{M}^2$	name
closed string	(NS, $\overline{\text{NS}}$ )	$ k^i\rangle$	-2	scalar $\mathbb{1}$
		$b^i_{-\frac{1}{2}} \tilde{b}^j_{-\frac{1}{2}}  k^{i'}\rangle$ $\zeta_{ij}(k^\ell)$	0	graviton $\oplus$ asym tensor $\oplus$ dilaton $\mathbb{8}_v \otimes \mathbb{8}_v = \mathbb{35} \oplus \mathbb{28} \oplus \mathbb{1}$
	(NS, $\overline{\text{R}}$ )	$ \tilde{\alpha}, k^{i'}\rangle$	-1	16 dim/spinor $\mathbb{8}_s \oplus \mathbb{8}_c$
		$b^i_{-\frac{1}{2}}  \tilde{\alpha}, k^{i'}\rangle$ $\chi_{i\tilde{\alpha}}(k^\ell)$	0	vector spinor $\mathbb{8}_v \otimes (\mathbb{8}_s \oplus \mathbb{8}_c) = \mathbb{8}_c \oplus \mathbb{56} \oplus \mathbb{8}_s \oplus \mathbb{56}$
(R, $\overline{\text{NS}}$ )	tilde $\leftrightarrow$ no tilde from (NS, $\overline{\text{R}}$ )		$\mathbb{8}_c \oplus \mathbb{56} \oplus \mathbb{8}_s \oplus \mathbb{56}$	
(R, $\overline{\text{R}}$ )	$ \alpha, \tilde{\alpha}, k^\ell\rangle$		0	$(\mathbb{8}_s \oplus \mathbb{8}_c) \otimes (\mathbb{8}_s \oplus \mathbb{8}_c)$ $= [ \mathbb{8}_v \oplus \mathbb{66} \oplus \mathbb{35} \oplus \mathbb{28} \oplus \mathbb{1} ]^2$

表 8: Low lying states in Type IIA (/は GSO により取り除かれた状態)

		k space wave fn	$\alpha' \mathcal{M}^2$	name
open string	NS	$ k^i\rangle$ 1	$-\frac{1}{2}$	ground state scalar (tachyon) $\mathbb{1}$
		$b^i_{-\frac{1}{2}}  k^i\rangle$ $\zeta_i(k^\ell)$	0	massless vector $\mathbb{8}_v$
	R	$ \alpha, k^i\rangle$ $u_\alpha(k^\ell)$	0	8/16 dim spinor $\mathbb{8}_s \oplus \mathbb{8}_c$
closed string	(NS, $\overline{\text{NS}}$ )	$ k^i\rangle$	-2	scalar $\mathbb{1}$
		$b^i_{-\frac{1}{2}} \tilde{b}^j_{-\frac{1}{2}}  k^{i'}\rangle$ $\zeta_{ij}(k^\ell)$	0	graviton $\oplus$ asym tensor $\oplus$ dilaton $[ \mathbb{8}_v \otimes \mathbb{8}_v ]_s = \mathbb{35} \oplus \mathbb{28} \oplus \mathbb{1}$
	(NS, $\overline{\text{R}}$ )	$ \tilde{\alpha}, k^{i'}\rangle$	-1	16 dim/spinor $\mathbb{8}_s \oplus \mathbb{8}_c$
		$b^i_{-\frac{1}{2}}  \tilde{\alpha}, k^{i'}\rangle$ $\chi_{i\tilde{\alpha}}(k^\ell)$	0	vector spinor $\mathbb{8}_v \otimes (\mathbb{8}_s \oplus \mathbb{8}_c) = \mathbb{8}_c \oplus \mathbb{56} \oplus \mathbb{8}_s \oplus \mathbb{56}$
(R, $\overline{\text{NS}}$ )	tilde $\leftrightarrow$ no tilde from (NS, $\overline{\text{R}}$ )		$\mathbb{8}_c \oplus \mathbb{56} \oplus \mathbb{8}_s \oplus \mathbb{56}$	
(R, $\overline{\text{R}}$ )	$ \alpha, \tilde{\alpha}, k^\ell\rangle$		0	$[ (\mathbb{8}_s \oplus \mathbb{8}_c) \otimes (\mathbb{8}_s \oplus \mathbb{8}_c) ]_s$ $= [ \mathbb{8}_v \oplus \mathbb{66} \oplus \mathbb{35} \oplus \mathbb{28} \oplus \mathbb{1} ]^2$

表 9: Low lying states in Type I (/は GSO 及び S( $\Omega$  projection) により取り除かれた状態)

right mover $\mathbb{R}$	left mover $\mathbb{L}$
$\times$ $\times$ $\times$ $\times$	$X_L^I(\bar{z})$ $I = 10 \sim 25$
$\updownarrow$ $X_R^\mu(z)$ $\psi^\mu(z)$	$X_L^\mu(\bar{z})$ $\mu = 0 \sim 9$
$\mathcal{N} = 1$ spacetime superstring	bosonic string $X_L^I$ compactified on $(0,16)$ dim (Euclidean) lattice $\Gamma_9(\mu, I) = M$

表 10: Heterotic string

## 11 Heterotic String

昨日の Lecture では、heterotic string の部分の transparency が 3、4 枚残りました。そこに至るまでの道筋を簡単に振り返ってみますと、goal は mass spectrum を計算することでした。一般的な framework から出発して lightcone gauge に到達して、それを使って自由に伝搬する 1 本のひもの spectrum を計算したわけです。後半は、摂動論的な統一理論というのを議論するために必要な道具立てを整えました。T-duality、torus の partition function、modular invariance 等...。最後に fermionic string に GSO projection をほどこして得られる Type IIB、IIA、Type I string の mass spectrum を述べました。今日の講義の予定ですけど、heterotic string をやったあと Lecture 3 に入ります。

heterotic string とは何か。その idea は簡単です。定式化としては大雑把に言って 2 種類あります。いままでずっと lattice sum の話をしてきたので、lattice にのつけた formulation で gauge 対称性をだすことにします。idea の基本的な部分は、left と right のいいところをとってくるという立場です。表 10 が示すように、right mover は  $\mathcal{N} = 1$  の superstring であり、通常の fermionic string に GSO projection をかけたものです。したがって、10 次元に住んでいます。left mover としては、bosonic string をとります。そのため、通常の意味での時空の描像は許されていません。ひもは 10 次元にすんでいるけれども、left mover の残りの 16 個は gauge 対称性、あるいはその tower を生成するために必要な道具立てで、必ずしも boson である必要はない、と考えてください。right mover は  $\mathcal{N} = 1$  の superstring ですから、right mover だけ見ていると、Chan-Paton factor なしの Type I のように見えます。左側と右側はうまく張り合わせていなければなりません。つまり modular invariance が満たされなければならない。model building としては、基本的に modular invariance さえ満たされていれば十分であります。

さきほども言いましたように、構成として上の 16 個の boson というのは、時空の描像を許さないわけです。にもかかわらず運動量空間では、left moving の momentum  $\vec{p}$  がある lattice にのっかっていると考えることが

できます。どうい lattice でなければならないかを、modular invariance を要求して決定することが可能です。

前回の議論をふまえますと、 $\tau$  を  $\tau+1$  に変える不変性に関しては、right mover に関しては GSO projection をやっておけば十分です。尚、これは必ずしも必要ではありません。left mover に関しては、lattice が even であれば十分。ただし、昨日話した場合と少し事情が違います。昨日話した lattice というのは、左側と右側の次元がつりあっていました。それで signature がちょうど半分 + で、半分は - の Lorentzian signature の lattice であったわけです。いまの場合、right mover がいませんから、Euclidean lattice あるいは昨日の言い方をすると (0,16) dimensional lattice ということになります。そういった Euclidean lattice が必要になってきます。

同様に  $\tau$  を  $-\frac{1}{\tau}$  に変える変換に対しても、right mover に対しては GSO があれば十分で、昨日話した議論の拡張により、left mover に対しては lattice が self-dual であればいいわけです。

こうして、heterotic string を構成する問題は、rank 16 の Euclidean で even な self-dual lattice を search するという問題になります。これは、Gross-Harvey-Martinec-Rohm たちの考察で、この種の lattice は monopole の electric-magnetic duality に関係して、数理的な問題としてけっこうよく調べられていました。とにかく、このような性質をもつ 16 次元の lattice というのは非常にまれで、2 種類だけしか存在しないことが数学的に証明されています。この 2 種類をこの  $\Gamma_{16}$  と  $\Gamma_8 \times \Gamma_8$  と書くことにします。 $\Gamma_{16}$  lattice はどうい lattice 点から成り立っているかと申しますと、 $n_1$  から  $n_{16}$  の 16 個の整数がありまして、整数和が偶数、あるいは全部  $\frac{1}{2}$  をつけたものの整数和が偶数というものです。

$$\Gamma_{16} \quad (n_1, \dots, n_{16}) \text{ or } \left( n_1 + \frac{1}{2}, \dots, n_{16} + \frac{1}{2} \right) \quad \sum_i n_i \in 2\mathbb{Z} \quad n_i \text{ integers} \quad (2.76)$$

$\Gamma_8$  に対しても同様です。

$$\Gamma_8 \quad (n_1, \dots, n_8) \text{ or } \left( n_1 + \frac{1}{2}, \dots, n_8 + \frac{1}{2} \right) \quad \sum_i n_i \in 2\mathbb{Z} \quad n_i \text{ integers} \quad (2.77)$$

この  $n_1$  から  $n_{16}$  というのは、整数で指定された Lie 代数的な意味があって、lattice  $(n_1, \dots, n_{16})$ ,  $\sum_i n_i \in 2\mathbb{Z}$  は、 $SO(32)$  の root lattice  $D_{16} = \{e_i - e_j, \pm(e_i + e_j) \mid (i \neq j) \ 1 \leq i, j \leq 16\}$  になっています。これらによって生成される lattice になっています。それに  $\frac{1}{2}$  を加えたというもの  $(n_1 + 1/2, \dots, n_{16} + 1/2)$ ,  $\sum_i n_i \in 2\mathbb{Z}$  は、weight と関係があります。weight とは root に dual なものです。 $\frac{1}{2}$  という factor から推測することができるように、この格子点たちは  $2^4$  次元の spinor 表現の weight によって generate される lattice であります。だから、spinor weight lattice と言うことにしましょう。つまり  $\Gamma_{16}$  は、 $SO(32)$  の generator だけをもっているだけではなく、2 つある spinor 表現のうちの 1 つの weight lattice によって生成されます。

$$\Gamma_{16} = (SO(32) \text{ root lattice}) \cup \left( \begin{array}{l} \text{one of the two } SO(32) \\ \text{spinor weight lattices} \end{array} \right) \quad (2.78)$$

$\Gamma_8$  に関しても同様のことが言えます。

$$\Gamma_8 = (SO(16) \text{ root lattice}) \cup \left( \begin{array}{l} \text{one of the two } SO(16) \\ \text{spinor weight lattices} \end{array} \right) \quad (2.79)$$

(2.79) の可能性というのは  $E_8$  の root lattice を  $SO(16)$  の root lattice で分解したときに現れる構造になっています。つまり  $\Gamma_8$  というのは  $E_8$  の root lattice です。

要約すると、可能性として 2 つだけしかないということがわかりました。heterotic string というのは 2 種類あって、一つは  $SO(32)$  と言ってもいいけれども、root lattice を含めた 4 つの conjugacy class のうちの 2 つを含み、しばしば  $Spin(32)/\mathbb{Z}_2$  と言われます。それともう 1 つは  $E_8 \times E_8$ 。

heterotic string の mass operator もすぐにつくれます。いままで話した fermionic string 及び bosonic string に関する結果をそれぞれ right mover 及び left mover に適用して張り合わせればいいわけです。right mover に関してすでに書いているし、left mover に関しては単に boson が 26 個あるだけです。各自試みてください。

## 12 Heterotic String Vacua in Lower (Nine) Dimensions

さきほど、right mover に対しては、GSO projection をほどこして superstring にしておけば十分であると言いましたが、必ずしも必要ではないということがのちに認識されました。いまの構成では、right mover が superstring であると思って、それとうまく張り合わさるような、つまり modular invariance を keep する left mover を選んできたわけですが、right と left を連動させながら modular invariance を keep するという可能性も排除できないわけです。それをしらみつぶしに調べることが可能で、それをやってみると、8 個か 9 個か忘れましたが、いままでの 2 つの heterotic string の親戚筋にあたる supersymmetric ではない、heterotic 型の string の模型が見つかりました。

この連動させるという意味をもう少し詳しく言うておきます。いわゆる  $\mathbb{Z}_2$  twist と呼ばれる操作を使って表されるもので、16 次元の lattice を少し変更するとともに、8 次元の supersymmetry を作っている right mover に作用する GSO projection も変更してしまいます。こうやってできた模型の 1 つとして、tachyon は取り除かれているけれども、supersymmetry もなくなってしまうと、1-loop の cosmological constant  $\Lambda_{10}^{1-loop}$  が有限値をもち、gauge 群は  $O(16) \times O(16)$  という model があります。

前回の講義では話さなかったけれども、T-duality の演算でもって、Type IIA と Type IIB は結びついています。10 次元では、ここで見たようにいくつかの heterotic 型の model ができています。そいつらは 10 次元の model としては別の model ですが、1 方向に circle compact 化しますと、簡単な parameter 操作によって互いを結びつけることが可能です。parameter 操作というのは、例えば radius を変えるとか、あるいはここでは話していない Wilson line を挿入するとかです。表 11 は、T-dual によって関係づけられる model 達の例を示しています。例えば、Type IIA と Type IIB の関係をみてみますと、circle の radius が無限大の Type IIA から出発して radius を 0 にもっていきまると、それは Type IIB になっています。この手の interpolation というのを heterotic vacua に対しても考察するのが可能で、例えば  $O(16) \times O(16)$  模型は、twisted circle による compact 化をさせて radius を 0 にもっていきまると、 $E_8 \times E_8$  の hetero と radius 0 の極限でうまくつながっています。

いずれにしろ、modular invariance を課すことにより、fermionic string の摂動論的な model building というのはできます。できすぎて困ってしまう。最初は、heterotic string ですべて決まってしまうと自然界を解明

e.g.1	Type IIA	$\longleftrightarrow$	Type IIB	by $\frac{R_9}{\sqrt{\alpha'}} \leftrightarrow \frac{\sqrt{\alpha'}}{R_9}$
		circle		
e.g.2	$O(16) \times O(16)$	$\longleftrightarrow$	$E_8 \times E_8$	by $\frac{R_9}{\sqrt{\alpha'}} \leftrightarrow \frac{\sqrt{\alpha'}}{R_9}$
	hetero	twisted circle	hetero	

表 11: Examples of models related by T-duality

できるのだらうと思っていたのだけれども、大事なのは modular invariance で、これを満たす model は 10 次元 Minkowski 時空でもいくつかあるし、4 次元 Minkowski 時空を考えるのならその choice はいくらかあります。手で与える compact 化のやり方がいくつでも可能で、それらは supersymmetry を keep しているかぎり全部 cosmological constant = 0 となります。だから energetic な理由でどれを選ぶかということはできないわけです。ものすごくたくさん degenerate vacua というのが存在して、たぶん我々の世の中というのは、その 1 つの重ね合わせであるわけですが、どうやって重ね合わせればいいのかわからない。さらに基本的な立場から考えると、compact 化というのを手でやるのは、いずれにせよ量子重力としては失格です。

もう一つの問題は、我々の知っている模型というのは摂動級数で与えられているものです。摂動級数の各項をどうやって表示するか、どうやって計算するかという prescription であって、確固とした理論があるわけではありません。どうして確固たる理論がまだ作られていないかをここで話す時間はありませんが、粒子の理論にでてくる紫外発散を避けているひもの特性というのがかえってひもの場の理論をつくる時には災いしています。1 本のひもに基づく計算方法というのは、(local) Weyl invariance に基づいています。Weyl invariance は、いまの formalism ではただちに on-shell condition に翻訳されるので、off-shell の考察をしようと思うと、local Weyl invariance は放棄しなければなりません。off-shell を含むようなひもの理論を構成する場合には、これは何か新たなものに拡張されなければなりません。

3 時間を超える 4 時間近くひものことに関して多くを話しているにも拘らず、ひもというものの核心を一言で話せないという非常に不思議な状況が存在します。

ここで Lecture 2 は終了です。

# Lecture 3

## 1 Dp-brane

では 3 番目の lecture。摂動論をふまえて、非摂動効果とは何かということが問題になってきます。この考察はずっと停滞していたわけですが、95 年ぐらいからわかってきたことは、摂動論をふまえた上で理解できる非摂動効果というのは、いままで述べたひもの理論の枠組で実は見えている、というお話であります。それが D-brane とされるものです。

D-brane だけでたくさん時間を費すことも可能ですが、非摂動効果の端緒として現れてきたという立場からできるだけ簡単に説明したいと思います。D-brane というのは、Dirichlet boundary condition によって表現される、open string の端点が終わる壁です。Dirichlet boundary condition を考えると、open string の端点はどこかで終わらなければいけないので、その端点の終わる平面は一般に空間  $p$  次元の hypersurface をつくっています。そっちの方向には momentum の流れがなくて、position eigenstate になっています。何か singular な壁がつくられているわけです。一つの問いとしては、これがたして dynamical な object であるかということです。もう一つの問いとしては、どういう意味で非摂動な object であるか、というものです。一つの言い方をすると、昨日話した disk 上の partition function および tadpole と密接に関係している。式 (3.1) は、真空のゆらぎを表しています。

$$\frac{1}{\lambda^2} \text{ (sphere) } + \frac{1}{\lambda} \text{ (disk) } + \frac{1}{\lambda} \text{ (} RP^2 \text{)} + \text{ (torus) } + \dots \tag{3.1}$$

ひもの摂動論は 0 点振幅に関して、 $\lambda^{-2}$  から始まっています。 $\lambda^{-2}$  の振幅である sphere の 0 点は、conformal invariance から 0 になります。しかし、disk の partition function は以前にも述べたように、dilaton tadpole が nonzero であることから推測できるように、string coupling に関して  $\frac{1}{\lambda}$  で一般には消えません。 $\lambda^0$  である torus の partition function 以前に、disk あるいは  $RP^2$  の  $\frac{1}{\lambda}$  の order の寄与が存在するわけです。だからひもの摂動級数には、実はしばしば忘れがちな  $\frac{1}{\lambda}$  の寄与が最初から座っていた、ということも可能です。0 点振幅とは、1 という operator で測った時、時空がどういうゆらぎをもっているかの確率分布です。Neumann を選びますと open string の端点は自由端ですから、最終的な確率分布は、時空のどこでゆらぎを測ろうとも均一である。ところが Dirichlet を選びますと、この時空のゆらぎはいつも hypersurface 上にのっかっていますから、必ずその点にだけ有限に存在します。したがって、あるところに localize されたゆらぎというのが必ずあるわけで、そのことは dynamical な object の存在を示唆しています。この意味で D-brane は dynamical な object です。

そのため、0 点振幅を slope parameter で微分して得られる tadpole の振幅も当然 nonzero です。それを図 8 が示しています。NS  $\overline{\text{NS}}$  field から得る dilaton tadpole も nonzero です。同様に、Ramond  $\overline{\text{Ramond}}$  tadpole というのもやはり nonzero になります。この絵からほぼ明らかなように、D-brane というものが R  $\overline{\text{R}}$  charge



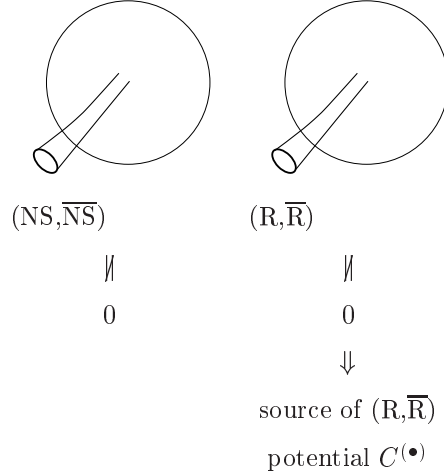


図 8: Dilaton tadpole

の source になっているということがわかります。

少しの間、ひもではなく D-brane の立場から考えます。D-brane に couple する potential が存在するしましょう。少し混乱を招きますが、我々のもっている formalism は 1 本のひもの formalism です。そこでは D-brane は単なる端点です。けれども、端点が  $(p+1)$ -form の  $R \bar{R}$  potential と minimal に couple します。D-brane という object の action を考えますと、1-form の拡張である  $(p+1)$ -form の積分  $\mu_p \int C^{(p+1)}$  が必ず含まれています。

そこで、この項を含む action を想定してみます。この potential に関して変分をとってみると、 $\delta$  function 的な相互作用がでるわけです。電磁場が  $A_\mu$  と couple する action  $S = -\frac{1}{4} \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \int A^\mu dX_\mu$  を  $A^\mu$  で変分すると  $\delta$  関数が出てきますね。これは方程式の右辺に現れる点電荷の寄与です。同様の理由で、 $p$ -brane は  $\delta$  関数的な source として振る舞う。

では、elementary string はどうなっているのか。もちろん  $R \bar{R}$  という言葉を使っているのだから、fermionic string でなければいけません。 $R \bar{R}$  の physical state は  $|\check{\alpha}\rangle_R \otimes |\check{\beta}\rangle_{\bar{R}}$  の形をしている bispinor で、それから出発して Gamma 行列で contract して tensor 的な波動関数にもっていきます。

$$|\rangle_{R\bar{R}} = \frac{1}{(p+2)!} F_{\mu_0 \dots \mu_{p+2}} (C \gamma^{\mu_0 \dots \mu_{p+2}})_{\check{\alpha}\check{\beta}} |\check{\alpha}\rangle_R \otimes |\check{\beta}\rangle_{\bar{R}} \quad (3.2)$$

(3.2) の  $F$  という波動関数は、何かの微分という形に書けることを示すことができます。これは on-shell condition であるところの Dirac 方程式を使って示します。結論として、 $F$  は実は potential ではなくて potential を微分して得られる field strength であることがわかりました。

$(R, \bar{R})$  sector における spinor の tensor 積の既約分解を、IIA、IIB の場合について表 12 にまとめておきました。この表は、すぐ上で得られた結論と密接に関係しています。lightcone gauge で現れる状態は、運動方程式を解いたあとに得られるものです。つまり、on-shell の方程式を課した結果、得られる結論です。一方、covariant な formulation においては、 $SO(9,1)$  の既約分解をした tensor の直和になっています。これ自身は運

	IIA	IIB
lightcone	$\mathbb{8}_s \otimes \mathbb{8}_c = \mathbb{8}_v \oplus \mathbb{6}_T$ [1] [3]	$\mathbb{8}_s \otimes \mathbb{8}_s = \mathbb{1} \oplus \mathbb{28} \oplus \mathbb{35}$ [0] [2] [4] <sup>+</sup>
covariant	$\mathbb{16} \otimes \mathbb{16} = \mathbb{1} \oplus \mathbb{45} \oplus \mathbb{210}$ [0] [2] [4]	$\mathbb{16} \otimes \mathbb{16} = \mathbb{10} \oplus \mathbb{120} \oplus \mathbb{126}$ [1] [3] [5] <sup>+</sup>

表 12: Irreducible decompositions of Type IIA, IIB

動方程式を解く前の表示であります。この 2 通りの既約分解の結果を並べて考え、rank の数を [ ] で書いておきますと、1 だけの差がでています。どちらも間違っていないくて、両方とも正しい statement です。両方正しい理由は、外微分 d の存在によって説明できます。やはり d (something) と書ける量であって field strength 的な量だと結論できます。これを場の理論的な考察に翻訳して source という立場から考えてみますと、elementary string は  $R\bar{R}$  potential に関して  $\delta$  function の微分的な source として働いていることがわかります。 $\delta$  function の微分は空間の全領域で積分しても 0 になります。だから charge は必ず逃げていくわけで、elementary string 自身は、charge の担い手にはなりえない。

では、IIB, IIA でどういいう brane の次元が可能であるかを論じましょう。これは brane の性質に関する話で、どういいう次元の brane が可能かということは、表 12 から  $R\bar{R}$  field strength に対して可能な  $p+2$  を読みとることによって導けます。それを

Type IIB	$p+2 = 1, 3, 5, 7, 9, 11$
Type IIA	$p+2 = 0, 2, 4, 6, 8, 10$
Type I	demand $\Omega   \rangle_{R\bar{R}} =   \rangle_{R\bar{R}}$ $\Rightarrow (C\Gamma^{\mu_0 \dots \mu_{p+1}})^T = - (C\Gamma^{\mu_0 \dots \mu_{p+1}})^T$ $\Rightarrow p = 1, 5, 9$

が表しています。 $p+2$  が 1, 3, 5 のときが IIB で、0, 2, 4 のときが IIA である。その magnetic な dual を含めると、 $p+2$  が 1, 3, 5, 7, 9, 11 のときが IIB で、 $p+2$  が 0, 2, 4, 6, 8, 10 が IIA です。Type I はさらに  $\Omega$  projection を課して得られたものですから、それは charge conjugation  $C \times$  Gamma 行列に関する条件に翻訳されるわけです。このことから、 $p$  が 1, 5, 9 ということが得られました。

## 2 Spectrum of Heterotic $Spin(32)/\mathbb{Z}_2$ and that of Type I at Zero String Coupling

これから話したいのは、いわゆる非摂動効果の端緒として現れた D-brane という object を使って、Type I string と heterotic string という 2 つの摂動論的に formulate されたひもの model は、実は 1 つの理論の 2 つの異なった摂動論であることを議論したい。これが strong-weak duality と呼ばれる議論の典型的なものであ

Hetero $Spin(32)/\mathbb{Z}_2$	$SO(32)$ Type I
$\Omega$ projected	
$b_{-\frac{1}{2}}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j  k\rangle_{NS} u_{ij}(k) \quad \textcircled{8}_v \otimes \textcircled{8}_v = \textcircled{35} \oplus \textcircled{28} \oplus \textcircled{1}$	$b_{-\frac{1}{2}}^{\{i} \tilde{b}_{-\frac{1}{2}}^{j\}}  k\rangle_{NS, \overline{NS}} u_{ij}^{(sym)}(k) \quad (\textcircled{8}_v \otimes \textcircled{8}_v)_{\overline{sym}} = \textcircled{35} \oplus \textcircled{1}$
$\tilde{\alpha}_{-1}^j  \alpha \delta_s, k\rangle_R (\gamma_j)_{\beta\delta} u^{\alpha\beta\delta}(k) \quad \textcircled{8}_s \otimes \textcircled{8}_v = \textcircled{8}_c \oplus \textcircled{56}$	$ \alpha \delta_s\rangle_R \otimes  \tilde{\alpha} \delta_s\rangle_{\overline{R}} \chi_{\alpha\tilde{\alpha}}^{(asym)}(k) \quad (\textcircled{8}_s \otimes \textcircled{8}_s)_{\overline{asym}} = \textcircled{28}$
$(\textcircled{8}_s \otimes \textcircled{8}_v) + (\textcircled{8}_v \otimes \textcircled{8}_s)_{\overline{sym}} = \textcircled{8}_c \oplus \textcircled{56}$	
$\mathcal{N} = 1$ supergravity multiplet	
$\left( \begin{array}{l} b_{-\frac{1}{2}}^i \tilde{\alpha}_{-1}^I  k\rangle_{NS} \\ b_{-\frac{1}{2}}^i \lim_{ \vec{p}^I  \rightarrow 0} : \exp(i\vec{p}^I \overline{X}_L^I(\vec{z})) :  k\rangle_{NS} \end{array} \right) u_{ia}(k) \quad \textcircled{8}_v \otimes (\textcircled{16} \otimes \textcircled{480})$	$b_{-\frac{1}{2}}^i  k; i' j'\rangle_{NS} (T_{i' j'}^a) u_{ia}(k) \quad \textcircled{8}_v \otimes \textcircled{496}_{SO(32) \text{ adj}}$
$(\vec{p}^I)^2 = 2$	$= \textcircled{8}_v \oplus \textcircled{496}_{SO(32) \text{ adj}}$
similarly for fermion $\textcircled{8}_s \otimes \textcircled{496}_{SO(32) \text{ adj}}$	$\textcircled{8}_s \otimes \textcircled{496}_{SO(32) \text{ adj}}$
$\mathcal{N} = 1$ $SO(32)$ Yang-Mills supermultiplet	

$\therefore$  The massless spectra are the same.

表 13: Massless states in Heterotic  $Spin(32)/\mathbb{Z}_2$  and  $SO(32)$  Type I

ります。そのための準備をこれからやっていきます。

ここで言う duality とは、 $Spin(32)/\mathbb{Z}_2$  heterotic string と  $SO(32)$  の Type I string の強結合と弱結合を入れ換える duality のことです。両方とも free string として摂動論の範囲での spectrum を比べてみましょう。

表 13 は、質量が 0 の状態です。左側が heterotic string の spectrum です。前にも言ったように、heterotic string は right mover が superstring で fermion の oscillator を含んでいますが、left mover は lattice 上にとった boson です。right mover の NS sector から spacetime boson がでて、R sector から spacetime spinor がでて、GSO がかかっています。一方、対応する Type I の話ですけれども、これは nonorientable な closed string ですから、IIB の状態空間に  $\Omega$  projection を課したものです。spacetime boson は  $NS\overline{NS}$  sector の対称部分と  $R\overline{R}$  sector の反対称部分が選ばれて、ちょうど  $\textcircled{35}$ 、 $\textcircled{28}$ 、 $\textcircled{1}$  が得られます。

次に gauge boson を含む multiplet です。heterotic string の場合は、right mover は vector をつくる添字をもっています。ところが left mover に関して言うと、ground state は normal ordering から生じる negative intercept をもっています。この negative intercept を cancel させるだけの oscillator をおいてやればいわけです。一つのやり方は、 $\alpha_{-1}^I$   $I = 10 \sim 26$  で指定される 16 個の boson をおいてやると、16 個の massless の状態ができます。これは gauge boson の Cartan 部分に相当しています。それ以外に昨日話した momentum とか winding number をもっている状態があります。こういう状態は oscillator では書けず、right momentum、left momentum の固有値によって指定される状態ですから、これを与えるためには平面波型の operator を作用しなければなりません。一般にこれを vertex operator と言います。vertex operator から漸近状態をつくるためには、normal ordered された exponential type の operator を掛けて、 $z$  を 0 につまり  $\tau$  を  $-\infty$  にもっていくという操作をとります。するとこれが left mover の lattice momentum  $\vec{p}^I$  の固有値をもった状態になっています。この  $p^I$  の 2 乗を 2 に選んでおきますと、massless の状態をつくることができます。 $(p^I)^2 = 2$  という状態を満たす root lattice の point は 480。これが  $SO(32)$  の off-diagonal generator、つまり step generator に

Hetero $Spin(32)/\mathbb{Z}_2$	$SO(32)$ Type I
<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Right</div> <math>\otimes</math> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Left</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 5px;"> <span>2</span> <span>2</span> </div>	1 from open string sector
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 5px;">Right</div> <u>NS</u> 128 states, which fit into <div style="display: flex; justify-content: center; align-items: center; margin-top: 5px;"> <span style="margin-right: 10px;">44</span> <math>\oplus</math> <span style="margin-right: 10px;">84</span> <span style="margin-left: 20px;">of <math>SO(9)</math></span> </div> <div style="display: flex; justify-content: center; margin-top: 5px;"> <span style="margin-right: 20px;">[2nd sym]</span> <span>[3rd asym]</span> </div>	either sym. rep CP $\Rightarrow$ or antisym(adj) rep
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 5px;">Left</div> $p^I$ on root lattice $\Rightarrow$ 40996 tensorial states $p^I$ on the spinor lattice $\Rightarrow 2^{\lfloor \frac{32}{2} \rfloor} / 2 = 2^{15} = 32768$ $SO(32)$ spinorial states	

$\therefore$  The massive spectra are different.

表 14: Massive low lying states in Hetero  $Spin(32)/\mathbb{Z}_2$  and  $SO(32)$  Type I

なっています。 $SU(2)$  の場合の  $J_+$ 、 $J_-$  に対応するものです。diagonal generator と step generator をあわせて total 496 個の状態をつくることができます。これがちょうど  $SO(32)$  の gauge boson の状態です。Type I の方は単に Chan-Paton が付きます。この反対称化された添字から 496 の  $SO(32)$  の adjoint 表現が得られるわけです。結果としてやはり、 $SO(32)$  の Yang-Mills supermultiplet が massless spectrum として得られました。 $Spin(32)/\mathbb{Z}_2$  heterotic string と  $SO(32)$  Type I string の massless spectrum は一致します。

じゃ、massive level はどうなっているかと言うと、これは一致しません。表 14 がそれを示しています。まず、heterotic string の方がどういう形になっているかを見てみましょう。lightcone quantization で定式化しましたが、massive states では静止系がとれるので、 $SO(8)$  の表現から最初出発したけれども最終的には  $SO(9)$  の既約表現の形にまとめることができます。right mover に関して言いますと、NS sector の状態が 128 個あってそれが 44 と 84 という 2 つの既約表現の形にまとまるのがわかります。同様に Ramond sector はやはり 128 個あって、それは  $SO(9)$  の vector spinor の既約表現の一つであるということがわかります。left mover に関しては、その counting の詳細は省略することにしますが、さきほど言いましたように 2 種類の lattice point というのがあります。root lattice にのっているのと spinorial lattice にのっているものがあります。このうち、spinorial lattice にのっている部分というのは、 $SO(32)$  の spinor として振る舞います。このことから明らかのように、left の mass level  $\alpha' M_L^2 = 2$  のところにある  $SO(32)$  の spinorial state が、heterotic string に存在するわけです。

一方、Type I の方ですが、Type I は一番低い massive level というのは mass level 1 というやつですね。それは open string sector の oscillator の強さを一つ増やすわけで、gauge 群を生成する mechanism としては Chan-Paton しかありません。つまり対称化、反対称化しか可能性としてありえないわけです。したがって、そ

れ以外の exotic な表現をおくというのは最初から不可能です。以上より、heterotic string と Type I の spectrum は massive level では異なっていることがわかりました。

### 3 Statement of the TypeI-Heterotic Duality

にも関わらず、 $Spin(32)/\mathbb{Z}_2$  heterotic と  $SO(32)$  Type I が同じ理論であるというのは一体どういう意味なのか、ということを説明しなければなりません。もう一度繰り返すと、明らかに 2 つの perturbation theory は別の perturbation theory です。ところがどちらも local gauge invariance を持った模型であるという理由で、massless 状態は全く同じ構造をしています。

別の解析として、supergravity を経由する low energy effective action の解析があります。その解析は、hetero side と Type I side の両方で行うことが可能です。これには、graviton や gauge boson、dilaton などの massless fields すべてが参加しているわけですが、とくに注目すべきは dilaton です。ここでは最終結論のみを述べます。heterotic string の dilaton 場  $\Phi_H$  と Type I の dilaton 場  $\Phi_I$  というのは  $-\text{sign}$  でつながっています。

$$\Phi_H = -\Phi_I \quad (3.3)$$

これはかなり重要な結論です。なぜかというひもの理論におきましては、dilaton という spacetime field を exponential の肩にのつけたものは、ひもの coupling constant になっています。− 符号がつくということは、heterotic string の string coupling と Type I の string coupling が互いに逆数関係でつながっているということの意味します。

$$\lambda_H = e^{\Phi_H} = e^{-\Phi_I} = \frac{1}{\lambda_I} \quad (3.4)$$

これは、string coupling の値  $\lambda$  をもつ  $Spin(32)/\mathbb{Z}_2$  の heterotic string と string coupling の値  $\frac{1}{\lambda}$  をもつ Type I string が等価であるという statement になります。もちろん両者はいまのところ摂動論でしか定義されていません。したがって、 $\lambda_H$  が小さくなれば  $\lambda_I$  は必ず大きくなるので、いまの statement を純然たる摂動論の level で check、または判定することは不可能です。その意味において、両者の摂動論が異なっているのはむしろ当然なのです。いま coupling constant で parametrize されている一つの理論があったとして、ある領域のまわりでは Type I であり、別の overlap していない領域での理論は hetero であるわけです。違った領域で計算した spectrum が異なっているのは当然であるということがわかりました。では、この純然たる摂動論の level の話を超えて、strong-weak duality の妥当性または無矛盾性を調べることが可能か、という問いにたどりつくわけで、ここで姿を現すのが D-brane です。

いま heterotic string の弱結合領域の摂動論を考えます。free な spectrum から、つまり heterotic string の string coupling = 0 のときの spectrum から出発します。この coupling を徐々に強くしていくと、この spectrum に少し string coupling がある補正が加わっていくことが想像できます。一般には spectrum は、途中で level crossing とか起こして変わっていきます。しかしながら、supersymmetry をもった理論には同じ mass をとり続ける状態が存在します。それを総称的に BPS states と呼びます。BPS states が可能なのは、実は supersymmetry の代数に nontrivial な center がある場合であることが知られています。とくにこれは場の理論の考察が明らか

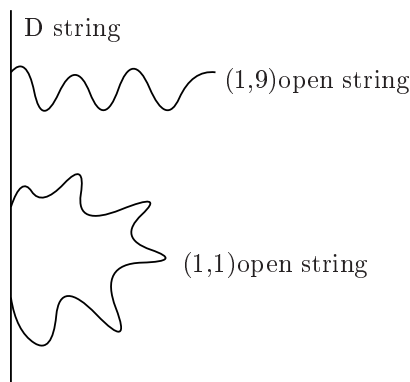


図 9: Open strings with D-brane

にしたことですが、理論に soliton 的な object がある場合、その topological な性質つまり total derivative が無視できないという性質を反映して、nontrivial な center が生成されることが知られています。nontrivial な center がある場合には、susy の一部を保ちながら mass と charge のあいだの関係式を確立することが可能です。粒子の charge は変化しません。つまり連続変形のもとで不変ですから、いまやそれと関係づけられている mass もまた連続変形のもとで不変になっています。discrete にしか変わり得ないものを coupling constant = 0 から連続変形していても変わり得ないわけです。BPS states は摂動論的な量子補正を受けないことが結論できます。いま heterotic side から出発して、 $\lambda_H$  をどんどん増やしていったとしても、BPS states は同じところにとどまっているはずで、Type I side でも、つまり Type I の摂動論がよくなる領域にいても、BPS states が見えているだろうというのが idea です。Type I side での BPS states は何かというと、それが D-string です。話す時間がなかったけれども、D-brane は一般に BPS states であるということを示すことができます。

## 4 Type I D-String = Elementary Heterotic String

標語的に言うと、heterotic string と Type I string は同じ理論です。この equality に関する evidence はいくつか挙げられています。

一つは両者の tension、つまり elementary heterotic string と Type I D-string の tension が low energy effective theory を経由して、一致することを示すことができます。

$$\tau_{D_1} = \left( \begin{array}{c} \text{the tension of an} \\ \text{elementary heterotic string} \end{array} \right) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \quad (3.5)$$

次に D1 のまわりのゆらぎの spectrum が heterotic string と一致することを示すことができます。D-brane は一般に open string が hypersurface として特徴づけられます。D-brane そのものを孤立して考えるのは正しくないわけです。いつも D-brane にはひもがまつわりついています。D-brane にまつわりついている elementary open string には、2 種類あります。図 9 がそれを示しています。一つは open string の両端が D-string で終わっ

ているもの、もう一つは open string の片一方の端が D-string にのっかっていて、もう片一方の端が自由端、もってまわった言い方をしますと D9-brane 上にのっかっているものです。

このゆらぎの spectrum を見てみましょう。これはいままでに話してきた string の spectrum の応用としてやることができます。(1,1) という、両端が D-string にのっかった open string を考えます。よって、時間方向と空間 1 方向にだけ Neumann で残りは Dirichlet という条件を課します。NS sector で spectrum を計算して  $\Omega$  projection を課してやると、 $\mu$  が 0, 1 方向つまり D-string がのびている方向には

$$\Omega b_{-\frac{1}{2}}^{\mu=0,1} |0\rangle = -b_{-\frac{1}{2}}^{\mu=0,1} |0\rangle \quad (3.6)$$

となり、 $\Omega$  invariant な状態はないということが結論できます。ところが  $\mu$  が 2~9 に関しては、

$$\Omega b_{-\frac{1}{2}}^{\mu=2\sim 9} |0\rangle = b_{-\frac{1}{2}}^{\mu=2\sim 9} |0\rangle \quad (3.7)$$

となり、 $\Omega$  invariant な状態があると結論できます。よって、D-string 上にのっかっていない方向に 8 個の massless、つまり、 $\mathbb{R}^8$  の fluctuation があります。 $X^0, X^1$  方向を heterotic string の worldsheet だと考えることにします。すると transverse な方向に massless fluctuation が生じているのがわかるわけです。これでもって heterotic string が D-string と同じ方向に止まっている状況 ( $X^0 = \tau, X^1 = \sigma$ ) と同一視することにします。これは証明というわけではないですが、こう考えても矛盾がないということです。

次に (1,1) Ramond sector です。spectrum を調べてみると、やはりいま D-string を置くと  $SO(1,9)$  を  $SO(1,1) \otimes SO(8)$  と既約分解して  $\mathbb{16}_s = (\frac{1}{2}, \mathbb{8}_s) \oplus (-\frac{1}{2}, \mathbb{8}_s)$  になります。これは  $\Omega$  invariant な状態で、さらに Dirac 方程式をつくることを要求してみますと、この spinor というのは実は  $(-\frac{1}{2}, \mathbb{8}_s)$  という表現をもっており、運動方程式により right moving であるということがわかります。

次に (1,9) + (9,1) string を考えましょう。(1,9) というのは、片方は D-string にのっかっていて片方は自由端であるということです。この string の mode 展開はいままでに話したことの無い形をとります。そのおかげで、いままでと normal ordering coefficient の出方が違ってきます。NS sector では、boson が antiperiodic boundary condition に従います。そのおかげで normal ordering constant が正になってしまいます。したがって ground state ですら mass をもってしまう。一番低い light spectrum には何も寄与しません。

一方 Ramond sector は、(9,9) string では boson も fermion も periodic な boundary condition に従っていました。ここでは (1,9) という open string の片方が D-string で片方が自由端であるものを考えます。すると、periodic であったものが antiperiodic になり、antiperiodic であったものが periodic になります。もともと boson も fermion も periodic であったものが両方とも antiperiodic になって、やはり boson と fermion の間の normal ordering coefficient はつりあっています。つまり、normal ordering coefficient = 0 で ground state は massless です。そのあと、GSO projection と Dirac 方程式とを考察しますと、left moving の chiral spinor が 1 個でできます。端点にくっついている Chan-Paton の添字から 32 個の spinor がでてくることがわかります。実はこの spinor が、heterotic side での current algebra fermion を生成しています。heterotic string を構成したときは boson で構成しましたが、current algebra fermion で構成することも可能です。後者の構成の際につくられる、つまり fermionic な構成のときに必要な 32 個の fermion が、Type I side でも実際に現れているということ



がわかります。これが antiperiodic な  $\chi^I(\frac{1}{2}, \mathbb{1})$  になっています。それ以外にも periodic な sector というのが fermion にはあります。1本の D-string というのは、(1,9) open string というのもっていて、いつもそういうのがまつわりついていて、そいつは必ず current algebra fermion、32個の spinor をもっているわけです。そこには periodic sector (P)、antiperiodic sector (AP) 両方あります。いま言いたいのは、antiperiodic sector (AP) からは確かに heterotic string の gauge boson を生成するような 496個の adjoint の massless 粒子がでてくるわけです。それだけでなくもう一つ高い level にいくと、 $SO(32)$  の spinorial 状態ができる。ここに確かに spinor が座っているわけです。

## 5 Stable Spinorial State in Type I

前のページの内容を復習しておく、AP sector から  $SO(32)$  の 496個の massless 粒子がでてきます。それ以外にも  $SO(32)$  spinorial の massive state があるということを確認できます。これは、ここ 1、2年ぐらい話題になった、Sen による話です。

heterotic side に perturbative spectrum として存在する  $SO(32)$  の spinorial state が、Type I side でどう見えるか、というのが問題です。この状態は massive ですがだれにも decay できない。したがって、stable particle として観測でき、heterotic string の perturbative spectrum に存在します。しかしながらこの状態の持っている charge とは、susy とは何の関係もない charge です。よって、これは non-BPS state であります。こういう状態では、heterotic string の coupling を動かしていくと、その mass は変化していくと考えられます。

$$\sqrt{\alpha'} \mathcal{M} = 2f(\lambda_H) \quad \text{with } f(0) = 1 \quad (3.8)$$

つまり、heterotic string の string coupling = 0 であるときはこの未知関数  $f$  というのは 1 であるけれども、それ以上のことはあまりよくわからない。ところが Type I coupling というのは heterotic string と逆数関係で結びついていきますから、その逆数で動いていくような何か物理的な object というのが Type I side でも存在するはずなんです。

$$\sqrt{\alpha'} \mathcal{M} = 2f\left(\frac{1}{\lambda_I}\right) \equiv 2\tilde{f}(\lambda_I) \quad (3.9)$$

これが一体何なのかは問いです。

さきほどの考察で、D-string にまつわりついている (1,9) string から spinorial な量子数が現れると言いました。一見すると D-string だけでやはりまかなえるようにも思います。しかし D-string というのは BPS で、heterotic side での spinorial state は non-BPS ですから、D-string とは違った object です。non-BPS object であるためには、BPS がもっている (R,R) charge をうまく cancel させてやらなければなりません。

次に candidate として浮かびあがってくるのは、D1- $\overline{\text{D1}}$  であります。 $\overline{\text{D1}}$  というのは定義しませんでした、一般に  $Dp$ -brane の charge をさかさまにする、つまり  $Dp$ -brane と orientation をさかさまにした object を  $\overline{Dp}$ -brane と呼びます。ですから一つの candidate として D1- $\overline{\text{D1}}$  というものが考えられます。それは zero (R,R) charge を carry しています。あっちがたてばこっちがたたずで、この zero (R,R) charge というのもってしまいますと、これは vacuum と同じ量子数ですので、一般にはただちに真空中に decay してしまいます。これは実



際に bosonic string で起こっていることで、tachyon condensation と称してさかんに研究されています。Type I の場合には、完全に vacuum に annihilate せず何か残ってほしいわけですね。説明は文献にゆずらざるを得ません。Wilson line というものを導入すると annihilate しない状態をつくることができ、この D particle と呼ばれる残った状態が heterotic side での perturbative spinorial state に対応していることが認識されました。

以上が摂動論に  $1/\text{coupling constant}$  という形をとり、足し算として入ってくる非摂動効果の典型的な例であります。これからわかることは、摂動論的に別の理論であると思われていた 2 つの理論が実は、1 つの仮想的な理論における、“moduli space” の違った領域での 2 つの異なる摂動論であることです。つまり、摂動論は 2 つあるけれども、理論自身は 1 つと考えた方が合理的なんじゃないかという考え方です。これでだいたい Type I-heterotic duality の話は終わります。

Type I-heterotic duality の話はおもしろいですが、定性的な議論にとどまりがちです。定性的な議論を超えて定量的な議論、つまり無限個の真空の縮退を解くとかあるいは本当に我々の住んでいる世界というのをつくり出すことをめざしたいわけですね。今の議論ですとかなり難しいですね。定量的な話をするための 1 つの approach についてこれから話していきます。

# Lecture 4

## 1 Introduction

いままで、摂動論および摂動論に足し算として入る非摂動効果について述べてきました。とくに Lecture 3 では非摂動効果の議論の 1 例として、coupling constant の強結合と弱結合の入れ換えに関して、2 つの摂動級数が 1 つの理論の moduli space の異なる領域での展開となっていることについて述べたわけです。個人的な見解ですが、素粒子をやる上で重要なことの 1 つは、無限に縮退している摂動論的真空という状況から理論の現状を解放することだと思います。それによって、standard model をだすことも可能になってくるのではないかと思います。

いままで話す機会がなかったことですけれども、ひもの理論というのは、1 本のひもを考えている時点で、すでに不可避免的に重力を含んでいます。点粒子の理論では重力は含めて考えてもいいし、含めずに考えてもよかったです。ところが、ひもの場合は重力をはずして考えることは不可能です。ひもの理論は同時に重力の理論でなければならず、波として姿を現します。量子重力の理論たりうるわけです。量子重力の理論であるために、時空というのはこちらが注文すべきものではなくて、なにか計算して得られる output であるはずなんです。したがって、昨日の講義で circle compact 化とかその拡張とか言いましたが、それは摂動論的な近似として現れるべきものです。我々が手で与えるものではなくて、理論が最終的に決定する時空というのがあるべき姿であります。output としての時空という規範を、少なくとも論理的な level において満たしている model を作るのが一つの目標であります。別の言い方をすると、いままで述べてきた摂動論には一応無関係に仕事ができるような framework をつくりたい。

このことに関して、90 年代におもちゃの model として成功をおさめたやり方として、worldsheet を離散化してやって、その離散化した worldsheet から現れる action と等価な行列の action を考察するやり方があります。この翻訳操作は、90 年代はじめにいわゆる  $c \leq 1$  noncritical string と呼ばれる random surface と関係した model において成功を納めたのですが、かなり厳密に行うことができます。この一連の model では、非摂動効果を genus を実際に足すことによって考察することができます。以下に述べる素粒子の統一模型に関する行列模型においては、かなりそのへんはあいまいです。(どうして  $c \leq 1$  noncritical string でできて、10 次元に住んでいる critical string でできないのかをここで話しする時間はありません。) ひもの意味で、ひもの worldsheet を離散化し、その action を行列という形に map したとは言いがたい。ですが以下に、1 本のひもから出発し、摂動論的な superstring の理論を受け継ぐ行列の理論を提示します。つまり、ひもに対して構成論的な定義を与えます。定義を導出することはできないので、この定義に向けての一つの導入を行います。

昨日話したように、Polyakov type の action(1.1) から出発しまして、 $g^{ab}$  というのを取り除きますと、南部 action(1.6) が得られます。それは  $\sqrt{(\text{induced metric})^2}$  というものです。induced metric というのは

$$\Sigma^{MN} = \epsilon^{ab} \partial_a X^M \partial_b X^N = \{X^M, X^N\}_{\text{P.B.}} \quad (4.1)$$

という形をしています。Minkowski 空間の添字に関して以前は  $\mu\nu$  と書きましたが、行列の話をするために、

$M N$  を使います。Schild の action と呼ばれる action は、

$$S_{\text{Schild}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \frac{1}{2} \Sigma_{MN} \Sigma^{MN} \quad (4.2)$$

であります。南部 action  $S_{\text{Nambu}}$  は、あらゆる reparametrization に関して invariant です。action は area そのものです。Schild action  $S_{\text{Schild}}$  は、南部 action の  $\sqrt{-g}$  が無い action で、南部 action に現れる  $\sqrt{-g}$  の中がそのままできています。action は両者異なるわけですが、Schild の action で area element  $\Sigma^2 = \text{constant}$  という条件のもとでは、Schild の運動方程式と南部の運動方程式というのは実は同等である、つまり area  $\Sigma^2$  を維持するような gauge の範囲内では、Schild の理論と南部の理論は運動方程式としては同等であるということを示すことができます。さらに area 自身が constant であるということを示すことができます。

一つ注目すべき点は、induced metric  $\Sigma^{MN}$  は、 $\tau$  と  $\sigma$  に関する Poisson bracket になっていることです。Poisson bracket になっているというものの解釈ですが、何かある意味で量子論的な fuzzy surface というか、量子論的な surface があるとしたら、そこでは  $\sigma$  と  $\tau$  が noncommuting な Heisenberg algebra に従っていて、古典的極限つまり  $\tau$  と  $\sigma$  が commute する極限として、この形の Poisson bracket が得られると思っていいじゃないか、そういう imagination をもつことが可能です。このことを最初に言ったのが南部で、以下に述べるのはこれに関係した行列の話です。

次に摂動論的なひもの統一理論をもう一度復習しておきます。表 15 にあるように、10 次元に 5 つの model があり、大きく分けて 2 系列に分かれます。1 つは closed string だけの理論 IIA, IIB で、9 次元では T-duality の操作によって関係づいています。それらは  $16 + 16$  の supercharge をもっていて、低エネルギーでは  $\mathcal{N} = 2$  の supergravity によって記述されます。closed string だけの理論であり orientable です。IIB から Type I を得るためには、 $\Omega$  projection を作用して状態空間を減らしてやり、その代わりに open string を加えます。減らして足すという操作をするわけです。前回述べたことにより、Type I と heterotic  $SO(32)$  が強結合と弱結合の入れ換えにより同一視できることがわかりました。heterotic vacua は、9 次元に compact 化するとやはり連続変形可能であるということがわかっています。この右側の系列に特徴的なことは、 $8 + 8$  の supercharge をもっていて、低エネルギーでは  $\mathcal{N} = 1$  の supergravity で記述されるということでもあります。

とくに Type I について述べると、これは closed と open からなり nonorientable な理論です。この右側の系列に属する行列模型をなんとかつくっていききたいというわけでもあります。一方 Banks, Fischler, Shenker, Susskind が提唱した行列模型は、M と呼ばれる 11 次元の仮想的な理論、低エネルギーでちょうど 11 次元の supergravity になるような仮想的な理論を与える行列模型であります。

## 2 Action of IIB matrix model & USp matrix model

この時点で action を定義して、どうしてこれが reasonable であるか説明することによって話を進めていくのが一番わかりやすいと思います。

まず、摂動論的な紐の統一理論の表で左側にある closed string だけの理論、つまり時空の理論である摂動論

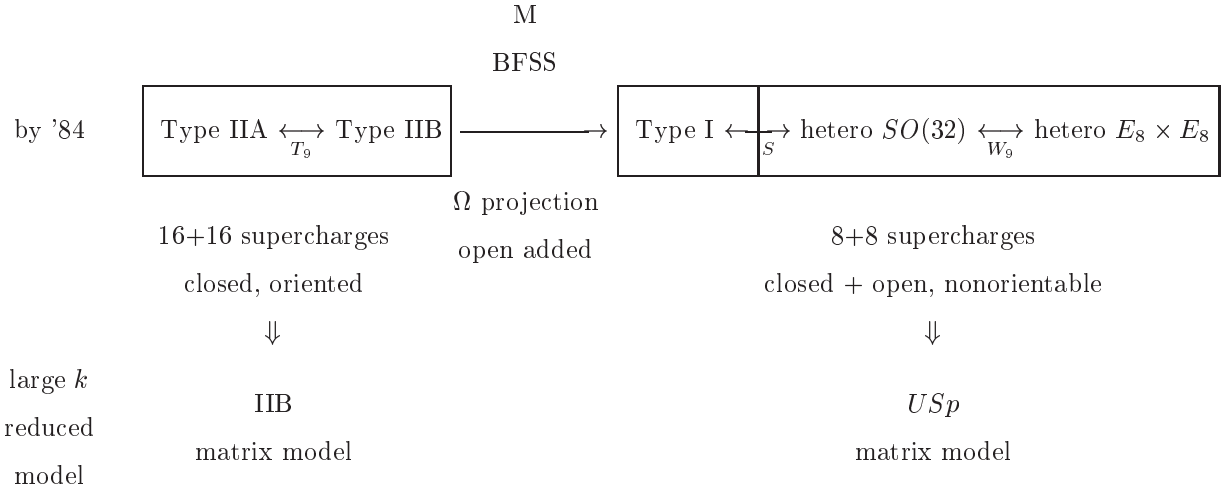


表 15: Unified theory of perturbative strings

的な紐の理論に対応する行列模型を説明します。その action は簡単な形をしています。

$$S_{\text{IIB}}(\underline{v}_M, \underline{\Psi}) = \frac{1}{g^2} \text{tr} \left( \frac{1}{4} [\underline{v}_M, \underline{v}_N] [\underline{v}^M, \underline{v}^N] - \frac{1}{2} \overline{\underline{\Psi}} \Gamma^M [\underline{v}_M, \underline{\Psi}] \right) \quad (4.3)$$

説明の都合上、行列の size を  $2k$  として  $\underline{v}_M$  と書きます。  $\underline{v}_M$  は  $2k \times 2k$  の hermitian 行列で、それは  $U(2k)$  の Lie 代数の generator になっています。この  $\underline{v}_M$  を用いて boson の行列を 10 個用意し、同様に  $2k \times 2k$  の fermion の行列  $\underline{\Psi}$  の各成分に、10 次元の Majorana-Weyl と同じ条件である 16 個の real component をもたせてやります。あとで使う notation として、この  $\underline{v}_M$  を  $v_m$   $m = 0, 1, 2, 3$  はそのままにして、残りを複素にくんで  $\Phi_I = \frac{1}{\sqrt{2}} (v_{3+I} + i v_{6+I})$   $I = 1, 2, 3$  と書きます。fermion は、2 component Weyl spinor を使って

$$\underline{\Psi} = (\lambda, 0, \psi_1, 0, \psi_2, 0, \psi_3, 0, 0, \bar{\lambda}, 0, \overline{\psi_1}, 0, \overline{\psi_2}, 0, \overline{\psi_3})^T \quad (4.4)$$

と書くことができます。

明らかにひもの Type IIB 理論に対応する行列模型は、10 次元の super Yang-Mills の action で時空依存性をまったくなくしてしまった action です。10 次元の  $\mathcal{N} = 1$  super Yang-Mills は、dimensional reduction をして 4 次元におとすと、 $\mathcal{N} = 4$  super Yang-Mills になっています。4 次元では  $\mathcal{N} = 1$  の superfield formalism ができています。4 次元の  $\mathcal{N} = 1$  の superfield notation を使いますと、 $\mathcal{N} = 4$  super Yang-Mills を  $\mathcal{N} = 1$  superfield でかいて、場の時空依存性を全部落としてしまったものを使えばいいというわけです。その場合、vector multiplet からつくられた field strength superfield  $W$  と adjoint 表現に従う chiral multiplet を 3 つ、 $\Phi_I$   $I = 1, 2, 3$  を用意すれば、それらを使って IIB 行列模型の action は

$$S_{\text{IIB}} = \frac{1}{g^2} \text{Tr} \left( \int d^2\theta \underline{W}^\alpha \underline{W}_\alpha + \text{h.c.} + 4 \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \overline{\underline{\Phi}}_I^\dagger e^{2V} \underline{\Phi}_I \right) + \frac{1}{g^2} \left( \int d^2\theta W_0 + \text{h.c.} \right) \quad (4.5)$$

where  $W_0 = \sqrt{2} \text{Tr} (\underline{\Phi}_1, [\underline{\Phi}_2, \underline{\Phi}_3])$

と書くことが可能であります。これらの行列を  $\underline{\quad}$  で示したのは、 $U(2k)$  に従う Hermite 行列であることを示すためです。

ここから摂動論的な Type I 理論を受け継ぐ行列模型をどうつくればいいのかということですが、それは摂動論でやったやり方を踏襲することにします。(4.3) は closed string を表している IIB 行列模型です。それに  $\Omega$  projection の行列 analog というのを見出してそれを作用させ、そのあとに open string に対応する自由度を手で加えるという操作をとります。 $\Omega$  projection を作用させるので、理論は nonorientable になっています。ただし模型をつくる際に、必ず  $8+8$  の susy が keep できているということを確認する必要があります。supersymmetry で縛っていくというのがこの話の基本的筋道です。maximal supersymmetry がどうして必要かといいますと、maximal supersymmetry がありますと gravity multiplet というのがつくれて、spin 0 から出発して spin 2 を含む multiplet まで届くわけです。ある意味で Lie 代数的な考察のみから重力の存在について言及できるわけです。

以下で Lie 代数の話をしてします。 $U(2k)$  の Lie 代数は、その部分 Lie 代数に分解することができます。2通りの分解の仕方があり、それは  $Sp$  と  $SO$  です。いずれをとっても、 $U(2k)$  の Lie 代数に属する行列をもってきますと、対応する  $Sp(2k)$  あるいは  $SO(2k)$  の2つの表現に unique に直和分解されます。もっと具体的に言うと、generator を  $Sp$  あるいは  $SO$  の立場から2つの表現に分類することができます。

$$\begin{array}{lcl}
 U(2k) \text{ adj} & \nearrow & USp \text{ adj} (= \text{sym}) \\
 & \searrow & USp \text{ asym} \\
 U(2k) \text{ adj} & \nearrow & \cancel{SO} \text{ adj} (= \text{asym}) \\
 & \searrow & \cancel{SO} \text{ sym}
 \end{array}
 \quad
 F = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

そして、それを実行する projector は、

$$\hat{\rho}_{\mp} \bullet \equiv \frac{1}{2} (\bullet \mp F^{-1} \bullet^T F) \tag{4.6}$$

です。ここで導入した  $F$  は、 $Sp$  とか  $SO$  の内積をつくる時に必要な invariant tensor です。ある  $U(2k)$  の adjoint の element を  $\bullet$  として、(4.6) の定義でもって  $\rho_{\mp}$  を作用してやると、それは確かに  $Sp$  あるいは  $SO$  の symmetric あるいは antisymmetric 表現になっています。この projector はもちろん足して1で、各々の2乗はそれ自身で、 $\rho_{-}$  と  $\rho_{+}$  をかけると0という性質を満たしています。

$U(2k)$  の adjoint に (4.6) の  $\rho_{-}$  を作用した結果を  $X$  と書くことにします。すると  $X$  は

$$X^T F + F X = 0 \tag{4.7}$$

を満たし、

$$X = \begin{pmatrix} M & N \\ N^* & -M^* \end{pmatrix} \quad M^T = M, \quad N^T = N \tag{4.8}$$

となります。これは  $X$  が  $USp(2k)$  の Lie 代数に属しているための条件にもなっています。一方  $\rho_{+}$  の方をとり、その結果を  $Y$  と書くことにします。すると  $Y$  は

$$Y^T F - F Y = 0 \tag{4.9}$$

を満たし

$$Y \equiv (TF)_i^j = \begin{pmatrix} A & B \\ C & A^T \end{pmatrix} \quad B^T = -B, \quad C^T = -C \quad (4.10)$$

となります。\$Y\$ は \$Sp\$ の反対称表現に確かに属します。反対称行列にはなっていませんが、\$Y\$ というのは tensor ではなくて行列の notation で表現されています。\$F\$ を作用させて、添字を 1 つ下げてやります。そうやってできた行列は 2 つの添字の入れ替えに対して反対称であることを示すことができます。

いま、ひもの摂動論的な統一モデルの表の左側の系列の行列模型から右側の系列の行列模型に行くためにどんな recipe が必要であるか、及びそれに必要な手続きを説明しているわけです。この手続きは \$Sp\$ に関しても \$SO\$ に関しても同様に存在しますが、ひもの統一理論をやるという立場から考えると、\$Sp\$ を選ぶべきであることが、次の 3 つの理由から結論できます。

1. planar diagram analysis
2. Chan-Paton factor of open loops
3. consistency with wv field theory

あとで示しますが、\$F\$ という invariant tensor は twist operator \$\Omega\$ の役割を果たしています。これをしばらく認めることにします。上に述べたように、\$USp\$ に属する行列として adjoint 表現を \$X\$、反対称表現を \$Y\$ とかきました。\$X\$ については \$X^T = -FXF^{-1}\$ となり、これは twist operation をほどこしたときの orientifold の条件となっています。\$Y\$ については、\$Y^T = F Y F^{-1}\$ は orientation flip に対して不変な状態になっています。以上より、\$Sp\$ の Lie 代数を採用すると、もとの closed string と向きづけをかえた closed string が符号を除いて一致することがわかります。

Type I 摂動論に対応する行列模型をつくるためには、それに加えて open string の explicit な自由度を導入することが必要です。そのときに \$8+8\$ の susy を keep しておく必要があります。このためには supersymmetry を保つ fundamental multiplet \$(Q\_\bullet, \tilde{Q}^\bullet, \psi\_{Q\_\bullet}, \psi\_{\tilde{Q}^\bullet})\$ を選ぶなければなりません。4 次元の言葉を借りると、\$\mathcal{N} = 2\$ の hypermultiplet を選んでおけばいいということがわかります。scalar と fermion からなる fundamental hypermultiplet を \$n\_f\$ 個導入することにします。この \$n\_f\$ についてはあとで述べることにします。

このような考察を踏まえて、\$USp\$ の行列模型としては次のようなものを定義として提唱します。これがほぼ unique であるということはあとで述べることにします。

まず定義ですが、IIB 行列模型を導入するとき用いた 4 次元的な superfield notation から出発します。4 次元的な notation では 10 個の行列というのは、1 つの vector multiplet \$V\$ と 3 つの chiral multiplet \$\Phi\_I\$ に分解されます。そのうちの vector multiplet \$V\$ と chiral multiplet の 1 つ \$\Phi\_1\$ に関しては、\$U(2k)\$ の Lie 代数をとる行列に \$\rho\_-\$ という projection をかけて対称表現、つまり \$USp\$ の Lie 代数に属する表現をとる行列にしてしまいます。

$$V = \hat{\rho}_- \underline{V}, \quad \Phi = \hat{\rho}_- \underline{\Phi}_1; \quad \text{adj} \quad (4.11)$$

つまり 10 個のうちの 6 個は、 $USp$  の Lie 代数に属する行列とします。残りの 4 個、chiral multiplet を複素に組んだ 2 個  $\Phi_I$  ( $I = 2, 3$ ) は、反対称表現に属するような multiplet とします。

$$\Phi_I = \hat{\rho}_+ \Phi_I \quad I = 2, 3 \quad \text{asym} \quad (4.12)$$

$U(2k)$  に  $\rho_+$  をかけて得られる multiplet を使って 4 次元の notation で action を書きます。

$$\begin{aligned} S_{USp} = & \frac{1}{4g^2} \text{Tr} \left( \int d^2\theta W^\alpha W_\alpha + 4 \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi_I^\dagger e^{2V} \Phi_I e^{-2V} \right) + \frac{1}{g^2} \sum_{f=1}^{n_f} \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \left( Q_{(f)}^* e^{2V} Q_{(f)} \right. \\ & \left. + \tilde{Q}_{(f)} e^{2V} \tilde{Q}_{(f)}^* \right) + \frac{1}{g^2} \left( \int d^2\theta W(\theta) + \text{h.c.} \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

$W(\theta)$  は

$$W(\theta) = \sqrt{2} \text{Tr}(\Phi_1[\Phi_2, \Phi_3]) + \sum_{f=1}^{n_f} \left( m_{(f)} \tilde{Q}_{(f)} Q_{(f)} + \sqrt{2} \tilde{Q}_{(f)} \Phi_1 Q_{(f)} \right) \quad (4.14)$$

で与えられます。4 次元  $\mathcal{N} = 2$  supersymmetry により、parameter は overall の定数を除いて決まってきます。ただし、一般に mass parameter  $m_{(f)}$  を導入することが許されます。今述べた 4 次元 notation は 10 次元に翻訳して考えることが可能です。 $USp$  の行列模型の action を 2 つの部分、 $S_0$  と  $\Delta S$  から成ると書くことができます。

$$S_{USp} = S_0 + \Delta S \quad (4.15)$$

$S_0$  というのは形としては IIB の action と同じです。

$$S_0 = S_{\text{IIB}}(\hat{\rho}_{b\mp} \underline{V}_M, \hat{\rho}_{f\mp} \underline{\Psi}_A) \quad (4.16)$$

ただし行列が  $U(2k)$  の Lie 代数に属していて、その component ごとに  $USp$  の Lie 代数か、 $USp$  の antisymmetric のどちらかに属するような projector をかけてやります。boson の場合、6 個を adjoint にとり 4 個を antisymmetric にとるという選び方をします。なぜかという、 $8+8$  個の supersymmetry を保つためです。

理論に入ってくる parameter について少し説明します。まず overall の parameter として  $g^2$  というのが存在します。これは行列の再定義に吸収できるわけで、parameter といっても物理の scale を与える量に最終的に transmute しているはずで、これに関係した問題として scaling の問題があります。次に、行列の size  $2k$ 。これは最終的には無限大にとばして、場の理論における連続極限に対応するものを探します。そのほかに  $m_{(f)}$  と flavor の数  $n_f$  があります。 $n_f$  の値について comment しておきます。Taylor 流の行列の T-dual 変換を認めますと、0 次元の action を 6 次元の gauge 場の理論に map することが可能で、そこで anomaly cancellation を考察すると、anomaly が cancel する条件として flavor が 16 個というのができます。その意味でも  $n_f$  が 16 個というのはでてくるし、ひもの摂動論を受け継ぐという意味でも 16 個というのはでてきます。最後に scaling の問題があります。

$$\lim g^2(2k)^\sharp = \text{const} \quad (4.17)$$

行列模型は、ある意味で離散化された理論です。この模型の連続極限をどうやってみつけるかという問題になります。これは dynamics に関わった問題で、指数  $\sharp$  をどういった形に選ぶかというのは難しい問題です。厳



密に理論が解ける場合には、この指数は厳密解への scaling limit をとる条件から決定することができるわけです。いまの場合は解ける形ではないので、数値的に決定せざるを得ません。

### 3 Green-Schwarz superstrings and the Schild action

ここまでで IIB 行列模型及び  $USp$  行列模型の導入を行いました。素粒子の性質を取り扱おうとしますと、gauge 理論、open string の自由度を必ずひねり出さなければなりません。そのため  $\Omega$  projection をして closed string に対応する自由度を減らし、その代わりに基本表現の自由度を入れるという形で、open string の自由度を取り出すことにしました。

行列がどうして string かというのは introduction で述べた、commutator  $[\cdot, \cdot]$  の極限としての  $\sigma, \tau$  の Poisson Bracket に関係しているわけです。ここでは Green-Schwarz formulation という spacetime covariant な 1 本のひもに対する formulation から出発した際、行列模型がこの formulation をどういう形でどういう部分に引き継いでいくのかをお話したいと思います。Green-Schwarz formulation は、NSR の formulation つまり vector 添字をもつ worldsheet fermions とは全く違ったもので、spacetime spinor を用いた formulation であります。その string coordinate は、 $X^M$  と  $\theta^1, \theta^2$  です。 $\theta^1, \theta^2$  は最初から spacetime spinor の足をもった Majorana-Weyl spacetime spinor です。 $\theta^1, \theta^2$  は同じ chirality を持っているとします。10 次元の Gamma matrix  $\Gamma^M$  を用いて、2 次元 metric  $g^{MN}$  を除去した形では、Green-Schwarz action は、

$$S_{\text{GS}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left[ \sqrt{-\frac{1}{2}\Sigma_\pi^2} + i\epsilon^{ab}\partial_a X^M \left( \bar{\theta}^1 \Gamma_M \partial_b \theta^1 + \bar{\theta}^2 \Gamma_M \partial_b \theta^2 \right) + i\epsilon^{ab}\bar{\theta}^1 \Gamma_M \partial_a \theta^1 \theta^2 \Gamma_M \partial_b \theta^2 \right] \quad (4.18)$$

という形をとります。ここで、

$$\Sigma_\pi^{MN} \equiv \epsilon^{ab}\Pi_a^M \Pi_b^N, \quad \Pi_a^M = \partial_a X^M - i\bar{\theta}^1 \Gamma^M \partial_a \theta^1 + i\bar{\theta}^2 \Gamma^M \partial_a \theta^2 \quad (4.19)$$

です。action (4.18) がもっている local な対称性として、 $\mathcal{N} = 2$  の spacetime susy、

$$\begin{cases} \delta_{\text{susy}} \theta^1 & = \epsilon^1 \\ \delta_{\text{susy}} \theta^2 & = \epsilon^2 \\ \delta_{\text{susy}} X^N & = i\bar{\epsilon}^1 \Gamma^N \theta^1 - i\bar{\epsilon}^2 \Gamma^N \theta^2 \end{cases} \quad (4.20)$$

と local  $\kappa$  対称性

$$\begin{cases} \delta_\kappa \theta^1 & = \alpha^1 \\ \delta_\kappa \theta^2 & = \alpha^2 \\ \delta_\kappa X^M & = i\bar{\epsilon}^1 \Gamma^M \alpha^1 - i\bar{\epsilon}^2 \Gamma^M \alpha^2 \end{cases} \quad (4.21)$$

があります。この  $\kappa$  対称性は fix することが可能です。gauge fixing condition として  $\theta^1 = \theta^2 = \psi$  をとります。そうすると action (4.18) の一部は、その gauge fixing のおかげで消えてしまいます。こうやって gauge fix し



た Green-Schwarz action は、

$$\begin{aligned} S_{\text{GS}}^{(\text{fix})} &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left( \sqrt{-\frac{1}{2}\Sigma^2} + 2i\epsilon^{ab}\partial_a X^M \bar{\psi}\Gamma_M \partial_b \psi \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left( \sqrt{-\frac{1}{2}\Sigma^2} + 2i\bar{\psi}\Gamma^M \{X_M, \psi\}_{\text{P.B.}} \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

となります。 $\Sigma^{MN}$  は、

$$\Sigma^{MN} = \epsilon^{ab} X^M \partial_b X^N \equiv \{X^M, X^N\}_{\text{P.B.}} \quad (4.23)$$

となり、とりもなおさず induced metric に対応しています。したがって、area element は Poisson bracket で書くことができます。よって、action(4.22) はすべて Poisson bracket で書けています。

(4.22) はあくまでも、reparametrization invariant な南部型ですが、gauge を fix したために susy の変換則は変更を受けて、

$$\begin{cases} \delta^{(1)} X^M &= 4i\bar{\epsilon}\Gamma^M \psi \\ \delta^{(1)} \psi &= -\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}\Sigma^2}} \Sigma_{MN} \Gamma^{MN} \epsilon \end{cases} \quad \begin{cases} \delta^{(2)} X^M &= 0 \\ \delta^{(2)} \psi &= \xi \end{cases} \quad (4.24)$$

となります。これは 10 次元の  $\mathcal{N} = 2$  の susy ですから  $16 \times 16$  の susy をもっているわけですが、これを第一種  $\delta^{(1)}$  と第二種  $\delta^{(2)}$  というふうに分けると、第二種の susy というのは spinor を constant だけ shift する susy になります。

一方、Schild type の action を考えることができます。それは南部 type の action で  $\sqrt{\quad}$  をとった action です。

$$S_{\text{Schild}} \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left( \frac{1}{2} \Sigma_{MN} \Sigma^{MN} + 2i\bar{\psi}\Gamma^M \{X_M, \psi\}_{\text{P.B.}} \right) \quad (4.25)$$

(4.25) は、reparametrization invariant な action ではありません。つまり分母の数が  $\sigma$  の integration よりも多いですから、一般に任意の reparametrization を行うと不変にはならない。しかしながら area を一定に保つという gauge の範囲内ではさらに不変性があります。action (4.25) と以前に述べた gauge fix した Green-Schwarz action (4.22) は運動方程式の意味で等価になっています。運動方程式は、

$$\delta S_{\text{GS}}^{(\text{fix})} \Rightarrow \partial_a \left( \frac{1}{\sqrt{\Sigma^2}} \frac{\partial \Sigma^2}{\partial (\partial_a X^M)} \right) + (\text{fermions}) = 0 \quad (4.26)$$

$$\delta S_{\text{Schild}} \Rightarrow \partial_a \left( \frac{\partial \Sigma^2}{\partial (\partial_a X^M)} \right) + (\text{fermions}) = 0 \quad (4.27)$$

となります。 $S_{\text{GS}}^{(\text{fix})}$  は  $\sqrt{\quad}$  が入っていますから  $\sqrt{\quad}$  の変分をとると必ず  $1/\sqrt{\quad}$  というのがきます。一方、 $S_{\text{Schild}}$  は最初から  $\sqrt{\quad}$  がとれていますから、 $\frac{1}{\sqrt{\Sigma^2}}$  がないわけです。(4.25) と (4.22) が運動方程式として等価であるためには、

$$\partial_a (\Sigma^2) = 0 \quad (4.28)$$

つまり  $\Sigma^2 = \text{constant}$  であればいい。(4.28) が成り立つことは、昔 Schild によって、運動方程式と identity

$$\partial_b X^M \frac{\partial (\frac{1}{2}\Sigma^2)}{\partial (\partial_a X^M)} = \delta_b^a \Sigma^2 \quad (4.29)$$

を使って示されていました。条件  $\Sigma^2 = \text{constant}$  の下で、Schild の string というのは南部 string と古典運動方程式の level で等価な string であります。そのため、Polyakov の formulation では、うまく action が  $X$  の 2 次で収まったいたわけですが、(4.25) は  $\Sigma^{MN}$  自身が  $X$  の 2 次ですから action 自身は  $X$  の 4 次になってしまって、摂動としては取り扱いづらい action の形をしています。Schild action というのは与えられたけれども、結局 70 年代後半から発展していません。しかしながら、ここで行列として取り扱う場合には、Poisson bracket という解釈が可能のために都合がいいわけです。

## 4 APD and matrix twist

IIB 行列模型の naive な large  $k$  limit というのが Schild action になっているということを、厳密性を抜きにして見てみましょう。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{\text{IIB}} = S_{\text{Schild}} \quad (4.30)$$

これは、 $SU(2k)$  の  $k \rightarrow \infty$  で得られる  $SU(\infty)$  という代数が、area preserving diffeomorphism (APD) algebra になっていることを反映しています。

area preserving diffeomorphism (APD) algebra は、2 つの添字  $m_1, m_2$  で指定される generator  $L_{\vec{m}}$ ,  $\vec{m} = (m_1, m_2)^T$  に対する代数です。

$$[L_{\vec{m}}, L_{\vec{n}}] = (m_1 n_2 - m_2 n_1) L_{\vec{m} + \vec{n}} \quad (4.31)$$

$SU(2k) \rightarrow SU(\infty)$  で APD になっているということを認めますと、IIB 行列模型に与えられた行列というのは、generator  $L_{\vec{m}}$  で展開されるわけです。

$$\underline{v}_M = \underline{v}_M^{\vec{m}} L_{\vec{m}} \quad (4.32)$$

展開係数  $\underline{v}_M^{\vec{m}}$  の Fourier 変換を  $\tilde{v}_M(\vec{\sigma})$  とします。この  $\tilde{v}_M(\vec{\sigma})$  を使ってもとの行列というのを書き換えてみます。

$$\underline{v}_M = \int \frac{d^2 \vec{\sigma}}{(2\pi)^2} \tilde{v}_M(\vec{\sigma}) \sum_{\vec{m}} e^{-i\vec{m} \cdot \vec{\sigma}} L_{\vec{m}} \equiv \int \frac{d^2 \sigma}{(2\pi)^2} \tilde{v}_M(\vec{\sigma}) \tilde{L}(\vec{\sigma}) \equiv \tilde{L}_{\tilde{v}_M} \quad (4.33)$$

(4.33) より  $\underline{v}_M$  は  $\tilde{v}_M$  で代表される APD の generator  $\tilde{L}_{\tilde{v}_M}$  になっています。定義式 (4.31) よりもむしろ使いやすいのは以下の式です。

$$[\tilde{L}_f, \tilde{L}_g] = -\tilde{L}_{\{f, g\}_{\text{P.B.}}} \quad (4.34)$$

これを用いて IIB matrix の action は Schild の action になっていることがわかります。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Tr}[\underline{v}_M, \underline{v}_N][\underline{v}^M, \underline{v}^N] = \int \frac{d^2 \vec{\sigma}}{(2\pi)^2} \{\tilde{v}_M(\vec{\sigma}), \tilde{v}_N(\vec{\sigma})\}_{\text{P.B.}}^2 = \int \frac{d^2 \vec{\sigma}}{(2\pi)^2} \Sigma_{MN} \Sigma^{MN} \quad (4.35)$$

$\text{Tr} \underline{\Psi} \Gamma^M [\underline{v}_M, \underline{\Psi}]$  についても同様に示すことができます。こうして、行列の large  $k$  極限をとって Schild の action が得られたわけであり、この形で両者の IIB 行列模型の  $k \rightarrow \infty$  極限が確かに Schild action になっていることを表せました。generator  $\tilde{L}_f$  が APD の generator であるということは、微分演算子つまり Lie

derivativeとしてもみることができます。代数を実現する微分演算子は、

$$\tilde{L}_f = \epsilon^{ab} \frac{\partial f(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^b} \frac{\partial}{\partial \sigma^a} \quad (4.36)$$

という形になります。一般の diffeo ですと、 $\epsilon^{ab} \frac{\partial f(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^a}$  のところに任意関数が coordinate の数だけあるわけですが、この場合  $\epsilon^{ab}$  で contract させてやって一関数だけの diffeo になります。もともとは 2 次元の surface で 2 個 diffeo の自由度があったわけですが、そのうちの 1 個だけが keep されている代数です。

これで一応、行列がどうしてひもになっているかということを説明をしました。どうして  $F$  という不変 tensor が  $\Omega$  の matrix analog であるかは、 $Sp$  の対称及び反対称表現の満たす定義式が、(4.7) と (4.9) であることからほぼ明らかです。別の説明の仕方もあります。APD の式 (4.31) の transpose をとります。

$$[L_{\vec{m}}^T, L_{\vec{n}}^T] = ((-m_1)n_2 - m_2(-n_1)) L_{\vec{m}+\vec{n}}^T \quad (4.37)$$

それに  $F$  と  $F^{-1}$  を両側からかけてその代数がもとに閉じるということを要求しますと、

$$L_{\vec{m}}^T = L_{\vec{m}^T}, \quad \vec{m}^T = (-m_1, m_2) \quad (4.38)$$

となります。それにより、 $v_M$  の transpose は、

$$\begin{aligned} v_M^T &\equiv \int \frac{d^2 \vec{\sigma}}{(2\pi)^2} \tilde{v}_M(\sigma^1, \sigma^2) \tilde{L}^T(\sigma^1, \sigma^2) \\ &= \int \frac{d^2 \vec{\sigma}}{(2\pi)^2} \tilde{v}_M(\sigma^1, \sigma^2) \tilde{L}(-\sigma^1, \sigma^2) \\ &= \int \frac{d^2 \vec{\sigma}}{(2\pi)^2} \tilde{v}_M(-\sigma^1, \sigma^2) \tilde{L}(\sigma^1, \sigma^2) \end{aligned} \quad (4.39)$$

となり、確かにひもの矢印を入れ替える操作に対応しています。従って transpose の演算は、ひもの矢印を入れ替えるという操作に翻訳することができます。 $F$  はもともとの行列と transpose をとった行列との間の変換行列であります。 $Sp$  の adjoint 条件あるいは antisymmetric 条件というのは、nonorientability の条件を表しています。

## 5 [ susy, projector ] = 0

つぎに susy です。closed string side の IIB matrix model というのは 16 + 16 の susy をもっています。確かに Schild action (4.25) の susy は第一種  $\delta^{(1)}$  と第二種の  $\delta^{(2)}$  の両方がある、それを考慮しますと 16 個 + 16 個の susy をもちます。では摂動論的な Type I に習って、 $\Omega$  projection を課した後、8 + 8 の susy を keep することを考えます。一例として bosonic な行列及び fermionic な行列に対して、specific な projection ((4.16) の  $\rho_b, \rho_f$ ) を課すと 8 + 8 susy が保てることを言いました。果たしてそれがどのぐらい unique なのかということが当然問題になってきます。いっぱい作れるのであれば、何もこの choice に限る必要はないわけで、どれだけ unique かという問題が浮かび上がってきます。

この uniqueness の問題は実は代数的に処理できることが判明しました。いままで道具として導入したのは projector と susy です。IIB side では susy は 16 + 16 が keep されている。もとの bosonic 及び fermionic な行

列を、 $\rho_b, \rho_f$  という演算を施して map したわけです。一般的には、map によって 8+8 susy は保たれません。projector と susy 両方の演算が交換していたら保たれているだろうけれども、一般には交換しない。8+8 の generator に対しては交換する量であってほしい。

16+16 susy は、

$$\begin{cases} \delta^{(1)} \underline{v}_M &= i\bar{\epsilon} \Gamma_M \underline{\Psi} \\ \delta^{(1)} \underline{\Psi} &= \frac{i}{2} [\underline{v}_M, \underline{v}_N] \Gamma^{MN} \epsilon \\ \delta^{(2)} \underline{v}_M &= 0 \\ \delta^{(2)} \underline{\Psi} &= \xi \end{cases} \quad (4.40)$$

です。16+16 susy のうちの 8+8 susy が生き残る条件というのはどういうものか。各々 16+16 の susy parameter というのは、 $\epsilon$  と  $\xi$  という Majorana-Weyl spinor で指定されるわけです。条件

$$\begin{cases} [\hat{\rho}_{b\mp}, \delta^{(1)(2)}] \underline{v}_M &= 0 \\ [\hat{\rho}_{f\mp}, \delta^{(1)(2)}] \underline{\Psi} &= 0 \end{cases} \quad (4.41)$$

を課すことによって、どの spinor の component が生き残るかということを逐一 check することができます。

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{b\mp}^{(M)} &= \Theta(M \in \mathcal{M}_-) \hat{\rho}_- + \Theta(M \in \mathcal{M}_+) \hat{\rho}_+ \\ \hat{\rho}_{f\mp}^{(A)} &= \Theta(A \in \mathcal{A}_-) \hat{\rho}_- + \Theta(A \in \mathcal{A}_+) \hat{\rho}_+ \end{aligned} \quad (4.42)$$

この  $\rho_b$  というのは、vector の足に作用するわけです。  $\rho_f$  というのは spinor の足に作用するわけです。各 component に応じて  $\rho_-$  か  $\rho_+$  かどちらかが選ばれる。  $M$  が  $\mathcal{M}_-$  に属する場合は  $\rho_-$ 、  $M$  が  $\mathcal{M}_+$  に属する場合は  $\rho_+$ 、 fermion に対しても同様です。  $\mathcal{M}_-, \mathcal{M}_+$  は union が全体であり、 intersection が空集合であります。

$$\mathcal{M}_- \cup \mathcal{M}_+ = \{0, 1, 2, \dots, 9\}, \quad \mathcal{M}_- \cap \mathcal{M}_+ = \emptyset \quad (4.43)$$

条件 (4.41) が満たされるのはどういう場合かを知りたいわけです。これは  $\mathcal{M}_-, \mathcal{M}_+$  及び  $\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+$  がどういう集合をとった場合に、  $\epsilon$  や  $\xi$  が nontrivial な解として存在するかという代数的な問題になります。そのために、逐一いろいろなものを考察してみて、 nontrivial な解が得られるかどうか mathematica で check します。

nontrivial な解を見つけるのは思ったほど容易ではありません。理由 (の 1 つ) は component formalism での susy 変換則は linear ではないことです。superfield だと linear ですが、Wess-Zumino gauge を持った component formalism では、 $\psi$  の変換は vector  $v_M$  の commutator に比例します。この方程式は、nonlinear で非常に nontrivial な方程式です。例えば一例として、 $v_M$  が両方とも反対称表現をとったとしますね。反対称表現の commutator は、反対称表現に行かなくて対称表現つまり Lie 代数になってしまう。それ故 component 全部を反対称表現にとるような choice というのはあつという間に殺されてしまう。このように susy と projector の選び方というのは、非常に厳しい縛りを理論に与えています。結局我々が最初に提示した解とそれ以外に何人かの人たちが heterotic M theory という context で提示していた解の 2 つがあるのみです。

$$\text{our case} \left\{ \begin{array}{l} \hat{\rho}_{b\mp} = \text{diag}(-, -, -, -, -, +, +, -, +, +) \\ \hat{\rho}_{f\mp} = \hat{\rho}_{-I(4)} \otimes \begin{pmatrix} I_2 & & & \\ & 0 & & \\ & & I_2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \hat{\rho}_{+I(4)} \otimes \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & I_2 & & \\ & & 0 & \\ & & & I_2 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (4.44)$$

$$\text{M hetero} \left\{ \begin{array}{l} \hat{\rho}_{b\mp} = \text{diag}(+, +, +, +, -, +, +, -, +, +) \\ \hat{\rho}_{f\mp} = \hat{\rho}_{-I(4)} \otimes \begin{pmatrix} I_2 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & I_2 \end{pmatrix} + \hat{\rho}_{+I(4)} \otimes \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & I_2 & & \\ & & 0 & \\ & & & I_2 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (4.45)$$

(4.45) の解は、8 個が + で 2 個が -、8 個が antisymmetric で 2 個が adjoint である、ところが fermion に関しては数がつりあっているという、きわめて奇妙な choice です。

## 6 Loop operator via matrix

ここでは、もとの行列および fundamental 表現の自由度というものから離れて、loop operator という新しい変数を導入して理論を書き換える、という話をします。とくに、Schwinger-Dyson 方程式を立てるさいには、loop 変数というのは非常に有効である、ということがおもちゃの matrix model の場合でも成り立っていました。

いま closed loop と open loop を考えるんですが、open loop の場合、端点に fundamental 表現に属する vector の自由度をのせるので、16 個の  $Q$  と 16 個の  $\tilde{Q}$  というのを縦に並べた

$$\mathbf{Q}_{(f)} = \begin{Bmatrix} Q_{(f)} \\ F^{-1}\tilde{Q}_{(f-n_f)} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{Q}_{(f)}} = \begin{Bmatrix} \psi_{Q_{(f)}} \\ F^{-1}\psi_{\tilde{Q}_{(f-n_f)}} \end{Bmatrix} \quad (4.46)$$

を導入します。

これを使って loop を定義します。IIB の場合 closed loop だけですが、 $USp$  の場合は closed loop と open loop 両方存在します。どうやってつくるかと言うと、 $v_M$  とか  $\Psi$  に対応する conjugate な source  $p_n^M$ 、 $\eta_n$  を導入して、path-ordered exponential をつくってやります。行列ですから一般に他の行列とは非可換で、どういう順序で作用するかに依存します。closed loop  $\Phi$  の定義は

$$\Phi[p^m, \eta; n_1, n_0] \equiv \text{Tr} \prod_{n=n_0}^{\overleftarrow{n_1}} \exp(-ip_n^M v_M - i\bar{\eta}_n \Psi) \quad (4.47)$$

です。(4.47) 自身は行列ではありませんから transpose をとったものは、(4.47) そのものです。Tr の中の順序を変えて transpose をとっていきます。transpose をとるという演算は向きを変える演算になっていました。 $Sp$  の表現行列ですから、transpose をとったものを  $F^{-1}$ ,  $F$  ではさむと土でもとに戻ってきます。したがって、 $n_0$

から  $n_1$  へいくという loop は  $n_1$  から  $n_0$  へいく loop と引数の  $p^M$  の添字、± の自由度を除いてもとに戻っていくということがわかります。

$$\Phi[p^m, \eta; n_1, n_0] = \Phi[\mp p^m, \eta; n_0, n_1] \quad (4.48)$$

± というのは adjoint か antisymmetric かどちらかを選ぶということに対応します。(4.48) は、向き  $n_0$  から  $n_1$  まで走っていたのと  $n_1$  から  $n_0$  まで走っていたものは同じだよ、ということを意味して、それはこの closed loop (4.47) が nonorientable であるということを意味します。図 10 はそれを表しています。

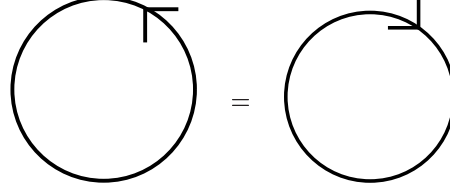


図 10: Nonorientable closed loop

一方、open loop をつくるためには、端っこに Chan-Paton factor に対応する flavor の足を導入しておくことが必要であります。さきほど (4.46) で導入した  $\psi$  を、path-ordered exponential の両端につけておきます。そういう形で  $USp$  singlet の object をつくります。

$$\Lambda \cdot \Pi_{(f)} \equiv \left( \xi Q_{(f)} + F^{-1} \xi^* Q_{(f)}^* \right) + \left( \theta \psi_{Q_{(f)}} + F^{-1} \bar{\theta} \psi_{Q_{(f)}}^* \right) \quad (4.49)$$

open loop は、添字として  $f$  と  $f'$  をもつ loop であります。

$$\Psi_{f'f}[p^M, \eta; n_1, n_0; \Lambda' \Lambda] \equiv \Lambda' \cdot \Pi_{(f')} FU[\dots] \Lambda \cdot \Pi_{(f)} \quad (4.50)$$

$f$  と  $f'$  の入れ替えを行うと、

$$\Psi_{f'f}[p^M, \eta; n_1, n_0; \Lambda' \Lambda] = \mp \Psi_{ff'}[p^M, \mp \eta; n_1, n_0; \Lambda \Lambda'] \quad (4.51)$$

open loop の添字を入れ替えたものもとの loop は ± の sign で結びついています。しかしながら、 $Sp$  の場合は sign が − で反対称で入ってきます。それが point であります。もともとの行列模型として  $Sp$  を Lie 代数に選びますと、Chan-Paton factor は反対称になります。もともとの Lie 代数として  $SO$  を選びますと、Chan-Paton factor は + です。摂動論的なひもの理論を継承しさらにこれを構成論的に拡張するというのであれば、Chan-Paton factor は時空の gauge 対称性をつくってなければいけなくて、それは  $SO$  でなければならない。 $SO$  でなければならないということは、この sign は − でなければならない。したがって、もとの Lie 代数というのは  $Sp$  でなければいけません。それが  $Sp$  でなければならない理由であります。図 11 はそれを表しています。

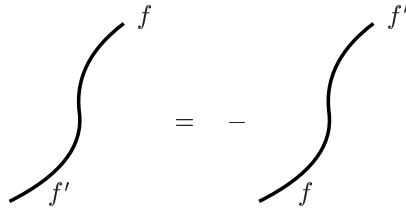


図 11: Nonorientable open loop with antisymmetric Chan-Paton factor

## 7 Spacetime dynamics and Berry phase

残り時間を使って2つのことを話します。一つは、行列模型が量子重力であるというのどういう意味か、どういう形で output としての時空を与える理論になりうるのかという話と、もう一つは、loop 変数を使って、その場の方程式というのどういう形で姿を現すのか、という話です。

いま、行列模型が与えられました。計算できることは行列を積分することです。action を書いて path integral をする。path integral と言いましたけれども、path integral どころか単に時間も空間も引数になにもっていない行列です。0次元の系、つまり量子力学ですらない系です。変数としては、bosonic な行列  $v_M$  と fermionic な行列  $\Psi_A$ 、さらに  $USp$  の場合には fundamental 表現に属する bosonic 及び fermionic な行列を考えます。いま  $v_M$  を対角化したとします。

$$v_M = u^{(M)} \begin{pmatrix} X^{(1)} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & X^{(k)} & & & \\ & & & \mp X^{(1)} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mp X^{(k)} \end{pmatrix} u^{(M)-1} \quad (4.52)$$

つまりその固有値とその固有 vector というふうに分けたとします。(4.52) の固有値分布というのが時空の分布を表すだろう、というのが主張です。固有値分布に関する effective action を求めようと思うと、残りの部分は全部積分すべきです。これは言うのは簡単ですが、 $v_M$  に関して4次ですから厳密にやるのは非常に難しい。

一番ひどい近似として  $u^{(M)} = 1$  とおいて、さらに fundamental boson を無視して、fermion だけをすべて積分することはすぐできます。なぜなら action は fermion に関しては bilinear だからです。これは、fermion がつくり出すゆらぎを調べていることに対応します。

ちょっと余談になりますが、次の表に関する話を少しの間します。

	$x$ (space)	$t$ (time)
quantum mechanics	dynamical variable	parameter
QFT	parameter	parameter
reduced model	d.v.	d.v.

行列模型が一体どういう力学系かと言いますと、これは奇妙な力学系です。量子力学ですらないわけですが、確かに力学系です。量子力学では、space というのは力学変数でした。したがって、 $x$  の期待値は計算できて、その不確定性とかを議論しました。一方、時間というのは、parameter であります。時間と空間とは、asymmetric に取り扱われているわけです。relativistic invariance を保証するために、相対論的な場の理論ではこれをどちらも parameter にしてしまふ。その代わりに場の演算子を導入します。いま考えている matrix model では、時空は dynamical variable で引数はありません。時間も空間も dynamical variable である力学系です。

以下 fermion の積分を実行してみましょう。action のうち fermion bilinear の部分は、3 つの項から成っています。

$$S_{\text{fermion}} = S_{\text{MW}} + S_{\text{gf}} + S_{\text{Yukawa}} \quad (4.53)$$

どれも bilinear なので、対角化することができます。fermionic な eigenmode  $\xi_\ell^{\alpha\ell}$  を作って固有値  $\lambda_\ell$  を求めて必ず次のように書けます。

$$S_{\text{fermion}} = \sum_{\alpha_\ell} \sum_{\ell} \lambda_\ell \bar{\xi}_\ell^{\alpha_\ell} \xi_\ell^{\alpha_\ell} \quad (4.54)$$

一般に固有値は縮退しているので、その縮退の度数だけの eigenmode が一つの固有値に関してあって、それがおもしろい物理を作ります。ここで  $\alpha_\ell$  は縮退した eigenmode を label する添字です。これ以下は行列の問題というよりは、むしろ多体問題の一般的な取り扱いということになります。

普通は積分するのですが、どういうゆらぎが発生しているかというのを見たいので、一粒子状態だけを考察することにします。一粒子状態だけをみるという意味で、 $\ell$  番目の固有状態だけを project した  $\hat{P}_\ell^{\alpha\alpha'}$  を見るということにします。

$$\hat{P}_\ell^{\alpha\alpha'} \equiv \xi_\ell^{\dagger\alpha} |\Omega\rangle \langle \Omega| \xi_\ell^{\alpha'}, \quad \xi_\ell^\alpha = \sum_A b^A \psi_{\ell A}^\alpha \quad (4.55)$$

これを行列で評価したいのですが、行列というのは量子力学ですらないんで、単に積分するという以外に方法がない。trick として、0次元の系というのは、1次元の量子力学系の short time limit として得られるという事実を利用することにします。つまりわざと対応する量子力学から出発して、その系の path integral で時間の幅が 0 であるような limit をとることにします。それでもって 0次元の系ができていると考えます。そうすると量子力学の計算が使えます。 $X^0 = 0$  の gauge を採用します。projector  $\hat{P}_\ell^{\alpha\alpha'}$  の期待値は時間方向を periodicにとると、fermion の状態空間の trace を用いて

$$\langle\langle \hat{P}_\ell^{\alpha\alpha'} \rangle\rangle_\Gamma = \lim_{\beta \rightarrow 0} \text{Tr}_{\text{fermion}} \left( (-)^F e^{-i \int_0^\beta d\beta' H(\beta')} P_\ell^{\alpha\alpha'} \right) \quad (4.56)$$

と書けます。これは演算子という立場からの表記ですけれども、これを一粒子状態の波動関数に移ってその値を評価します。

$$\langle\langle \hat{P}_\ell^{\alpha\alpha'} \rangle\rangle_\Gamma = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left( P \exp \left[ -i \int_0^\beta d\beta' E_\ell(X_M(\beta')) - i \oint_\Gamma \mathcal{A}_\ell(X_M) \right] \right)^{\alpha\alpha'} \quad (4.57)$$

(4.57) の exponent の第 1 項はいわゆる dynamical phase というものです。この設定では、energy level  $E_\ell$  は時間間隔  $\beta$  の間変化する parameter  $X_M$  の関数となっています。(4.57) の第 2 項は Berry connection と呼ば





行列の offdiagonal entries を ●、○、★と 3 種類に分類すると

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & \bullet & \bullet & \star & \circ & \circ \\ \bullet & 0 & \bullet & \circ & \star & \circ \\ \bullet & \bullet & 0 & \circ & \circ & \star \\ \hline \star & \circ & \circ & 0 & \bullet & \bullet \\ \circ & \star & \circ & \bullet & 0 & \bullet \\ \circ & \circ & \star & \bullet & \bullet & 0 \end{array} \right) \quad (4.65)$$

特に ★ 部分は、反対称表現には自由度がありませんけれども、adjoint には自由度があります。したがって、6 個の行列では積分があるのだけれども、4 個の行列に関しては積分がないわけです。そのことを反映しまして、この寄与を評価するとき用いる Lagrangian つまり (4.64) の  $\mathcal{L}_{III}$  type は、 $\mu = 0, 1, 2, 3, 4, 7$  の 6 個の方向にだけ伸びています。このような時空の asymmetry が、ここですでにつくられていることがわかります。ほかは全部 10 次元的なものなのですが。

あとやることは、Lagrangian (4.62)、(4.63)、(4.64) から nonabelian Berry phase を計算することです。まず、 $\mathcal{L}_{III}$  から得られる Hamiltonian

$$\mathcal{H} = \frac{1}{g^2} \sum_{\mu=1,2,3,4,7} x_\mu \gamma^\mu \quad (4.66)$$

から計算します。そして、projection operator を

$$P_\pm \equiv \frac{1}{2} (1_4 \pm y_\nu \gamma^\nu) \quad (4.67)$$

と定義し、

$$y_\nu \equiv \frac{x_\nu}{|x|} \quad (4.68)$$

とします。eigenfunction は、

$$\psi_\alpha = \frac{1}{\mathcal{N}_\alpha} P_+ e_\alpha \quad (4.69)$$

という形をしています。ここで  $\mathcal{N}_\alpha$  は normalization factor です。

それで Berry の公式 (4.59) に代入してやりますと、

$$i\mathcal{A} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_4 \end{pmatrix} \mathcal{M} (e_1 e_4), \quad \mathcal{M} = \frac{1}{\mathcal{N}} P_+^\dagger d \frac{1}{\mathcal{N}} P_+ \quad (4.70)$$

となります。exterior derivative を wavefunction ではさんで計算します。一般に、 $X^0 = 0$  とおきますから、残りは 5 次元空間で、(4.68) で導入した  $y$  は、絶対値で割った coordinate ですから  $S^4$  を parametrize します。 $S^4$  を parametrize するので、さらにそいつを stereographic projection でもって、 $R^4$  に移ると、 $z_i$  という variable で  $\mathcal{A}$  は

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+z^2} (z_i dz_j - z_j dz_i) \sigma^{ij} \quad (4.71)$$

という形をしていることがわかります。これはよく知られている instanton 解を quaternion の notation で書いたものです。5 次元上で点に見える nonabelian monopole の connection は、 $S^4 \rightarrow R^4$  の map をしてやると

instanton になっているという現象です。monopole という立場から見ると、これはいわゆる 5 次元空間内に住んでいる Yang monopole です。Berry connection というのは topological に nontrivial な wave function、つまり section から作られます。極座標表示をとって書いてみると、北極からつくった connection が南極にいくとかならず発散しているのが見られます。必ず patch が最低 2 枚必要になります。詳細は省略します。

同様の計算を空間 9 次元全部あるような Hamiltonian

$$\mathcal{H}_F = \frac{1}{g^2} \bar{\Psi} \Gamma^M x_M \Psi \quad (4.72)$$

に関しても行うことができ、同様の connection が得られます。

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2(1+z^2)^2} (z_i dz_j - z_j dz_i) \Sigma^{ij} \quad (4.73)$$

(4.73) は  $R^9$  上  $SO(8)$  monopole と考えることができます。これらの nonabelian monopole の topological stability は、homotopy の考察により  $\Pi_3(SU(2)) = \mathbb{Z}$ ,  $\Pi_7(SU(8)) = \mathbb{Z}$  によって保証されています。この議論は、一般に任意の奇数次元に可能です。topological な stability は、 $n$  を even として  $R^{n+1}$  で  $\Pi_{n-1}(SU(2^{\frac{n}{2}-1}))$  が nonzero であることを保証してくれる。例えば  $n=2$  の場合、これは  $R^3$  上の Dirac monopole です。これはももとの Berry connection です。

Berry phase を計算するのが我々の最終目標ではなくて、fermion の積分をやってみてどういうゆらぎが発生しているかを見てみたかった。今得たゆらぎが時空分布の立場からどういうものであるか考えましょう。まとめますと、ある sector、いくつか要請するうちのある sector たちの寄与をよせあわせると、nonabelian Berry phase を集めたものになっている。

$$\langle \langle \prod_{\ell \in \mathcal{I}_+} \sum_{\alpha} \hat{\mathcal{P}}_{\ell}^{\alpha\alpha} \rangle \rangle_{\Gamma} = \prod_{\ell \in \mathcal{I}_+} \text{Tr}_{\ell} P \exp \left[ -i \oint_{\Gamma} \mathcal{A}_{\ell}(x_M) \right] \quad (4.74)$$

nonabelian Berry phase の引数にいろいろな時空点の引数が入っているわけです。

$USp$  matrix model では 2 種類の nonabelian Berry phase が現れます。一つは  $SU(8)$  monopole で、IIB matrix model でも出てくるものです。それに加えて  $USp$  matrix model では、 $X^{\mu}$  にだけ依存する、時間を除いて残りの 5 方向のみに依存する Yang monopole というのがあって、それは antisymmetric に選んだ 4 方向には依っていない、このような時空に asymmetry を生み出すような configuration が発生しているということがわかります。susy という縛りから 6 個は adjoint、4 個は antisymmetric と最初から決定されていました。これを反映して時空の level で asymmetry ができます。

Yang monopole をどのように解釈するか。Yang monopole は、この context では、 $X^{\mu}$  にだけに依存します。したがって、antisymmetric な表現に選んだ 4 方向に関しては、どれだけ歩いていこうとも、translation invariant です。つまり、singularity が存在すればそれは singularity であり続けるわけです。これは、singularity で表される solitonic object があって、それが時空 4 次元的に拮がったものであることを意味します。つまり、singular な plate がいっぱいあるわけです。これが、時空が 4 次元であることと関係があると思われま。

Berry connection の singularity は、argument(引数)が 0 である場合に発生しています。 $\mathcal{L}_{I,II}$  から求まる pointlike monopole は、10 次元の時空点 2 点が一致した場合  $x_M^a - x_M^b = 0$  に発生しています。 $Sp$  の場合に

は、 $x^a - \rho(x_M^b) = 0$  で一緒になる場合に発生しています。 $\mathcal{L}_{III}$  から求まる Yang monopole の場合は、板として一致する場合  $2x_\mu^a = 0$  に singularity が発生しています。 $m_{(f)}$  という parameter を導入しましたがけれども、それは実は orientifold plane からの距離を表す parameter です。この parameter が引数に入ってくる場合、 $x_\mu^a \pm m_{(f)}\delta_{\mu 4}$  もあります。この計算が精密な計算であるというわけではもちろんないけれども、時空を output として与える行列模型を demonstrate するための calculation として意味があると思っています。

## 8 Schwinger-Dyson equation

では、最後に行列から生じる Schwinger-Dyson 方程式について話をしたいと思います。行列模型から出発して、時空点に対する dynamics を取り扱うのがいま言った話ですが、それをやると行列の量子重力としての側面がかなり見えます。ひもの構成論的定式化という面を強調しようと思うと、loop という変数を使って理論を見直すということが重要になります。そちらをお話します。

IIB の場合には closed loop だけで閉じた運動方程式がたちます。 $USp$  の場合、closed loop と open loop を含めた理論になります。それには以前述べた loop 変数  $\Phi$  とか  $\Psi$  を基本的な dynamical variable とみなして、行列や vector  $Q$  の自由度が現れないように理論を再定式化します。

みなさんご存知かもしれませんが、Ward-Takahashi identity と同様の考え方をします。一般的な処方として、Schwinger-Dyson 方程式とは何かと申します。action そのものから effective action を得るのではなくて、理論に可能なすべての相関関数たちからなる空間というのを考えます。その相関関数はお互いにももちろん運動方程式によって関係づけられています。ですが、もともとの運動方程式は取り扱わずにその相関関数たちの関係のみを議論して、それを閉じた方程式系として解いていくという立場を取ります。それが Schwinger-Dyson 方程式です。

出発点として次のものにとります。

$$0 = \int d\mu \frac{\partial}{\partial X^r} \text{Tr} (U[(1)]T^r U[(1)]) \Phi[(2)] \cdots \Phi[(N)] \Psi[(1)] \cdots \Phi[(L)] e^{-S} \quad (4.75)$$

何個かの closed loop と open loop を考えて、action を掛けて全体を  $X^r = v_M^r$  or  $\Psi^r$  で微分し、その後 functional integral をしてやります。微分した自由度に関してすぐに積分するから、total derivative を無視すると 0 です。 $0 =$  という形の式です。

第一番目の loop  $\text{Tr} (U [(1)] T^r U [(1)])$  は完全な loop ではなくて、path-ordered exponential の間に generator  $T^r$  が埋めこまれています。微分  $\frac{\partial}{\partial X^r}$  がたたく部分が 3 つあります。まず action をたたく場合、次に最初に細工をした closed string をたたく場合、最後にそのまま置いておいた  $N - 1$  個の closed loop あるいは  $L$  個の open loop をたたく場合、以上です。

細工する場所によって 3 つの Schwinger-Dyson 方程式を考えることができます。一つは (4.75) で、もう一つは

$$0 = \int d\mu \frac{\partial}{\partial X^r} \Lambda^{(1)'} \cdot \Pi_{f(1)'} (U[(1)]T^r U[(1)]) \Lambda^{(1)} \cdot \Pi_{f(1)} \Phi[(1)] \cdots \Phi[(N)] \Psi[(2)] \cdots \Phi[(L)] e^{-S} \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned}
0 &= \text{○} \longrightarrow \text{○} & [1] \\
+ & \text{○} \longrightarrow \text{○} \\
+ & \text{⊗} \longrightarrow \frac{1}{2} \left( \text{⊗} + \text{⊗} \right) & [2] \\
+ & \text{⊗} \longrightarrow \frac{1}{2} \left( \text{⊗} + \text{⊗} \right) & [3] \\
+ & \text{⊗} \longrightarrow \frac{1}{2} \left( \text{⊗} + \text{⊗} \right) & [4]
\end{aligned}$$

図 12: Figure corresponding to (4.75)

です。(4.75) で考えた closed loop の代わりに open loop を考えて、open loop の真中にやはり generator をはさんでやります。 $X^r = v_M^r$  or  $\Psi^r$  です。最後は、

$$0 = \int d\mu \frac{\partial}{\partial \mathbf{Z}_{(f)i}} \left( U[(1)] \Lambda^{(1)} \cdot \mathbf{\Pi}_{f(1)} \right)_i \Phi[(1)] \cdots \Phi[(N)] \Psi[(2)] \cdots \Phi[(L)] e^{-S} \quad (4.77)$$

で、今度は (4.75) の closed loop のかわりに open loop の端を取り去ったものを考えて、全体を vector でたたくという操作をします。ここで  $\mathbf{Z}_{(f)i} = \mathbf{Q}_{(f)i}$  or  $\psi_{\mathbf{Q}_{(f)i}}$  です。これらを loop 変数あるいはそれに幾何学的な微分演算をほどこしたもので全部書き換えます。すると  $0 = (\text{loop およびその変形からなる相関関数})$  に書くことができ、つりあいの式を表しているわけです。いろんな可能性はあるけれども、それらは全部足しあわせると 0 になっている。これらを一番基本的なもののみなします。これが Schwinger-Dyson 方程式の立場です。

式 (4.75) は図 12 がその様子を示しています。矢印は  $X^r$  による微分を表しています。

$\frac{\partial}{\partial X^r}$  が action をたたくと、一番目の loop に幾何学的変形をほどこしたものと書くことができます。それが図 12 の [1] です。

それ以外にもたたくところがあります。(4.75) の第一番目の loop の中にある  $U$  というところをたたいたとします。 $U$  の行列の積のどこかをたたくと、その generator がでてきます。 $T^r$  と generator が 2 個間隔をおいて存在します。generator に関して和をとる際、完全性の条件が使えます。

$$\sum_{r=1}^{2k^2 \pm k} (T^r)_i^j (T^r)_k^\ell = \frac{1}{2} (\delta_i^\ell \delta_k^j \mp F_{ik}^{-1} F^{\ell j}) \quad (4.78)$$

$U(2k)$  の場合は Kronecker delta の添字の reshuffling ですが、 $USp$  の場合それに加えて  $F$  という項が入ってきます。(4.75) の 1 番目の loop というのは trace ですが、添字の reshuffling が起こってこれは 2 つの trace に分かれます。これはもともと 1 つの loop であったものが 2 つの loop に分裂することを表しています。 $F$  の添字で reshuffling するという事は向き付けのない場合にのみ可能で、loop の組み換えを行い、矢印の流れを変えることに対応しています。これは nonorientable な interaction を表します。これが図 12 の [2] です。

次に細工をしていない closed loop をたたく場合があります。この場合にははじめに 2 つの trace があって、trace のなかに 1 個ずつ generator が座っていてその generator に関する和があるわけです。やはり完全性の条件から添字の reshuffling が起こり、2 つあった trace が 1 つに合体するということが起こります。もともと 2 つあった loop が 1 つに合体する、あるいはねじれて合体する、という場合です。したがってこれらは、なにか closed loop の interaction を表しているということがわかります。これは図 12 の [3] です。

最後に、細工をしていない open loop をたたくという場合があります。そのときも合体が起こって、同様に考えることができます。これは図 12 の [4] です。

これらをまとめたのが式 (4.79) です。

$$\begin{aligned}
 0 = & \text{ [1] kinetic term} && \frac{1}{g^2} \langle \delta \Phi[(1), X^r] \Phi[(2)] \cdots \Phi[(N)] \Psi[(1)] \cdots \rangle \\
 & + \text{ [2] splitting and twisting term} && \#(\text{loop}) \text{ increased by } 1 \\
 & + \text{ [3, 4] joining with a closed and an open string} && \#(\text{loop}) \text{ decreased by } 1
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

重要なことは、[1] だけですと単に loop の数は増えず、linear な運動方程式が出るだけです。[2]、[3]、[4] のおかげで、loop の数が減ったり増えたりします。loop に関する interacting な運動方程式が相関関数の level で現れているわけです。

次に (4.76) の Schwinger-Dyson 方程式を考察します。図 13 がそれを表しています。まず、open loop の微小変形が出てきます。これは図 13 の [1] です。open loop の中に細工して  $T^r$  を挿入してありますから、 $X^r$  でこの open loop をたたきますと、closed loop が飛び出てきます。それが図 13 の [2] です。closed loop とか open loop とかをたたきますと、open loop と closed loop が合体あるいは open loop 2 つの組み換えが起こります。これが図 13 の [3]、[4] です。

$$\begin{aligned}
 0 = & \text{ ————— } \rightarrow \text{ ————— } && \text{ [1]} \\
 & + \text{ ————— } \rightarrow \text{ ———— } && \\
 & + \text{ } \bigcirc \text{ } \rightarrow \frac{1}{2} \left( \text{ } \bigcirc \text{ } + \text{ } \bigcirc \text{ } \right) && \text{ [2]} \\
 & + \text{ } \bigcirc \text{ } \rightarrow \frac{1}{2} \left( \text{ } \bigcirc \text{ } + \text{ } \bigcirc \text{ } \right) && \text{ [3]} \\
 & + \text{ } \text{ } \rightarrow \frac{1}{2} \left( \text{ } \right) \left( \text{ } \right) && \text{ [4]}
 \end{aligned}$$

図 13: Figure corresponding to (4.76)

最後に (4.77) の Schwinger-Dyson 方程式を考えます。それは図 14 が表しています。説明はもうあまりしませんが、この微分が作用するすべての可能性を考察することによって、図 14 のすべての場合が生成されます。そしてこれらが全体としてつりあって、0 になるという表式が得られます。

$$\begin{aligned}
0 = & \text{---} \rightarrow \bullet \text{---} \\
+ & \text{---} \rightarrow \text{---} \\
+ & \text{---} \rightarrow \text{---}
\end{aligned}$$

図 14: Figure corresponding to (4.77)

相互作用の elementary process としては、図 15 の 2 通りで尽きていることがわかります。

$$\begin{aligned}
\text{---} & \rightarrow \frac{1}{2} \left( \text{---} \right) \left( + \text{---} \right) \\
\text{---} & \leftrightarrow \text{---}
\end{aligned}$$

図 15: Fundamental interaction

Schwinger-Dyson 方程式をいま得られた相互作用を無視する linearized な level で見てみましょう。loop space の free の運動方程式になります。すると  $\Psi, \Phi$  は、parameter として導入した  $p$  に関する Virasoro 条件を満たしているということがわかり、さらに open string の端点の自由度に関しては、6 個の方向は Dirichlet boundary condition に従い、4 個の方向は Neumann boundary condition に従うことが示せます。行列から出発したのだけれども、loop 変数をとることによって、string の場の理論の考察を与えていることがわかります。

これでおしまいにしたいと思います。最後の 1 時間は seminar 形式になってしまいましたが、行列の定義のところまでは essential な部分を選んでできるだけ丁寧に話しました。最初にも言いましたが、ここに座っているみなさん全員が、ひもの理論はどうあるべきかと考えて研究を進めていくことはちょっと考えにくい。にも拘わらず講義前半で話したことは、素粒子物理全体という立場から見ても基本的な事柄になりつつあります。例えば純粋に gauge 理論をやるにしても、open string 及び関連する brane configuration を用いる議論がしばしば行われています。点粒子の量子力学と同様、1 本のひもの量子論もまた、少し勉強すれば誰でも取り扱える題材になりつつあります。これをふまえて、さらに一般のひもの多体問題、純然たる非摂動効果を可能にするひもの理論の構成、そして我々の見る自然界との一致に関してさらなる発展がなされていくでしょう。

# References

講義を作る際に参考にした文献のみを挙げます。さらにこれらの文献の references をあたって下さい。

## Lecture 1 & Lecture 2

- 0) パリティ 2001年3月、4月号
- 1) M.B.Green, J.H.Schwarz, E.Witten *Superstring Theory 1,2*: Cambridge University Press. (1987)
- 2) J.Polchinski *String Theory I,II*: Cambridge University Press. (1998)
- 2)' J.Polchinski,S.Chaudhuri,C.V.Johnson *Notes on D-Branes*. hep-th 9602052 (1996)
- 3) P.Goddard, J.Goldstone, C.B.Rebbi, C.Thorn *Quantum Dynamics of a massless relativistic string*. Nucl. Phys. B56 (1973) 109.
- 4) H.Itoyama, lecture delivered at Osaka University, 1997 Spring.
- 5) H.Itoyama, lecture delivered at Osaka University, 1993 Spring.
- 6) H.Itoyama, P.Moxhay *Multiparticle superstring tree amplitudes*. Nucl. Phys. B293 (1987) 685.
- 7) D.J.Gross, J.A.Harvey, E.Martinec, R.Rohm *Heterotic string*. Phys. Rev. Lett. 54 (1985) 502.  
*Heterotic string theory (I) The free heterotic string*. Nucl. Phys. B256 (1985) 253.
- 8) L.J.Dixon, J.A.Harvey *String theories in ten-dimensions without space-time supersymmetry*. Nucl. Phys. B274 (1986) 93.  
H.Kawai, D.C.Lewellen, S-H.H.Tye *Construction of fermionic string models in four dimensions*. Nucl. Phys. B288 (1987) 1.  
H.Itoyama, T.Taylor *Supersymmetry restoration in the compactified  $O(16) \times O(16)'$  heterotic string theory*. Phys. Lett. B186 (1987) 129.
- 9) P.Ginsparg *Comment on toroidal compactification of heterotic superstrings*. Phys. Rev. D35 (1987) 648.

## Lecture 3

- 10) A.Sen *Non-BPS states and branes in string theory*. Talk given at 3rd APCTP Winter School. Published in *Cargese 1999, Progress in string theory and M-theory*. hep-th 9904207 (1999)
- 11) A.Lerda, R.Russo *Stable non-BPS states in string theory: a pedagogical review*. Int. J. Mod. Phys. A15, 771. hep-th 9905006 (2000)



## Lecture 4

- 12) T.Banks, W.Fischler, S.H.Shenker, L.Susskind *M theory as a matrix model: a conjecture*. Phys. Rev. D55 (1997) 5112. [hep-th 9610043](#)
- 13) N.Ishibashi, H.Kawai, Y.Kitazawa, A.Tsuchiya *A Large-N reduced model as superstring*. Nucl. Phys. B498 (1997) 467. [hep-th 9612115](#)
- 14) H.Itoyama, A.Tokura *USp(2k) matrix model: F theory connection*. Prog. Theor. Phys. 99 (1998) 129. [hep-th 9708123](#) *USp(2k) matrix model: nonperturbative approach to orientifolds*. Phys. Rev. D58 (1998) 026002 [hep-th 9801084](#)
- 15) B.Chen, H.Itoyama, H.Kihara *Nonabelian Berry phase, Yang-Mills instanton and USp(2k) matrix model*. Mod. Phys. Lett. A14 (1999) 869. [hep-th 9810237](#) *Nonabelian monopoles from matrices: seeds of the spacetime structure*. Nucl. Phys. B577 (2000) 23. [hep-th 9909075](#)
- 16) H.Itoyama, A.Tsuchiya *USp(2k) matrix model: Schwinger-Dyson equations and closed-open string interactions*. Prog. Theor. Phys. 101 (1999) 1371. [hep-th 9812177](#)  
*USp(2k) matrix model*. Prog. Theor. Phys. Suppl. 134 (1999) 18. [hep-th 9904018](#)