Ver. 1.50

2001年　三者若手夏の学校　素粒子論パート

基本法則の場の理論

井沢 健一

(東京大学)

講義録作成：茨城大学　素粒子論研究室

目 次

謝辞

このファイルは、２００１年度原子核三者若手夏の学校における講義を文章化したものである。文章として通じやすくするための部分的な加筆修正を除き、話した内容をほぼそのまま記述した。実際の講義では途中に、質問のための時間枠もとってあったのであるが、その際の回答も講義内容の当該箇所に配置してある。

夏の学校の準備･開催にたずさわった方々、特に、この講義録作成を直接担当した井川　元就、伊藤　英男、鬼沢　重行、黒川　寛史、齋藤　通義、澤　康之介、重岡　導洋、曽根原　靖人、天神林　康史、問田　慎二、戸上　充、利光　晋一、中条 亮之、原山 智寛、松井 耕介、村上 寛知、元結 信幸、山本 将、横田 暁史の各氏に感謝する。彼らの尽力なくして、この講義録は成立しなかった。

1　はじめに

新世紀が始まるにあたり、20 世紀までの段階で全体として、物理的に見た基本法則についてどういう認識が得られたか振り返ってみる。もちろん、基本法則についてどういう認識をもっているかということは人によっても違うし、同じ人であっても時と場合によっていろいろな可能性を考えるだろう。ここでは、時間の許す範囲でできるだけ広範なトピックスを考察しつつ (目次を提示)、それを通じて一つの作業仮説を与えて、参考に供したい。

出発点をどこに置くかというと、多くの人が考えている通り相対論的な場の量子論という framework をそこに置いて、それを前提とする。つまり、出発点としては、非常に広く共通認識として得られている standard model が妥当だろうということになる。ただし、基本法則の出発点だと言っても、standard model が最終的な理論の形だと思っている人はほとんどいない。これもまた広く共通に認識されている事である。

Standard model は実験的には極めてよく、破綻がない。破綻はないが、最終的な基本法則だとは思わない。そうすると、最終的な基本法則でもないものがなぜそんなに良いのか、という疑問が生じる。その答えを与えるのが、effective theory という観点である。

2 Effective Theory

そこでまず、effective theory について説明しよう。(この点について説明不要であれば 2.6 節に進むことができる。)

2.1 Effective theory とは

この effective theory という用語はいろいろな意味で使われるが、ここでは effective theory をどういう意味で使うのか、最初に説明する。非常に大雑把に言って、広い意味での変数変換だというのが定義である。

場の理論を経路積分で考えて、次のような partition function を書く:

$$Z[J] \quad = \quad \int \mathcal{D}\varphi \quad e^{i(S[\varphi] \ + \ J\cdot\varphi)}. \tag{2.1}$$

ここで φ というのは、スカラー場を表しているわけではなく、色々な場があるとしてそれを代表して表しているものである。それに対して source J を入れてある。これが、N 点関数を引き出せるという意味で、場の理論の情報を含んでいるものだと考える。

最終的な結果 $Z[J]$ に φ というものは出てこない。従って個別の積分表示としては色々な書き方がある。全く別の χ という積分変数のセットを用いて次のように書き直すことができる:

$$Z[J] \quad = \quad \int \mathcal{D}\chi \quad e^{iS_{eff}[\chi,J]}. \tag{2.2}$$

このようにいろいろ書き直す方法が存在する。これは広い意味で φ から χ への変数変換である。このときに出てくる action の形 S_{eff} が effective theory を与えるという定義である。

これだけでは非常に漠然としているが、もう少し具体的には：狭い意味での変数変換、単なる場の再定義ももちろん含まれる。それだけでなく、例えば integrating out と呼ばれる手法は、場の成分がたくさんある場合、そのうちのいらないものを積分しきって消してしまうことで場の成分を減らす。また逆に、よく 1 を挟むという言い方をするが、補助場を入れることで場を増やす。これらも広い意味で変数変換と捉えることができる。

2.2 例：massless 2-flavor QCD

いま考えたように変数変換というだけでは無限のバリエーションがあり得る。そこでもう少し具体的な例で、一体 effective theory がどのように使われているのかを見てゆくことにする。例として massless 2-flavor QCD の場合を考える。そうす

ると元々の φ に相当するものとしてはもちろん gauge 場 (gluon) があるし、2-flavor だから up quark と down quark がある。

これがどのように観測されるかということを考えると、現実の QCD から推測して、massless 2-flavor そのものが見えるわけではない。QCD が実験的にそうであるように、pion が三つ出てくるということになると考えられる。

つまりこれは同じ理論を二つの別々の変数で表すということである。そこで effective theory の設定が用いられることになる。具体的にどのようにするかを考えると、原理的・概念的には：元々の massless QCD では、dimensional transmutation によってスケールが出る。Gauge-invariant な物理的自由度に相当する hadron ほとんどは、そのスケールに起因する mass を持つから、その massive なものを integrate out してしまって、massless で出てくる pion だけを残しておく、ということをすれば良い。

しかしもちろん、それを解析的に実行できた人は未だにいない。だから何か別の方法で情報を引き出さなければならない。それは普通どうやるかというと、symmetry の活用をする。変数変換は同じ理論を書き換えるだけだから、元々ある symmetry は書き換えた後にもあるはずである。そこで massless QCD にどのような symmetry があるかというと、

$$\begin{array}{ccccc} SU(2)_L & \times & SU(2)_R & \times & U(1)_B. \\ & \cup & & & \\ & SU(2)_F & & & \end{array} \tag{2.3}$$

これは quark の chiral symmetry と baryon number の symmetry である。

さて、先ほどの pion はもっと正確に言うと、$SU(2)_L \times SU(2)_R$ の中の対角な $SU(2)_F$ flavor symmetry の 3 次元表現 π_a になっている ($a = 1, 2, 3$)。これが変換後の積分変数 χ に相当する。$SU(2)_L \times SU(2)_R$ というのは $SO(4)$ と同型で $SU(2)_F$ というのは $SO(3)$ と同型なので、$SO(3)$ の 3 次元表現ということになっているのである。

ここで注釈を入れておく。上で述べたように今 chiral symmetry を使おうと思ったわけだが、これというのは massless のときに特徴的な symmetry であるように見える。安直に考えると、massive な理論などには使えないということになる。しかし理論に mass が入っているからといって、必ずしもその種の考察が不適当なわけではない。

なぜなら例えば、質量項というのは mass matrix で次のように書ける:

$$(\bar{u} \;\; \bar{d}) \; m \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

これはもちろん m を constant だと思うと chiral symmetry を破っているわけだが、それをなんらかの場 (経路積分するような dynamical なものでなくて、手で与えているような外場) であるとする。さらに、それに適当に変換性を与える。要する

に、質量項が不変になるように m を変換する。このようなことをすると、あたかも symmetry があるように見えることになり、その情報を使うことができるのである。本当は m というのはそのように変換するものではなくて何か値を持っているのだが、それはちょうど自発的対称性の破れによる値のごとく、そのもとに破れた symmetry が理論をコントロールするのと同じで、m がどのような効果を及ぼすのかある程度わかる。このように考えると、symmetry を用いるのは massless の場合に特別な方法というわけではない。

話をもどして、後は、この symmetry の情報を使って pion というものがどのような action で記述されるかということを考えてみるということになる。ただ、元々要請している symmetry は $SO(4)$ であるが、pion はその部分群の $SO(3)$ の 3 次元表現なので $SO(4)$ でどのように変換するのか自明ではない。

これは少しテクニカルだが、例えば、次のように考える。新たに $SO(4)$ の 4 次元表現 φ_i を導入する $(i = 1, \cdots, 4)$。ただし、これに対して次のように $SO(4)$-invariant な constraint を与える:

$$\varphi_i^2 \;\; = \;\; \Lambda^2. \tag{2.5}$$

これは $SO(4)$ symmetry を壊さない。ここで Λ というのは元々QCD から出てくる dynamical scale、つまり dimensional transmutation で出てくる QCD scale である。Λ は、μ を繰り込み点とすると、次のようになる:

$$\Lambda \;\; \sim \;\; \mu e^{-\frac{8\pi^2}{bg^2(\mu)}}. \tag{2.6}$$

b は β 関数の係数であり、g が running gauge coupling を表す。

すると φ_i というのが 4 次元表現なので、これで invariant な Lagrangian を書くというのは素直にできる:

$$\mathcal{L}_{eff} \;\; = \;\; V(\varphi_i^2) \;\; + \;\; \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi_i \partial^\mu \varphi_i \;\; + \;\; \cdots. \tag{2.7}$$

この effective Lagrangian は、変数には $\varphi_i^2 = \Lambda^2$ という拘束がついているので、三つの独立変数をもつ。それを先ほどの π_a とみなすわけである。

ここで、よく文献でみる形に書き直しておくと次のようになる:

$$\mathcal{L}_{eff} \;\; = \;\; \frac{1}{2}\frac{\partial_\mu \pi_a \partial^\mu \pi_a}{1 \; + \; \frac{\pi_b^2}{\Lambda^2}} \;\; + \;\; \cdots. \tag{2.8}$$

これは (2.5) の constraint を解いて φ_4 を消去して得たものである。π_a というのは次のようなものになっている:

$$\pi_a \;\; \equiv \;\; \frac{\varphi_a}{1 \; + \; \frac{\varphi_b^2}{4\Lambda^2}}. \tag{2.9}$$

ただし、φ_b^2 は残った独立な 3 変数の自乗和である。(2.7) の V の部分は、φ_i^2 が Λ^2 なので、実は dynamics に効かない定数であり、例えばゼロとして良い。つまり微

分を含まない項は exact に求まっていてゼロである。微分が入っている項については完全に決定できるわけではないが、ある程度の情報は得られたことになる。

「$\cdots$」に含まれる高次の項というのは、微分の次数がどんどん上がってゆく項である。その微分というのはエネルギー運動量であり、従って、それが小さいような状況を考えるときには近似的に無視できると思われる。このようなものが effective theory の例を与える。

[質問]

$\varphi_i^2 = \Lambda^2$ というのはどこから出て来たのか？

[返答]

今、π_a という $SO(3)$ の 3 次元表現をなす変数で理論を記述したいという目的がある。しかしながら、それは $SO(4)$ symmetry のもとで nonlinear というか、良い変換性を持っていない。それで $SO(4)$-invariant action であるかどうかというのは一見して分からない。すぐ見てわかるのは $SO(4)$ だと、4 次元で linear に変換するようなものである。だからその φ_i という linear に変換する一見してわかるものを持ってきて、invariant action を作ることにする。

それではもちろん、独立変数が四つあるので、三つの独立な変数の理論を作りたいという目的に合わない。だから、四つの独立変数をある何らかの方法で三つに減らさなければならない。その減らす方法として、$SO(4)$ symmetry を壊してしまうともともこもなくなってしまう。そこでなんとか $SO(4)$ symmetry を保つ拘束をつけつつ、独立変数三つのところを補助的に四つ変数を導入したのである。この拘束が、$\varphi_i^2 = \Lambda^2$ であった。そうすることで実際には三つしか独立変数が存在しない Lagrangian を書いてみることができた、という流れである。

無論、はじめから 3 変数で nonlinear 表現を扱い、$SO(4)$-invariant action を構成しても良い。見掛けは異なっても、互いに変数変換でつながるようなものが得られることにかわりない。

ここまでは要するに effective theory を求めるため、非常に広い意味での変数変換をしただけである。何かその変数変換をしただけで、理論の内容が色々と得られてしまうのはおかしいという感じがするかも知れない。元々QCD というのは strong dynamics なので、非常に非摂動的な効果による低エネルギーでの振る舞いが pion の物理になっている。その pion がどういう interaction をするかということを、ある程度求めることができてしまっている。

どこにトリックがあるかというと、この π_a という変数で理論を書けるという非常に巨大な仮定を置いてしまっているのである。もちろん変数変換なので、どういう変数を持ってきても良いように思われるが、その変数でうまく元の Lagrangian なり action なりの物理を記述できるかどうかというのは別問題だということになる。

例えば極端な話、もとの出発点とした理論において、massless な物理的自由度が存在したとする。その massless な物理的自由度を、非常に形式的に無理やり積

分しきってしまうということは不可能ではない。しかしその出てくる理論というのは、massless の pole が至る所に現れる、非常に singular な記述になってしまう。もちろんその singular なものを使って何か有用な情報が引き出せれば、それはそれで良いだろう。しかし今考えているような、例えば微分展開するような手法を使う範囲では、全く有効性を期待できない。

一方、良い変数、この場合 pion というのは、まさにそれが見えるので実験的に良い変数であることが分かっている。上の考察では、その変数で nonsingular な記述が可能であることを、Lagrangian を書き下す際に implicit に用いていた。すなわちそのような変数を選ぶということが極めて nontrivial なのである。例えば一般的な gauge theory が与えられて、その低エネルギーで見える effective theory を求めようとしても、それは分からない。その特定の変数変換を選ぶ部分が仮定なわけである。QCD の場合は実験があるのでこれで良いだろうと思われるが、一般には、そこのところが nontrivial な情報を含んでいる。

これで effective theory の具体例については終わることにしよう。このように、effective theory という用語にはニュアンスとして、この有効な (effective) 変数での記述という内容が含まれている。

2.3 近似との関係

ここまでの話に関連して、いくつかコメントがある。その一つは近似との関係である。

元々の定義を見ると、単にその変数変換は等号でつながった全く同じ partition function を与えるものであった。このようなどこにも近似がない exact な関係式というのが定義なので、ここで言っている effective theory というのは、定義自体は近似と独立な概念である。しかし実際問題として、nontrivial な picture を使おうとすると exact に求まるということは稀である。そのようなものは普通無いので、近似と密接に絡んで使われることが多い。だから実際的に完全に分離するのは難しいであろう。

例えば前の例は、chiral Lagrangian と呼ばれ実用目的にも用いられている。実際に使うときは、先ほど微分展開と言ったが、微分の次数で展開して摂動論的に扱う。このようなものは chiral perturbation theory と呼ばれていて、非常に近似と絡む構成になっているのである。そこで、Λ というのは QCD スケールなわけだが、その役割についてどう捉えるか。近似を扱って、微分展開の高次を無視する場合、どのような量と比較して、エネルギー運動量が小さければ無視できるかを考える。すると Λ というのがこの理論の唯一のスケールで、これと比較することになる。そのためこれは cutoff スケールと呼ばれる。

Cutoff というのは regularization、つまり本当にそこで切って捨てるという意味あいでも使われる用語だが、ここでの捉え方はそれと異なる。この cutoff Λ より大きい質量を持ったものは、全て integrate out してしまう。そうすることにより

Λ より低いエネルギーで近似しやすい記述となるという意味で cutoff なのである。だがしかし、元々概念的には近似を含んだものではない。ここで effective theory と言っているのは、そういうスケールで特徴付けられる理論を考えたものである、そのような記述の仕方を採用しておく、その程度の意味なのである。けしてそのスケール以下でしか成り立たない近似をしてしまったと考えているわけではない。

従って一般に、今考えている effective theory というのは、いわゆる繰り込み不可能な理論である。あらゆる higher-dimensional term を入れてある。繰り込み不可能な理論に対しては時に、無限個の相殺項があるので予言力がないということが言われる。しかしながら、derivative expansion とか、そういう発想からすれば、低エネルギーでは高次の項は効かない。それで、近似を考える際、実はそれほど悪いことをしていないと思える。実際、chiral perturbation theory などで逐次的に行なう繰り込みの操作自体は、繰り込み可能な理論の場合と (パラメータが多くなるだけで) 本質的に違わない。だから higher-dimensional term があることは、effective theory の観点にとっては全然問題無い。もとの手法にさかのぼってみれば、単に exact な変数変換をしてるだけなので、別に高次の項があろうが何しようが元々の理論と同じなのである。

2.4 Standard model

続いて、このような観点から standard model についてコメントする。Standard model についても、色々な捉え方がある。狭く言えば、繰り込み可能な理論という立場もある。しかしここでは effective theory としての standard model と見なしてゆこうと思う。すると十分低エネルギーで、例えば繰り込み可能な理論からのずれが存在したとする。そのずれを補正するように higher-dimensional term を入れて相当する効果を持ってくれば、漸近的にいくらでも状況をよく記述できる。そういう立場がとれるのである。

もちろん極端な話、量子論を変更しないと記述できないような効果みたいなものが実験的に発見されたとすると、それをこの立場で取り入れることは不可能である。が、そのようなことでもない限り、低エネルギーで見た effective theory としての standard model というのは、ある意味完全に正確な理論なのである。例えば古典力学が量子力学の近似であるという場合のような本質的な近似なのではない、という立場をとることができる。そういう意味で standard model というのは effective theory として standard であると捉えられる。

この場合、重力をとり入れることもこの立場でできる。Einstein 重力というのは、繰り込み不可能な理論と言われるわけだが、このような微分展開みたいな立場では、chiral perturbation theory とパラレルな感じで扱えるのである。だから重力まで含めた意味の少し拡張された standard model というものを考える。そのように捉えると、なぜ最終的な理論ではないのに現実を十分記述できるのか？ということを理解する一つの観点を与えると考えられる。

もっと言うと、ここまでは出発点としてとりあえず、場の理論を別の場の理論へと変数をかえて書くという説明の仕方をした。しかしもとの理論、一般にこれは高エネルギー理論というような呼び方をするが、今まで考えてきた derivative expansion などを使った低エネルギー理論とは違い、高エネルギー理論としては場の理論をとる必要はないと考えられる。

場の理論というのは例えば、物性系などでも使われている。物性系として、原子が格子状になっているというような状況を考えたりすると、もともと本来は空間的に離散的な自由度だと思っている。そういうものを記述するのに変数変換をして、場の理論で記述して理解しても良い。だからそのような立場で、effective theory を使うこともできる。もとの理論は別に場の理論である必要はない。例えば、弦理論でもいいわけである。弦理論でも、固定した background を選んで低エネルギーを記述する場合、今までのような effective theory で記述されていると考えて、何かしらの本質的な近似をしているわけではない。単に粗視化している。そのような立場で考えると、元の理論が、あるいは何かもっと全然知らない理論であったとしても、量子力学をキープしているという前提をとりあえず置く (今のところそれに代わるものを知らないので) と、そのように見なすことができる。

おそらく effective theory の framework にも、どこかに適用限界はあるだろう。例えば重力に関連して、少なくとも量子力学の理解を変更しなくてはならない、そういうような可能性もあるわけで、それについては後で宇宙項問題に関連して少し考えることにする。しかし、とりあえず、この framework に基づいて、standard model が実験・観測に極めてよく合うということを理解できるというわけである。

2.5 繰り込み可能性について

そうすると、繰り込み可能な理論が良いという感覚はどうしてくれるんだ？ということになる。歴史的には確かに QED や Yang-Mills 理論が繰り込み可能であるという認識が重要なステップだったわけであり、Einstein 重力が繰り込み不可能だということが弦理論への一つの motivation になった。ところが今の effective theory の観点からすると、別に繰り込み不可能というのはそれ自体としては全然何の問題も無い。では繰り込み可能な理論との本質的な違いは何か？ということになる。

例えば、Weinberg-Salam model の weak boson は massive なので、それを積分しきってしまう。そうすると 4-Fermi 理論みたいなものにできる。それは単に変数変換だから等価な理論である。だから別に Weinberg-Salam model を使う必要はない。全く同等に、fermion だけで、すなわち 4-Fermi 理論として扱える。もちろん higher-dimensional term を適切に入れていけば、である。

大きく違うのは、具体的に 4-Fermi 理論で扱うと、非常に多くの higher-dimensional term が効いてくるところである。我々は Weinberg-Salam model を知っているから、higher-dimensional term をどう入れればいいか答えを得ることができる。少なくとも Weinberg-Salam model の摂動論の範囲では、すぐさま答えることがで

きるのである。具体的に摂動論から weak boson を積分してみれば良い。ところが、実際に 4-Fermi 理論だけしか知らないという人がいたとしたら、どのようにに higher-dimensional term を決めるかというと、理論全体が量子論としてユニタリーな理論になるように入れていくことになる。しかし具体的に行なうのは非常に厄介だろう。要するに、本当の高エネルギーまで完全にユニタリーかどうかを納得するのはほとんど無理なのである。

ところが繰り込み可能で、例えば asymptotic freedom みたいものを実現しておくと、本当にユニタリーな理論があるということを摂動論的な考察から確信することができる (Weinberg-Salam model そのものは asymptotically free ではないが)。もちろん数学的な証明というわけではないにしても、十分納得できるものである。そういう意味で、繰り込み可能な理論というのは本当に、高エネルギー理論で完全にユニタリーな量子論が存在するということを納得させてくれる。このような形で意味をなすと思える。

例えば、4-Fermi 理論だと図 1 左のようなループになるところを、図 1 右のように gauge boson や Higgs 場を加えて、高エネルギーでの振る舞いがきちんとユニタリーな理論ができるという確信が持てているわけである。

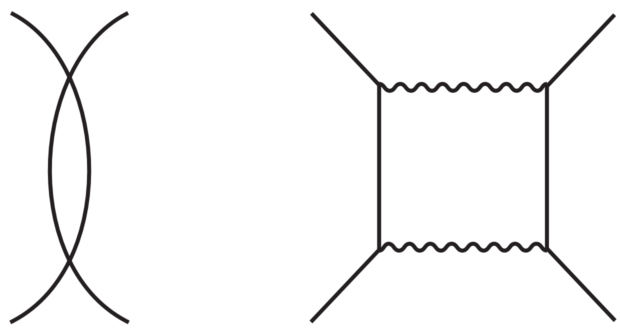

図 1

重力についても全く同じことで、derivative expansion を使って逐次的にユニタリーにできると思っているわけだが、それで本当に高エネルギーまできちんとユニタリーな理論が存在するのか？というのがよく分からないのである。それを摂動論的に納得する方法として、電弱相互作用の場合には gauge 場や Higgs 場を増やしてやれば良かったのだが、重力の場合、知られているのは場を無限個増やし

て図 2 のようにする:

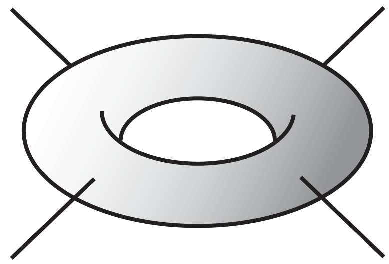

図 2

すると重力の場合も摂動論的な理解ができる。非摂動的にと言われると、本当に存在するかどうかは分からない。数学的証明としては言うまでもなく、弦理論の場合には操作的にも asymptotically free な場の理論ほどの確信は得られないかも知れない。しかし作業仮説としてこれで良いだろうと考えることはできる。

[質問]
Effective theory としては繰り込み可能性は理論を制限する役割を持たないのか?
[返答]
歴史的には摂動論的な繰り込み可能性が、理論的な要請という認識をされたこともある。しかし effective theory の立場として、つまり繰り込み可能・不可能という言葉に代えて、relevant operator, irrelevant operator という術語を使うという立場に立つと、繰り込み可能性というのは要請というよりは帰結である。次元が低い relevant な operator は低エネルギーで、より dominant に効いてくる。一方、次元が高い operator はそれに比べて、エネルギーが低いとき一般に抑えられる。これはある程度摂動論的な描像であるが、そのように見なせる。従って、これは理論を制限するものではない。
もちろんそれは、最終的な理論が出来上がってきたとき、実は繰り込み可能性というのは非常に原理的なものであるというようになっている可能性もある。非摂動的にユニタリーな理論を構成するという意味での構成的な繰り込みならそうかも知れない。しかしこれまでの話の中で、effective theory の立場から理解するという観点からは、要請というよりは帰結であるという説明の方が妥当であろう。

2.6 場の理論空間へ

以上を通して分かるように、effective theory という観点で捉えると、standard model を物理的な基本法則を考える出発点にとることができる。

そうすると次に気になるのは：Effective theory としては、場の理論には非常にたくさん様々なものがあり得ると考えられる。別に standard model の field content とか coupling である必然性は、この範囲ではどこにも見えてこない。だから、可能なものは色々あるはずなのに、どうしてその特定のものが自然に選ばれているのかということが気になる。それに対するアプローチとしてすぐに思いつくのが二通りぐらいある。

一つはもっと深い原理があって、例えば理論の consistency みたいなものから非常に unique に、特定の場の理論が選ばれている可能性である。今のところ、それがどういうものかということは具体的には全く分からないのであるが。

もう一つの可能性は：可能な場の理論というのは色々ある。その場の理論の空間みたいなものを考える。つまり場の理論の空間というものを configuration space のように考えて、その上の階層、その上のメカニズムで、ある特定の理論が選ばれる。そのようになっている可能性である。

例えば、弦理論というのは後者のような構造になっているのではないかと考えられる。要するに、非常にたくさんの真空があるという事から (真空というのは何か非常に拡大された広い意味での真空で、具体的な場の理論に対応する) effective theory としては様々なものができるのではないかということである。

場の理論における自発的対称性の破れの場合とのアナロジーで考えると、異なる background configuration を真空とする量子論として、一つの場の理論にユニタリー非同値なものがいくつかあるような状況に対応している。すなわち、異なる background configuration をとると、異なった場の理論が effective theory として得られるというわけである。

何らかの方法で、その中から特定の真空が選ばれる。つまりある特定の場の理論が選ばれる。そのような構造になっているのではないだろうか。そういう観点で考えてみる。そうすると、場の理論全体の構造みたいなものを見渡すという作業が必要となる。そこで特徴的な場の理論を調べることになる。(必要であればここで 2.1 節に戻ることができる。)

3 Supersymmetry

非常にその特徴的なものとして知られているのが、supersymmetric な理論である。理論が supersymmetric であるという要請は、場の理論として一部のものに制限することになるわけだが、面白いことに effective theory として自然な場の理論の幅をむしろ拡げるような結果をもたらす。そのような認識を与える構造を見てゆこう。(この点について説明不要であれば 3.7 節に進むことができる。)

3.1 Supersymmetry とは

Supersymmetry を持っている理論をどうやって作るか、できるだけ端的に把握したい。とりあえず supersymmetry の一番簡単な状況として、場の理論ではなく量子力学の例を考えてみる。

今、2 種類の調和振動子がある系を考える。この系の Hamiltonian として

$$H = \omega(a^\dagger a + b^\dagger b) \tag{3.1}$$

とすると a と b は同じエネルギー量子を持つから、それらを入れ替えるのは symmetry なはずである。つまり a を消して b を造り b を消して a を造るようなエルミート演算子 Q を考える:

$$Q = \sqrt{\omega}(a^\dagger b + b^\dagger a). \tag{3.2}$$

ここで convention として係数 $\sqrt{\omega}$ をかけてある。そうすると、交換関係

$$[H, Q] = 0 \tag{3.3}$$

が成り立ち、Q は保存量であり、symmetry があることになる。

ここで a と b との組み合わせとして両方 bosonic、あるいは fermionic ならば保存量 Q は bosonic になり、これはよく知っている通常の symmetry である。残った組み合わせで、一方が bosonic、他方が fermionic な場合、Q 自体は fermionic になり、代数関係としては反交換関係を考えることになる。その反交換関係は

$$\{Q, Q\} = 2H \tag{3.4}$$

を満たすことがすぐ分かる。このように一般に fermionic な symmetry のことを supersymmetry と呼ぶ。

これは自由系だからあまりに簡単すぎるが、相対論的な場の理論の場合も漸近場を使える状況では本質的に同じである。4 次元の相対論的場の理論を考えるとスピンと統計の関係があるから fermionic な Q はスピノルの添字を持つ。その Q の反交換関係が Hamiltonian であり、相対論では 4 元運動量 P_μ ということになる。つまり、

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} \;=\; 2\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} P_\mu \tag{3.5}$$

という関係に拡張される。ここで、$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ はスピノルの添字 $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$ をベクトルの添字 μ にかえる量であり、相対論的共変性から決まる。また、Q は 4 成分あるわけだが、上で特徴的であった、Hamiltonian が本質的に Q の自乗になる、という性質は変わっていない。

「$H = Q^2$」は、それだけで情報を運んでくれる。まず、H の期待値は負にはならない。それで、supersymmetry が自発的に破れているかどうか、真空状態が Q で不変かどうかは、Hamiltonian にゼロ固有値状態があるかどうかによって判別することになる。つまり、supersymmetry が破れているかどうかは直接 supercharge を見なくても、基底状態のエネルギーを見ることで判断できるという特徴的なことが起こるのである。

3.2 Superspace

場の理論の場合、どのようにして supersymmetry を持つ理論を作ったら良いか？ということで superspace を導入する。これは相対論でテンソル算を導入したようなものである。

参考のために supersymmetry から離れて、普通の時空で並進対称性を持った理論をどのように作るのか、ほとんど無意識にやっていることに、まず立ち戻ってみよう。

時空間の並進の生成子 P_μ(つまりエネルギー運動量)、それに対して並進のパラメータ a^μ があり、それが作用するアフィン空間 $\{x^\mu\}$ を時空と呼ぶ。ちなみに、アフィン空間はベクトル空間みたいなものであるが、ベクトル空間では原点、つまりゼロベクトルが特別なのに対し、アフィン空間はそれがない普通の空間で、どこかに原点を決めればベクトル空間と一対一対応する。だから作用としては $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ となる時空間を導入するわけである。

その上の関数として場 $\varphi(x^\mu)$ を導入すると、並進変換した場 $\varphi'(x^\mu)$ は、元の場の別な場所での値になる。つまり、

$$\varphi(x^\mu) \to \varphi'(x^\mu) = \varphi(x'^\mu). \tag{3.6}$$

並進変換の下で不変な action は、φ で Lagrangian を作って時空間で積分すればよい:

$$S = \int d^4x\, \mathcal{L}(\varphi(x^\mu)). \tag{3.7}$$

積分という操作は並進に対して不変になっている。時空が無限に広がっていれば、並進しても積分は変わらない。

この方法を、supersymmetry を持つ場の理論に応用してみる。Supersymmetry を持つ場の理論の場合は、時空間並進の場合の $[P_\mu, P_\nu] = 0$ に相当する Q の反交換関係が 4 元運動量ベクトルになってしまう。つまり反交換関係が消えないのだが、並進の場合と同じように扱いたいので、$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0$ という状況を考える。その

ためには、P_μ が場に作用して消えるように場が時空 $\{x^\mu\}$ に依らない一定の量である場合、つまり、場の上の表現として $P_\mu = 0$ である状況を考えることになる。こうすると場の時空依存性の情報は消えてしまうが、微分を含まないポテンシャル項の情報は拾うことができる。

さて、superspace でも時空と同様に考えるわけで、超対称変換の生成子を Q_α、その変換パラメータを Grassmann 数の ξ^α とすれば、それが作用するアフィン空間が superspace $\{\theta^\alpha\}$ となるのである。つまり $\theta'^\alpha = \theta^\alpha + \xi^\alpha$ と変換する。

Superspace 上での関数として superfield $\Phi(\theta^\alpha)$ を導入し、それに対する超対称変換は時空並進と同様に、

$$\Phi(\theta^\alpha) \to \Phi'(\theta^\alpha) = \Phi(\theta'^\alpha). \tag{3.8}$$

この変数の関数を積分したものが supersymmetric な Lagrangian

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \ \mathcal{F}(\Phi(\theta^\alpha)) \tag{3.9}$$

で、さらに時空間積分すると action になる。ここで積分は superspace で並進不変になるような代数操作として、

$$\int d\theta^1 f(\theta^1) = f_1; \quad f(\theta^1) = f_0 + \theta^1 f_1 \tag{3.10}$$

のように定めている Berezin 積分である。

以上のように普通の並進の場合と全く同様であるといえる。

3.3 Chiral superfield

先ほど導入した superfield $\Phi(\theta^\alpha)$ は 4 つの Grassmann 変数を持ち、その内容を詳しく見ようとするとスピノル成分のことを議論しなければならない。ここでは目的と異なるので、それはやらないことにする。

実は、エルミートな supercharge に直接対応して 4 成分実スピノル θ^α を用いる代わりに、まったく同等なことを 2 成分複素スピノル θ を用いて記述してもよい (2 成分を区別する添字は、あらわにしていない)。つまり、θ と θ^* に依存する superfield $\Phi(\theta, \theta^*)$ を考えるのである。

ここで複素解析関数のように、半分、つまり θ^* には依らないという制限をおくと、supersymmetry の表現として可約な $\Phi(\theta, \theta^*)$ から既約な chiral superfield $\Phi(\theta)$ になる。これが超対称変換で閉じているのは明らかだろう。

Grassmann odd な数 θ は 2 成分しかないので、反可換性より $\theta\theta\theta = 0$ である。従って、$\Phi(\theta)$ をベキ展開すると、

$$\Phi(\theta) = \phi + \theta\psi + \theta^2 F. \tag{3.11}$$

ここで、$\phi = \Phi(0)$ で $\Phi(\theta)$ が complex field なので、ϕ は complex scalar field であり ψ は 2 成分の chiral fermion、F も complex scalar field である。また、場 ϕ と ψ の質量次元は 4 次元時空で考えれば 1 と $\frac{3}{2}$ であり、$\phi = \Phi(0)$ だから Φ の次元は 1、そうすると θ の次元は $-\frac{1}{2}$ で F の次元は 2 ということになる。

さて、この chiral superfield $\Phi(\theta)$ を使って supersymmetric な Lagrangian を書こうとするとどうなるであろうか。前節にならえば、2 成分複素スピノルで書いたので積分は $d^2\theta d^2\theta^*$ となり、実関数 $K(\Phi, \Phi^*)$ (Kähler potential と呼ばれる) で Lagrangian を作ることができる:

$$\mathcal{L}_K = \int d^2\theta d^2\theta^* K(\Phi, \Phi^*). \tag{3.12}$$

Chiral superfield の場合は θ^* が入ってこないので、もう一つ方法があり、Φ^* によらない関数 $W(\Phi)$ (superpotential と呼ばれる) を $d^2\theta$ だけで積分する:

$$\mathcal{L}_W = \int d^2\theta W(\Phi) + \text{h.c.} \tag{3.13}$$

ただし、全体の複素共役を加えて Lagrangian を実にしている。

先ほど質量次元を数えたが、繰り込み可能な Lagrangian を導く Kähler potential は

$$K(\Phi, \Phi^*) = \Phi\Phi^* \tag{3.14}$$

であり、また superpotential $W(\Phi)$ は 3 次の項まで繰り込み可能で、

$$W(\Phi) = \Lambda^2\Phi + \frac{1}{2}m\Phi^2 + \frac{1}{3}\lambda\Phi^3. \tag{3.15}$$

これで繰り込み可能な potential が分かったので、実際その Berezin 積分をやってみる。今、簡単のため fermion は無視することにして $\psi = 0$ とおき、$\Phi = \phi + \theta^2 F$ として、実際あとで使う部分だけを見ることにする:

$$\mathcal{L}_K = FF^*, \quad \mathcal{L}_W = F\frac{\partial W(\phi)}{\partial\phi} + \text{h.c.} \tag{3.16}$$

このとき superpotential の微分が出ている。$W(\Phi)$ を θ でベキ展開して、Berezin 積分をすると、$W(\phi)$ の微分が現れるのである。

ここでは、時空微分が無い所しか見えていないので、kinetic term がどのようなものか分からない。しかし、繰り込み可能な理論を考えているので、微分項として許されるものはほとんど決まっている。特に、F の次元が 2 であることから、F はそのまま補助場になっていることになる。(詳しくは、kinetic term を入れて超対称変換を作ってみればよいことなのだが、ここでは深入りしない。) 従って、運動方程式を使って F を消去すると、次のようなポテンシャルが得られる:

$$V = \left|\frac{\partial W(\phi)}{\partial\phi}\right|^2 = \left|\Lambda^2 + m\phi + \lambda\phi^2\right|^2. \tag{3.17}$$

要するに、superpotential を微分して絶対値の自乗をとると、それがポテンシャルになるわけで、以下に用いるのは、この式である。この絶対値の自乗という形は、エネルギーが負にならないという supersymmetry の性質に由来している。繰り込み可能な場合は具体的に ϕ の 4 次式になっていて、それが、supersymmetric な interaction である。もちろん本当は fermion の interaction も出てくる。

Supersymmetry が自発的に破れているかどうかについて一言述べておこう。その判断基準によると、ϕ が何らかの値をとって V がゼロになると、そこが supersymmetric な基底状態になる。つまり、その時には supersymmetry は破れていない。このことがどの ϕ でも成り立たない (つまり V が常に正である) と supersymmetry が自発的に破れることになる。ポテンシャルの形をみると、ϕ は複素だから一般には V がゼロになる解があるはずだが、$m = \lambda = 0$ で $\Lambda^2 \neq 0$ ならば常に $V > 0$ となり、supersymmetry は破れている。詳しくは、また後で考えよう。

3.4 対称性による自然な実現

Supersymmetric な Lagrangian は、どんな特徴を持っているのだろうか。いま見たように supersymmetry には、スカラー場のポテンシャルの形をコントロールする力がある。

スピノル場やベクトル場の場合を考えると、スピンの性質によって interaction の形を制限することができる。スピンを持つ massless な粒子は、常に光速で走っているためヘリシティが保たれる、という性質により massless であることを特徴づけられる。スピノルの場合、chiral symmetry が対応する役割をになっている。スカラー場にはスピン成分が無いので、そういうことはできない。Supersymmetry は、そのスカラー場と fermion を結びつけ、interaction をコントロールする力がある。つまり、fermion をコントロールするものは、同時にスカラー場をコントロールすることになる。

実際、supersymmetry がない場合に complex scalar field に対して phase rotation $\phi \to \exp(i\zeta)\phi$ を考えても、質量項 $m^2|\phi|^2$ を禁止することはできない。ところが、supersymmetry がある場合、同じようなことを chiral superfield でやってみると：superpotential は Φ だけに依存し Φ^* は含まない。そうしないと $d^2\theta$ 積分して supersymmetric にならないからだ。従って、この場合、質量項を禁止することができ、対称性でスカラー場のポテンシャルをコントロールすることができる。

例えば standard model を考えると Higgs 場は、まだ見つかっていないが、唯一スカラー場だと考えられている。その (負の) 質量項を supersymmetry が (その破れを通して間接的に) コントロールしている可能性があると思われる。

共通講義の中で R パリティの話があったと思うが、supersymmetry の枠内で非常に特徴的な変換として、R 変換というのがある。先ほどの phase rotation では、Φ という superfield 全体を一つの位相で回したが、Φ の component で見ると、ϕ と ψ という scalar と fermion の両方が含まれている。つまり、ここまで、対応するス

カラー場とスピノル場を同位相で変換する phase 変換を扱っていたのであるが、二つの位相を独立に回す変換を考えることもできる。

それを何とか chiral superfield で書いてみると、ϕ にかかっていなくて ψ にかかっている θ を同時に回せばよい。要するに、次のようなものになる:

$$\Phi(\theta) \to \Phi'(\theta) = e^{iq\zeta}\Phi(e^{-i\zeta}\theta). \tag{3.18}$$

これを R 変換 ($U(1)_R$) と呼ぶ。R パリティは実はこの離散部分群であった。ちなみに、この名前は、導入された際に変換を表した文字からついたものである。

R 変換で不変な理論を作ろうとすると、θ を回すので、superpotential 自体は、次のように不変でないものを用いることになる:

$$W(\Phi'(\theta)) = e^{2i\zeta}W(\Phi(e^{-i\zeta}\theta)). \tag{3.19}$$

このような特定の superpotential に対して、理論が R 不変になる、という特徴的なことが起こる。これは、不変なポテンシャルから理論を構成する一般の内部対称性の場合と対照的な構造であり、supersymmetry が時空対称性であることを反映している。例えば、Φ の R charge を $q=2$ とすると、$W(\Phi)=\Lambda^2\Phi$ が不変な理論を与え、Φ^2 や Φ^3 の項に関しては R symmetry で禁止することが可能である。こういう非常に特徴的な変換があることにより、superpotential は強力に形をコントロールされるのである。

3.5 自発的な破れ

Supersymmetry は非常に強力な symmetry であるのだが、今のところ、実験的に観測される範囲では supersymmetry の直接的な証拠は見つかっていない。本当に supersymmetry が存在し、supercharge が linear に実現されているとすれば、fermion と boson が同じ質量でペアになってでてくるのだが、そういうものはないと考えられるので、何らかの形で supersymmetry は (実現しているとしても) 破れている必要がある。

Supercharge の性質「$H=Q^2$」から Q は、時間並進の生成子を導く。重力が存在する現実的な場合、時空間並進対称性が gauge 化されてしまうことになり、変換の生成子を状態ベクトルにかけるとゼロになるという constraint がつく。従って、Q をかけても消えるという constraint もつく。つまり、gauge 化された supersymmetry を考えなければばならない。Gauge symmetry は、あらわに破るとユニタリティを壊してしまうので、結局、現象論的に扱う場合には自発的な supersymmetry の破れを考えることになる。

前述の superpotential $W(\Phi)=\Lambda^2\Phi$ は Φ に関して linear だから、そのポテンシャルは constant になる。これがゼロでないと常に positive になり、supersymmetry は自発的に破れていることになる。しかしながら、このモデルの場合、重力を考慮しないとそもそも interaction が無い。(重力がある状況では inflation と関連する。)

相互作用のあるモデルを構成するには、例えば、Φ の他にさらに chiral superfield $X(\theta)$ と $Y(\theta)$ を増やして、次のようなものを考える:

$$W(\Phi, X, Y) = \Phi(\Lambda^2 - X^2) + MXY. \tag{3.20}$$

ここで、Λ と M は質量次元 1 を持った constant である。ポテンシャルを書いてみると：Φ だけの場合とまったく同様に、この superpotential からポテンシャルを求めるには、ϕ で微分したものを自乗、x で微分したものを自乗、y で微分したものを自乗し、その和という正定値な形で書くことができる:

$$V = |\Lambda^2 - x^2|^2 + |Mx|^2 + |2\phi x - My|^2. \tag{3.21}$$

ここで、$X(0) = x$、$Y(0) = y$、とした。ϕ で微分した項 $|\Lambda^2 - x^2|^2$ と y で微分した項 $|Mx|^2$ は、x がどんな値をとっても同時にゼロにはできないので、V はゼロにはならない。従って、このモデルでは supersymmetry が自発的に破れることになるのである。

3.6 スケール生成

いま見てきたように自発的に supersymmetry を破っておけば、supersymmetry を現象論的に考えることができる。

例えばその時に supersymmetry を Planck scale で破るということをすると、現象論的には supersymmetry が無い場合とほとんど変わらないような話になるわけである。ここでも effective theory という立場で、cutoff スケールとして Planck scale を考えると、それ以下では supersymmetry は実質的に無いと考えられる。だから Planck scale を見るような physics でないと supersymmetry の制約が効かないことになる。そのため effective theory で supersymmetry が見えないという立場では、そもそも無いのとほとんど同じなのである。

Planck scale の physics というものは、重力の非摂動効果をうまく扱わなければ、なかなか信頼できる情報を得られないと思われる。そこで、素粒子論的に supersymmetry を活かすためにはある程度低いスケールで破る必要がある。そういうスケールが出る仕組みとして頻繁にとりあげられるのが、既に前章でもふれた dimensional transmutation により生じる dynamical scale である。

NonSUSY でも、QCD の場合など実験的に分かるように、例えば quark の chiral symmetry の破れが起こるスケールはそのように出てきて、低いスケールを与える。そういう場合もあるのだが、一般的なモデルでどのようにスケールが出るか、きちんとコントロールしにくい。ところが supersymmetry のある場合は、もう少し信頼できる形でスケールがどう出るかということを解析できる状況があり、それを用いて、一般のモデルで任意のスケールを供給する具体例を与えることができる。そういうことが可能だと存在証明のようなことができるわけである。

後で具体的に用いるわけではないので詳細に踏み込むことは目的でないが、感じをつかんでおくため紹介すると、そういった解析から例えば次のような場合にスケールが出てくることが知られている。

一番小さなゲージ群として $SU(2)$ をとりあげる。それで、その doublet を 4 個考える。つまり 4 個の chiral superfield $Q_i^\alpha(\theta)$ がある状況を設定する。ここで $\alpha = 1, 2$ の方が gauge の添字である。以下しばらく、話はポテンシャル項を入れない gauge theory である。(Supersymmetric な gauge theory の話を何もしていないが、ここではあまり詳細は気にしないでも良い。普通の gauge theory に対応するような supersymmetric な理論があって、そこに matter として chiral superfield が入っているという漠然とした認識で十分である。)

QCD と同様に dynamical scale の condensation が期待されるが、それを gauge-invariant な量でみるのが便利である。Gauge-invariant な量 $\Phi_{ij} \sim Q_i^\alpha Q_j^\beta \epsilon_{\alpha\beta}$ を作ろうとした場合を考えてみる。$SU(2)$ で不変な反対称テンソル $\epsilon_{\alpha\beta}$ で添字を潰すと、i と j は各々1 から 4 まであってその反対称の組み合わせが 6 個あるわけなので、6 個の成分がある gauge-invariant な量を考えることになる。

この 6 個というのは：元々、Q_i という chiral superfield を 4 種類導入したので、その 4 つを回す $SU(4)$ という chiral symmetry がある。それは $SO(6)$ と同型であり、その 6 次元表現がこの Φ_{ij} である。これに condensation が起こるとすると、その条件は $SU(4) \simeq SO(6)$ 不変な形になる。この chiral symmetry は condensation が起こったあとは自発的に破れるわけだが、破れ方の条件としては不変な形になっているはずである。(実は doublet を 4 個導入したというのは、結果を知ってそうした。別に doublet は 2 個でも 6 個でもちゃんと gauge theory ができるわけで、ここで偶数個だけを考えているのは global anomaly があって奇数個にはできないからである。4 個というのは、その場合にちゃんと condense することが知られているので、今は 4 個入れたわけである。)

[質問]
Gauge-invariant な Φ_{ij} をなぜ導入したのか？
[返答]
Gauge theory の場合、その物理的な内容を判断するのに gauge invariant な operator でみるのが便利だからである。Gauge-dependent なもので見ても、同じ情報を引き出せるはずであるが、それはさらに慎重にやる必要がある。本質的に gauge によるような部分が出てしまっては物理的な内容を考えたことにはならないので、order parameter として gauge-invariant なものをとったのである。

続いて、採用した変数 Φ_{ij} で記述される理論の内容を知りたいのだが、そのための手法としては、最初に chiral Lagrangian でやったのと同様なアプローチになる。今、ポテンシャルが全く無いような massless supersymmetric QCD みたいなものを考えたわけである。そうすると Φ_{ij} というのは pion に相当するような gauge-invariant な自由度である。それの effective Lagrangian を symmetry から構成してみる。それでどういうことが言えるか考える。

そうすると、supersymmetric な場合も QCD と同じように asymptotically free で dynamical scale が出るのだが、そのスケールでの condensation が予期される。そこで condense するのは、この Φ_{ij} の長さである。Φ_{ij} というのは chiral symmetry $SO(6)$ の 6 元ベクトルなので、gauge interaction の dynamics で、そのベクトルの長さみたいなものがある一定の大きさに condense する。結果、自発的な $SO(6)$ symmetry の破れが起こると考えられる。もちろんこれは chiral Lagrangian の場合と同じで、証明できるわけではない。QCD の場合、実験的に見えるという一番強力なサポートに基づいて pion という変数をとった。Supersymmetric な場合、実験に頼ることはできないが、supersymmetry の制約を活用して、effective theory の理解に役立てることができるのである。

さて、superpotential 無しの gauge interaction の dynamics だけだと、6 元ベクトル Φ_{ij} が自発的にどういう方向に $SO(6)$ を破るか定まらない。しかし、具体的にスケールを出すという働きをするためには実は、ある特定の方向に condense するようにしておく必要がある。そういうテクニカルなことは、この場合、superpotential の助けを借りてできる。

今 Φ_{ij} というのは 6 個あるわけだが、それを Φ と Φ_a $(a = 1, \cdots, 5)$ とに手で分解する。また、ここで新たに gauge singlet の chiral superfield Z と Z^a、あわせて 6 個を導入する。この添字 a は、Φ_a のと同じ a で、1 から 5 までをはしる。これを使って、superpotential として $W(Q_i^\alpha, Z^a) = Z^a \Phi_a$ というものを作ることが可能である。

この superpotential によって何が起こるかというと：これからポテンシャルを作る時のやり方は Z^a で微分した (chiral superfield Z^a と scalar field $Z^a(0)$ などをこれ以降区別しないで記す) ものの自乗をとるので、要するに Φ_a の自乗和のようなものとなる。ポテンシャルの底では $\Phi_a = 0$ になるというわけである。一方で、6 個の Φ, Φ_a は、その長さがある dynamical scale に condense するのであった。それで両方を満たそうとすると、superpotential で決まっていない Φ という残った部分が dynamical scale に condense する。だから上述の superpotential が入った supersymmetric な gauge theory を考えると、$\Phi = \Lambda^2$ という dynamical scale を自在に出すことができるのである。

[質問]

場 Φ が condence してスケールが出る理由がよく分からなかった。

[返答]

非常に駆け足だったので、もう少し説明を加えよう。設定を振り返ると、gauge 群が $SU(2)$、doublet が 4 個 $Q_i(\theta)$ $(i = 1, \cdots, 4)$、そして superpotential はゼロという状況を考える。すると、supersymmetric gauge theory の dynamics で condensation が生じる。これは丁度 QCD で、chiral symmetry breaking を引き起こす

condensation に相当するものであると考えられる。

これを具体的にみるため、gauge-invariant に組んだ (Q_iQ_j) を order parameter として記述する。Doublet 4 つを回す flavor symmetry は、

$$SU(4) \simeq SO(6). \tag{3.22}$$

Gauge-invariant (Q_iQ_j) は flavor symmetry の 6 次元表現である。これを、次のように手で 1 個と 5 個に分解する。

$$(Q_iQ_j) \sim (\Phi, \Phi_a); \quad a = 1, \cdots, 5. \tag{3.23}$$

この (Φ, Φ_a) が condence する条件というのは、元々 $SO(6)$ という symmetry があるから、その symmetry にのっとって次のように $SO(6)$-invariant な条件で与えられる:

$$\Phi^2 + \Phi_a^2 = \Lambda^4. \tag{3.24}$$

すなわち、6 元ベクトルの長さが、dynamical scale Λ^2 になるという条件である。実際に真空期待値をとると、その方向で自発的に対称性が破れることになる。ただし、条件 (3.24) だけだとどの方向にも等方的で、どちらに condence するのか分からない。

実は、単なる (Q_iQ_j) の長さ $\epsilon^{ijkl}(Q_iQ_j)(Q_kQ_l)$ は恒等的にゼロであり、低エネルギー自由度 (Φ, Φ_a) での記述において初めて condensation が見える。従って、個別的にモデルを作る際には (Q_iQ_j) の長さそのものをスケールとして用いることはできず、ある特定の部分を condense させて、そのスケールを利用するということになる。そのようにするために、テクニカルにどのようにしたら良いのかというと、ここで superpotential を導入するのである。

今までは chiral superfield Q_i に対して全く superpotential を入れていなかった。すなわち、massless supersymmetric QCD のようなものだった。ここで次のように superpotential を導入する。

$$W = Z^a\Phi_a. \tag{3.25}$$

このような superpotential のもとで supersymmetric gauge theory を考える。すると、superpotential を $Z^a(0)$ で偏微分したものの自乗でポテンシャルを評価して、

$$V = |\Phi_a|^2 + \cdots. \tag{3.26}$$

Supersymmetry を破らないためには、Φ_a がゼロになれという要請になる。

これと (3.24) を併せると結局、両方の式を満たす帰結として次のようになるのである:

$$\langle\Phi\rangle = \Lambda^2. \tag{3.27}$$

このようにして gauge theory でスケールを供給することできるわけだが、もちろん他にも、何か自然にスケールが出る状況はあり得るだろう。いずれにせよ、少なくともここに与えた例によって、具体的に解析できる状況で、一般のモデルにおいて任意のスケールを自然に供給することが可能だと、存在証明のようなことができたことになる。

例えば、supersymmetry を自発的に破るような場合、手でスケールを入れるのではなく、何かしらの dynamics がスケールを出しているのだと思った方が自然であろう。基本的に例えば Planck scale で破ってしまうのではあまり実際的な意味はないので、階層的に小さなスケールにしたい。Gauge theory の dynamics で小さなスケールが出て、それで破れる、そういうものを構成したいと思うわけである。(あるいは、あとで考察する inflation の設定などにおいても、そういうことはある。)

これは最早ほとんど与えられているわけで、superpotential として、

$$W(\Phi_i^\alpha, Z^a, Z) = Z^a \Phi_a + \lambda Z \Phi \tag{3.28}$$

をとれば良い。要するに、ここまで説明した設定に加えて superpotential としてさらに $\lambda Z \Phi$ をつけておく。これは、Φ というものが固定したスケールならば、自発的に symmetry を破るような superpotential になるわけである。この λ が適当に小さければ、依然として Φ_a ではなく Φ が (主に)condense する方がエネルギー的には得になる。つまり、Φ が Λ^2 に condence するとして、ゲージ場や Q_i を積分しきって $W(Z) = \lambda\Lambda^2 Z$ という形で見ると、supersymmetry を自発的に破るようなポテンシャルが effective に実現される。

前節で与えた、より複雑な自発的破れのモデルなどについても、effective theory として実現させ、dynamical supersymmetry breaking が起こるようなモデルとみなすことが、一般にできるわけである。

これで、非常に駆け足だったが supersymmetry についての端的な紹介を終えることにする。結局、自然に

$$V = \left| \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi} \right|^2 \tag{3.29}$$

のようになることさえ納得できれば、以下では特に困ることはない。

3.7　超対称な法則へ

これまで、effective theory と supersymmetry について説明した。前章の effective theory の説明の中で、場の理論全体の空間のようなものを考えるんだという話をした。そのようなものの中の一部が、超対称理論であった。Supersymmetry の効能は、先ほど説明したような形でポテンシャルの形をコントロールするというものである。それを見ると、ポテンシャルがある特定の形をしているというのは不自然ではないと認識できるわけである。前節で、モデルの中に任意のスケールが出

せるという存在証明のようなものを与えたが、そのような意味で自然な形でいろいろなスケールが出てくる理論が supersymmetry のもとで実現する。もし、場の理論で構成された configuration space 全体に対する理論 (メタ理論とでも言うか) があるとすると、そういう配位が含まれているだろうという感触を得られる。

さらにここで、もう少し現象論的に考えて、supersymmetry というものが、どのように活躍する可能性があるかを考えてゆく。Supersymmetry はスカラー場をコントロールするので、着目するのはスカラーのポテンシャルである。前述したように、standard model にはスカラー場として Higgs 場があると考えられている。もちろんそれも supersymmetry の扱う範疇なのだが、ここではもう一つの方向として、standard model から少し離れて、inflaton について考えてみたい。つまり inflation に関係するスカラー場、そう言うようなものに対する supersymmetric physics を考えてゆきたいと思う。

だから inflationary vacua というものの話に移りたいのだが、ここで supersymmetry を考える前に、gauge symmetry の場合でどのような物理が考えられてきたか振り返ってみよう。

[gauge symmetry]		[supersymmetry]
① general relativity	↔	supergravity
② QED	↔	MSSM
quark , lepton strong , weak		dark matter inflation
③ gauge symmetry breaking	↔	dynamical SUSY breaking
deep inelastic scattering neutral current J/ψ		temperature fluctuations spectral index Higgs
④ standard model	↔	

図 3

Gauge symmetry(図 3 左) というのは、① 一般相対性理論を出発点として、前世紀の中ごろまでに育まれてきたわけである。もちろんそれ以前から電磁力学は

あったが、ゲージ理論としては一般相対論の後で ② QED が生まれてきたわけであり、それから quark、lepton、strong interaction、week interaction のような新しい要素が考察され、 ③ gauge symmetry とその自発的な破れというものを通して、一貫した理解が得られている。実験的要素としては、deep inelastic scattering、中性カレント、そして gauge symmetry と直接の関係はないが J/ψ (間接的には anomaly cancellation にきく) の観測などががあった。そのような流れ全体として、④ standard model (ここで言っているのは effective theory としての standard model なので、重力も effective theory として入っている) が出来ている。このようにして、gauge symmetry とその破れに基づいて全体像が描かれているわけである。

同じことがパラレルに supersymmetry の場合についてもできないかと考える (図 3 右)。もちろん supersymmetry というものが実在するかどうかは全く分からないのだから、適当なことを推測しているだけなのだが、作業仮説として設定しても良いだろう。

重力が入っていると、前述したように supersymmetry というものは gauge 化されている。逆に gauge 化された supersymmetry というものを考えると、自然に重力が入ることになり、 ① supergravity というものになる。Supergravity について詳しい説明をする余裕はないので、ここでは省略する。

それから QED というのは standard model から見ると非常に一部しか扱っていないわけだが、それに相当して：standard model があることは分かっているので、supersymmetry があるとするとそれを supersymmetric に拡張したものが、この全体の理論の中に含まれているだろうと考えられる。実際に、 ② minimal な超対称標準模型 (MSSM) がそういったものとして詳しく調べられている。

ここまでは共通認識があると思われる。それから先、quark、lepton に対しては dark matter が、strong interacton や weak interacton に対しては inflation の dynamics が、対応させてある。もちろんこれは、一つの候補としてあげることができるものである。Dark matter に関しては、R パリティに関連した、未だ確認されていない超対称粒子である可能性がある。Inflation を引き起こすスカラー場 inflaton、これも supersymmetry によって自然にコントロールされている可能性がある。

さらに、supersymmetry と関連した dynamics を理解する framework として、③ dynamical supersymmetry breaking については既に話をした。より一般に、effective theory に含まれるスケールは、もともと高エネルギー理論における何かしらの起源から出てくる。それで、dynamical というのは、具体的に effective theory の中ではっきり分かっているスケールの出方として言及したわけである。だからそういう意味で dynamical breaking をとりあげているのだが、もちろん可能性としては他の起源もあり得るだろう。いずれにせよ、supersymmetry とその破れによって、上述のような物理について具体的な理解が可能となるかも知れない。

理論的にはそのような状況なのだが、観測として期待されているものの例としては (後で簡単に説明する supersymmetric inflation に関して)、宇宙背景輻射の非

等方性、すなわち温度の揺らぎやその揺らぎのスケール依存性、そういうものが人工衛星の観測などで (もう既にだいぶ分かってきてはいるのだが) より詳しく分かると考えられている。

Higgs 場は supersymmetry(や inflation) と直接的には独立な要素なのだけれども (図 3 では Higgs が supersymmetry の方に入っているが、もちろん standard model にも入っている)、先ほども述べたように、supersymmetry がスカラー場をコントロールするという意味では間接的に、まだ見つかっていない inflaton や Higgs 場が、その物理を体現し得る。そういうわけで、このような対象について、ひょっとすると可能性としては、supersymmetry とその破れに基づいて一貫した認識が得られるかも知れないのである。

図 3 右の、standard model に対応するスペースが空白になっているが、あえて言うとすれば、何かしら ④ 標準超対称模型みたいなものが相当するかも知れない。もちろんこれは supersymmetry が発見されればのことである。特に、低エネルギーでの supersymmetry の発見が必要であろう。直接実験で観測できないところにある可能性は常にあるのだが、何か実験観測に基づいて標準と言い切るためには、そうとう強く支持する事象が求められる。しかしながら希望はゼロではない。こういう立場で supersymmetry を調べてゆくことができるだろう。(必要であればここで 3.1 節に戻ることができる。)

4 Inflationary Vacua

いよいよ、宇宙のインフレーションとその supersymmetry による実現の話に移ろう。(この点について説明不要であれば 4.8 節に進むことができる。)

4.1 Slow-roll inflation

Supersymmetry を考えると、非常に平らなポテンシャルが自然に実現したりする。ポテンシャルが平らであるというのは要するに、見かけが真空のエネルギーのように見えるということである。真空エネルギーの存在は、inflation を引き起こす要因となる。そのようなポテンシャルをもつスカラー場 inflaton を φ と書くことにする。

これ以後、重力スケール 2.4×10^{18}GeV (reduced Planck scale) を 1 にする単位系をとる。さらに、特に断らない限りこれが同時に effective theory における自然な cutoff であるということにして話を進める。もちろんこの二つは元来は全く別の概念で、cutoff scale は重力スケールと全然別のところにあっても良いのだが、簡単のために同じものとして違いを気にせず扱ってゆこう。

そこで、ポテンシャルが平らであるという条件を書くと、傾きの大きさを表す微分が真空のエネルギーに比べて小さい

$$\left|\frac{V'(\varphi)}{V(\varphi)}\right| \quad < \quad 1 \tag{4.1}$$

ということになる。この大小は今 reduced Planck scale と比較してのことで、重力による量子補正などを考慮すると、本当に真平らなポテンシャルはありそうもない。多少の傾きがあると、そこをスカラー場の値がゆっくりと変化して転がっていく。ただし、ゆっくりなのでエネルギーとしてはほとんど一定である。その結果、宇宙の inflation(加速膨張) が起こるというシナリオが考えられ、slow-roll inflation と呼ばれている。ちなみに、これはまだ inflation 一般の話であり、supersymmetry と直接の関連があるわけではない。

このように平らだとみなせるポテンシャルは、具体的にどのような形になるだろうか。簡単のためポテンシャルとして、次のような単項式を考えてみる ($\varphi > 0, \lambda > 0$):

$$V(\varphi) \quad = \quad \lambda\varphi^n. \tag{4.2}$$

これも n が大きいといわゆる繰り込み不可能になるので、例によって effective theory と考える (そもそも重力をそう扱っている)。そうすると平らであるならば、要するに微分が小さいという条件を書いてみると、φ が n より大きい:

$$\varphi \quad > \quad n. \tag{4.3}$$

いま単位が reduced Planck scale なので、これは、その n 倍よりも大きい領域では非常に平らなポテンシャルとみなすことができるということを意味する。

それで effective theory としては、無論 V の値そのものが重力スケールをこえていると、ほとんど信用できない。なぜなら inflation を古典重力で近似して考えているので、effective theory の第 0 近似を考えるというような扱いをしているからである。だから φ が n より大きくても、V は 1 より小さい必要がある。従って λ が 1 よりかなり小さいということになる ($\lambda \ll 1$)。

さらに、effective theory としての扱いに信頼性があるかどうかという意味で、φ が cutoff scale の何倍も大きいというのには、少々抵抗があるように思われる。例えば、ここでは単項式で考えているが、ベキ展開などでより一般的に考えると、cutoff scale より大きいところでは補正が大きくなってしまうことになる。それゆえ、effective theory に基づく近似で扱える範囲をこえていると考えられる。信頼性を持った扱いが具体的にできているかどうか疑わしい。一方、原理的に考えれば V(エネルギー自体) が重力スケールより十分小さければ、重力の effective theory としては扱って良い範疇であろう。そのような可能性として、n が 1 以上だと φ は重力スケールより大きい、すなわち large-field type の inflation になる。ただ、具体的に現象論的な model building という観点からすると扱いにくい。作ってみても詳細については信頼性に欠けると思われる。

実はもう 1 つ、field が小さい $\varphi \lesssim 1$ でもポテンシャルが平らであるものがあり、small-field type の inflation を与える。それは $n = 0$ の場合で、V は constant である:

$$V(\varphi) \quad = \quad \lambda. \tag{4.4}$$

ポテンシャルエネルギーは φ にはよらない。このような状況であれば small field であっても、定義によって平らであることがわかる。この際、λ が十分小さいというのは、単にそのエネルギーが小さいので、それは effective theory として良い近似で扱えるということである。この場合には effective theory という立場からすれば収まりが良い感じになっている。

大まかに言えば slow-roll inflation というのには、こういう二つのタイプがあるわけである。

4.2 Supersymmetric inflation

具体的に、small-field type を扱うことに移る。そこで非常に平らなポテンシャルでエネルギーほぼ一定と思えるものを与えたいのだが、そういうものは supersymmetry のもとでは容易に作ることができる。ここで、ϕ を chiral superfield とし、v^2 は適当に小さなスケールとする。それを用いて superpotential を作ると、次のようなものが自然に得られる:

$$W \quad = \quad v^2\phi. \tag{4.5}$$

これから導かれるポテンシャルは、ϕ で微分して絶対値の自乗だから (Kähler potential に effective theory としての補正がくるので、正確には、多少ずれるはずだ

が)、v の 4 乗でほとんど constant になると思われる:

$$V \simeq v^4. \tag{4.6}$$

ただし、このままだとこれは結局 supersymmetry を破るようなポテンシャルになっていて、真空エネルギーはなくならない。(これはちょうど前章で考えた状況であった。)

一方 inflation は、いったん起こったあとに終わる必要がある。現在観測されている宇宙は空間的に非常に平らでほとんど一様で大域的にはむらがない。その原因として、過去に空間が急速に膨張して引き伸ばされ、平らで一様等方になった、このようなシナリオが inflation であり、それが終わった後に標準的な Friedmann phase に入ったと考える。すなわち、この真空のエネルギーは、最後には消えてくれないと困るわけである。Slow-roll inflation という立場から言うと、スカラー場が転がって行った先で、そのエネルギーが無くなって熱エネルギーを伴う普通の物質を作るようになってほしい。

そうするためには、もし場を ϕ しか使わないとするなら、$v^2\phi$ の項の他に、例えば ϕ^n みたいなものを入れることができる:

$$W = v^2\phi - \phi^n. \tag{4.7}$$

そうすると、ポテンシャルは例によって W の ϕ 微分の絶対値の自乗なので、

$$V \simeq |v^2 - n\phi^{n-1}|^2 \tag{4.8}$$

となる。これは、ϕ が小さな値のとき、つまり原点付近ではほとんど一定である(次節参照)。一方、ϕ が大きくなってくるとゼロ点があり、そこが停留値になる。

また、他に新たな場 χ を入れて真空エネルギーを最終的に打ち消そうと思うと、例えば次のような形を使えば良い:

$$W = \phi(v^2 - \chi^n), \tag{4.9}$$

$$V \simeq |v^2 - \chi^n|^2 + |n\phi\chi^{n-1}|^2. \tag{4.10}$$

この場合、$v^2\phi$ という部分は今までと同じ形なので、ここが大体一定のエネルギーを出すと考えられる。最終的には χ^n が v^2 に condense して真空エネルギーを消してしまう (4.5 節参照)。

このように見てくると、背後に基本的な理論があり、それから実現するような色々な場の理論というものを考えたときに、inflation が起こるような場の理論が与えられるということは、supersymmetry がある領域では不思議なことではないと思われる。

4.3 Supergravity corrections

今まで、ポテンシャルというのは superpotntial の微分の絶対値自乗だとしてきた。しかしこれは、ゲージ化されていない rigid な supersymmetry の場合である。ところがここでは inflation を考えているので、もちろん重力が入っている。従って本当は、supergravity で考えなければならない。

結果を天下りに持ってきて書くが、supergravity においてポテンシャルは、次のように補正される:

$$V \;=\; e^K\left\{\left(\frac{\partial^2 K}{\partial\phi\partial\phi^*}\right)^{-1}|F|^2 \;-\; 3|W|^2\right\}. \tag{4.11}$$

ここで、補助場 F は次のように superpotential の微分を含んだ形である:

$$F \;=\; \frac{\partial W}{\partial\phi} \;+\; \frac{\partial K}{\partial\phi}W. \tag{4.12}$$

また、K というのは Kähler potential であり、$d\theta^4$ 積分を行なうことにより kinetic term になる実関数である。従って、繰り込み可能な tree-level では $|\phi|^2$ だけだが、いま重力を含む effective theory なので一般に、それ以外の高次の項も含まれる:

$$K \;=\; |\phi|^2 \;+\; \cdots. \tag{4.13}$$

つまり「$\cdots$」と書いてあるが、それによる補正も受けるわけである。

Supergravity において特徴的なのは、ポテンシャルに negative な項 $-3|W|^2$ が入っていることである。Rigid supersymmetry の場合には、Hamiltonian が本質的には Q^2 という関係だったので V というのは負にならなかった (もっとも、Hamiltonian の値自体は定数ずらしても物理的影響がないので、この場合、そもそも正負にそれほど意味はない) のだが、今は重力があるので大雑把な言い方をすると引力のために negative な項が出うるのである。これはありがたい。これが無いとすると、現象論的に supersymmetry は実際には破れていると考えられるので、真空のエネルギーがそのスケールで positive になってしまう。一方、後で話す話題だが、cosmological constant との関係で、観測的にそんな巨大な真空のエネルギーは無いということが分かっている。それを打ち消す効果がこの $-3|W|^2$ から得られるのである。

これは自然な帰結で、仮に supersymmetry が無い状況、つまり supersymmetry が破れた後の状況に着目すると：その場合、effective に supersymmetry が無い gravity で記述できるはずで、その際、真空エネルギーがゼロになってはならないとか負になってはいけないという理由はない。破れた後はそのような効果があってしかるべきだと effective theory の立場から期待することができる。そして実際にそうなっている。そのような背景のもと、このような補正がポテンシャルにつくのである。

具体的にどんな感じの補正が supergravity の枠内でつくかということを少し例で考えてみる。先ほどの ϕ のみの superpotential の形の例で $n = 5$ の場合をとりあげよう:

$$W = v^2\phi - \frac{\lambda}{5}\phi^5. \tag{4.14}$$

ここで、ϕ の 5 乗の 5 という数にあまり深い意味はない。Kähler potential としては、$|\phi|^2$ 項の他に $|\phi|^4$ の項もとりあげる:

$$K = |\phi|^2 + \frac{\kappa}{4}|\phi|^4 + \cdots. \tag{4.15}$$

今まで通り、reduced Planck scale を 1 にとり、同時に実質これが cutoff の effective theory だと考える。質量次元をあわせるため、$|\phi|^4$ の項の分母にはその cutoff scale がある。そう思うと、κ というのはオーダーが 1 の数だろうというのが自然な期待であろう。

そのような状況で、前述の supergravity でのポテンシャルの形にこれを入れて計算してみよう。場 ϕ の原点付近、要するに slow-roll inflation が起こりそうな場所で見ると、ポテンシャルは次のようになる:

$$V \simeq \left(v^2 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4\right)^2 - \frac{\kappa}{2}v^4\varphi^2. \tag{4.16}$$

ここで、φ というのは、chiral superfield ϕ のスカラー成分から real なところを抜き出してきたものである:

$$\varphi \equiv \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\,\phi. \tag{4.17}$$

これから分かるように、Kähler potential の高次の補正をとりいれた効果は、式 (4.16) の第 2 項の φ^2 という形で出てきている。係数は v^4 であるから、要するに真空エネルギーと同じオーダーである。結局、inflation が起こるようなほとんど平らなポテンシャルではあるが、少し曲がっているのである。どのくらい曲がっているかということに対してこの κ が効いてくる。もともと κ は、Kähler potential の中で reduced Planck scale で抑えられている高次の項であった。その種の Planck scale physics を effective に捉えているような項が含まれている。つまり、重力に関係する inflation のような dynamics でみると、このように重力 cutoff で抑えられた効果が正に効いてくるという可能性があるのである。

4.4 Quantum fluctuations

これまでポテンシャルが大体平らだということで済ませてきたが、もう少し正確な条件として、slow-roll parameter ϵ と η を使う、slow-roll condition と呼ばれるものが存在する。

$$\epsilon \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{V'}{V}\right)^2, \quad \eta \equiv \frac{V''}{V}, \tag{4.18}$$

これらの slow-roll parameter が共に 1 より小さい、

$$\epsilon, \quad |\eta| \quad < \quad 1, \tag{4.19}$$

これが slow-roll condition である。ここで、例によって重力スケールを 1 にする単位系で見ている。このような条件で運動方程式を扱うと、ほとんど一定の真空エネルギー状態がゆっくり変化するとみなして良いので、slow-roll inflation が起こると考えられるのである。

さて、inflation というのは大まかには、空間を急激に引き伸ばして、平らで一様等方にしてしまうものである。しかし、現実の宇宙というのは本当に一様等方では全くない。実際にはむらがあって、銀河があったり、我々が存在したりする。従って、inflation が起こって完全に一様等方になってしまっては、むしろ困るわけである。一様等方からずれた構造、揺らぎが必要である。

ところが、inflation の強力なところは、そのような構造形成のメカニズムすらも内包していると考えられることである。それはどういうことかというと：Inflation が起こっている最中というのは、空間が曲がっていて、急速に膨張している。そのような曲がった空間上で、inflaton というスカラー場を考え、曲がった空間上での場の量子論を考える。そうすると、スカラー場というのは不確定性関係で量子論的に小さく揺らぐと考えられる。従って、ほとんど一様な値をもってゆっくり転がっているけれども、場所によって値が少しずつ大きかったり小さかったりする。すなわち、揺らいでいて、それが空間的に引き伸ばされるわけである。そして終わった後も、inflation が起こっていたということによる量子論的な揺らぎの効果が残っていて、それが構造形成の種になったと考えられる。つまり、inflation が終わった後に、ある程度物質の密度に濃淡があると、重力によって濃いところはどんどん濃くなる。そのようにして、銀河ができてくると考えられているのである。

逆に、いま現在銀河があるわけだが、時間をどんどんさかのぼっていってみる。すると、物質としては濃いところと薄いところがあった。それをさらに inflation の最中にまでさかのぼっていくと、最終的には濃い薄いというのは量子論的な揺らぎの大きさにまで縮んでしまう。(実際には、これの完全な説明には困る。宇宙の構造、ありとあらゆるものが、もともと量子論的な不確定性だとする主張である。要するに、我々は量子効果をまさに見ているということなので、宇宙の観測について量子論的な考察を加える必要があるように思われる。ここではその点の追求は避けておかざるを得ない。)

そうするとその揺らぎにより、宇宙膨張の速さもばらつき、その結果、宇宙にあるマイクロ波の輻射、すなわち約 2.7K の背景輻射が、観測する方向によって 10^{-5}K ぐらい高かったり低かったりする。それは、元々さかのぼると、物質に濃淡があったからと考えるわけである。濃淡があって、それを種に銀河が出来たとする考えとつじつまが合っている。

観測されている温度 $10^{-5}K$ ぐらいの揺らぎの様子は、slow-roll inflation のモデルの言葉でいうと、inflaton ポテンシャルの高さや傾きで決まってくることにな

る。その slow-roll inflation を起こしているポテンシャルの形に、例えば、次のような条件がつく:

$$V^{\frac{1}{4}}/\epsilon^{\frac{1}{4}} \quad \simeq \quad 0.027 \quad \simeq \quad 6.7 \times 10^{16} \ \ \mathrm{GeV}. \tag{4.20}$$

これは、現在の horizon に対応する φ の値で成り立つ。例えば、前節のモデルに対しては、

$$v \quad \sim \quad 10^{-2}\sqrt{\kappa}e^{-30\kappa} \tag{4.21}$$

となる。

さらに、背景輻射の揺らぎを見るとき、どのくらいの空間スケールでの揺らぎを観測するかによって、揺らぎの大きさは変わってくる。つまり宇宙の色々な方向を見るとき、どのような波長で揺らぎを観測するかによって、様々な振幅になり得るのである。その変化を特徴付ける index は spectral index と呼ばれる:

$$n_s \quad \simeq \quad 1 \quad - \quad 6\epsilon \quad + \quad 2\eta \quad \simeq \quad 1 \quad - \quad 2\kappa. \tag{4.22}$$

大まかにいうと n_s が 1 のときに、どのようなスケールで観測しても揺らぎの大きさは変わらない。実際、観測から n_s は大体 1 である。まだあまり精度の良い観測ではないが、このようなことが分かってきて、将来的には、もっと詳細な観測結果が得られると思われる。このようのなものも、前述した slow-roll parameter、つまりポテンシャルの形に関係している。従って、ポテンシャルの形の情報を与えることになる。前節の例の場合では、ポテンシャルがどのぐらい曲がっているかを表す κ という量を見て、例えばそれが 0.1 ぐらいであったとすると、n_s が 1 近くであり、観測からの情報に一致するのである。

もう少し一般的に考えると、slow-roll parameter ϵ は元々、slow-roll inflation が起こるためには 1 以下の小さな数でなければならなかった。従って、式 (4.20) より、V という inflation が起こる energy scale は、いわゆる GUT scale 程度以下になる。この大きさが揺らぎの大きさを決める。そもそも effective theory としては Planck scale よりはオーダーが小さくなければうまく扱えないが、あまり小さすぎると inflation による揺らぎを元に銀河をつくることができなくなので、適当な大きさに真空のエネルギーを出すような inflation の sector が存在するという picture を考えるのである。

4.5 具体例の検討

参考のため、さらに別の具体例でも解析を見ておくことにする。今度は別々の場で真空のエネルギーを作り、inflation を終わらせる。この様なタイプを考えてみよう:

$$W \quad = \quad \Lambda^2 Z(\lambda' \quad - \quad \lambda''\phi^2) \tag{4.23}$$

$$\equiv \quad v^2 Z(1 \quad - \quad g\phi^2). \tag{4.24}$$

ここで、Z と ϕ が chiral superfield で、λ', λ'' および g は coupling である。Λ^2 は何らかの起源 (次節参照) で出てきた、重力スケールに比べて小さなスケールである。引き続き reduced Planck scale を 1 にする単位系を使っているので、Λ^2 は 1 よりオーダーとして小さい。少し書き直し、v^2 という風に coupling をとり込んで、真空のエネルギーを前述の表記と一致させた。このような superpotential を考える。

次に Kähler potential であるが、以下のようなものを自然と考える:

$$K \;=\; |Z|^2 \;+\; |\phi|^2 \;+\; k_1|Z|^2|\phi|^2 \;-\; \frac{k_2}{4}|Z|^4 \;+\; \cdots. \tag{4.25}$$

最初に自乗の項があるが、今度は Z と ϕ それぞれについてのものである。それとその mixing term や、それ自身の 4 乗の形での 4 次の項がある。ここで、k_1 や k_2 は適当にオーダー 1 と想定されるような coupling である。

このように superpotential と Kähler potential を与えられると、これらで supergravity におけるポテンシャルが求められる。それは、場が一般の多成分の場合に拡張した次のような形である:

$$V \;=\; e^K(K_{AB}F^AF^{B*} \;-\; 3|W|^2). \tag{4.26}$$

ここで、F は本質的に一成分の場合と同じで、大体 superpotential の微分である:

$$F^A \;\equiv\; \frac{\partial W}{\partial\phi_A} \;+\; \frac{\partial K}{\partial\phi_A}W. \tag{4.27}$$

(4.26) で K_{AB} という添字が付いたものがあるが、これは、Kähler potential を 2 階偏微分した

$$\frac{\partial^2 K}{\partial\phi_A\partial\phi_B^*}, \tag{4.28}$$

これの逆行列をとったものである。従って、field が 1 個しかない場合は、単に逆数になっていた。

このように成分がたくさんあると、ポテンシャルの形などを見るのはだんだんやっかいになってくるわけだが、今の場合は比較的に簡単である。なぜなら supergravity のポテンシャルから、W の微分と W 自体の値が共にゼロだと、そこはポテンシャルの停留値であるということが計算によりわかる:

$$\frac{\partial W}{\partial\phi_A} \;=\; W \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial V}{\partial\phi_A} \;=\; V \;=\; 0. \tag{4.29}$$

あるいはもっと一般には、F がゼロであればそこが停留値になる。そして、gravity が入っていない ridid な supersymmetry のときに、F がゼロなら V がゼロなので、そこが真空になっているのと同じく、supergravity を考えているとき、F がゼロかどうかということがやはり supersymmetry が自発的に破れているかどうかという order parameter になるのである。形は多少かわったのだが、このような rigid supersymmetry と共通する性質を、実は保っているということが分かる。

ポテンシャルにそのような性質があるので、どのような所が真空であるのか、また、どのような形であるのかということを、割とややこしいポテンシャルであるのに、すぐに見てとることができるのである。そこで、実際に式 (4.24) の superpotential を使ってこれを見てみると、superpotential の偏微分は次の形になっている:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial Z} &= v^2(1 - g\phi^2), &(4.30)\\
\frac{\partial W}{\partial \phi} &= -2v^2 gZ\phi. &(4.31)
\end{aligned}
$$

これがゼロになるところを探す。すると、Z がゼロで ϕ の方が適当に condense したところで満たされる。Z がゼロだと、superpotential の値もゼロになるので、前に述べたようにそこが停留値になるという条件を満たしている。すなわち、次のような真空期待値が得られる:

$$
\begin{aligned}
\langle Z \rangle &= 0, &(4.32)\\
\langle \phi \rangle &= \pm\frac{1}{\sqrt{g}}. &(4.33)
\end{aligned}
$$

一方、平らな原点付近での形はどうかというと、具体的に前に述べた superpotential と Kähler potential を supergravity でのポテンシャルの形に入れて、原点付近でベキ展開してみれば良いわけである:

$$
\begin{aligned}
V &\simeq v^4|1 - g\phi^2|^2 + (1 - k_1)v^4|\phi|^2 + k_2 v^4|Z|^2 &(4.34)\\
&\simeq v^4 - \frac{\kappa}{2}v^4\varphi^2. &(4.35)
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
\kappa &\equiv 2g + k_1 - 1, &(4.36)\\
\varphi &\equiv \sqrt{2}\mathrm{Re}\phi. &(4.37)
\end{aligned}
$$

また、Z はゼロ付近であるとして固定して考えた。Z が大きいところでも平らになったりして、そちらで inflation を起こす (hybrid inflation) こともあり得るのだが、ここでは簡略化して解析するために Z は効かないことにした。

以上のような考察から、ϕ のみが転がって inflation を起こすような状況をとると結局、真空のエネルギーとして主に v^4 という値が出てきて、そして、少し平らではないという効果が φ^2 の形として出てきている。今度の場合、平らではないという効果を決めているのは、Kähler potential の coupling もあるが、それ以外の coupling も効いている。それぞれが自然にオーダー 1 とすると、全体としてもオーダー 1 であると期待される。

場 φ を inflaton とする slow-roll inflation が起こるとすれば、原点付近から転がって、その間に宇宙が急速に膨張してゆく。やはり、supersymmetry がある状況ではそういうことが起こっても不思議ではないわけである。

4.6 Dynamical inflation

ここまで、supersymmetric な場合において、どのように inflaton のポテンシャルというものが出てきうるかということに触れた。その中で現れた v^2 、つまり真空エネルギーの大きさを決めるスケールとはどういうものなのであろうか。そもそも effective theory に基づいた解析が可能な設定として、重力スケールに比べてオーダーが小さいような真空のエネルギーがあって、Einstein gravity で扱える範疇で inflation が起こることを想定している。重力スケールが effective theory における cutoff だとすると、それに比べて何か小さなスケールが自然に生じて、そのスケールが inflation を引き起こす真空をエネルギーを出していると考えたい。

そういう状況が実現する一つの具体的な要因として、ダイナミカルに出るスケールについて前章で既に話をしてあった。詳細は別にしても、そういうことが実際に起こり得るという認識に基づけば、場の理論のモデルとして、ダイナミカルにスケールが出て、その結果 inflation が起こるというシナリオに導かれる。すなわち、dynamical inflation ということである。似たような発想で考えた前章での例としては、ダイナミカルにスケールが出て、そのスケールで supersymmetry が自発的に破れるというシナリオをとりあげたわけであるが、考察の対象は supersymmetry breaking に限ったことではなく、inflation でも良かったのである。具体的なモデルの構成も同様にできる。

前節までの具体例にそって、inflation のポテンシャルとして今、small-field type を考えてみる:

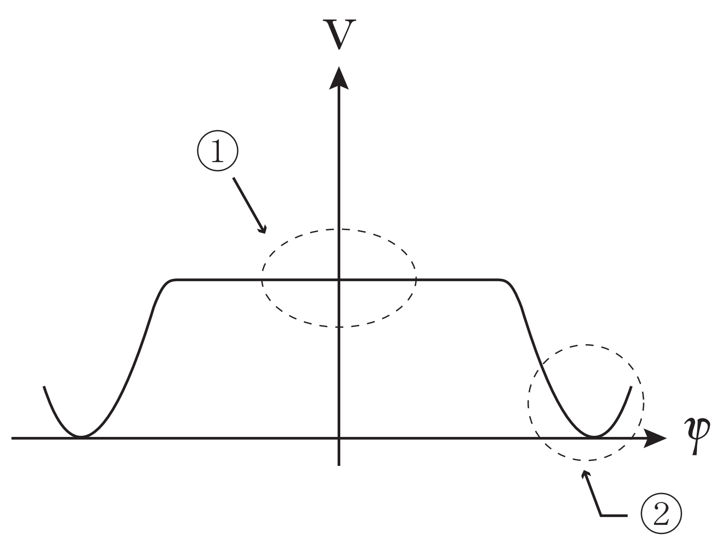

図 4

図 4 ① 付近にスカラー場の値があるときに、宇宙が加速膨張しつつ、φ の値はだんだん転がっていき、転がった方向 (例えば右側) にある底 (図 4 ②) で宇宙が加

熱して、big bang が起こる。そういう状況を考えたわけであるが、このときの v^4 というポテンシャルの ① での高さは dimensional transmutation を通してダイナミカルに出てくる、それゆえに自然と、重力スケールから見て階層的に小さな真空エネルギーを供給すると理解できる。

[質問]
Supersymmetric inflation model での superpartner の質量の予想などは？
[返答]
モデルによる話しなので設定しだいであるが、大まかには：いま supersymmetry のある inflation の状況を考え、inflaton のポテンシャルを次のようにかいてみる:

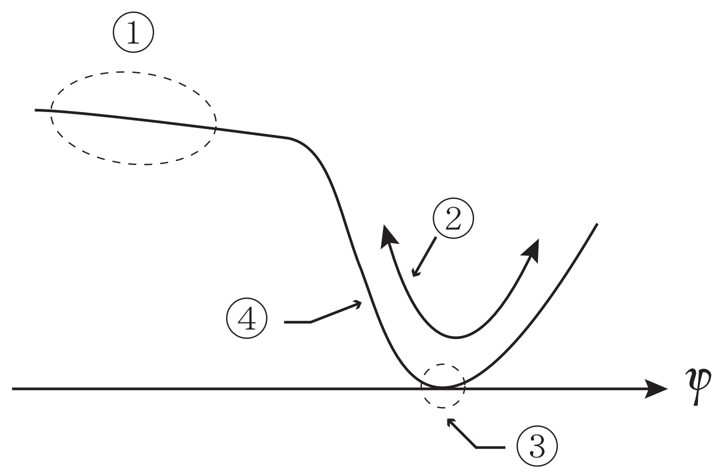

図 5

そうすると、大体平らな所 (図 5 ①) で inflation が起こり、inflation が終わって ② のように振動しつつ熱をつくり、big bang が起こる。底 (図 5 ③) に相当するのが現在の真空で、そこでは supersymmetry が破れている。

スカラー場 inflaton のこの真空での質量というのは、この底での曲率で表され、モデルによるが、それ以前の平らな部分での inflation scale は、既に説明したように、GUT scale から多少小さい程度で、自然に ④ の部分でつなぐとある程度大きな値が期待される。

真空で supersymmetry がどのぐらい破れているかというと、実験的には weak scale ぐらいでは superpartner が発見されていないので、最低そのぐらいのエネルギーでは supersymmetry が破れていると思われる。そうだとすると、それに対応して、inflaton と inflatino (inflaton の superpartner) の質量のずれも大雑把に同程度と予想されるが、これは元々の inflation のスケールからすればかなり小さいので、この破れの効果は inflation 自体にはあまり効かないだろうと思われる。

4.7 Inflation が起こるためには

ここまで、supersymmetric な inflation のモデル、そのスケールがダイナミカルに出ていれば dynamical inflation というような話をしてきた。しかし、これまでで触れなかったことがある。Slow-roll inflation が起こる為にはそもそも、inflaton φ が何かしらある一定の値を持って、一定の真空エネルギーを生み出している必要があった。空間の色々なところで φ が色々な値をとってしまうと、エネルギーが色々な値をとってしまう。すなわち、一定の cosmological constant 的な真空エネルギーとみなせず、inflation が起こらない、ということになってしまうわけである。

どのぐらいの範囲で一定のエネルギーであれば inflation が起こるのか。もちろん宇宙全体で一定のエネルギーならば良いが、そこまで強い要請は必要ではない。関係する量として Hubble parameter H というものが登場する。これは、距離が遠くなればなるほど速いスピードで銀河が遠ざかっているという状況を表すときの比例係数である:

$$\dot{r} = Hr. \tag{4.38}$$

そうすると、Hubble radius というものは、その遠ざかる速さが 1 である距離で、

$$1 = Hr_{_H}, \tag{4.39}$$

$$r_{_H} = H^{-1}. \tag{4.40}$$

1 というのは、要するに光速で遠ざかっていることを意味する。光速以上で遠ざかっているところとは、因果的に作用しないわけで、従って、$r_{_H}$ の大きさが、Einstein 方程式で扱っている範囲であるということになる。

この Hubble parameter は、Einstein 方程式を使って、真空のエネルギーしかない場合を考えると、次のようになっている:

$$H^2 = \frac{V}{3} = \frac{v^4}{3}, \tag{4.41}$$

$$H = \frac{v^2}{\sqrt{3}}. \tag{4.42}$$

従って、先ほどの inflation のように真空エネルギーがあると、Hubble radius はおおよそ $1/v^2$ になる。前述したように、v が inflation を引き起こしているスケールだとすると、重力スケールよりも適当にオーダーが小さいと考えているので、その inverse ということは、重力スケールよりも階層的に大きい。

だから、inflation が起これば非常に一様等方な宇宙が実現できるわけだが、そもそもそれが起こるためには、重力スケールに比べて桁違いに大きい領域で φ が一定の値を持っていなければならない。つまり、スタートの時点である程度一様等方でないと真空のエネルギーとみなせないので、inflation は起こらないのである。このように、出発点と結果がある意味同じになってしまうということで、もう少しさかのぼって考える必要がある。

先ほども時間をさかのぼる話をしたが、単純にさかのぼってゆくと温度は上昇する。そのようにして inflationary phase に入ると、そこでいったん急速収縮することになる。最終的には、Einstein 方程式を単純に追っていくと、singularity にぶつかる。つまり、宇宙に最初があるというようなことを考えることになる。宇宙が Planck scale ぐらいのときにはもちろん、Einstein gravity というのは良い近似になっているとは到底考えられなくて、時間とエネルギーの不確定性関係を考えると、

$$\Delta t \cdot \Delta E \quad \sim \quad 1. \tag{4.43}$$

時間が Planck 時間ぐらいとすれば、エネルギーも Planck energy ぐらいで非常に揺らいでいる。

このエネルギーは、仮に inflaton しか存在しない状況を考えると、その inflaton の運動エネルギーやポテンシャルエネルギーになっている:

$$\Delta E \quad \sim \quad \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 \quad + \quad V(\varphi). \tag{4.44}$$

そこでその φ というのがどのような値をとっているかというと、いま ΔE というのは Planck energy ぐらいで、inflation を起こすためにはこの V はそれより適当に小さなスケールで平らでなければならない。この ΔE の energy scale ではほとんどポテンシャルはきかないと考えてよい。だから、むしろ初期状態として期待されるのは、非常に chaotic な状態、つまり φ が、場所により様々な値をとると考えられる。

従って、slow-roll inflation を引き起こすような非常に広い範囲で一様な値をとる φ を実現するためには、さらに宇宙の初期で、宇宙を膨らまし始める inflation が必要になる。それを primary inflation と呼ぶ。

人工衛星観測などで我々が見ているのは、ある決まった GUT scale 以下のエネルギーで起きた inflation であり、それが観測されている背景輻射の揺らぎを作っていると思われる。しかしそれとは直接関係ない、Planck scale 近くから始まるような別の inflation のことを primary inflation と呼んでいるのである。対して、我々が見ている銀河をつくる構造形成の種になるような揺らぎを生む inflation を、primordial inflation という。

そうすると primary inflation というのは、例えば large-field inflation のようなものであり、Planck scale を超えたような field で inflation を起こすようなものであろう。宇宙が最初 primary inflation を起こしたとすると、それによってある程度宇宙が一様になり、そしてたまたまその一様になったところで primordial inflaton が適当な値をとっていれば、そこで primordial inflation が起こる。その primordial inflation (の名残り) を我々が見ている。このように、何段階も inflation を起こすシナリオというのを考えることになるのである。

これで大体 supersymmetric な inflation については終わる。より詳しくは、文献 [D.H. Lyth and A. Riotto, arXiv:hep-ph/9807278 など] を参照されたい。

4.8 Dilaton 固定と真空選択

これまで何度か、dimensional transmutation でスケールが出ると述べていたが、本当は、その元になる coupling の大きさについても、さらに由来を探っておくことが望まれる。例えば gauge coupling というのは、そもそも variable でダイナミカルに大きさが決まっているだろうと考えたい。これは、もともと手でパラメータを入れてやるのでは、おおもとの理論という感じにならないからで、できれば coupling のようなものは、全部力学的に決まっていて欲しいわけである。

実際、例えば摂動論的な弦理論などはそうなっている。そこでは gauge coupling は、dilaton と呼ばれる場の真空期待値がその大きさを決めている。具体的に Φ という chiral superfield で dilaton を表し、Φ が gauge field の kinetic term にかかっていて、その真空期待値が coupling の大きさを決めている状況を想定する。すると、真空期待値 (正確には、その real part) は gauge coupling の自乗分の 1 である:

$$\langle \Phi \rangle \quad = \quad \frac{1}{g^2}. \tag{4.45}$$

そのときには、このダイナミカルに出るスケール

$$e^{-8\pi^2 \langle \Phi \rangle} \quad = \quad e^{-\frac{8\pi^2}{g^2}} \tag{4.46}$$

も、dilaton の期待値で決まっている。そこで、dilaton の値を決めるためには、dilaton の値を固定するようなポテンシャルのようなものを考えることになる:

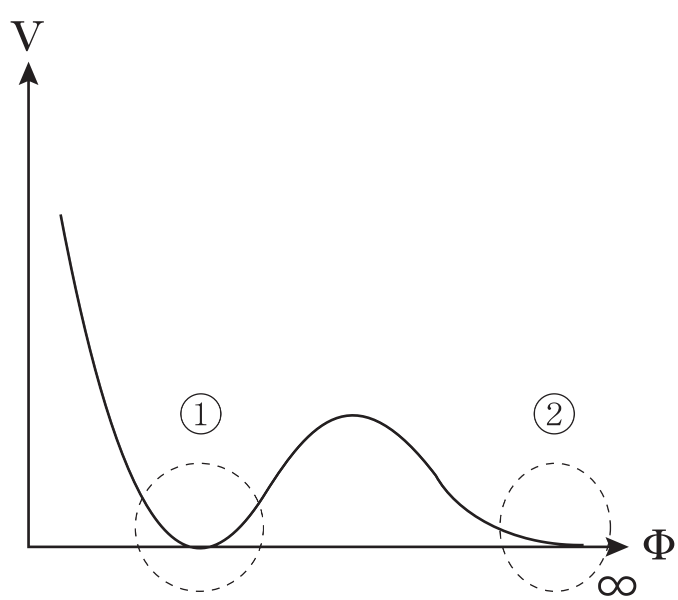

図 6

具体的に詳細な説明はしないが、場の理論的なモデルとして、このようなポテンシャルをつくることができる。ところで、その dilaton の真空期待値が無限大になるところは、gauge coupling がゼロになるところで、free な、interaction しない理論になる。そういう interaction しないところでは、それ以上何も起こらないので、このポテンシャルを持ち上げることはできない。従って、こういうポテンシャルなどを場の理論的に考えると、常にこういう何か runaway type というのか、このような free な理論の存在が許される。Free な理論を禁じるような consistency というのは考えにくいので、そのような形になっているのが自然であると思われる。

より一般に、effective theory のところで言った場の理論の全体の空間のようなものを考えてみる。そこから理論をダイナミクスで選ぶというようなシナリオの可能性があると言ったが、この dilaton の場合は、それの非常に簡単な toy model であると見なすことができる。もちろん大元の理論で、場の理論空間のようなものを考えたときに、その上のダイナミクスが場の理論で書けるという保証は何もないわけである。むしろ多分書けず、弦理論のようなものになると思われる。しかし、部分的には場の理論で記述できることもあるだろう。例えば、今の dilaton や、もっと一般に moduli と呼ばれている field を考えると、具体的に調べることができる。

今の簡単な例の場合は、図 6 ① を真空とする effective theory と、runaway type の effective theory(図 6 ②) の二通りある、そのような場の理論空間である。

そうすると、gauge coupling の値はどう決まるのか。もちろん欲しいのは、自由理論になってしまうところではなく、interaction があるようなところを選びたいわけである。それが、どのように実現されるかということを考える。

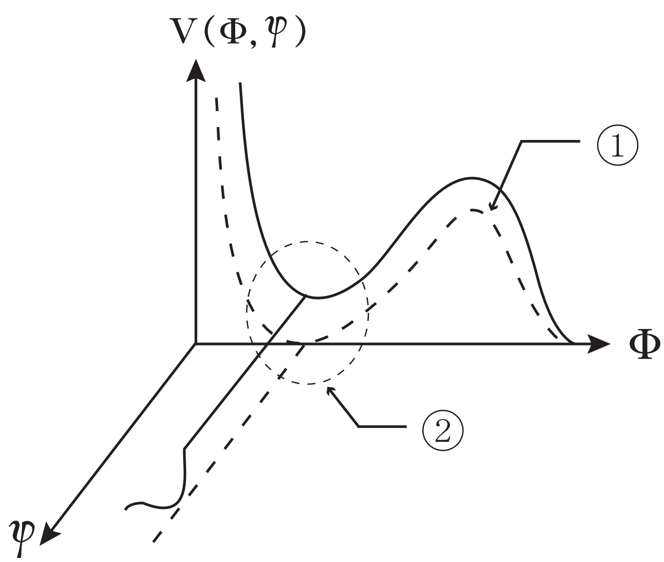

図 7

そのヒントとなるのは、前節で述べた、宇宙初期の chaotic な状態についての考察である。ただし、dilaton のポテンシャルのみに着目して場所により色々な値をとるとしても、全体では一定の望ましい値になりそうもない。

そこで再び、先ほど導入した dynamical inflation を今の dilaton 模型に、更なる sector として付け加えて併せて考えてみる。そうすると、図 7 の Φ というのは dilaton であり、φ というのは inflaton であるとして：元々inflaton がない状況では、図 7 の破線 ① のような dilaton 固定のポテンシャルになるとしていた。ところが inflaton があることによって、dynamical scale に基づく真空エネルギーが出るのだと思うわけである。もちろん runaway type の、coupling が出ない状況では、自由理論なので、dynamical scale も出ない。そのために inflaton の真空エネルギーもゼロである。それに対して、必要な dilaton 固定が起こりゼロでない gauge coupling があり dynamical scale が出る、そのようなところでは、その gauge coupling の大きさに応じて持ち上がっている (図 7 ②)。

先ほど inflaton の場合で chaotic initial condition を考えたが、このような場合は、それを少し拡張して、この dilaton に関しても、同じようなロジックが使えるであろう。宇宙初期にさかのぼっていき非常にエネルギーが高い (所もあるような) 状況からスタートしたとする。すると、ポテンシャルはほとんど無視できるので、宇宙の色々な場所を考えると (あるいは量子重力を考えると、geometric な記述ができないようなところから classical な patch が色々な所で出てくるので)、inflaton の値や dilaton の値が色々な値をとれるという条件から出発すると考える。

Free theory に対応する方は、そういうところから出発したとしても、free なのでそれ以上どうにもならない。しかし、ある部分で図 7 ② の inflation を起こす面にいたとすると、その部分が膨張して、それが宇宙になると思われる。だから、chaotic initial condition のような、宇宙をさかのぼって行き、量子論的に許される fluctuation に全部が収まってしまうような状況を考えると (どのように宇宙が実現するかというと)、dilaton の有限の coupling に対応して固定されたところが宇宙を形成するのではないかと考えられる。

以上のようなことを実現する場の理論的な具体例を構成する道具立ては、既にここまでで揃えてあるので、試しに例えば具体的な superpotential を書いてみると良い (ここでは説明する時間がないが)。

まとめると要するにいま言ったのは：宇宙をつくる dynamical inflation のようなものが想定される。そういうものが、例えば supersymmmetry があるような状況では具体的に実現できる。そういうような状況では、inflation が起こる所が、宇宙を実現するという形でその真空の選択 (inflationary vacuum selection) が起こる。従って、色々な場の理論の構成する空間があったとして、chaotic initial condition のようなものが実現されていたとする。それによってその一部から inflation が起こり、宇宙をつくる、そのように選ばれた、そのような effective theory で記述される宇宙がつくられたというように考えることができるのである。

いま、dilaton で gauge coupling が決まる仕組みを考えたが、他にもある程度場

の理論で扱える部分として、例えば内部空間の大きさを決める moduli のようなものを考えることができる。要する時空の次元を問題にする。内部空間が非常に大きい (小さい) と、次元が高い (低い) 空間が実現する。従って、どのぐらいのところが無限に近く拡がっていて、どのぐらいのところが小さく丸まっているか、ということを記述するような moduli を場の理論的に考える。そのような状況でもやはり、dynamical inflation を組み合わせて考えることができる。

Gauge theory のダイナミクスによると (証明があるわけではないが)：4 次元以下であれば、asymptotic freedom でスケールがダイナミカルに出てくることが知られている。しかし、5 次元以上だと摂動論的には asymptotically free にはならない。非摂動論的に考えると、CFT のような例はあるのではないかと思われるが、inflationary dynamics として真空のエネルギーを自然に出すスケール生成の例は知られていない。もし無いならば、先ほどの dynamical inflation が起こるところを選ぶ場合を考えると、inflation が起こるスケールでみて、5 次元以上に拡がってしまっているところは、それ以上膨張しない。つまり inflation が起こらない。ところが、4 次元以下のところでは、dynamical inflation が起こり得るので、内部空間が固定されていると、4 次元は拡がり得る。正に inflation を起こして、空間が拡がるわけである。そしてそこが宇宙をつくるという状況を考えることができて、次元が inflationary に選ばれる可能性がある。そのような理由で、4 次元が選ばれる可能性があるわけである。

あるいは supersymmetry の数 $\mathcal{N}$ に対してである。Supersymmetry というのは、今まで説明したのは、4 個のスピノルの成分を持つ supersymmmetry の場合 ($\mathcal{N}=1$) であったが、$\mathcal{N}=2$ とか 4 とか、もっとたくさんあっても良いわけである。しかし、そのように supersymmetry がたくさんあると、dynamical scale で真空エネルギーを出すのは難しく、具体的に出す方法を知らない。Supersymmetry が $\mathcal{N}\leq 1$ ならスケールを出すダイナミクスが具体的に存在しているわけである。弦理論を考えると、SUSY が高い真空もおそらく非摂動的に存在するだろうと考えられる。しかしそういうところが宇宙を実現するわけではなく、むしろ現象論的に都合が良い、我々が見ているような宇宙が実現されると期待できるのである。

[質問]

完成された effective theory としての SUSY model とはどのような姿か?

[返答]

現時点で正に研究課題であるため、今のところ何とも答えようがないが、想像するに：標準模型のセクターを超対称化した MSSM に加えて、それとは別の隠れたセクターがあって、インフレーションを含め超対称性を破る構造が存在している。その二つのセクターは重力、あるいはその他の比較的高いエネルギースケールの相互作用によってつながっており、それが標準模型のスケールをも供給する結果になっている。

MSSM のセクターは running coupling を通じた統一を示唆しているが、隠れた

セクターにも何らかの統一的な構造があって、さらに両セクターを統一し、各種 flavor の構造を決定する全体的な理論へとつながっている。

いずれにせよ研究課題として今世紀、実験観測・理論とも新たな展開が予想される。新世紀の基礎物理を構築してゆく皆さんの尽力による進展を期待したい。ようこそ、この分野の研究へ！(必要であればここで 4.1 節に戻ることができる。)

5 Higher Dimensions

既に次元選択の話をしたからというわけではないが、ここからは高次元の理論を考えてゆく。導入の背景について話すところから始めよう。(この点について説明不要であれば 5.3 節に進むことができる。)

5.1 高次元自由度

前章までに相対論的な場の量子論における effective theory の framework について説明した。その観点から場の理論の空間のようなものを考えて、その上のダイナミクスを具体的につくることによって、effective theory を選ぶ vacuum selection のようなことを引き起こした。具体例として supersymmetric inflation のダイナミクスを考えて inflationary に vacuum を選ぶ、特に、dynamical inflation を考えると、gauge coupling の大きさを記述する dilaton や時空次元を決める moduli、そのようなものがあるとして、それが現実を記述するような値に固定される、というようなシナリオについて説明してきた。

このうち、物理的な高次元理論は前世紀の初めから考えられてきたわけだが、例えば、第 3 章で説明した超空間もフェルミオニックな内部空間とみなせば、一種の高次元空間と思えるように、割とありふれた設定といえよう。相対論に基づく Minkowski 空間の導入も、当時とすれば物理的には高次元空間の導入ということになると思うが、時間と 3 次元空間からなる 4 次元空間は全て直接の物理的測定対象ということで、ここで言う意味の高次元ではない。

この Minkowski 空間の導入に触発されて観測されていない高次元空間を導入したのは、リプリント集「MODERN KALUZA-KLEIN THEORIES」によれば、Nordström の「On the Posibility of Unification of the Electromagnetism and Gravitation」が最初の論文である。そもそも出発点としての動機付けとして、(電磁気と重力の interaction の) 統一理論を考えていることが分かる。これは一般相対論の前の時期なので、重力を表すのに scalar potential を用いている。Minkowski 空間を (既に数学的には座標の導入と共に自然な拡張として考察されていた高次元の例として) 5 次元に拡張して、対応する 5 次元の electromagnetic theory を考えるとその 5 次元目の方向が重力を記述する。論文の末尾に Abstract が出ているので、読んでみると

「It is shown that a unified treatment of the electromagnetic and gravitational fields is possible if one views the four-dimensional space time as a surface in a five-dimensional world.」

要するに物理的な高次元を考えた当初は subspace として 4 次元時空を含む brane world を考えていたということになる。

Brane world としては、高次元空間が広がっている、その中で我々は 4 次元時空面に局在している、そういう picture であった。一方、Nordström とは対となる話

として、Kaluza-Klein 理論は Einstein gravity を 5 次元化して 5 次元目のところに電磁場を含ませる。現実的な 4 次元を出す時に Kaluza-Klein らはコンパクトな内部空間をとって高次元空間を考えた。そういうシナリオがよく知られている。

5.2 弦理論から

物理的な高次元導入の端緒は統一理論を考えようとしたことであった。この方向の発展として現在期待されているのは弦理論であろう。これに積極的に対抗できるだけの具体的な対抗馬は今のところないのではないかと思われる。弦理論は、相対論的量子論としての重力理論の構成を手がかりに考察されているため、その立脚する要素は、量子論にせよ重力理論にせよ、作業仮説として確立している度合いが十分に高い。(背景的な動機としては、特殊相対論と Newton 重力を整合させるために、両者を超克して一般相対論が得られるごとく、一般相対論と量子論を整合させることで、両者を超克する新たな知見へと導かれることへの期待があろう。実際には今までのところ、単に相対論的量子論として重力理論が存在し得るという示唆を与えるに留まっているのではあるが。) 比べて、超対称性にせよインフレーションにせよ、確立していない作業仮説であり、それに立脚する考察は、物理的な基本法則に対してより具象的な認識を目指す試みと言える。基本的な自然理解のためには、それら全体を横断的に扱う crossover の考察が重要となるのではなかろうか。何とか弦理論をもとにして新しい自然認識を創り上げることが求められる。

ここでコメントしておく必要があるかも知れないが、弦理論 (string theory) というのは多少誤解を招くような言い方で、ここに言う弦理論は string の理論というわけではない。別に通常の場の理論において大抵粒子描像で捉えていても (実際、この場合は point theory とは言わないように) 点粒子の理論というわけではないのと同様であろう。例えば場の理論の中には conformal field theory というものがあるが、これは必ずしも粒子という picture では捉えきれない。だから、量子論というのを前提としていると、ユニタリーに Hilbert 空間で記述する、そういう枠組みにのっとっているだけで、粒子というのは出発点ではない。弦理論もおそらくそうであり、具体的にダイアグラムのレベルで扱えている、摂動論で扱えるというのはもちろん、string の picture で worldsheet を用いてユニタリーな perturbation を構成するということだが、おそらくそれが本質ではないだろう。

実際、そのような認識の例として、M Theory が考えられている:

$$\begin{array}{ccc} \textbf{type IIA string} & \longrightarrow & \textbf{M theory} \\ \\ \textbf{10D N=2} & \xleftarrow[S^1]{} & \textbf{11D SUGRA.} \end{array}$$

11 次元 supergravity というのは supersymmetry が maximal となって、かなりきっちりと決まっている。それを S^1 でコンパクト化すると 10 次元の意味で $N=2$ の supersymmetry が出る。つまり Kaluza-Klein reduction として、以下の様に落とすわけである:

$$\left(\begin{array}{c|c} g_{MN} & A_M \\ \hline A_N & \phi \end{array}\right).$$

これは全体として 11 次元の metric であり、分解した成分は 10 次元の metric g_{MN} とゲージ場 A_M とスカラー場 ϕ でできている。

こういうもの (10D $N=2$ supergravity) が低エネルギー effective theory として出てくる完全にユニタリーな量子論が type IIA string だと特徴付けられる。もちろん非摂動論的な存在証明があるわけでは全くなくて、ただ弦理論の場合には具体的に摂動論の計算ができてよさそうな感じとなる。物理的な考察対象として、十分検討に値するレベルの色々な evidence があるわけである。(局所場の量子論でも、本当に数学的に完全な意味で、例えば漸近自由な場の理論の存在が言えるとは限らないので、似たようなものなのかも知れない。)

それで、その時このスカラー場が coupling の大きさを決める dilaton なのだが、その coupling を大きくすることが 11 次元化に対応して、結局低エネルギーでは 11 次元 supergravity になる完全にユニタリーな理論を paralell に想定する事ができる。11 次元では string picture のような摂動論というのは定義できていない。しかしながら、対応する量子論があると思わせる兆候がいくつもあり、それを M theory と呼んでいる。

つまり、type IIA $\leftarrow$ M theory の向きで考えると、M theory を S^1 でコンパクト化すると Type IIA string になるし、逆向きに考えると dilaton の値をコントロールして strong coupling のリミットをとったものに対応する。この状況を称して全体を string/M theory(弦理論) と呼ぶわけである。

ここで、effective theory の観点から面白いのは：例えば standard model というレベルで考えると、低エネルギーで非常によく standard model に見える理論というのは高エネルギーでは色々なバラエティーがありうる。高エネルギーで様々な GUT model が考えられても、低エネルギーでは全て standard model に見える様な状況だと思われるわけである。ところが、11 次元 supergravity というのは、これを full にユニタリー化して量子論に持ち上げようとすると、結局 M theory になる、要するに古典近似として 11 次元 supergravity を与える非常に unique な理論があるという感じがする。別に何の証明があるわけでもないので、あくまで感じを言っているだけではあるのだが。

いろいろ変形できてしまう理論はあまり fundamental と思えないので、そういう意味で非常に unique な感じがするというのは、この方向に統一があるという好感触を人々に与えている。ただ、どのように standard model につながるか、どのような自然認識を与えられるかについて直接の具体的な情報は、まだ得られていない。もし重力を含む standard model が弦理論中に実現されているのであれば、

結局 effective theory としての standard model 自体が、full にユニタリーな理論 (の一部) として unique であるということなのかも知れない。重力を含まない理論においては、Hamiltonian に observable を加えて変形することによって別の理論を得られてしまうので、重力の存在がこの点でも重要であると思われる。

弦理論全体から type IIA,B (II) と heterotic $SO(32), E_8 \times E_8$ (H) をそれぞれまとめ、type I (I) および M theory (M) と併せて四角形として模式的に図示する:

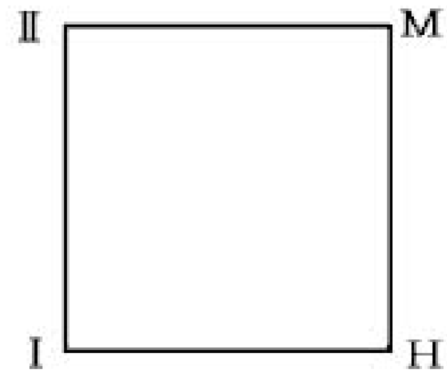

図 8

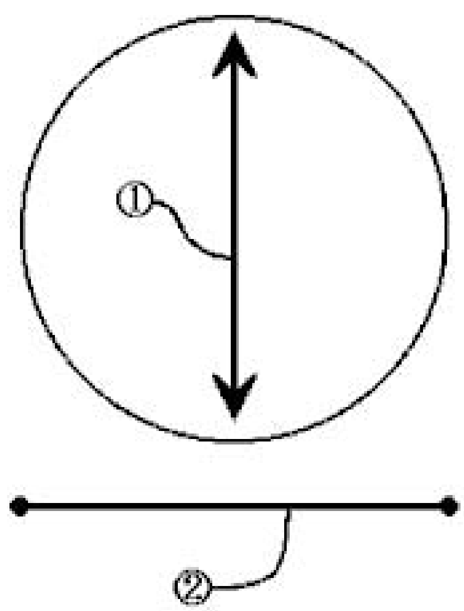

図 9

上述した II–M ラインについては、10 次元の言葉で両方とも $N = 2$ の supersymmetry (supercharge 32 個) を持っている。対して I–H ラインであるが、こちらは

$N = 1$ の supersymmetry (supercharge 16 個) である。つまり、図 8 の上から下へは supersymmetry が半減しているわけである。

Supersymmetry が減る例として heterotic M theory をとりあげよう。これは、M theory を図 9 ② のような線分でコンパクト化したものである。この線分は正確には orbifold S^1/Z_2 であり、これによって両端での境界条件が定められている。ここで Z_2 は円周 S^1 を直径で折り返す変換を表し、図 9 ① のようにそれで同一視することによって、円周を線分に帰着させている。11 次元全体としては orbifold $R^{10} \times S^1/Z_2$ にコンパクト化して、S^1/Z_2 の両端点 (Z_2 変換の固定点) それぞれに対応する 10 次元の境界面 2 枚に挟まれた 11 次元空間 (bulk) を考えることになる:

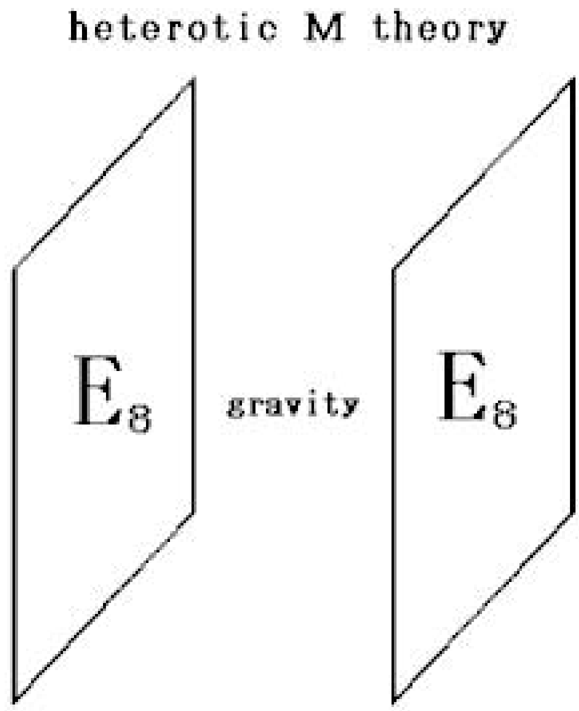

図 10

従って effective theory として bulk には 11 次元の supergravity が存在し、本来 supersymmetry は 10 次元の $N = 2$ になっているのであるが、Z_2 で割る (Z_2 不変部分に制限する) ことによって実際は supersymmetry を半分にしている。その結果、全体としては 10 次元で $N = 1$ の理論を与える構成である。

特に両端点ではそれぞれ 10 次元で $N = 1$ supergravity の field content を含むのだが、それだけでは anomalous な理論を与えてしまうので、anomaly cancellation のための field content がさらに付け加わる必要がある。これは string の場合の twisted sector のようなものだと思われるが、string perturbation の場合のような具体的構成ができてはいない。しかし effective theory の構造としては、anomaly cancellation

の考察から、両端にそれぞれ E_8 の超対称ゲージ理論があり、全体として $E_8 \times E_8$ になっている事がわかる。

結局 10 次元の理論としてみると、要するに $E_8 \times E_8$ heterotic string と同じ構造になっている。丁度 M theory/S^1 と type IIA string の対応に相当することが、M theory/(S^1/Z_2) と $E_8 \times E_8$ heterotic string の間に成り立つのであると考えられる。お互いが同等にお互いの effective theory になっている (duality)。つまりこうしてみると、heterotic M theory は heterotic string の別の提示の仕方というだけなのである。

Heterotic M theory の時空 $S^1/Z_2 \times R^{10}$ に顕在的な 10 次元の boundary は brane world 的な picture を示唆する。対して、heterotic string においては単に元から 10 次元の理論という定式化である。その effective な記述として 11 次元的な picture を用いるという立場になる。ここでやはり、effective theory というのは正に、等価な理論を別の変数で書き表すという意味である。Brane world が effective theory として出てくるということは、brane を手で用意したというわけではなく、そういう記述の仕方ができ、そういう変数で見るのが我々に理解しやすいということに過ぎない。そういうことを考えるのが自然であると理論自身が言っている、一番最初に Nordström が考えていたシナリオが勝手に出てくる、という感じがするわけである。

ここでは heterotic M theory という特定の toy model を例に話したが、続いて、さらに一般的に realistic な effective theory という立場から brane world について考えておこう。

5.3 Effective theory から

一般に effective theory の考察は、どういう変数をとって記述してゆくかという出発点に大きなポイントがある。場の理論においては局所場が変数であるわけだが、その設定について省みておこう。

場は、そもそも時空に依存しており、更に、スピンの添字 α や内部自由度 (gauge 群の表現など) の添字 i を持っている:

$$\varphi^i_\alpha(\vec{x}, t) \equiv \varphi^i_{\alpha,\vec{x}}(t). \tag{5.1}$$

さて、通常は、スピンの自由度と gauge の自由度については、直積の構造になっているとは考えない。スピン 0 の場とスピン 1 の場を比べて、gauge 群の表現として一致しているとは限らないわけである。あるスピンの場には、それに対応した特定の gauge 群の表現がある、そのようになっている。つまり、スピンと gauge の添字に関しては nontrivial な構造である。

さらに、簡単のために時間は特別扱いすることとして、空間の、例えば 4 次元時空なら 3 次元空間なわけだが、3 次元の自由度なら、その三つが直積の構造に

なっているとは、これまた限らない。R^3 やトーラスのような直積構造とは異なるnontrivial な多様体を想定してもよい。

これに対し、通常の $\varphi^i_\alpha(\vec{x}, t)$ という表記は、この i や α という添字と空間 $\vec{x}$ が直積の構造になっていることを暗示してしまっている。つまり、あらゆる場所に対して全く同じ content の場が存在する、と思うわけである。

けれども、一般的に力学系を取り扱う立場からすると、空間の添字も、内部自由度と同じく力学変数の添字の一つと考えられる ($\varphi^i_{\alpha,\vec{x}}(t)$)。それを踏まえれば、内部自由度と外部自由度の間の関係についても、必ず直積の構造であるというのは、大きな仮定に過ぎない。

もし、これが直積でないとなると、要するに、ある場所には何か特定の field content があって、また、別の場所には、また別の field content がある。そういう状況を考えるのは丁度 brane world を考えるということになる。このように effective theory 一般の立場から、場の理論空間を考えて色々な場の理論を探るというような、そう言う観点からも、brane world を考える事は一般論として必要なことであり、望ましいことであろう。

ここで、高次元の話からは、後でまた戻ることにして、一旦離れる。次に、cosmological constant の話に入ってゆく。(必要であればここで 5.1 節に戻ることができる。)

6 Cosmological Constant

前章までとりあげたトピックスが比較的一般の現象論的な枠組みであったのに比べ、この章では一見かなり特化した問題を考察する。具体的に、数ある naturalness 問題の中で、宇宙項問題と呼ばれるものに着目する。これは、適当に一つ問題をとりあげたというわけではなく、実は今までの話の流れから強く動機付けされるものとなっている。(この点について説明不要であれば 6.5 節に進むことができる。)

6.1 宇宙項問題

Effective theory という framework は非常にいろいろな点で納得しやすいし、すぐれているように見える。しかしながら一つ、モデルの詳細によらない遍在的な課題、巨大な naturalness 問題が知られていて、それが cosmological constant 問題というものである。

例えば supersymmetry が破れていない場合というのは、真空のエネルギーがゼロというのは割とありふれた性質である。ところが、現象論的には supersymmetry は少なくとも weak scale ぐらいで破れていなければならない。電子の superpartner は、weak scale 未満では見つかっていないわけである。だからその程度の破れはあって欲しい。従って effective theory の立場から考えると、supersymmetry のコントロールは、そのエネルギーのオーダー以下には及ばないと考えられるのである。ところが真空のエネルギーは、その期待を裏切っている。

どのような状況かと言うと、Einstein 方程式で次のようになっていると考える:

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}. \tag{6.1}$$

ここで Einstein テンソルは、曲率テンソルで次のように作ったものである:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{6.2}$$

これは、stress-energy tensor $T_{\mu\nu}$ が保存カレントになることに対応して、Bianchi identity から保存するように作られている。

それで、cosmological constant というのは Λ のことであるが、これは background の時空の geometry を規定するものである。今 background の状況として (6.1) を考えているが、これを traceless part と trace part に分解して書いてみる。そうすると以下の 2 式になる:

$$\begin{aligned} &G_{\mu\nu} - \tfrac{1}{4} g_{\mu\nu} G = 0, \\ &G = -R = -4\Lambda. \end{aligned} \tag{6.3}$$

このうち traceless part は、cosmological constant というパラメータを含んでいない。逆に trace part は含んでいる。要するに cosmological constant というのは、background 時空の曲率を規定していることがわかる。

現実には、天文的な観測からすると、background の曲率というのは非常に 0 に近い。しかし、naive に effective theory に基づいた場合に、どのようなものが自然に期待されるのかを考えてみる。そうすると、少なくとも weak scale 程度の真空エネルギーの contribution が出てくる:

$$|\Lambda| \gtrsim {m_W}^4. \tag{6.4}$$

これは正に、現実的でない。

もちろん、これは例外であって、effective theory という framework の適用限界がそこにあるという考え方もあり得る。ただし、他の部分で effective theory という framework が良いと理解したければ、どのような点がここではダメなのかということを考えなければならない。そうでなければ、他の部分に適用して良いと思えなくなってしまう。

そのような可能性として考えてみると、cosmological constant に特徴的なのは、重力に関係して background 時空を変えるようなパラメータである点にあろう。

Effective theory というのは、具体的な適用としては、cutoff とか低エネルギー、高エネルギーなどの概念を使って、自然な状況を考察する。しかし、例えば曲がった background というものがあると、エネルギーとはどのようなものか?つまり、重力理論の中でエネルギーというのをどのように捉えるのか?そういうことは nontrivial なのである。通常のエネルギーとか粒子などの描像は、Poincaré invariance に重く拠りかかっている。さらに、動力学的な background の変化や足し上げなどといったことに踏み込むと、effective theory の framework で基本的な自由度の分離についてどのように取り扱ったらよいか明らかではない。

要するに、flat な background で effective theory を使うのは重力を含めて可能だとしても、background 自体を変更するようなパラメータについては扱えない、そのような可能性もあるかも知れないのである。ただし、この方向の可能性について、それでは具体的にどうすればよいのかというと、今のところ何とも言えない。

だからと言って、もっと深い理論が完全に明らかになるまでは分からない問題だ、としてしまうのは、早計ではなかろうか。そこでまず調べるべきは、どこまで effective theory という framework で行けるのかということである。宇宙項問題は、本当に effective theory の範疇で、自然に納得できない課題なのであろうか?と考えることになるわけである。

以下では今までと同様、effective theory の picture を堅持して、どこまで行けるか考察してみることにする。

6.2 色々な試み

Cosmological constant 問題については、Weinberg によるまとまったレビュー [S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. 61 (1989) 1] がある。どのような試みがあるかについてはその中で、次の五つのアプローチに分けられている:

supersymmetry, supergravity, superstrings;
anthoropic considerations;
adjustment mechanisms;
changing gravity;
quantum cosmology.

一つ目の supersymmetry etc. に関しては確かに、SUSY が保たれていれば真空エネルギーが消えるというのは自然であると考えられる。しかし実際には破れていなければならないので、effective theory の立場からは、これだけで問題をどうにかするというのは、なかなか具体的には難しい。

次に anthropic consideration、これは anthropic principle (人間原理) に基づく考察である。Anthropic principle というのは色々な意味あいで使われる言葉だが、原理と言うだけあって、ある程度逃れられないようなものである。ここでは操作的な意味として捉えよう：物理法則というのは、それ自身で何かを予言したりはしない。我々が何か物理量を定めて初めて、その観測結果を与えることになる。何を観測するかというのは、理論の中には直接は含まれていないのである。何を観測するか考えてみると、要するに人間が観測するわけなので、人間との correlation function を求めるという立場に立つことになる。物理的に取り扱う対象はそういうものである、というのが anthropic principle なのである。すなわち、人間が見るものが見える、というわけである。

Cosmological constant の場合について考えると、cosmological constant が negative で、ある程度以下の値であれば、宇宙は極めて短い時間の寿命となってしまう。銀河ができるとか、そういう暇も無く宇宙が潰れてしまう。逆に positive で、ある程度大きかったりすると、銀河ができる前に、際限のない inflation のごとく膨張してしまう。宇宙が加速膨張になってしまって、銀河ができる前に宇宙の密度が薄くなってゆく。どちらにせよ、人間が観測する宇宙 (の領域) ではないと思われる。結局、我々の銀河ができるような宇宙というのは、ある適当な範囲の cosmological constant の値を持っているということになる。そのような理由で、cosmological constant の絶対値は非常に小さいと理解するのである。これは確かその通りで、logical に否定することはできないと思われる。ただ、それにしても宇宙定数がここまで小さい必要があるかどうか微妙であるし、これだけで十分な理解とは言い難いので、ここで思考停止するのは早計であろう (6.9 節参照)。

最後の quantum cosmology というのは、本当に量子重力的な効果、時空の位相幾何まで含めた揺らぎが効いて、マクロには cosmological constant がゼロに見えるのだというようなアプローチである。しかし、これは、通常の場の理論の立場からは正当化する説明が困難であるように思われるので、ここでは触れないことにする。

残る二つ、adjustment mechanism と changing gravity に関して、これらが、effective theory の立場からアプローチする試みである。それ故、以下で少し詳しく説明してゆく。

6.3 Adjustment mechanism

それでは、effective theory に基づく二つのアプローチから一つ目、adjustment mechanism について考えよう。Adjustment mechanism というのは、具体的にはどんなものかというと：Cosmological constant 問題というのは、background 時空として非常に曲率が小さい、そういうものを実現する、これが課題なのだが、そのために次のようなスカラー場 φ を導入する:

$$S_\varphi = \int d^4x\sqrt{g}\left(U(\varphi)R + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - V(\varphi)\right). \tag{6.5}$$

ここで、$V(\varphi)$ はポテンシャルであり、$U(\varphi)$ はスカラー曲率の係数である。これからスカラー場の運動方程式は次のようになる:

$$U'(\varphi)R = V'(\varphi). \tag{6.6}$$

ここで、background について考えたいので、場 φ が時空に依存しないとした:

$$\partial_\mu\varphi = 0. \tag{6.7}$$

そうすると、条件

$$U'(\varphi) \neq 0, \quad V'(\varphi) \simeq 0 \tag{6.8}$$

が φ に対し常に満たされるとき、運動方程式は曲率 R が非常に小さくなることを要請し (adjustment)、backgound としてほぼ Minkowski 時空が選ばれる:

$$g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}. \tag{6.9}$$

このようなことによって、宇宙が平らであることを説明しようとしているのである。

もちろん、この段階では cosmological constant を小さくする代わりに、ポテンシャル V が非常に平らであるということになっただけなので、これが fine tuning になっている。だから状況が変わっていないと言えば変わっていないのだが、問題を置きかえれば、そちらの方で解決が見えるかもしれない。そういう意味では、このように考えることは無意味ではないだろう。

たが、このアプローチには本質的に苦しいところがある。それはどういうことかというと：一つには、$V'(\varphi)$ を小さくするわけだが、この小さいという statement 自体が実は、ここまでの話では意味を持ちにくい。というのは、$U(\varphi)$ というようなファクターは、metric の ϕ に依存する Weyl 変換によって、例えば 1 にしてしまうようなことができるからだ。もちろんそうすると V の値も変わるわけで、要するに、値が大きい小さいというような概念は、field redefinition に左右されてしまい、小さいという statement 自身がこの段階で物理的な意味を持っているようには見えないのである。

さらに、仮にそれに意味を認めたとする。しかし、認めたとしても、これではうまくゆかない。それはなぜかというと:今考えたスカラー場の部分の他に、standard model その他の action が存在し、全体として真空のエネルギーに contribute する:

$$S = S_\varphi + S_{\text{standard}}. \tag{6.10}$$

そのもとで、スカラーの場の方程式に加えて、Einstein 方程式もある。そこで、Einstein 方程式が background に対してどのようになっているかというと、特に trace part は次のような形になっている:

$$U(\varphi)R = 4\Lambda. \tag{6.11}$$

一方、φ の方程式は、R がほぼ 0 になっていることを要請した:

$$R \simeq 0. \tag{6.12}$$

従って、(Λ を小さく fine tune しない限り) この二つを両立させるには、$U(\varphi)$ という関数が極めて大きいということになる:

$$U(\varphi) \to \infty. \tag{6.13}$$

この様に $U(\varphi)$ の background value、つまり Planck scale が非常に大きいということは、重力の interaction が他から decouple するということを示す。要するに、重力が他と decouple して、真空のエネルギー Λ を見なければ、時空の background として flat なものを取れる。確かにそれはそうなのだが、これでは何の解決にもなっていない。このようなわけで、どうにもうまくゆかないのである。

6.4 Changing gravity

続いて、effective theory に基づくもう一つのアプローチである changing gravity について説明する。Changing gravity には具体的には、次のそれぞれ独立な三つの方法がある:

1. traceless gravity,
2. 3-form fields,
3. extra dimensions.

この三つはそれぞれ全く違う方法だが、ある意味似たような結論が得られる。色々な方法が存在する (他にもあるかも知れない) が、定性的には似たような帰結になるというような感じを見て取りたいので、三つ全てを順に紹介することにしよう。

6.4.1 Traceless gravity

まず、一つ目として traceless gravity から始める (これは一般的な呼称ではないが、由来はすぐ下で明らかになる)。これは元々、Einstein 自身が与えた一般相対論の変形である。Einstein は、一般相対論に到達したすぐ後に、cosmological constant 項を、static な宇宙を作るための反発力として導入したわけである。その当時、量子論は構成途上であったので、今の意味での cosmological constant 問題は認識されていなかった。しかし、static な宇宙を実現するためには、宇宙全体の物質の量に対して、ちょうど反発力がつりあうように cosmological constant を用意しなければならなかったわけで、多分、その二つが一致する不自然さという motivation があったと考えられる (Einstein は同時に色々なことを考察していたようなので、それだけが目的ではないと思われるが)。そこで、重力の運動方程式を探して Einstein 方程式に到達したのに倣って、別の運動方程式が可能ではないか？と考えた。

結果的に、Einstein 方程式の traceless part だけとってくる事をする:

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}G = T_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}T. \tag{6.14}$$

つまり、通常の Einstein 方程式全体から、cosmological constant を含む trace part を取り除いて、traceless part のみ運動方程式として採用した、そのような理論である。これを traceless gravity と呼ぼう。一見、trace part の情報が失われ、かなり異なる理論になっていると思われる。ところが、Einstein が指摘しているように、このようにしても実は、通常の Einstein gravity とほとんど同じ理論になっているのである。

そのような妙なことが起こる理由は、Einstein gravity が、gauge theory だからである。元々、非常に redundant な記述になっているので、運動方程式の全てが独立ではないというような事情になっている。

具体的には、$G_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}$ の構成から、恒等式・運動方程式として、

$$D^\mu G_{\mu\nu} = D^\mu T_{\mu\nu} = 0 \tag{6.15}$$

が成り立つ。従って、traceless gravity の運動方程式に共変微分 D^μ を作用させると次のようになる:

$$\partial_\nu G = \partial_\nu T. \tag{6.16}$$

この積分は、

$$G = T + \text{const.} \tag{6.17}$$

この形は Einstein 方程式の trace part そのものである。ただし、積分定数が一つ導入されている。これは、相当する Einstein 方程式においては、理論を与えるときに定めるパラメータ、cosmological constant であった。対して traceless gravity の場合

には、積分定数なので色々な値をとり得るようになっている。要するに、traceless gravity と Einstein gravity はほとんど同じ運動方程式で与えられる理論なのであるが、前者においては、cosmological constant が積分定数、つまり力学変数になっているような、より広い解を許す理論なのである。

元々の Einstein 重力理論では、cosmological constant というのは、Lagrangian の中にパラメータとして入っている、言うなれば手で与えられたパラメータだったわけだが、traceless gravity 理論では、結果として解の性質として現れてくるものなのである。従って、traceless gravity の運動方程式には常に flat な解が存在する。通常の Einstein 方程式では、cosmological constant はパラメータなので、flat な解というものはそもそも一般には存在しないわけである。その結果、現実的な解が自然には存在しないことになる。しかしこのように、それが常に存在するような理論に変更することもできる。

ここでこの積分定数を力学変数だと言ったが、この点について説明を加えておこう。一般の Hamilton 力学系の運動方程式の形で考えることにする:

$$\dot{q} = \cdots, \tag{6.18}$$

$$\dot{p} = \cdots \tag{6.19}$$

(力学変数 q,p は多成分でよい)。これらは 1 階の方程式だから、初期値 (時刻ゼロの時での値) と時間で、次のように解ける:

$$q(t) = q(q_0, p_0, t), \tag{6.20}$$

$$p(t) = p(q_0, p_0, t). \tag{6.21}$$

初期値 q_0,p_0 が、運動方程式 (6.18),(6.19) を積分したときの積分定数である。

この初期値について逆解きすると、次のようになる:

$$q_0 = q_0(q, p, t), \tag{6.22}$$

$$p_0 = p_0(q, p, t). \tag{6.23}$$

さて、これまで q_0,p_0 は任意定数であったわけだが、ここで考え直して、直上の式を、力学変数 $q(t)$,$p(t)$ から $q_0(t)$,$p_0(t)$ を与える定義式とみなそう。すなわち、元の運動方程式において、この式で定義される変数変換を行なってみる。すると、構成の仕方から、運動方程式

$$\dot{q}_0 = 0, \tag{6.24}$$

$$\dot{p}_0 = 0 \tag{6.25}$$

が、力学変数 q_0,p_0 に対して成り立つ。つまり、一般に積分定数というのは、このような運動方程式を満たす力学変数である。

だから先ほど、cosmological constant が積分定数として現れたのは、それが力学変数になっているということである。その値は、初期条件、あるいは一般に境

界条件で決まる。動かしようのない設定の given 定数とは異なり、色々な値をとり得る変数であるために、特にその値がゼロの解が常に存在するということになるわけである。

ここまでは運動方程式を与えただけなので、古典論の範囲で traceless gravity を扱ったことになる。次に effective theory の観点から、この種の重力の量子論がどのように実現できるか考えよう。

6.4.2 Quantum theory

対応する量子論を与えるには運動方程式だけでは駄目で、Lagrange 形式あるいは正準形式の考察が必要である。それ故、先ほどの運動方程式 (6.14) を与えるような Lagrangian を探すという問題になる。しかしここでは、そのようなアプローチはせず、重力の場の理論というものを最初から作ってみることにする。すなわち、Einstein gravity ではないものを探すという concept により、もう少し原点に立ち戻った観点から考え直してゆきたい。

重力場としては Einstein gravity と同じく、spin 2 の massless 粒子を記述するものをとる。具体的には、2 階のテンソルで対称な場を力学変数として選ぼう:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}. \tag{6.26}$$

これは、スカラー場やベクトル場を用意して、その理論を作るのとパラレルな出発点である。Lorentz covariance を要請すると、Lorentz metric の非定値性から、negative norm の成分などの不要なものが出てくる。そのような自由度をなくしてユニタリーな理論にするために、gauge theory としての構造を考える。

Gauge symmetry としてどのようなものが可能であるかというと：もちろん普通によく使われる一般座標変換

$$\text{diffeomorphism: } \varepsilon^\mu,$$

このパラメータは、ベクトルの添字が付いていて、時空に依存する。

変換パラメータをベクトルではなくスカラーにして考えると、Weyl 変換

$$\text{Weyl transrormation: } \lambda$$

が得られる。これは、Einstein garvity に倣って Weyl が考え、gauge 変換の名称の由来となったものである。どのようなものか具体的に無限小形で書くと、

$$\delta_\lambda g_{\mu\nu} = \lambda(x) g_{\mu\nu}. \tag{6.27}$$

他の場は不変にしておく。例えばスカラー場 ϕ について、

$$\delta_\lambda \phi = 0 \tag{6.28}$$

とする。

さらに、パラメータのテンソルの添字をもっと増やした変換も存在するのではないか、という話になる。しかしそれでは自由度を減らしすぎて、topological gravity のようになってしまうので、今の目的には合わない。それゆえ、ϵ^μ と λ という五つのパラメータが、いま課すべき gauge symmetry の候補を与えるのである。

もちろん通常の Einstein gravity は、diffeomorphism 全体を gauge symmetry として要請している。これを量子化するために、経路積分の測度としては gauge symmetry を尊重するように設定する必要がある。　ここでは簡単のため、スカラー場の測度を例に説明しよう。スカラー場 φ の空間を考え、その関数空間上に diffeomorphism-invariant な距離を入れる:

$$\|\Delta\varphi\|^2 = \int d^4x\sqrt{g}|\Delta\varphi|^2. \tag{6.29}$$

このようにして、φ という関数の空間上で長さを入れれば、それに基づいて積分の測度 $\mathcal{D}\varphi$ を与えることができる。この作り方はまず、diffeomorphism で不変な構造を作り、その範疇で測度を作った。従ってその測度による経路積分は diffeomorphism 不変である。抽象的な説明であるが、diffeomorphism invariance という要請から量子論が決まる事がわかる。

ここまで、通常の Einstein gravity を念頭に diffeomorphism をとって考えた。それとは異なった gauge symmetry のとり方は無いのだろうか。そこで、先ほどあげた Weyl 変換を採用する。安直には diffeomorphism 全体を課して、さらに Weyl 変換を課すということになるが、これは一般にはできない。距離として (6.29) のような形をとると、Weyl 変換は $g_{\mu\nu}$ のスケール変換なので、Weyl 不変にはなり得ない。すなわち測度には、diffeomorphism invariance と同時に Weyl invariance を課すことはできないのである。これは、Weyl anomaly と呼ばれる。それゆえ両方同時に併せて 5 個の gauge symmetry を課すことはせず、4 個に減らすことを考える。

減らし方として、diffeomorphism 4 個のうち、パラメータを 1 個減らして 3 個にするのだが、もちろん Lorentz 共変性などを壊したくはない。だから減らし方として、次のような条件を満たす volume-preserving diffeomorphism と呼ばれるものにする:

$$\partial_\mu\varepsilon^\mu = 0. \tag{6.30}$$

有限形で言うと、volume-preserving という名前から分かるように、$g_{\mu\nu}$ の行列式を保つような一般座標変換である:

$$\delta_\varepsilon \det g_{\mu\nu} = 0. \tag{6.31}$$

これを 1 個条件として加えて、一般座標変換の中からパラメータを 1 個減らす。

結局全体として、Weyl 変換と volume-preserving diffeomorphism という組み合わせの gauge symmetry を考えることになる。つまり 2 階の対称テンソルを力学変数にとって、そのような gauge symmetry を課した理論を作るのである。

そのような組み合わせであれば、両方に対して不変な距離を作れる:

$$\|\Delta\varphi\|^2 = \int d^4x |\Delta\varphi|^2. \tag{6.32}$$

この場合はむしろ簡単な形で、Einstein gravity の場合 (6.29) との違いは $\sqrt{g}$ が含まれていない点だけであるが、これにより明らかに Weyl 不変であり、逆に diffeomorphism 全体では不変でなく、$\sqrt{g}$ を変えない volume-preserving diffeomorphism でのみ不変である。どちらの場合も gauge symmetry を 4 パラメータ分選んで積分測度を決めているわけだが、それには異なる二通りのとり方が存在するわけである。いずれにせよ、これらの gauge symmetry により $g_{\mu\nu}$ 中の不要な成分が消えて、必要な massless spin 2 の成分のみが残ることになる。

結局、2 階の対称テンソルが力学変数で、Weyl 変換と volume-preserving diffeomorphism の組み合わせの gauge symmetry を課した、そのような理論を作りたいのだが、それは可能である。まず Weyl invariance を課しているので、2 階の対称テンソル $g_{\mu\nu}$ 自身で Weyl 不変になるように次のような組み合わせを考える:

$$\overline{g}_{\mu\nu} \equiv g^{-1/4} g_{\mu\nu}. \tag{6.33}$$

この $\overline{g}_{\mu\nu}$ は Weyl 不変テンソルである。その行列式は次のようになっている:

$$\det \overline{g}_{\mu\nu} = -1. \tag{6.34}$$

この変数を用いて、これは元々の Einstein gravity とは直接関係の無い新しい理論だが、あたかも一般共変であるかのような形の Lagragian を次のように書く:

$$\mathcal{L} = U(\varphi)\overline{R} + \frac{1}{2}\overline{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi). \tag{6.35}$$

これはもちろん作り方から Weyl invariance が保証されている。Volume-preserving diffeomorphism もきちんと実現されているので、両方の変換で不変な、望みの作用を作ることができた。

ここで特徴的なのは、通常の Einstein gravity では $\sqrt{g}$ の入るところが、$\sqrt{g} = 1$ となっている点である。従って、(6.35) のポテンシャル項は直接 $g_{\mu\nu}$ を含まず、Einstein gravity の cosmological constant に対応する項は無い。$V(\varphi)$ に constant が入っていても、それは本当に Lagragian を constant ずらすだけで、力学には効かないパラメータなわけである。

運動方程式を実際に書き下すと次のようになる:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} = g^{-1/4}\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\overline{g}_{\mu\nu}} - \frac{1}{4}\overline{g}^{\mu\nu}\cdot\overline{g}_{\rho\sigma}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\overline{g}_{\rho\sigma}}\right) = 0. \tag{6.36}$$

これは正に traceless な (6.14) の形である。ただし、変数は (6.33) の組み合わせで出て来ている。つまり Einstein 方程式の言葉で言えば、行列式が 1 になるように gauge 固定した、そのような traceless Einstein 方程式である。

この理論がほとんどEinstein方程式をrecoverするというのは、先ほどと同様に示せることである。つまりcosmological constantに相当するものが運動定数、即ち力学変数として内在していることがわかる。一度backgroundを決めてしまえば(例えばflatに)、その他の物理としてはEinstein gravityと変わらないのである。これが、重力を変えるアプローチの一つ目である。

ではこのようなことをすると、cosmological constant問題という観点から、何が良くなるのか。通常のEinstein gravityでは、cosmological constantは元々Lagragianにパラメータとして入っていた。そのため、現実的なflat background解が一般には自然に存在しなかった。そもそも存在しないのではどうしようもないのだが、ここで与えた理論では少なくとも存在はするのである。常にflatな解が、つまり欲しいものが理論の中に存在している。この意味では非常に望ましい結果と言える。

ただし、積分定数として結局cosmological constantに相当する物理量が出てきており、その値がゼロ近くになる理由はこの範囲では見当たらない。曲がったbackgroundも同様に解であり、解全体としては連続的に色々な曲率のものがある。従って、なぜ現実に平らなbackgroundをとっているのか？という疑問に対しては、これではやはり答えていないわけである。要するに、平らになりそうもないというところから、平らになっても良いというところまで進展したことになる。

6.4.3 3-form fields

ここまで見てきたtraceless gravityの場合は、Einstein gravityを元から変更してしまう枠組みであった。しかし実は、Einstein gravityの枠内でも、定性的に同様なことを実現できる。それは、次式の右辺にあるような3-form fieldを導入する方法である:

$$F_{\mu\nu\rho\sigma} = \partial_{[\mu} A_{\nu\rho\sigma]}. \tag{6.37}$$

これは3階反対称テンソルgauge場のfield strengthである。通常のEinstein gravityを考えて、一般共変性を持ったactionを次のように与える:[1]

$$S = \int d^4x \sqrt{g} F_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{6.38}$$

この理論の内容がどのようになっているか見るため、運動方程式を出してみると、次のようになっている:

$$\partial_\mu (\sqrt{g} \underbrace{F^{\mu\nu\rho\sigma}}_{\varphi\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}) = 0. \tag{6.39}$$

今、4次元時空を考えているので、この4階の反対称テンソルfield strengthには独立な成分は1個しかなく、実は上のようにスカラー場で置き換えることができ

[1]正確には、文献[R. Bousso and J. Polchinski, arXiv:hep-th/0004134など]にあるように、更に表面項を付け加えることが必要だが、以下では省略している。

るのである。ここで $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は Levi-Civita テンソルを表す。この方程式の言っていることは、このスカラー場に $\sqrt{g}$ をかけたものが時空に対して constant になるということである:

$$\sqrt{g}\varphi = c. \tag{6.40}$$

この c は、運動方程式を解く時に出て来る積分定数である。一見、運動学的には、3-form 場の自由度はもっとありそうであるが、gauge 場であるために力学的にはほとんど自由度が残らない。残るのは時空の constant 分一つだけである。つまり、場の数という意味で自由度を勘定するとゼロになる。しかし完全にゼロ自由度ではなく、時空全体で 1 個だけ残っている。

それで、実際 (6.39),(6.40) を元々の作用に入れて、この効果が重力の方にどのように入るのかを見てみる:

$$S = \int d^4x\sqrt{g}\frac{c}{\sqrt{g}}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}g_{\gamma\rho}g_{\delta\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\frac{c}{\sqrt{g}} = -\int d^4x\sqrt{g}c^2. \tag{6.41}$$

要するに、c^2 という形で cosmological constant に加わる。これは、この積分定数が真空エネルギーを与える役割を果たすということである。通常の Einstein gravity の範疇でも、このように cosmological constant を積分定数、すなわち力学変数にするということが実現できる。これが changing gravity の二つ目である。

6.4.4 Extra dimensions

最後に三つ目の extra dimension による方法を説明する (これは Weinberg の review 中には解説されていないので、論文 [V.A. Rubakov and M.E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B125 (1983) 139] をもとに補う)。高次元空間によって宇宙項問題に取り組むアプローチとして、これから toy model を考える。つまり、changing gravity と言っても、ここでの変え方は、高次元での Einstein gravity を考えたという意味である。最初の traceless gravity は、元から理論構成を変えた。二番目は、3 階反対称テンソルを導入したという意味で、変えたと言えた。ここでは高次元理論にしたという意味で変えたのである。

例えば 6 次元時空で考え、action として次のような形をとる:

$$S_6 = \int d^6x\sqrt{g}(\frac{1}{2}R - \Lambda_6). \tag{6.42}$$

すると、Lagrangian parameter として、cosmological constant 自身、6 次元のもの Λ_6 になっている。この大きさを tune することはしないものとする。そうすると自然には、6 次元全体の background 時空が曲がってしまうのは避けられない。しかしながら、たとえ 6 次元としては非常に曲がっていても、effective に 4 次元として見たとき平らであるという可能性があるのではないかと言うのが着想である。つ

まり、4 次元時空として平らになるということと、(6.42) にコントロール出来ないパラメータが有るということが両立し得るのではないかと追求してみよう。

具体的にどのようにするかというと、background mertric として warped compactification を導入する:

$$ds^2 = \sigma(r)\bar{g}_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu - dr^2 - \rho(r)d\theta^2. \tag{6.43}$$

ここで、4 次元部分の一般共変性を残すために、$\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ として 4 次元の metric を浮かせている。さらに、その他に 2 次元ある (extra dimensions)。その高次元内部空間については、極座標をとって、丸くコンパクト化したい。つまり、(r, θ) で曲座標をなし、θ は 0 から 2π で一周する、そのような変数のとり方をして、そのとき background がどのようになるか調べる。Background としては、θ 方向に回転対称なものと考える。そうすると一般に、$\sigma(r)$ や $\rho(r)$ が残りの r に依存する。無論 dr^2 の前の factor も存在してよいが、r の rescaling により、1 に規格化してある。そのような convention をとろう。

要するに、(6.43) のような変数のとり方をして、effective に 4 次元となるような background を探すために、(6.42) が与える 6 次元の Einstein 方程式を解いてゆくわけである。

この 4 次元の metric $\bar{g}_{\mu\nu}$ が満たす方程式はどのようになるのだろうか。4 次元部分の一般共変性を残す parametrization をしているのだから、一般共変な方程式が出てくると考えられる。従って、4 次元の Einstein 方程式が、$\bar{g}_{\mu\nu}$ に対して出て来る。ただし、4 次元の Einstein 方程式には一つ、手で導入できるパラメータがあった。すなわち、4 次元の意味での cosmological constant のことであるが、ここではそれはどのようなものかと言うと、正に積分定数として導入される:6 次元 Einstein 方程式という偏微分方程式を解くという数学的な問題を扱っているとみなすと、変数のとり方 (6.43) というのは、正に変数分離法である。つまり、r (と θ) に依存するもの、しないものを左辺と右辺にそれぞれ分けてやると、それは constant である。またしても、effective な cosmological constant が力学変数として現れたわけである。

残りの σ や ρ に関して、満たすべき運動方程式は、

$$\frac{3}{2}\frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{3}{4}\frac{\sigma'}{\sigma}\frac{\rho'}{\rho} - \frac{1}{4}\frac{\rho'^2}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{\rho''}{\rho} = -\Lambda_6 + \frac{\Lambda_4}{\sigma}, \tag{6.44}$$

$$\frac{3}{2}\frac{\sigma'^2}{\sigma^2} + \frac{\sigma'}{\sigma}\frac{\rho'}{\rho} = -\Lambda_6 + \frac{2\Lambda_4}{\sigma}, \tag{6.45}$$

$$2\frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{1}{2}\frac{\sigma'^2}{\sigma^2} = -\Lambda_6 + \frac{2\Lambda_4}{\sigma}. \tag{6.46}$$

変数分離法での積分定数 Λ_4 に依存する項が出ている。未知関数としては σ と ρ の二つしかないのだが、式が三つ出てきてしまっている。これでは一般には解けないのではないか?と思うかもしれないが、そもそもの Einstein 方程式が gauge theory

なので、具体的には Bianchi identity によって、三つの式は完全に独立ではない。そのため、数勘定としては解けるようになっているのである。

これから、(6.44)-(6.46) の運動方程式を解く。そのためにテクニカルにどのようにするかというと、変数変換として z という新しい変数を導入する:

$$\sigma \equiv z^{\frac{4}{5}}. \tag{6.47}$$

これを代入して、上述の方程式を解くと、ρ については、積分して z で表せる:

$$\rho = C^{-2} z'^2 z^{-\frac{6}{5}}. \tag{6.48}$$

ここで C は積分定数として導入した。

関数 z 自身についての方程式は以下のように書き直せる:

$$z'' = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{6.49}$$

ただし、'ポテンシャル' V は、

$$V(z) = \frac{5}{16}\Lambda_6 z^2 - \frac{25}{24}\Lambda_4 z^{\frac{6}{5}} \tag{6.50}$$

で与えられる。つまり、$z(r)$ は、r を時間として、このポテンシャル V で運動する点粒子の位置を表すとみなせる。Einstein 方程式そのものは偏微分方程式なので直感的に解くというわけにいかないのに対し、Newton 運動方程式に対しては我々の直感が通じるので z がどのような格好をしているか割と分かりやすい。

運動方程式については分かったので、後は '初期条件' について考察する。極座標の原点は coordinate singularity になっているので、注意が必要となる。原点部分でちゃんとした smooth な geometory を記述しているように factor ρ に対して条件がつく。つまり、丸くなっている (穴が開いていない、conical に尖っていない) という condition として、以下のようになる:

$$\rho(0) = 0, \tag{6.51}$$
$$(\sqrt{\rho})'(0) = 1. \tag{6.52}$$

この boundary condition を z で書き直すと、

$$z'(0) = 0, \tag{6.53}$$
$$z''(0) = C, \tag{6.54}$$
$$z(0) = 1. \tag{6.55}$$

ただし、σ とか変数変換した z のスケールというのは別に決まっていないので、convention に依存する。つまり (6.43) の x のスケールを変えることで吸収できるものなので、ここでは極座標の原点で (6.55) のようにとることにした。(6.53),(6.54) が smoothness condition である。このような条件のもとで方程式を解けば良い。

ポテンシャル (6.50) において Λ_6 は given parameter であり、Λ_4 が effective な 4 次元の cosmological constant である。Λ_4 についてはゼロに近いものが欲しいので、簡単のために $\Lambda_4 = 0$ の場合を考えると、$\Lambda_6 > 0$ としてポテンシャルの形は図 11 のようになる。このポテンシャル中で、上で与えられたの boundary condition の

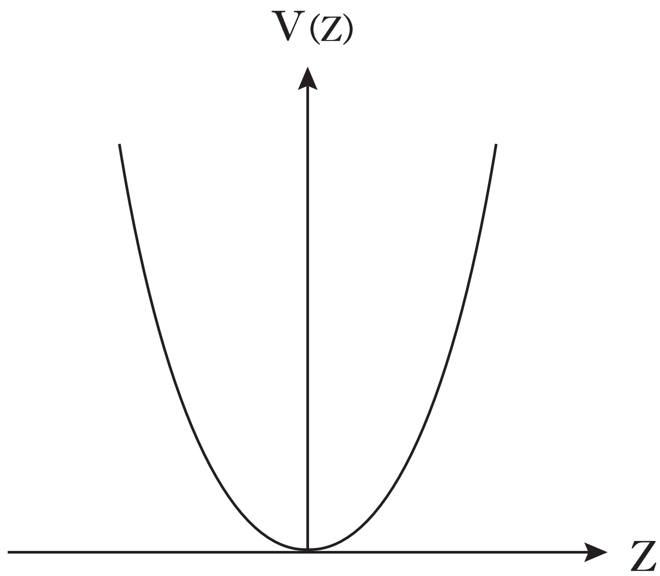

図 11

もとに粒子の運動を考えると、必要な解が得られるわけである。

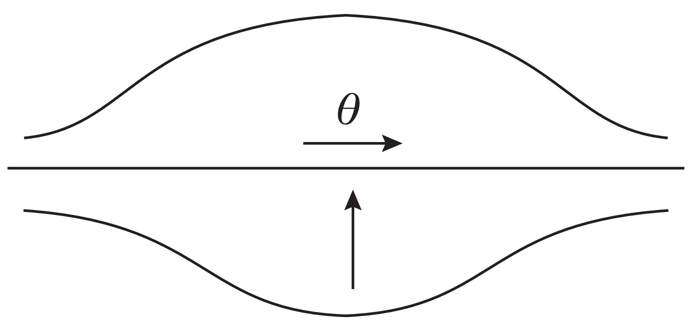

図 12

その解の与える内部空間を地図として表したのが図 12 である。ただし、地図の描き方としては：例えば、図 13 左のような球面の場合を考える。その球面の緯線一周の長さと、その地図 (図 13 右) の横線の長さが同じになるように描いた正積図法である。

図 12 で見ての通り、大まかには丸くなっているが、実は '赤道' が無限に伸びてしまっている。角変数 θ は 0 から 2π で parametrize されているので、$d\theta^2$ の前の

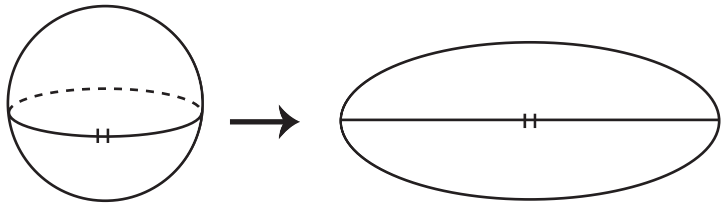

図 13

係数 $\rho(r)$ が $z=0$ で発散して、長さが無限大になっているのである。そのような extra dimension をとると、effective に 4 次元の cosmological constant がゼロになっている解が得られたわけである。

結局、2 次元分丸くコンパクト化しようとして、結果的に 1 次元分の長さが無限に広がってしまった。そうすると一見、残りの 1 次元分しかコンパクト化されず、全時空の広がり方としては 5 次元的になってしまって困りそうである。しかしよく見ると、長さは無限大であるが、extra 次元の volume は finite になっている。従って、effective theory を作る段階で volume が掃き出されて (次節参照)、実は effective に 4 次元になっていると言える。つまり、長さが無限の noncompact な extra 次元のモデルである。

ここまでは良いのだが、更に注意が必要である。実は、赤道部分で 6 次元 metric が潰れて (determinant が消えて) しまっている。このような degenerate metric でうまく理論構成ができるかどうかは分からない。実際、不安定性を誘発することが指摘されていて、このままでは問題がある。ただし、我々の見る 4 次元の metric $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ に singularity が生じているわけではないので、発想としては生かすことが可能かも知れない。

このような難点を克服できるとすると、要するに、4 次元の effective cosmological constant は variable として出て来たわけである。これは、全然異なる方法である前述の二つと定性的には同じ帰結が得られたことになる。このように、どのアプローチでも似たような状況になるのは：Einstein gravity を最終的に得る、それと同じ physics を得たいので、理論を変更する自由度はほとんど無く、唯一 cosmological constant のところだけ可変にすることができるという事情によるものだと思われる。だから結果的に同じようなものしか得られないのであろう。

ここまで toy model として、6 次元の cosmological constant のみが存在する pure gravity の例を見てきた。しかし、ここから、もう少し realistic にするために、4 次元の standard model の matter を導入する。そのために、3-brane を考え、そこに standard model の field が localize しているとしよう。具体的に、極座標の原点のところに 3-brane を置くことにする:

$$S = S_6 + \int_{r=0} d^4x \sqrt{g_4}\lambda. \tag{6.56}$$

ただし、3-brane からの background への寄与を constant energy density λ で表した。

この場合にも、先ほどと同様の warped compactification を行なう。つまり σ と ρ を導入して運動方程式を解くと、先ほどと比べて一つだけ変更を受けて、(6.44) が次のように置き換わる:

$$\frac{3}{2}\frac{\sigma''}{\sigma} + \ldots + \frac{1}{2}\frac{\rho''}{\rho} = -\Lambda_6 + \frac{\Lambda_4}{\sigma} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\sqrt{\rho}}\Theta(\epsilon - r); \tag{6.57}$$

$$\epsilon \equiv +0. \tag{6.58}$$

この変更は 3-brane が source として入っていることに対応し、そのエネルギー密度が (6.57) 右辺の第 3 項に現れている。ここで Θ というのは、3-brane source が $r = 0$ で singularity を出すので、regularize するために使った step function である。

運動方程式は少ししか変更されていないので、pure gravity の場合と同様の操作によって解くことができる。今度の場合、極座標の原点に brane が入っているので、先ほどの図 12 の場合と違い、原点付近が丸みを帯びず、brane の tension に応じて図 14 のように尖ってしまう:

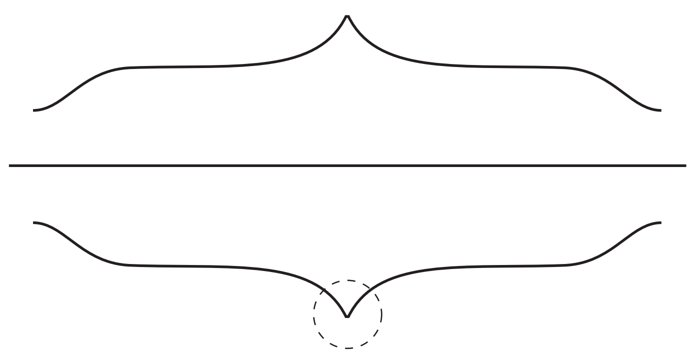

図 14

これは、運動方程式から次のような boundary condition が得られることでわかる:

$$z'(\epsilon) = 0, \tag{6.59}$$

$$z''(\epsilon) = C(1 - \frac{\lambda}{2\pi}), \tag{6.60}$$

$$z(\epsilon) = 1. \tag{6.61}$$

この場合、pure gravity のときに比べてさらに注意する必要があって、問題は、原点を挟んで上下に対称的に尖っていることである。得られた backgound としては、上下にある brane の tension が同じであるようなものになっている。つまり、background の折り返し対称性みたいなものを考えれば、pure gravity の場合と同様、4 次元の effective cosmological constant をゼロにできるという結果である。

これで changing gravity の三つの方法についての紹介は終わるが、問題の状況は少し改善されているにせよ、十分ではないのは既に述べた通りである。

6.5 Kaluza-Klein reduction

ここまで、高次元理論に対する effective theory をあまり説明なく考えてきた。そこで、heterotic M theory などに用いられる brane world 的設定が、effective theory としてどう扱えるか、すなわち Kaluza-Klein reduction で、例えば5次元の理論を4次元的に見たときどうなるか？ということを、簡単に考えてみる。

具体例として、5次元時空 $R^4 \times \mathrm{S}_1/\mathrm{Z}_2$ を考える。これは、典型的な例として取り上げるもので、他の様々な可能性に対しても、同様なことができると考えられる。

今、第5次元を extra dimension として考えて、action は次のようになる:

$$\begin{aligned} S &= \int dy d^4x \sqrt{g_5}(R_5 - \Lambda_5) \\ &\quad + \int_{y=0} d^4x \sqrt{g_4}\mathcal{L}_1 + \int_{y=l} d^4x \sqrt{g_4}\mathcal{L}_2. \end{aligned} \tag{6.62}$$

ここで、extra dimension の座標を y としており、boundary が 3-brane になっている。右辺第1項は5次元 (bulk) の pure gravity で、第2項と第3項はそれぞれ各 3-brane 上での matter の action である。また、g_5 と g_4 はそれぞれ5次元と4次元部分の metric であり、R_5 と Λ_5 はそれぞれ5次元のスカラー曲率と cosmological constant である。

我々は $y=0$ の brane に居ると仮定すると、effective な4次元理論はどうなるか大まかに考えてみよう。以下では、 両端の brane 間の距離を l に固定する何かしらのメカニズムが働いているものとする。もし固定されずに、brane が自由に5次元方向に動いてしまう、あるいは5次元方向に空間が広がってしまうような場合、その取り扱いには更に注意が必要である。しかし今はこのような微妙な状況ではなく、4次元として素直に記述できる状況を考える。要するに、effective theory として regular な記述が可能だと仮定するのである。

そこで、5次元の metric を次のように parametrize する:

$$(g_5) = \left(\begin{array}{c|c} g_4 & \\ \hline & -1 \end{array}\right). \tag{6.63}$$

さらに、g_4 を次のように展開し、zero mode と Kaluza-Klein mode に分解する:

$$g_4(x,y) = \bar{g}(x)a(y) + \sum_n \bar{g}_n(x)a_n(y). \tag{6.64}$$

ここで以下のように定義しておく:

$$a(0) = 1, \quad a(l) = a_l. \tag{6.65}$$

これらの変数を用いて、(6.62) の action を次のように書き換える。これはすなわち、4次元的にどのように見えるかということを schematic に表す effective theory

である:

$$
\begin{aligned}
S_{\text{eff}} &\simeq V\int d^4x\sqrt{\bar{g}}(\bar{R}-\Lambda)+\int d^4x\sqrt{\bar{g}}\mathcal{L}_1 \\
&\quad +\int d^4x\sqrt{\bar{g}a_l{}^4}\mathcal{L}_2+\mathcal{O}(m_{KK}{}^{-1}); \qquad (6.66)\\
V &= \int_0^l dy\sqrt{a^4}a^{-1}=M_{\text{Planck}}{}^2. \qquad (6.67)
\end{aligned}
$$

まず、重力について見たいので、bulk gravity の zero-mode を取り出した。そうすることにより、4 次元重力が出て来る。その y 積分の部分は (6.67) のように bulk の体積を表し、effective に 4 次元 Einstein action が実現される設定から、これが 4 次元の Planck scale に他ならない。ただし、(6.62) の action においては、5 次元の重力スケールを fundamental scale として、それを 1 とする単位をとっていた。(6.66) の第 2 項が我々のいる brane の寄与であり、$a(0)$ を 1 ととる convention なので、$\bar{g}$ という metric で重力をみることになる。第 3 項が反対側にある brane の寄与であり、a_l という warp factor がついた metric で相互作用するわけである。最後に Kaluza-Klein mode があって、典型的な mass m_{KK} で制御される高次の項が、展開によって現れる。大まかにはこのようになっている。これらの項がそれぞれ色々な効果をもたらすのである。

例えば、(6.67) の volume が何らかの原因で fundamental scale より大きい場合のシナリオを large-volume extra dimension と呼ぶ。すなわち、5 次元やさらに高次元の理論の fundamental scale に比べて 4 次元の Planck scale が大きいことによって、重力は弱いと考えるのである。(6.67) の volume を巨大にする方法としては、extra dimension の距離 l を拡げて大きくするか、warp factor a の寄与を大きくするかと言うことになる。その際に fundamental scale としては、GUT scale から weak scale まで (あるいは、もっと低い energy scale を含め) 様々な可能性が考えられている。4 次元重力スケールと fundamental scale の階層構造の起源を高次元 volume に求める試みである。

具体的に Witten が heterotic M theory の文脈でこの効果を考察している。問題となるのは、図 15(a) のような MSSM の振る舞いである。三つの gauge interaction の coupling constant $\alpha_{1,2,3}$ の統一点 (GUT scale) で、重力の dimensionless coupling constant α_G は一致しない。Gauge unification point では重力が弱すぎて、二桁くらいスケールをあげて初めて自然な重力スケールになっている。この理由として、fundamental scale (string scale) を GUT scale にとり、Planck scale は bulk の volume factor で大きくなるためだと考える。Coupling の振る舞いで見ると、重力相互作用に bulk の効果が効き始める所から、図 15(c) のように重力 coupling が急増する、すなわち、GUT scale より下で 5 次元時空を感知する重力だけが強くなるのである。ちなみに、brane 上の gauge interaction も 5 次元 bulk を見てしまう理論では、図 15(b) のように、両方強くなって結局一致しない。なお、この図は、文献 [J. Polchinski, arXiv:hep-th/9812104] からの引用である。

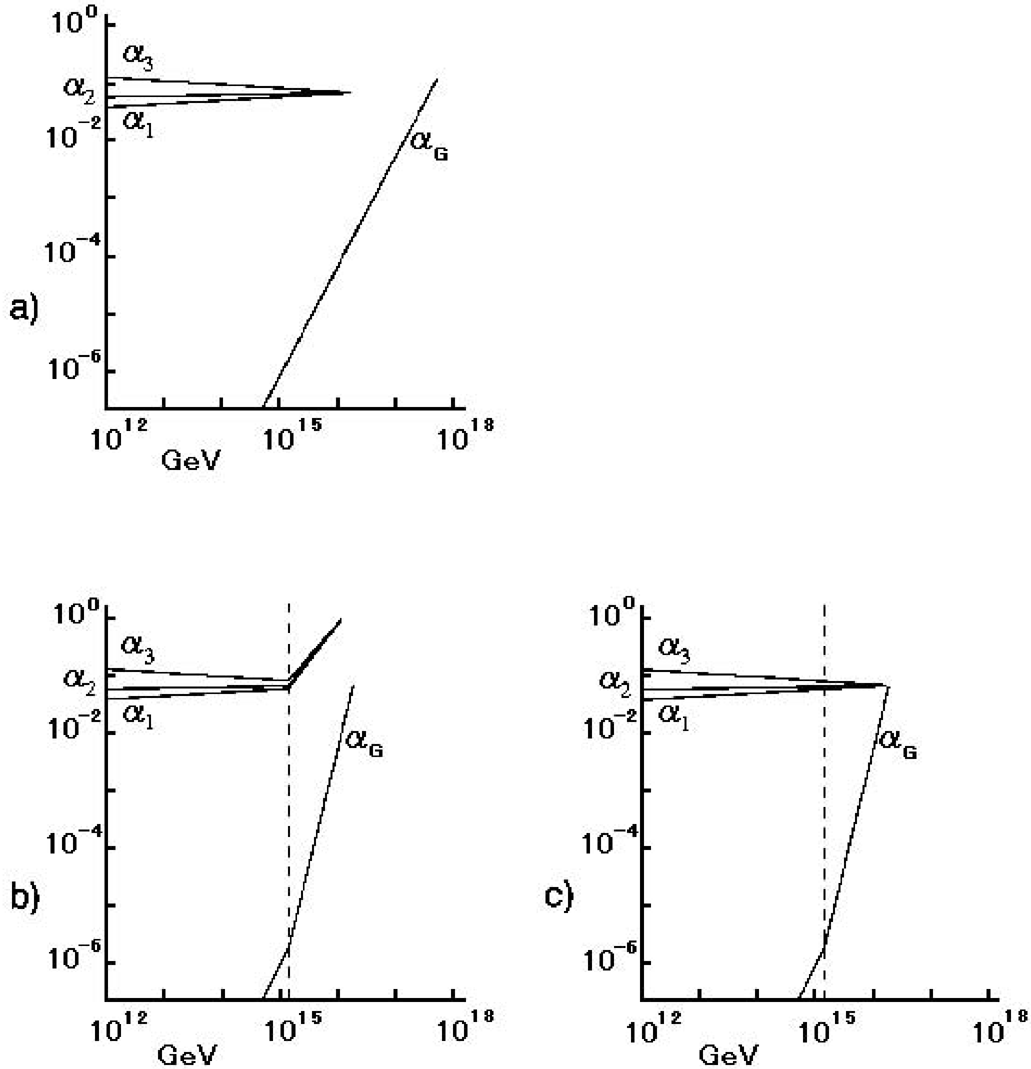

図 15

6.6 解決策

さて、いくつかのアプローチについて説明してきたわけだが、ここまでのところ一言で言うと、どの場合も何かしらうまくゆかない。手短にまとめると：Adjustment mechanism は、スカラー場を用意して、その非常に平らなポテンシャルを持ってくる。それによって background 時空の曲率が小さいということを、運動方程式から出そうとした。しかし実は、Einstein 方程式の要請から、fine tuning なしでは Planck 定数が無限大になり、重力が decouple してしまう。そのため、このよ

うに得られた flat background は現実的ではなかった。また、changing gravity は、様々なアプローチで結果的に、cosmological constant (Einstein gravity だと input parameter である) を dynamical variable (integration constant) にするものであった。そうすることによって、flat な background の存在が解として自然に許される。しかし、同時に flat でない解も許されてしまうので、なぜ実際は background 時空が flat になるのかという問いの答えにはならないのである。

このようなことを踏まえて、effective theory に基づく考察として、さらに次の段階に進もう。要するに状況は：Adjustment mechanism では flat な解が選ばれるのだが、都合の良い background がそもそも存在しない。他方、changing gravity では、都合の良い background は存在するのだが、なぜ flat な解が選ばれるのか答えられない。そこで、それぞれのアプローチ単独ではうまくいかないこれら二つを、併せて考えてみることにする。

とりあえず traceless gravity を用いることにしよう。通常の Einstein gravity ではなく traceless gravity の場合に、adjustment mechanism で考えたようなスカラー場を入れてみる。そうすると、そのスカラー場を含めて action は次のようになる:

$$S_4 = \int d^4x \left(U(\varphi)\overline{R} + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - V(\varphi) \right). \tag{6.68}$$

この $\overline{R}$ というのは、traceless gravity の説明で与えた Weyl invariant な組み合わせである。これから、次のような運動方程式が導かれる:

$$U'(\varphi)\overline{R} = V'(\varphi). \tag{6.69}$$

前と同じく background 時空を扱うので、スカラー場の運動エネルギーは無いものとした:

$$\partial_\mu\varphi = 0. \tag{6.70}$$

つまり、時空に対して constant であるような background 場を考えている。

もし、ポテンシャル $V(\varphi)$ が非常に平らならば、flat な background 解を得る:

$$U'(\phi) \neq 0, \quad V'(\phi) \simeq 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{R} \simeq 0. \tag{6.71}$$

運動方程式から、$\overline{R}$ は非常にゼロに近くなる。通常の Einstein gravity の場合は Einstein 方程式から trace part の制限が出てきて、重力が decoupling して unrealistic になっているのであった。対して、traceless gravity の場合は trace part がない。つまり、スカラー曲率 $\overline{R}$ に対する制約が存在しない。従って、重力が decouple することもない。このように、問題の一つは回避され得るのである。もし background 曲率が無くて、しかも重力も消えないといういことがあるのなら、その方向に可能性が開けていると期待できる。

ただし、以上のような設定を認めたとしても、まだ fine tuning の必要性そのものとしては残ったままである。ポテンシャルの大きさではないが、その傾き $V'(\varphi)$ は

非常に小さくなければ観測に合わないのである。具体的には：$\overline{R}$ というのは V'/U' である。設定として $U' \neq 0$ とはするが、これは fundamental scale に比べて非常に大きいとは考えにくい。そこで、$V' \simeq 0$ を要請することになる。要するに、非常に平らなポテンシャルになるように tune しなければならないのである。Cosmological constant そのものとは別の tuning だが、同様に非常に厳しい fine tuning である。これをどうにかしないといけない。

さて、思い起こしてみると adjustment mechanism には、重力が decouple する結果になるという困難の他に、そもそもポテンシャルの傾きが小さいという statement が意味をなさないという問題もあった。場を Weyl rescaling した時に大きさが変化するので、小さいという意味がそもそもはっきりしないのである。従って、小さくするメカニズムという以前に、小さいという statement が definite な意味を持つようなセッティングを考える必要がある。

6.7 Brane world

実は、今考えた traceless gravity においては Weyl invariance のためにこの点もクリアーされているのだが、以下ではまた別の方向として、brane world による setup について説明しよう。

Cosmological constant を variable にする仕掛けとしては何でも良いのだが、ここでは簡単のため、具体例としては 3-form field を念頭に置くことにする:

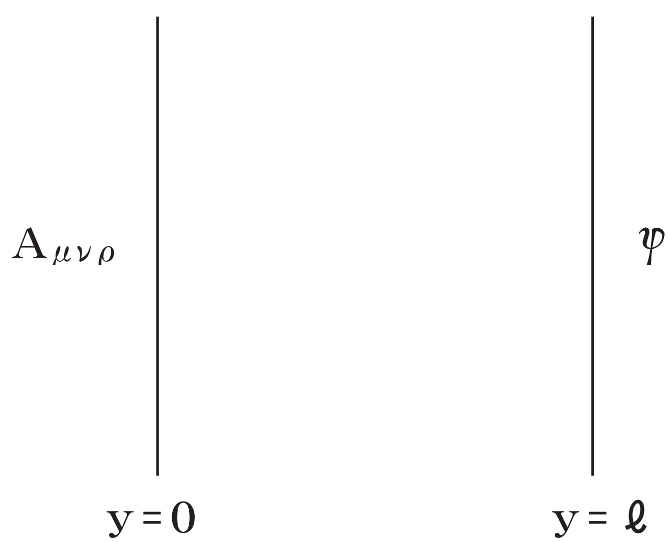

図 16

Brane world としては例によって図 16 のような 5 次元 bulk を、これも単純に考える。ただし、ここで 4 次元の effective な理論に行った時に、4 次元の cosmological constant が variable になる、そういう setup にしておきたい。そのため一番手軽に、我々の居る $y=0$ に 3-form field を入れてある。あまり具体的詳細に意味があるわけではないが、$A_{\mu\nu\rho}$ という sector を入れておけば、4 次元 effective theory としては、cosmological constant が variable として現れるわけである。

さらに adjustment mechanism だが、我々のいない逆側の brane に scalar φ があるものとする。先ほど Kaluza-Klein reduction を考えた状況のように、bulk には重力があり、両側の brane の間隔が、適当なメカニズムで l という長さで固定されている。

以上のような状況設定を考えることにする。前に書いた様に全体の action を与えてもよいが、特に $y=l$ 部分の brane action に着目しよう。その brane 上での adjusting scalar φ に対して、

$$S_l = \int_{y=l} d^4x\sqrt{g}\left(U(\varphi)R+\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi-V(\varphi)\right) \tag{6.72}$$

となる。ここに出て来る g というのは bulk からの induced metric である。もちろんこの段階で、この g というのを φ に依存する Weyl 変換をして結果、V を色々と変えることができるわけである。しかし、φ によらない bulk の存在ゆえに、その中で明らかに区別された induced metric というものがあり、それに関して V の傾きが小さいとか大きいとか、その statement にこの setup で意味が生じる。この点が実現したいことであった。

さて、我々は $y=l$ ではなく $y=0$ に居る。そこで、我々には $y=l$ の sector がどう見えるか、ということを考える。これは正に Kaluza-Klein reduction による effective theory の話として考えておいたものである。つまり、この $y=l$ brane 上での induced metric というのは、我々が見る metric $\bar{g}_{\mu\nu}$ に $y=l$ での warp factor a_l を掛けて、次のようになる:

$$g_{\mu\nu}=\bar{g}_{\mu\nu}a_l. \tag{6.73}$$

従って、action としては、

$$S_l=\int_{y=l} d^4x\sqrt{\bar{g}}\left(\bar{U}(\bar{\varphi})\bar{R}+\frac{1}{2}\partial_\mu\bar{\varphi}\partial^\mu\bar{\varphi}-\bar{V}(\bar{\varphi})\right) \tag{6.74}$$

と言う contribution として見えることになる。ここで、

$$\bar{\varphi}\equiv\varphi\sqrt{a_l}, \tag{6.75}$$

及び、

$$\bar{U}(\bar{\varphi}) \equiv U(\varphi)a_l, \tag{6.76}$$

$$\bar{V}(\bar{\varphi}) \equiv V(\varphi){a_l}^2 \tag{6.77}$$

と定義した。

我々の居る $y=0$ では、warp factor が 1 となる convention をとっているので、$\bar{g}$ というのは我々が、というか $y=0$ brane 上の quark や lepton が、見る metric であり、それとの coupling の仕方から我々にどう見えるのかということがわかるのである。もちろん単に変数の書き換えを行なっているだけなので、内容に影響はない。形としても、もとの $U(\varphi)$ や $V(\varphi)$ が $\bar{U}(\bar{\varphi})$ や $\bar{V}(\bar{\varphi})$ に置き換わっただけで、Kaluza-Klein reduction の際の warp factor による rescaling ((6.66) の第 3 項) の効果が現れている。ここで、U と V では rescale の仕方が少し違うのは、U にかかった R の方でも rescale するので、その分の差がでているからである。

それで、今の rescale した理論、即ち 4 次元での effective theory の action、それから運動方程式を出す:

$$\bar{U}'(\bar{\varphi})\bar{R} = \bar{V}'(\bar{\varphi}). \tag{6.78}$$

ただし、例によって background となる $\bar{\varphi}$ は時空によらないとした:

$$\partial_\mu \bar{\varphi} = 0. \tag{6.79}$$

我々の見る 4 次元時空の曲率が $\bar{R}$ であることに注意しつつこれを元々の U や V で書いてみると、

$$U'(\varphi) a_l \bar{R} = V'(\varphi) {a_l}^2. \tag{6.80}$$

こうしてみると、$\bar{R}$ が小さいためには、a_l が小さければよく、U や V には強い条件をつけなくても済むことが分かる。つまり、もとの 5 次元 fundamental scale でみて、U や V が fine tuning なしの order one の量だとし、$U' \neq 0$ と V' も order one とする。すると自然に

$$\left| \frac{V'(\varphi)}{U'(\varphi)} \right| \lesssim 1 \tag{6.81}$$

となり、結局

$$|\bar{R}| \lesssim a_l \tag{6.82}$$

と言うことになる。

この a_l という warp factor を非常に小さくできれば、我々が 4 次元で見る曲率が小さいということがスカラー場の運動方程式から出てくるわけである。つまり、adjustment mechanism において必要だったポテンシャルの傾きに対する fine tuning が、warp factor の tuning に置き換わったことになる。

6.8 Spacetime inflation

ここまで問題を次々と置き換えてきた結果、その様な warp factor を自然に小さくするということが可能であるのかどうか考えることに到った。

ここで、一見関係ないような話として、宇宙の inflation というものが、どういう描像であったか思い起こしてみる。
i) spatial inflation: 以下のような 4 次元線素を考えてみる:

$$ds_4{}^2 = dt^2 - a(t)\,d\vec{x}^2. \tag{6.83}$$

3 次元空間の scale factor(の自乗) $a(t)$ は、cosmological constant Λ によって、次のように振舞う:

$$a(t) \sim e^{t\sqrt{\Lambda}}. \tag{6.84}$$

過去にこの加速膨張フェイズ、de Sitter slice のようなものがあると、空間が引き延ばされて、結果的に出てくる 3 次元空間は非常に平らになる。

これは、4 次元時空の範囲内であったわけだが、似たような事を 5 次元時空間で考えてみよう。
ii) spacetime inflation: 5 次元の warped compactification を考える:

$$ds_5{}^2 = a(y)\bar{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2. \tag{6.85}$$

ここで、$a(y)$ が warp factor である。5 次元 bulk の cosmological constant Λ によって、analogous に次のようになる:

$$a(y) \sim e^{-y\sqrt{-\Lambda}}. \tag{6.86}$$

今度は 3 次元空間ではなく、4 次元 background 時空を考えるわけで、時間方向ではなく、5 次元 extra dimension 方向の evolution を扱う。同様に cosmological constant があるが、今度は negative にいれて、anti-de Sitter slice にする。ここでなぜ符号が変わっているのかというと、先ほどの spatial inflation の場合は、evolution の方向が timelike であるが、今の場合は、spacelike な extra 次元を考えているので、spacelike evolution であり、その計量の符号の差のためである。

この extra dimension 方向に l だけ離れていると、

$$a_l \sim e^{-l\sqrt{-\Lambda}} \tag{6.87}$$

と言う形が得られる。従って、この l という間隔が適当に大きいと、warp factor は exponential に小さいということになる。このような exponential warp factor は、large volume のコンパクト化を実現するために Randall と Sundrum によって用いられている。その場合は今と逆に、$e^{+y\sqrt{-\Lambda}}$ の形を用いる。つまり、bulk の大きな warp factor の効果で内部空間の volume が大きくなり、Planck scale が大きい ((6.67) の寄与) というシナリオである。ここでは対照的に、$y = l$ brane での warp factor が小さい ((6.66) 第 3 項) という効果を用いる。これが前節で必要となった状況であった。

ここでも問題の置き換えが起こっているわけで、小さな warp factor が、ある程度大きな l によって実現される。要するに、background が flat な理論を effective theory として実現しているような configuration があるかというと、例えば、図 16 のような状況が理論の中に存在していれば、その自然な候補であるということになる。

さて、以上のような考察に基づいて宇宙項問題を捉え直してみると、inflation とのアナロジーは明瞭であろう。通常の spatial inflation は、時間方向の evolution を考えて、その結果 3 次元空間が引き延ばされて非常な flatness が自然となる。同様に、cosmological constant 問題というのは、background の 4 次元 spacetime がなぜこんなに flat なのかという flatness 問題として理解する事ができる。一旦そのように捉えれば、extra 次元方向の evolution を考えて、その結果 4 次元時空が引き延ばされて非常に flat な background を得ると言う描像は自然である。

逆向きの evolution として言うと：通常の inflation の場合、仮に現在 flat でないとして、さらに空間曲率を過去に遡ってみると、fundamental scale の限界をこえて非常に強く曲がった 3 次元空間から出発したことになってしまう。しかし、それは考えにくい (effective theory としての取り扱いが不適切で、異なった変数等で記述すべき領域に入ってしまう) ので、現在 flat であるのが effective theory として自然と言う認識がもてる。対して、spacetime inflation の場合、同様に考えて我々と反対に位置する brane の曲率をみると、fundamental scale の限界をこえて非常に強く曲がった background 3-brane が存在するとは考えにくい (effective theory としての取り扱いが不適切で、異なった変数等で記述すべき領域に入ってしまう) ので、我々の 3-brane background は flat なのが effective theory として自然と言う認識がもてるわけである。ここまで来ると結果的に、adjustment mechanism のためのスカラー場の存在が本質ではなかったということも、今や明らかだろう。

より一般的に言うと、このような理解をする上で要となるのは、前章までに展開してきた、effective theory に基づく場の理論空間と真空選択の枠組みであった。即ち：想定される場の理論空間全体を見渡すと様々な effective theory があり得る。SUSY があるために flat background になっているところもあれば、たぶん全然 flat になっていないようなところもある。上に考えたような感じで SUSY なしに flat background になっている moduli point もあってよいだろう。そういう所を実現する仕組みがあるとき、あるいは、その様なダイナミクスがあるとき、自然に現実的な effective theory が選ばれる、という認識である。

6.9 Quintessence

このようなアプローチに特徴的な点の一つは、例えば supersymmetric な background の場合などと異なり、cosmological constant は小さくなるにしても、必ずしもゼロという帰結にはならないことである。上の warp factor の場合、むしろゼロでない値が brane 間隔 l に depend した形で出てくる。つまり extra 次元方向の

固定の仕方によって、大きさが決まっているわけである。

実は、最近の supernova の観測などによって推定されている色々な cosmological parameter を見ると、cosmological constant は critical density 程度あった方が、観測的に良いかも知れない。そういう可能性がある。この cosmilogical constant の構成要素を quintessence と呼ぶと、宇宙には photon や neutrino とか baryonic matter や dark matter に加え、第 5 の成分があるという言い方ができる:

1. photons,
2. neutrinos,
3. baryonic matter,
4. dark matter,
5. quintessence.

この quintessence は、狭い意味では、そのような効果を出すスカラー場 (極めて小さなスケールでの late inflation、あるいは adjusting scalar として要請したような小さな傾きのポテンシャルを持つ理論) を指して使われることも多いので、もっと一般的に dark energy というような言い方もする。

もちろん spacetime inflation を考えるにしても、background curvature がどの位の大きさになるかというのは、setup 次第ということになる。どう brane 間隔を固定するか、詳細が分からない段階では、そもそも positive なのか negative なのかを含めて決まっていないわけであるが、観測的には、遠方の supernova を見ると加速しつつあるように見えることから、positive を示唆しているようである。いずれにしろ、真空選択のアプローチは、このような状況にはマッチしている。

[質問]

Dark energy と dark matter の density がほぼ等しいのはどう説明できるか？

[返答]

これは coincidence 問題と言われているもの (の一部) である。その説明を目論む試みもあるが、effective theory の範囲内で良く理解できる段階には到っていないと思われる。

宇宙膨張の経過に関して、dark energy は cosmological constant 的にほぼ一定であるのに対し、dark matter は薄まってゆくと考えられる。従って、今現在両者が同じ order である理由は、言い換えれば、なぜ我々は今この時点で観測しているのかという、anthropic principle 的な問題意識に接近してゆかざるを得ない面がある。つまり、なぜ現在そうなのかというのは、なぜ我々が現在ここに居るのか、なぜここに人間が存在するかという、そういう話になってゆく。もちろん、cosmological constant 問題の場合と同様に、anthropic principle 自体は逃れようのないものだとしても、それで全てではなく、より深い考察が意味を持つ可能性も十分あると思われるが、今のところよく分からない。

ただ、考えようによってはこの coincidence は、宇宙項問題の解決にとって人間

原理が副次的な役割に過ぎないことを示唆しているとも思える。人間原理から自然な制限としては既に言及したように、宇宙の寿命や銀河形成の条件が考えられた。一方この coincidence は、cosmological constant の大きさがむしろ星の寿命 (我々が居る今) のスケールに関与している可能性を思わせる。具体的に上述の spacetime inflation の場合、extra dimension の間隔を規定する相互作用が standard model の (星の寿命を決める) 相互作用と (例えば SUSY breaking を通じて) 統一的に連関していて、その結果として dark energy の大きさが決まっているとすると、coincidence は自然な帰結になるのかも知れない。

いずれにせよ、energy density の他の成分も併せ、成分比の起源について追求する価値は大きいと思われる。

これで目次に掲げた話は大体終了するので、まとめておくと、effective theory に基づく考察で、大まかに基本法則の理解が得られたわけである。遍在的問題として cosmological constant のような事もあるけれども、諦めずに追求してゆくと、場の理論空間と真空選択という framework に収まる可能性が見えて来る。もちろん、自然が実現する本当の解決は、例えば我々の未だ全く知らない要因によってそうなっているという可能性も大いにあるのだが、その場合でも、今の段階で具体的に得られる作業仮説を積み重ねてゆく探求のプロセスがいずれ、新たな自然認識を得る手掛かりを与えるものと期待される。

そういう意味では、これまでとりあげたトピックスは極めて限られたものに過ぎない。大元に effective theory の枠組みを置き、超対称性や高次元時空といった素材を用いることで、インフレーションや宇宙項などを手掛かりに自然理解を得る試みであったわけである。(必要であればここで 6.1 節に戻ることができる。)

7　おわりに

一連のトピックスをとりあげてきて、最後に、今までの考察全体を見渡す意味で以下のような理論の図を描いて、更なる展望を探ろう:

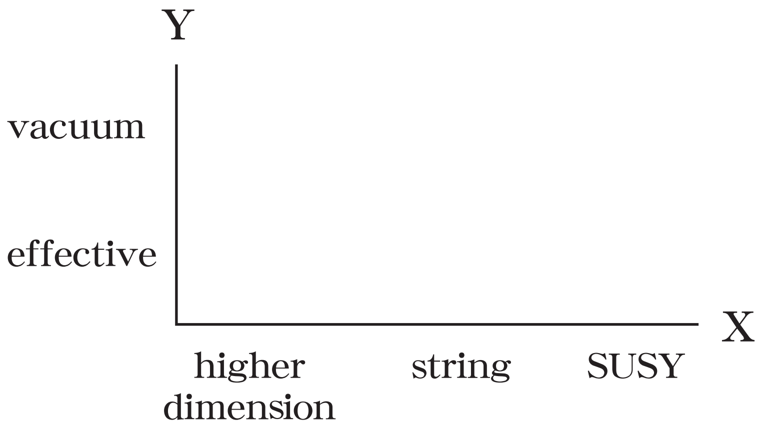

図 17

ここで、座標軸のとり方として試みているのは：X 軸としては、(広い意味での) 場の理論的な道具立てを、力学的自由度の拡張という観点から歴史的順序に並べてあり、Y 軸としては、基本法則認識の枠組みとなる理論的構造を、これも発展的順序に並べてみた。座標平面には、その座標に応じて様々な素材が配置され、基本法則探求の全体像を示している。

具体的に X 軸について、まず座標原点を通常の 4 次元局所場の理論にとろう。
i) 次に、外部自由度 (時空添字) の拡張として高次元理論 (20 世紀前期〜) を配置する。つまり、higher dimension というのは力学変数の index の external な部分、即ち、時空の次元を増やしてゆく。なぜ増やすかというと、その増やしたことによって、広い範囲の自由度を一貫したものと見て、統一的に扱いたいからである。
ii) 続いて、string theory (中期〜) は、今度は内部自由度を連続的な変数にまで拡張したとみなす事ができる。もちろん、例えば higher dimension と string に分けて記しているのは、お互いに排他的というわけではなく、同時に考えることも念頭に置こう。
iii) さらに進んで、supersymmetry (後期〜) について、その歴史的起源の一つは fermionic な string の構成にあり、X 軸の最後に位置している。添字を増やすという観点からは結果的に、Grassmann 変数を用いた拡張、Grassmann odd の extra dimension とみなすこともできる。より一般に、反可換に限らず、非可換な自由度の利用を示唆するものかも知れない。

要するに、異なる自由度が実は同じものと認識することによる理解の手段として、数理的な拡張を試みる方向性をこの軸で表す。

それに対し Y 軸は、原点として相対論的量子論という構造を置き、一般に理論共通の構造的特徴を抽出した認識を与える。
i) まず、effective theory (中期〜) の枠組みが、特定の力学変数をとったときの記述として理論の effective な構造を明らかにする。
ii) 続いて理論の vacuum structure (後期〜) の考察により、そもそもどんな力学変数が選ばれるか、background の構造と vacuum dynamics の内容を理解してゆく。

つまりは、理論の拡張に直交する方向性として、理論に共通する自然認識のための物理的 framework を表す座標軸をとったことになる。

さて、これまで考察してきたトピックスをこの座標平面上に配置してみると：
i) まず、effective theory の framework でみると、高次元理論で brane world の scenario などを、string theory で heterotic M theory の duality などを、それから、SUSY で dynamical scale generation などについてとりあげた。
ii) また、vacuum structure の方では、高次元理論で spacetime inflatioary background などを、string theory で弦理論空間 (図 8) などを、それから、SUSY で dynamical inflation の selection などについてとりあげた。

このように基本的に crossover topics の話をしてきた。もちろん、crossover を考えるまでもなく、それぞれのトピックス (higher dimension, string, SUSY, effective theory, vacuum structure) の範囲内でもそれ自体として、様々に追求すべきことも多い。ここで crossover をとりあげたのは、それによって基本法則に対する理解の仕方を探り、自然認識のための作業仮説を得る試みであった。

更なる展望をこの図から探ることができるだろうか。素直に考えて、座標軸の先にあるものを構成してゆくのが一つの方向を与えるであろう。無論、そもそも、この図自体やその座標軸のとり方として全く異なるものを考えたり、この図に基づくにしても、例えば別の Z 軸を導入したりといった本質的な展開が臨めれば、それに越したことはないが、今のところ手掛かりに乏しいと思われる。

しかし、そうでなくても、特に Y 軸方向の発展は、基本法則の様相を捉える上で大きく貢献する可能性がある。今ある effective theory に基づく記述や vacuum selection の帰結は場の量子論による基本法則の構成を納得のゆくものにしている。同様に、次に来たるべき何らかの認識の枠組みがきっとある。それを得られたあかつきには、現実的なのモデルの理解が更に深まるのではないかと期待されるわけである。

一つ注意すべきは、発展の最終的な形としてどうなるかというのは、その発端からは必ずしも分からない点である。例えば effective theory にしても、ルーツの一つは繰り込み群にあるが、そこから一般的な構造が認識されるまでには、かなり時間を要している。最終的な事はわからないにせよ、新世紀にあたって得られる枠組みの糸口というのは、今まさしく、出て来るべき時期なのではないだろうか。

そういう意味で今は絶好のチャンスである！次の展開を引き起こす絶好のチャンスという見方がきっとできるので、是非絶好の機会だと思って基本法則の研究を皆さんが進めて行ってもらいたい。

更新履歴

5/16, 2002: Ver. 0.50 前半の公開
9/12, 2002: Ver. 0.99 後半の追加
12/5, 2002: Ver. 1.00 字句の修正
3/26, 2017: Ver. 1.50 脚注の追加