2002年 三者若手夏の学校 講義録

超対称性と階層性

講師： 中野博章 氏 (新潟大学)

北海道大学 素粒子論研究室 作成

目 次

第0章　Introduction

お招き頂きましてありがとうございます。

夏の学校というと、僕も十何年前に — ちょっとさば読みましたけれども（笑）— 長野県のこの辺に来て講義を聞きました。当時は民宿みたいなところにみんなで分かれて泊ってまして、特に僕が M1 の時には九十六畳の大広間に泊まってですね、夜は二つに仕切って片側は大宴会、もう片側は野戦病院のようにぐたーっと寝ているという、そういう状況だったんだけれども、それに比べると、ここの施設は立派だし涼しくて非常にいいですね。

今日と明日で supersymmetry（超対称性）と hierarchy（階層性）というタイトルでお話ししたいと思うんですけども、M1 の人がかなり多いので基本的には elementary な話をしようと思います。最初、準備校の北大の方から依頼を受けたときに、質量の階層性について話をしてくれということだったので、それを僕が誤解していなければ、多分こういうことをしゃべれということだと思います。

Plan of the Talk

Part Ⅰ:　階層性問題とは何か?

- 「ElectroWeak スケール」の起源をめぐって
- 湯川相互作用 の「世代階層構造」をめぐって

Part Ⅱ:「超対称な場の理論」入門

- 「superfield 形式」と「正則性 (holomorphy)」
- 超対称性 と くりこみ群

Part Ⅲ:「湯川階層性」と「超対称フレーバー問題」

- 「隠された対称性」に基づいた試み
  — anomalous $U(1)$ ゲージ対称性 —
- 「隠されたダイナミクス」に基づいた試み
  — The power of SCFT —

お話ししたいことは基本的に二つあって、その内の一つは「階層性とは何を意味しているのか」ということなんですけど、これは electroweak スケールということについてと、素粒子の世代構造についてお話したいと思います。

講義では、三つのパートで考えていきたいと思います。パートⅠ、Ⅱ、Ⅲ とありまして、一つはまず、マスターの人向けに何が問題なんやろうかということについてお話して、二つの問題があることを説明します。

そこで、その問題を考えるために、パート Ⅱ では supersymmetry を導入したいんですけど、これが最初に予定したものと狂って割とスタンダードなお話をします。この熱い中で細かい添字がごちゃごちゃ出てくるのはいややと思うので、さらっとやりたいと思います。とにかく、キーワードは正則性という言葉です。その後パート Ⅲ でちょっと必要なので、くりこみ群のこともちょっと触れておきたいんですけども、くりこみ群に入るか入らないかあたりまでが今日の予定です。

パートⅡ は単に場の理論のお勉強なんですけど、パートⅢ でもうちょっと現象論的な話題に入っていきます。そして、超対称性というのを考えたときに、フレーバー問題というのが非常に深刻な問題なんだということ、それ

を解決するのに、二つのアプローチがあるということ —「隠された対称性」に基づく試みと、「隠されたダイナミクス」に基づく試み — についてお話ししたいと思います。ところが大変申し訳ないんですが、最初の方の「隠れた対称性」は最近もうやってないし準備できませんでしたので省略させて頂きまして、最近、私がいろいろな人と研究している superconformal field theory （超共形な場の理論、以下 SCFT）というのを使ったアプローチを紹介したいと思います。

全体としては、パート I、パート II はマスターの人向けで、比較的丁寧にやりたいと思います。それに対して、パート III は時間もなくなると思うので、「セミナー形式」でガンガンやります。

いきなり余談　さて、夏の学校の講義ということなので、いろんな興味を持ってる人がいると思います。なので、最初にですね、我々は今どこにいるのか、ということを確認しておきたいと思います。

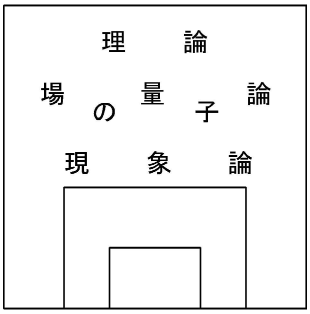


図 1: Where are We? (Ver. 1)

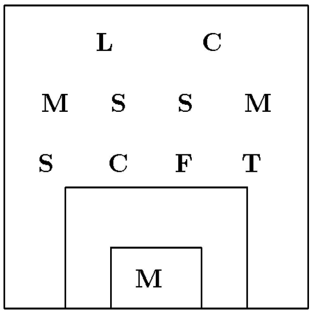


図 2: Where are We? (Ver. 2)

この講義でどういうポジションを占めようか、我々はどこにいるのか、ということです。

（まず Fig. 1。）センターサークルを描いてませんけども、最前線で新しい理論を作る人。ちょうど中間の位置で場の量子論をもとにして援護射撃をする人。背後で実験との関係をつけて現象論をやる人。みなさんこれからどういう方向に進んでいくかというのはいろいろあると思いますけど、この三つのですね、自分がどの辺の位置を占めているのか、というのは絶えず意識しながら物理をやってほしいと思います。

さて、サッカー好きな人からすると「なんやこれ、スリーバックやないか。もう監督も代わったで」だし、現象論に興味を持ってる人にしてみれば「なんで現象論が後方やねん」となるかも知れないですね。

ということで、バージョン 2（Fig. 2 参照）。最前線はやっぱり加速器実験、high energy frontier。我々の自然界を実験で確かめようということです。LC というのは Linear Collider（線形加速器）のこと。linear collider はまだ計画だけですが、ちょうど五年後の 2007 年に LHC（Large Hadron Collider）が動き始めます。だからここに M1 で居る人がちょうどドクター論文書こうかなー、という頃に Higgs 粒子は（たぶん）確実に見つかります。多分みなさんは非常にいいタイミングでマスターに入ってこられたと思うんですね。

MSSM というのは SUSY（supersymmetry）の現象論で、明日ちょっとお話しする Minimal Supersymmetric Standard Model のことです。それがちょうどミッドフィルダーの位置ぐらいです。それを背後から援護射撃しようというのが superconformal field theory のつもりなんですけども、これは明日の最後に。これ、いつか京都でしゃべったときにですね、S と C をひっくり返すと Cubic String Field Theory かと言われました。なんか、string の人かもしれない…（笑)。で最後、ペナルティエリアのところになんかよくわからない人（M）がいる、と。

まぁ冗談はさておき。

第1章　素粒子の質量を第一原理から計算できるか

M1 の人も多いですから、初心に返ってですね、「僕らなんで素粒子やってるんやろ?」ということからちょっと考えてみたいと思います。そもそもこれは僕が大学に入るずっと以前の 1970 年代[1] のことですけども、QCD（Quantum ChromoDynamics）の非摂動論的な定式化 — lattice QCD といいます — が出来まして、原理的には、いいですか、原理的にはですけども、陽子の質量というのは‘パラメータなし’で計算できるんです。つまり予言ができる。もちろん実際の値はだいたい 1 GeV ということを知ってるわけだけど、それを僕らは原理的には計算できるところにいるわけです。それが場の量子論。（といっても、僕自身は lattice は詳しくないんですがとにかく…。）

こういう話を聞くと「陽子がわかってるんやったら電子もわかってるんやろか？」というのが素朴な疑問です。ところが全然わかってない。この辺のことをちょっと考えるために、Standard Model（標準模型）のイントロをやってみましょう。

1.1　「標準模型」超入門

ラグランジアンの具体的な形は書きませんけども、だいたいこういう四つの構造を持っています。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{L} & = & \mathcal{L}_{\text{gauge}} & + & \mathcal{L}_{\text{fermion}} & + & \mathcal{L}_{\text{Higgs}} & + & \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 & & \text{gauge 群} & & \text{世代数} & & \Downarrow & & \text{flavor 構造} \\
 & & & & & & \Downarrow & &
\end{array}
$$

$$
\boxed{\text{Higgs 場の真空凝縮:}\quad v \equiv \langle H^0 \rangle = 174\,\text{GeV}}
$$

まずゲージ場の部分ですが、これは $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ というゲージ群[2] に対応するゲージ理論です。次にフェルミオン運動項ですが、クォーク、レプトンは何故だか知らないけれども、三世代構造を持っています。そして、この辺のラグランジアンは、世代数とかゲージ群を決めてしまえば、パチっと決ってしまうものなんですよね。

それに対して、だんだんと後ろに行く程わけが分からなくなってきます。Higgs のラグランジアンは、もちろん M1 の人でも書けるんです（すぐ後で書きます）けれど、何故そういう形をしていうのかと言われると誰も答えられない、それがまず疑問なんですね。さらに、クォークやレプトンたちに質量を与えている相互作用、湯川相互作用の部分というのはかなり複雑で、ラグランジアンを書くのもいやになるようなものです。

電子の質量いくらやろ、ということを理論的に計算しようと思ったら、右辺三番目と四番目の部分が重要です。まずは三番目の Higgs の部分。Higgs 場というのは真空中にぐしゃーっと凝縮（condence）していまして、Higgs が真空でとる期待値（VEV = Vacuum Expectation Value）は 174 GeV だというのが実験的に分かっています。Higgs が真空期待値を持つことで、ゲージボソンとか、クォーク・レプトンに質量を与えるよ、というのが Weinberg の考えたことです。まぁ、全部じゃないですけど、いわゆる Weinberg–Salam 理論の大事な点なわけですね。

$$
v = \langle H^0 \rangle \quad \Longrightarrow \quad
\begin{cases}
\text{gauge boson の質量:} & m_W^2 = \frac{1}{2}\, g_2^2\, v^2\,, \quad m_Z^2 = \frac{1}{2}\left(g_1^2 + g_2^2\right) v^2\,, \\
\text{quark・lepton の質量:} & (\text{質量行列})_{ij} = (\text{湯川行列})_{ij} \times (\text{Higgs VEV})\,.
\end{cases}
$$

---

[1] ひょっとして、ほとんどの人が、大学に入るどころか、まだ生まれてもいないんですね…。

[2] 余談：最近、$SU(3)\otimes SU(2)\otimes U(1)$ という間違った記号を使った論文が増えてきてますね。$\otimes$ の意味を知ってるんでしょうか？

それで、ゲージボソンの質量というのは、g をゲージ結合定数（gauge coupling）として、Higgs の真空期待値 v の g 倍なんですけれども、それに対してクォークやレプトンの質量というのは、Higgs の真空期待値に湯川結合定数（coupling constant）の行列 — 湯川行列 — をかけたような形になっている。ここで i とか j と書いてあるように、クォーク・レプトンは三世代ありますから、三行三列の質量行列を持っているわけです。

$$\begin{aligned} (m_u) &= (y_u)\, v \ , \quad & (m_d) &= (y_d)\, v^* \ , \\ (m_\nu) &= \quad ? \quad \ , \quad & (m_e) &= (y_e)\, v^* \ . \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

実際は、アップタイプのクォーク、ダウンタイプのクォーク、それと、荷電レプトン（e、μ、τ）があるので、湯川行列も三行三列のものが全部で三つありまして、それらをそれぞれ y_u、y_d、y_e と書きました。こいつらがクォークやレプトンの質量を決めているわけです。（今回の僕の話では、neutrino 質量をめぐる話題は一切省略します。）

標準模型はこういう構造を持っているので、最初の素朴な疑問に答えるためには次の二つの問題を考える必要があります。一つ目は「Higgs の真空期待値を決める物理は一体何なんだろうか？」ということ、もう一つは「湯川結合定数を支配している物理は一体何なんだろうか？」ということです。こいつらが分からない限り、電子の質量というのは永遠に計算で導けないわけです。

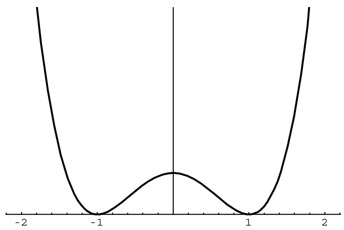
二つの疑問：
- Ⅰ： Higgs の VEV を決める物理は何だろうか？
- Ⅱ： 湯川結合定数を支配する原理は何だろうか？

1.2 Higgs 機構と階層性問題 I

あんまりゆっくりやっていると時間がなくなるのでちょっとペースアップしますね。最初の疑問にある Higgs 機構についておさらいしておきます。Higgs 場 — $SU(2)\times U(1)$ の '電荷' を持ったスカラー場 — が下の図の形のポテンシャルを持っているとします。このとき、Higgs 場の真空がどこにあるかというと、図で言って右側の谷か左側の谷のどちらかです。ところがこういう形になっていますと $SU(2)\times U(1)$ 変換で真空が動いてしまうので、対称性が自発的に破れていることになります。これが electroweak 対称性の自発的破れの機構だというわけです。

Higgs 場のポテンシャル

$$\boxed{V\big(H, H^\dagger\big) \ = \ m_{\rm H}^2\, |H|^2 + \frac{\lambda}{2}\, |H|^4}$$



このポテンシャルはどういうものかというと、場の二次の項（質量項ですね）、それと四次の項（四点カップリングの項）があって、図の形になるためには、質量項が負になっているということと、もちろん、四点カップリング λ が正になっていることも必要です。

$$\left.\begin{array}{lccc} \text{原点での不安定性:} & m_{\rm H}^2 & < & 0 \\ \text{理論全体の安定性:} & \lambda & > & 0 \end{array}\right\} \iff e^{i\theta_a T_a}\,|0\rangle \neq |0\rangle \ .$$

こう考えますと、疑問なのは二つあります。一つめは、まず定性的にですね、何故 electroweak の対称性が破れているのかということ、つまり、「質量項が負になっているというのはなんでか」ということ。もう一つは定量的にですね、「なんでそれが 100 GeV スケールなのか」ということです。

- 定性的な疑問：何故 $m_{\rm H}^2 < 0$ なのか？
- 定量的な疑問：何故 $|m_{\rm H}| = \mathcal{O}(100\,\mathrm{GeV})$ なのか？

もちろん 100 GeV という数字に絶対的な意味があるかというと、次元を持っている量ですから、比較するものがないと意味がないわけですが、今の場合はこういう言い方ができます。僕ら自然界の一番基礎になる理論、fundamental theory って何かわかんないわけですけど、そいつが持っているスケールっていうのがあるはずです。それを Λ と書かせてください。この Λ をどうとるかということが実は問題なわけですが、一つの目安としては、(量子重力を特徴づけるという) Planck スケール 10^{19} GeV をとることができます。

$$M_{\mathrm{P}} \equiv \frac{1}{\sqrt{G_{\mathrm{N}}}} \sim 10^{19}\,\mathrm{GeV}\ . \tag{1.2.1}$$

ニュートンの万有引力定数が次元をもっているということですが、こいつと、それから光速度と Planck 定数を使って作れるスケールが基礎理論のスケールだとしますと、100 GeV っていうのは本当に小さい値ですね。

「Planck 階層性問題」

$$\text{階層性問題 I} : \frac{m_{EW}}{M_{\mathrm{P}}} \sim 10^{-17} \text{ の起源は何だろうか?}$$

こういうふうに Planck スケールとの比で表わしてみますと 17 桁ぐらい違うんです。こんな小さい量が我々の Higgs を決めている。(挑発的な言い方をすると)「この起源を問わずして何の物理をやるんだ」ということです。

Remark 昨日まで、稲見さんによる extra dimension の講義があったとのことですが、恐らくそこでお話があったように、基礎理論のエネルギースケール Λ が Planck スケールだなんていうのはまやかしであって、実は全然もっと低いんじゃないか、という可能性もあります。つまり、$\Lambda \ll M_{\mathrm{P}}$ かも知れない。この十年弱ぐらいの間に(第二期か第三期か知りませんけど) string 理論のすごい進展がありました。その結果わかったことは、実は僕らは「基礎理論のエネルギースケールを知らなかった」ということです。昔は誰もが超弦理論のエネルギースケールは 10^{19} GeV かその一桁二桁ぐらい下のところであると信じていたんですけれども、そうじゃない可能性も出てきたわけです。ただし、もしそうだとしても、厳然として Planck スケール (1.2.1) というものがあって、

$$G_{\mathrm{N}} = \frac{1}{M_{\mathrm{P}}^2} \ll \frac{1}{\Lambda^2} \tag{1.2.2}$$

という、十何桁も掛け離れたスケールがあるってことは間違いのないわけで、依然として、この階層性の起源が謎であることは間違いありません。

以下の話では、fundamental scale を Planck スケールに固定して考えていきます。これがまず一番目。

1.3 湯川相互作用と階層性問題 II

次に二番目の問題。クォークやレプトンが持っている湯川相互作用というのは、ニュートリノを無視しますと[3]、

$$\boxed{-\mathcal{L}_{\mathrm{Yukawa}} = (y_u)\, q_{\mathrm{L}}\, u^c_{\mathrm{R}}\, H + (y_d)\, q_{\mathrm{L}}\, d^c_{\mathrm{R}}\, \overline{H} + (y_e)\, \ell_{\mathrm{L}}\, e^c_{\mathrm{R}}\, \overline{H}} \tag{1.3.1}$$

のようになります。ぐちゃぐちゃ書いてありますが、右辺第一項がアップセクタの湯川相互作用、第二項がダウンセクタ、第三項が荷電レプトンのセクタです。以下、これら三つの荷電セクタを $f = u, d, e$ という添字で表すことにします。また、それぞれの湯川結合定数 y_f は三行三列の行列なので、括弧をつけてそれっぽく書きました。

始めに、今までにわかっていること(知られていること)を確認します。それぞれの湯川結合行列 y_f はエルミートとは限りませんが、bi-unitary 変換で対角化できます。対角化に用いる行列を $V_{\mathrm{L}}(f)$ とか、$V_{\mathrm{R}}(f)$ とか書きます。例えば、$V_{\mathrm{L}}(u)$ は up セクタの左巻きクォークを回すユニタリー行列という具合いです。

[3] 以下の話では、簡単のため、ニュートリノの質量をゼロと仮定する。

質量固有値の階層性　このような記号を使うと、湯川結合定数を次のように書き直すことができます。

$$\text{up sector}: \quad (y_u)_{ij} \sim V_{\rm L}^{\dagger}(u) \begin{pmatrix} \varepsilon^7 & & \\ & \varepsilon^4 & \\ & & 1 \end{pmatrix} V_{\rm R}(u) \times \mathcal{O}(1) \ , \tag{1.3.2}$$

$$\text{down sector}: \quad (y_d)_{ij} \sim V_{\rm L}^{\dagger}(d) \begin{pmatrix} \varepsilon^4 & & \\ & \varepsilon^3 & \\ & & 1 \end{pmatrix} V_{\rm R}(d) \times \mathcal{O}(\varepsilon^2) \ , \tag{1.3.3}$$

$$\text{charged lepton sector}: \quad (y_e)_{ij} \sim V_{\rm L}^{\dagger}(e) \begin{pmatrix} \varepsilon^5 & & \\ & \varepsilon^2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} V_{\rm R}(e) \times \mathcal{O}(\varepsilon^2) \ . \tag{1.3.4}$$

対角化すると質量の固有状態が作れるわけですが、その質量固有値は Cabbibo 角 $\varepsilon \sim \sin\theta_{\rm C} \approx 0.22$ を用いて、パラメトライズすることができます。この ε という量は 1/5 程度の小さい量ですけれども、これを使うと、湯川行列が（何故だか）この式のように fit できるんです。

これをみると、クォークやレプトンの質量固有値は世代階層構造を持っていることがわかりますね。例えば、y_u の (3,3) 成分は 1 になっていますけど、これは up セクタの第三世代、つまり top クォークが大体 1 のカップリングを持っていることに対応します。それに対して、up クォークや charm クォークは ε のベキで suppress された、非常に小さなカップリングしか持っていない。何故でしょう。

他の荷電セクタ (1.3.3)–(1.3.4) は、up セクタ (1.3.2) に比べて全体が suppress されています。そして、例えば、荷電レプトンセクタ (1.3.4) をみると、τ の湯川に対して、ミューオンであるとか、電子 — 最初に問題しましたが — の湯川がこういう冪で決まっている。

世代混合の階層性　上で使った Cabbibo 角 ϵ について、あるいは、昨日丁度、小林（誠）さんが来られたみたいですけれども、Kobayashi–Maskawa 行列というのは何かについてもざっと見ておきましょう。ポイントは、もともと electroweak の左巻き doublet を組んでいた up セクタのクォーク $u_{\rm L}$ と down セクタの $d_{\rm L}$ が、質量の固有状態に移るときに相異なるユニタリー行列で対角化されることです。この up セクタを対角化する行列と down セクタ を対角化する行列のミスマッチ、つまり、$SU(2)$ 対称性から揃っているはずの $V_{\rm L}(d)$ と $V_{\rm L}(d)$ が、ずれている度合いが Cabbibo–Kobayashi–Maskawa の混合行列なわけです。

$$V_{\rm CKM} \equiv V_{\rm L}^{\dagger}(d)\, V_{\rm L}(u) \sim \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^3 \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & 1 \end{pmatrix} \ . \tag{1.3.5}$$

この CKM 行列はだいたい同世代間の混合が 1 になっていて、一、二世代間の混合が ϵ、これがいわゆる Cabbibo 角の定義なわけですが、Eq. (1.3.5) のような階層構造を持っているわけです。

ごちゃごちゃ言いましたけれども、とにかく「一体これらは何を意味するんやろか」というのが二番目の問題（というか疑問）です。これも、さっきの 17 桁の問題に比べると、それほどでもないかも知れないんやけれども、階層性の問題ということができると思います。

「湯川階層性問題」：　とにかく これらは何を意味するのか?

階層性問題 II：特に $m_{\rm 1st} \ll m_{\rm 2nd} \ll m_{\rm 3rd}$ の起源は何だろうか?

例えば、トップ クォークと電子を比べますと 6 桁くらいの差がある。

$$\frac{m_e}{m_t} = \frac{0.5\,{\rm MeV}}{175\,{\rm GeV}} \sim 10^{-6} \ .$$

こんなのを第一原理からどうやって説明するのか、あるいは 1、2、3 世代が階層構造を持っているのは一体なんででしょう、というのを湯川階層性（Yukawa Hierarchy）の問題と呼んでいます。これが二番目の問題です。

第2章　量子補正と Naturalness

僕の話の出発点として、二つの「問題」があるということをいいました。

- 階層性問題 I：$m_W \ll \Lambda\ (\longrightarrow M_P)$
- 階層性問題 II：$m_{\rm 1st} \ll m_{\rm 2nd} \ll m_{\rm 3rd}\ (\sim m_W)$

でも改めて考えてみると、こんなことを問題にすること自体、なんだか素人的な発想のような気がしてきますね。言い換えると、今いったような、weak scale の存在であるとか、世代間の階層性であるとか、そういうものを「あるがままに受け入れたらいかんのか」という気がしてきます。つまり、これらの「問題」は、「実験と理論との矛盾が露呈している」というような深刻な問題、逆にいうと、「誰にでもわかりやすい問題」ではないわけです。むしろ、僕らの考え方の問題、要するにパラメータの問題なので、「そんなんどうでもええんちゃうん」という気にもなってくるんですね。（きませんか？）

ところが、なかなかそう甘くないのが場の量子論（の怖さというか面白さ？）なんです。というのは、場の量子論には、量子補正つまりくりこみの効果があるからです。くりこみっていうのは

$$(m_{\rm H}^2)_{\rm ren} = (m_{\rm H}^2)_{\rm bare} + \delta m_{\rm H}^2\ ,$$

$$(m_f)_{\rm ren} = (m_f)_{\rm bare} + \delta m_f$$

のように、もともと理論に入っていたパラメータに対して、ループ補正とかを計算して足したものが観測量だということでしたね。そいつがさっきの問題をより深刻にすることになります。

例えばさっき Higgs の二乗質量を問題にしましたけれども、そいつに対しては、理論の fundamental scale Λ の二乗に比例する項（二次発散の項）とか、$\ln\Lambda$ に比例する項（対数発散の項）といった量子補正が出てきます。つまり、素朴な次元解析より、質量への輻射補正は次のようになるはずです。

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} \delta m_{\rm H}^2 & = & a_2\Lambda^2 & + & a_0\, m^2 \ln\Lambda & + & \cdots \\ \delta m_f & = & b_1\Lambda & + & b_0\, m_f \ln\Lambda & + & \cdots \end{array}}$$

ここで、ついでにフェルミオンの質量 m_f に対する補正として、次元解析から予想される形を書いておきました。つまり、クォークやレプトンの質量は質量次元 1 を持っていますから、それに対する補正というのは、原理的には cutoff scale Λ の一次（一次発散）とか、m_f 倍の $\ln\Lambda$ という項があり得るわけです。

これは次元勘定の結果ですけれども、a_2 とか b_1 とかの比例係数は実際に計算してみないとわかりません。それで、実際に計算してみると、スカラー質量、先ほどの例で言うと Higgs 質量に対しては、この Λ^2 の項が本当に出てくるんです。そやけどもフェルミオンの方は linear divergence というのは実はない。何故そうなのかについては、もうちょっと後で説明したいと思います。

$$\text{一般に}\left\{\begin{array}{lll} \delta m_{\rm H}^2 & \text{は 二次発散を含む} & (a_2 \neq 0) \\ \delta m_f & \text{は 一次発散を含まない} & (b_1 = 0) \end{array}\right.$$

いずれにせよ、二次発散があるということの意味をもうちょっと考えてみます。さっき Higgs の質量をだいたい 100 GeV にしないといけないと言いました。それを実現するためにはどうしないといけないか。なんせ Λ は 17 桁大きいですから、二乗すると 34 桁になるわけです。そうすると 0 が何個あるかというと…、書いた本人でさえ分からないくらい並んでいるわけですね。それに対して、9 がたくさん並んでいる量を持ってきて、

$$
\begin{array}{lcr}
\delta m_{\rm H}^2 & = & -\,100000000\cdots000000000000 \\
(m_{\rm H}^2)_{\rm bare} & = & 99999999\cdots999999990000 \\
\hline
(m_{\rm H}^2)_{\rm ren} & = & -\,10000
\end{array}
$$

のような感じの引き算をやって $(100\,\mathrm{GeV})^2$ という量を作りなさいということなわけです。これを fine tuning の問題と言うんですけれども、こういうことをやらないといけない。つまり、scalar 質量では「強烈な fine-tuning」が必要なわけです。

こういう話は別の機会にも聞いたことがあるかもしれませんが、実際に書いてみるととんでもないことだということがよく分かりますよね。もうちょっとテクニカルな言い方をしますと、摂動論で計算するには、こういうことを 1-loop、2-loop、3-loop ⋯ と、ずっと（かなり先の方まで）やっていかないといけないということです。普通このような状況を何と言っているかというと、「基礎理論のスケール（cutoff スケール）に比べて非常に軽いスカラー場というのは natural ではない」という言い方をします。

- 軽い scalar 場の存在は <u>“natural” でない</u>（量子効果に対して不安定）
- 技術的には、このような fine-tuning を<u>摂動論の各次数で</u>くりかえす必要あり！

この naturalness という概念は非常に難しいんです（第 2.4 節を参照）が、とにかく「軽いスカラー場」というのはそんなに自然ではないということです。

2.1　量子補正（1-loop）の計算例

普通、supersymmetry の話をするには、いまのようなイントロをすることが多いし、多分皆さんも何度か聞かれたかと思います。けれども、本当に二次発散 Λ^2 という項が出てくるのを計算で確かめたことってありますか? 今から、M1 の人向けに簡単な系で量子補正を計算してみましょう。

考える系はスカラー場 Φ の四点までの項と、後のために、フェルミオン場 Ψ を入れておきます。

$$
\mathcal{L}_{\rm HY} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\Phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\Phi^4 \;\Big(+ J\Phi \Big) + \overline{\Psi}\, i\partial\!\!\!/\Psi - y\Phi\,\overline{\Psi}\Psi\ . \tag{2.1.1}
$$

最後の項が y という coupling constant を持ってスカラー場と $\overline{\Psi}\Psi$ がカップルしている湯川相互作用というやつですね。この項も入れておきます。

これは、くりこみ可能な場の理論の簡単な例なわけですけど、こいつに適当に（一様な）外場 J をかけまして、Φ っていう量子場が φ（柔らかいファイ）という background の期待値を持ったとします。そしてその background からの量子論的な fluctuation を ϕ （硬いファイ）とすると、スカラー場 Φ は下のように分解できます。

$$
\text{外場 } J \text{ 中で}\quad \Phi(x) \,=\, \text{背景場}\ \varphi + \text{量子揺らぎ}\ \phi(x)\ . \tag{2.1.2}
$$

ラグランジアンにこの展開を突っ込んで二次の係数を読み取れば

$$
\mathcal{L}_{\text{二次}} \,=\, -\frac{1}{2}\phi\Big[M_{\rm B}^2 + p^2\Big]\phi \;-\; \overline{\Psi}\Big[M_{\rm F} - p\!\!\!/\Big]\Psi \tag{2.1.3}
$$

の形になります。但し、fluctuation モードの質量は、元々のものから $-(\lambda/4!)\,\Phi^4$ を展開した分だけずれたやつ

$$
M_{\rm B}^2 \,=\, m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi^2\ , \qquad M_{\rm F} \,=\, y\,\varphi \tag{2.1.4}
$$

が来る。それに対してフェルミオンの方も元々 massless だったのが湯川を通して質量を持ちまして、ちょうど標準模型 (1.1.1) と同じ構造をしています。

二次までのラグランジアンを残して、path integral を実行しましょう。具体的には Gaussian 積分の公式を思い出せばいい。

$$
\text{Gaussian 積分}\quad\Longrightarrow\quad (\mathrm{Det}\Delta)^{\mp\frac{1}{2}} = \exp\left[\mp\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\mathrm{Ln}\Delta\right]\ . \tag{2.1.5}
$$

重要なことは、出てくる Determinant の符号がボソンとフェルミオンで違っているということです。この Determinant を exponential の肩に上げてやりますと、いわゆる有効ポテンシャルが得られるわけです。

boson ループの寄与　まずボゾンループの寄与を考えます。（フェルミオンループは一旦忘れてください。）Determinant を Trace log の exponential に直しますと、

$$\boxed{V_{\text{eff}}^{(1)}(\varphi) = +\frac{1}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\ln\left(M_{\text{B}}^2 + p^2\right)} \tag{2.1.6}$$

というのはスタンダードな計算ですね。この log の項を φ について展開してみます。

$$V_{\text{eff}}^{(1)}(\varphi) = V_{\text{eff}}^{(1)}(0) + \frac{1}{2}\int \frac{p^2dp^2}{(4\pi)^2}\left[\left(\frac{\lambda}{2}\varphi^2\right)\frac{1}{m^2+p^2} - \left(\frac{\lambda}{2}\varphi^2\right)^2\frac{1}{2(m^2+p^2)^2}\right] + \cdots \tag{2.1.7}$$

$$= V_{\text{eff}}^{(1)}(0) + \frac{1}{2}\,\delta m^2\,\varphi^2 + \frac{1}{4!}\,\delta\lambda\,\varphi^4 + \cdots\,. \tag{2.1.8}$$

そうすると φ に依存しない項、φ の二乗、φ の四乗、…と log の展開が続くわけですよね。勿論これは Feynman グラフでいいますと、図 2.1 のように、何もまわらないもの、φ のヒゲが二本ピコピコっと生えているもの、二カ所からヒゲが生えているもの、という Feynman グラフに対応するわけです。で、内線をまわる場があるわけだけれども、この量子揺らぎの運動量積分が当然あるわけで、そいつが発散するというのが紫外発散だったわけです。

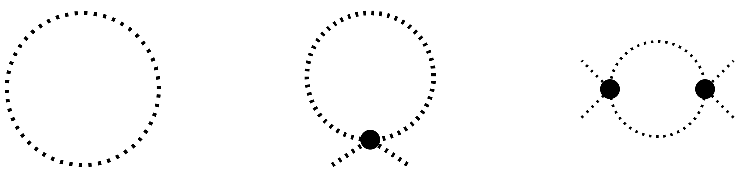


図 2.1: Eq. (2.1.7) の各項に対応するグラフ。

　とにかく、ポテンシャルに対する correction を Eq. (2.1.7) のように展開しまして、それぞれの係数を読み取ってやります。それを Eq. (2.1.8) の形に書いたとき、各項の係数がさっきの質量とか coupling に対する correction になっているわけですね。

結合定数のスケール依存性　以上の計算結果を用いて、質量とか四点結合定数とかがスケールにどう依存するかを考えてみます。（こういうのを系統的にやるのがくりこみ群で、それについては明日、簡単に触れます。）

　今、Planck スケールくらいの ultraviolet (UV) のスケールで「理論を決めた」、つまり、理論のパラメータを決めたとします。それをさっきの m と λ と思ってやる。そして、そいつらをもっと infrared (IR) の長距離のスケールに引っ張ってくる。そのスケールを μ と書いてやって、例えばこれを 100 GeV くらい、weak スケールと思いたいわけです。

IR スケール μ		UV スケール Λ
$m_{\text{eff}}^2 = m^2(\mu)$ $\lambda_{\text{eff}} = \lambda(\mu)$	$\Longleftarrow$	$m^2 = m^2(\Lambda)$ $\lambda = \lambda(\Lambda)$

具体的には、1-loop の表式 (2.1.7) において、p^2 積分範囲を μ^2 から Λ^2 としてδm^2 や $\delta\lambda$ を計算します。その結果どうなるかというと、僕らが知りたい weak スケールでの物理量、質量とか coupling とか — 本当の意味の物

理量ちゃいますがともかく — は、次のような補正を受けるということになります。

$$
\begin{aligned}
m^2(\mu) &= m^2(\Lambda) + \frac{\lambda}{2\,(4\pi)^2}\left[\Lambda^2 - m^2 \ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \cdots\right] , && (2.1.9)\\
\lambda(\mu) &= \quad \lambda(\Lambda) - \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2}\left[\qquad\qquad \ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \cdots\right] . && (2.1.10)
\end{aligned}
$$

これを導くには、さっきのループ計算を実行すればいいわけですけど、もう次元勘定だけからわかりますよね。Eq. (2.1.7) の積分 — 有効ポテンシャルの log を展開した部分ですね — ここに dp^2 も含めて p^4 があるんですけども、その一項目は分母の p^2 でしか suppress されてないわけですから、δm^2 には Λ^2 に比例する項が出てくる。それに対して、積分の二項目（coupling constant の方）はそういう項がなくって log 発散から始まります。

とにかく、高エネルギーで理論を定義するパラメータ $m^2(\Lambda)$ と、我々の知りたい低エネルギーでの $m^2(\mu)$ との関係がわかりましたから、それをちょっとグラフで書いてみると、こんな感じ（図 2.2 の左側を参照）。

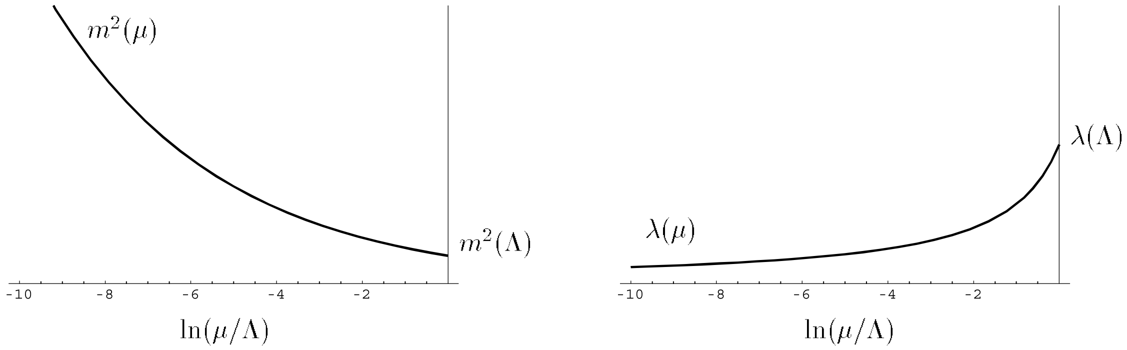


図 2.2: mass parameter（左図）と coupling constant（右図）のスケール依存性

グラフの右端が基礎理論のスケール Λ です。横軸を log スケールにとって低エネルギー側に走っていきますと、質量パラメータは exponential でブワッと大きくなる。つまり、ボソンループの効果を計算したんだけど、それはなんか、もともとあった理論の質量パラメータを低エネルギー領域でブワッっと大きくしてしまう。（グラフでは手加減して書いてありますが）、もー、exponential ですからこれはめちゃめちゃでっかい。それなのに、標準模型の Higgs 場では、その値を 100 GeV にしないといけない。だから曲線の右端の値を如何に fine tuning しないといけないか。これが Λ^2 という二次発散が現れる意味です。

それに対して、折角やから coupling constant の方も一緒に考えてみます。log の項がありますからまぁちょこちょこっと計算しますと、図 2.2 の右側のグラフが描けます — 今度はちょっと極端に描いてありますけど。基礎理論のパラメータをオーダー 1 のある値に与えたときに、低エネルギーでの値 $\lambda(\mu)$ はくりこみ効果で小さくなると言ってるわけです。いいですか? 要するにこれは、「相互作用の効果が遮蔽（screen）されてる」ということなんだけども、まぁそんなふうになる。

2.2 超対称性の導入

さっきのボソンの結果に対して、今度はフェルミオンループの結果を入れてみます。ここでちょっと一般化させてもらって、ボソンの数を N_{B} 個、フェルミオンの方は N_{F} 個あるとしましょう。

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
N_{\mathrm{B}} &=& \#\{\text{ bosons }\}\\
N_{\mathrm{F}} &=& \#\{\text{fermions}\}\times 2\,(\text{spin})
\end{array}
\right. \tag{2.2.1}
$$

今、1-loop（Gaussian 積分）しか入れてませんから答えは簡単でこうなります:

$$
V_{\mathrm{eff}}(\varphi) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left[\frac{N_{\mathrm{B}}}{2}\ln\left(M_{\mathrm{B}}^2+p^2\right) - \frac{N_{\mathrm{F}}}{2}\ln\left(M_{\mathrm{F}}^2+p^2\right)\right] . \tag{2.2.2}
$$

一項目がさっきのボソンの効果でした。Gaussian 積分の公式 (2.1.5) はボソンとフェルミオンで逆でしたから、二項目のフェルミオンループの方はマイナスになる。場の量子論を最初に勉強する時には、「Wick の定理でガチャガチャやるときに、フェルミオン演算子は必ず一発ひっくり返すので符号が出る」と習いますけども、それと同じことです。とにかくここは逆符号です。

で、ちょっと戻りますが、Eq. (2.1.4) において、ボソンの質量は $M_{\rm B}^2 = m^2 + (\lambda/2)\,\varphi^2$ でした。それを φ について展開したわけですけども、今度はフェルミオンの $M_{\rm F}^2 = y\varphi$ についても同じことをやります。但し今度は φ の前にかかっているのは、Eq. (2.1.1) の湯川相互作用から来てる y になっている。このことに注意して、$\ln(M_{\rm B}^2 + p^2)$ と $\ln(M_{\rm F}^2 + p^2)$ を、まぁとにかくガチャガチャ展開してみなさいというわけです。

そうしますと、まず φ に依存しない項というのは、いわゆる零点振動。

$$V_{\rm eff}(0) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\left[\frac{N_{\rm B}}{2}\,\hbar\omega_{\rm B} - \frac{N_{\rm F}}{2}\,\hbar\omega_{\rm F}\right]. \tag{2.2.3}$$

ボソンの方は、昔懐かしい $\frac{1}{2}\hbar\omega$ という、例の零点振動が $N_{\rm B}$ 倍されたもの。それからフェルミオンの方は、それが逆符号で同じようなものが出てくる。Dirac の negative energy sea ですかね。…でした。あ、そう九後さんの教科書には書いてあります。えー、ともかく。そもそも今回の話では宇宙項の話は一切省略しますから、真空のエネルギーについてはもう見ないことにします。とにかく、まぁ逆符号。

それに対して、展開の二次の項であるとか四次の項の係数というのは、質量とか結合定数 λ に対する correction だったわけです。まず質量の方は

$$\delta m^2 = \frac{N_{\rm B}}{16\pi^2}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\left[\Lambda^2 - m^2 \ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right] - \frac{N_{\rm F}}{16\pi^2}\,y^2\left[\Lambda^2 + \cdots\right] \tag{2.2.4}$$

となります。第一項がさっきのボソンの効果です。それが $N_{\rm B}$ 倍されているだけ。それに対してフェルミオンループの寄与というのは逆符号で効くわけですから、この Λ^2、いわゆる二次発散の部分をキャンセルできる可能性があることに気づきます。

もしもですね、ボソンとフェルミオンの個数が等しい（$N_{\rm B} = N_{\rm F}$）としますと、真空のエネルギー (2.2.3) — 見ないといったばっかりですが — において、いわゆる四次発散の項が消えるということが確かめられます。もっと重要なことは、ボソンとフェルミオンが同じ個数あるだけじゃなくって、さらに、coupling constant の間に

$$\frac{\lambda}{2} \;=\; y^2 \tag{2.2.5}$$

という、特殊な関係が成り立ってるとしますと、Λ^2 の項がピタッとキャンセルすることが見て取れます。

同様に、coupling constant への補正でも、

$$\delta\lambda = \frac{3N_{\rm B}}{4\pi^2}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2\left[-\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \cdots\right] - \frac{3N_{\rm F}}{4\pi^2}\;y^4\left[-\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right] \tag{2.2.6}$$

というふうに、log 発散の項があるわけですけども、この $\ln\Lambda$ の項もちょうど同じ関係式 (2.2.5) のときにピタッとキャンセルします。

…なんか理由あるんちゃうやろか？って思うわけですね。

もうちょっと頑張ります。出発点の理論 (2.1.1) はボソンの質量を m^2 と書いて、フェルミオンの方は massless としたんだけども、それらが等しければ、つまり $m^2 = 0$ であれば、Eq. (2.2.4) のカッコの中の二項目、質量に対する log correction の部分もキャンセルしちゃう。そーすっと結局、「ポテンシャルに対する correction は全部なくなっちゃう」いうわけですが、それは Eq. (2.2.2) を考えたら当たり前ですよね。log の中身が等しければ、trivial に integral の中でキャンセルしてるんです。

というわけです。いいですか？ 発散の相殺の可能性を 1-loop の計算で具体的に見てみました。まぁ後でフォローしてみると、確かにそうなってるなぁ、ということがわかると思います。

えーと、もうやりませんが、おんなじことが 2-loop、3-loop でも言えるはずなんです。何故なのかというと、実はそれは、背後になんらかの対称性があるからなんですね。今の場合は、ボソンとフェルミオンの数が等しい

であるとか、coupling の間に関係がつくとか、「ボソンとフェルミオンの間の対称性」があるはすなわけです。それを俗に supersymmetry（略して SUSY）と呼んでいる[1] わけなんです。

$$\boxed{\text{Boson} \overset{\text{SUSY}}{\longleftrightarrow} \text{Fermion}}$$

パートⅡでやりますが、ボソンとフェルミオンの間の対称性というのを考えてやると、確かにいま言ったように、

(0) boson と fermion の自由度が等しい
(1) さまざまな結合定数の間に関係がつく
(2) （SUSY が exact にあるとすると）boson と fermion の質量が縮退する

という性質が成り立つことが確かめられます。以下、こういう対称性を考えるわけです。だから僕らは naturalness というか、階層性問題を考えていてこういうものに自然に導かれてきた、ということになりますね。[2]

Remark　先に進む前に、いくつか補足的な remark をしておきます。

- 一般に対称性が高いと、発散（量子補正）がマイルドになると言われてます。
- $\mathcal{N}=1$ の超対称性では、Sec. 4 でやりますけども、ポテンシャルに対する correction が「正則性」というもので支配されています。その結果、非くりこみ定理（non-renormalization theorem）というのがあって、「摂動論では vertex correction が無い」といったことが証明できます。さらに、Seiberg さんたちが 1994 年に — もう 8 年も前ですか、ずいぶん昔やね — ずいぶん調べてたように、非摂動効果さえもかなり厳しく制限される。ただ、波動関数くりこみは制限されないという点には注意しないといけないんですが。
- SUSY がもっと拡張されて $\mathcal{N}=2$ の超対称性になりますと、波動関数くりこみさえも制限を受けてくる。（因みに、これが発散を含むかどうかってのは昔、僕らが生まれる前にひと悶着あった点のようです。そもそも、紫外発散をボソンとフェルミオンで相殺させる、というのを最初に考えたのは坂田さんのグループではないか[3] という話があります。それに対して「波動関数くりこみがあるやないか」という朝永グループの批判があったり、とか、計算間違いがあったりして誰かが坊主になった、とかなんとかいう話が素粒子論グループには伝わってましたけども、まぁなんかそういう「いわくつき」の部分[4] です。）

超対称性の破れ？　今、SUSY という理論的可能性がある、という話をしましたけど、「現象論的には超対称性をどう考えていくのか」について、今後の道筋を最初にちょっとお話しておきます。お話として聞いてください。

まず、さっき説明したように、supersymmetry というのを仮定すると、量子補正が摂動論に対して安定化します。あのややこしい fine tuning を繰り返す必要はない、というわけです。そうなんだけども、実験的には supersymmetry の証拠は見つかってませんから、もし supersymmetry があったとしても、それは破れていないといけないわけです。導入した途端に破るっていうんだから、あの一、誰かの口癖を真似て言いますと「なんや、しょーもなぁ」ゆう状況です (笑)。えー、今の、誰の口癖かっていうのは知ってる人に聞いてください。まぁ、確かに「しょーもない」わけですね。でもそれを「ほんまにしょーもない」で終わらせないために、超対称性の破れは自発的な破れになってるんじゃないか、それを期待してやりたいわけです。つまり、超対称性はラグランジアンレベルでは厳然とあるんだけども、単にそれを基底状態が尊重してないだけなんだ、と。

そうすると、supersymmetry が成り立っている状態から出発して、量子補正を加えて、それを破ることができるか、ということが問題になります。ここで、さっきコメントに出てきた「非くりこみ定理」が立ち塞がります。それによると、SUSY がある理論では、摂動でいくらループを回してもポテンシャルが補正を受けない。ですか

[1] うろ覚えですが、Wess と Zumino が最初にラグランジアンを作ったときには、「supergauge 変換」とか言ってましたけども、なんか、supersymmetry になっちゃった。今や SUSY で定着してます。
[2] …なんかあの、言ってて罪悪感あるんだけども、はは っ、いいですかね。
[3] ゲージと湯川カップリングが $y^2 = 2g^2$ なら、発散の相殺が起るということ。$\mathcal{N}=2$ 理論では確かにこれが成り立ちます。
[4] この話に関しては良く分からないので、そのまま載せました。（講義録作成校注）

ら、supersymmetry が tree レベルでありますと、ループレベルでもある。超対称性の自発的な破れっていうのは、なかなか実現するのが難しんです。

実はこのことが非常に良いことなんだ、ということを 1980 年代の初頭に強調したのが Witten。概念的には次のようなお話です。

(a) 非くりこみ定理（摂動論）	$\Longrightarrow$	(b) 非摂動効果 による「微小な」SUSY breaking
	$\Longrightarrow$	(c) $\mathcal{O}(1)$ TeV の「soft な」SUSY breaking
	$\Longrightarrow$	(d) EW symmetry breaking を「誘発」

(a) 例えば coupling constant を g として、なにか、ある量 A を計算しているとします。

$$A(g) \;=\; A_0 + A_1 g + A_2 g^2 + \cdots + C \exp\left[-\frac{8\pi^2}{b\,g^2}\right] . \tag{2.2.7}$$

そうすると、最初の tree レベルでの値 A_0 に 1-loop、2-loop …とかいう具合いに補正が加わっていく。その部分っていうのは、SUSY があると、非くりこみ定理が成り立つのでベタッとゼロになる。つまり、coupling の冪展開で表せるような部分、いわゆる摂動効果というのは無い。すると、残る可能性は、g の冪級数で表せない最後の項のような、つまり、$g = 0$ で essential singularity を持っているような項 — いわゆる非摂動効果 — だけです。非摂動効果による補正ならば、SUSY が成り立っていても存在し得るわけです。

(b) さて、このとき、coupling constant g の大きさがオーダー 1 程度だとしましょう。すると、exponential の肩が大きい量ですから、全体はすっげぇちっこいものなわけですね。結局、SUSY があると、摂動論のゴミのような効果が無くなって、そのかわり、非常に微小な non-perturbative effect だけが残る、そして、その非常に微少な効果で SUSY が破れるんじゃないか、という期待が生まれてくるわけです。

このように、もし supersymmetry が成り立っている世界から、非摂動効果で SUSY が破れたとすると、その結果出てくるスケールは非常にちっちゃい、ということが予想されます。10^{19} GeV のような、非常に高いエネルギースケールから出発して、ちっちゃい効果を拾って破れる SUSY っていうのは TeV スケール — まぁ weak スケール のちょっと上というぐらいの意味ですが — に出てきてもおかしくないだろう、というわけです。こういう風に、非摂動的な効果で起こる SUSY の破れのことを（単に自発的というだけでなく）dynamical supersymmetry breaking と呼んでいます。

(c) 話はまだ終わりません。ダイナミカルな SUSY breaking が起こったとして、その結果、TeV スケールに SUSY を破る相互作用がポッと出てくるはずです。このとき、面白いのは、それは二次発散を出さない形のものに限られるんです。こういうのを「soft な」SUSY breaking と言います。「soft な」っていう言葉の意味はもうちょっと後で説明することにします。

(d) さらには、そのようにして supersymmetry が破れた後では、非くりこみ定理が成り立たなくなって、摂動論的な補正が現れはじめます。それは electroweak 対称性の破れの契機を与えるんではないか…。

というぐあいに、「見てきたような話」をしましたけれども、えー、そういうシナリオがある。一番目の階層性問題、electroweak スケール の起源については、超対称性とその dynamical な破れというのを考えることで、問題を一挙に解決する可能性がある、ということになります。いいでしょうか？

ただし、今、非常にこう見てきたかのような話をしましたけれど、えー、各ステップ各ステップっていうのは非常に non-trivial で、ここでは触れる余裕がありません。どうやって dynamical に SUSY 破るんだとか、それを我々の世界にどうやって伝達（mediate）してくるのかであるとか、SUSY が破れたらなんで electroweak の symmetry breaking が道連れで起こるのか、とか一個一個の問題は非常に難しいんだけれども、まぁビジョンとしては、このような考え方があるというわけです。

蛇足　とまぁ、ごちゃごちゃ言いましたけれども、一つだけ注意しないといけません。それは、さっきは SUSY breaking のスケールを TeV ぐらいと言ったんですが、もちろんこれは、あくまでも目安にしか過ぎません。今の

議論からは 1 TeV でもいいし、10 TeV でもいい。しかし、現象論としては、これは重大な違いです。

えーと、この辺の事情を考えるのには、今から 20 年程前の、top クォークをめぐる状況がたいへん教訓的です。当時は top クォークの質量が 30 GeV ぐらいではないかと言われてて、KEK の TRISTAN という加速器（いまの B Factory の前身ですね）がちょうどそれくらいのエネルギースケールで実験していたんですけれども、そこで見つかるんちゃうやろか、と思われていたわけです。ところが、今から見ると、top クォークは 175 GeV という、もうケタ違いの質量を持っていたわけです。当時すでに見つかっていた bottom クォークでさえ高々 5 GeV とか 3 GeV とかそういう値ですから、まあ重くても 10 倍ぐらいやろうと、勝手に思い込んでいたわけですね。ところが実際は全然違った。

$$\text{蛇足}\begin{cases} 1983\,\text{年当時、}m_t < 30\,\text{GeV と期待されていた} \\ 2002\,\text{年現在、}m_{\tilde{t}} < \ 1\,\text{TeV 　と期待されているが}\cdots \end{cases}$$

実はそのトップクォークが理論的にはもうちょっと重くてもいいということを言っていたグループが二つあって、その一つが九大のグループ（Inoue, Kakuto, Komatsu and Takeshita）なんだけれども、えー、彼らは「あるシナリオ[5] を考えると、どうしてもトップクォークが重くないといけない」という結果が出てきた。ところが、論文を読んでみると、彼らは自分達の理論から予言されるトップクォークの質量を頑張って下げようとしていた痕跡があります。自然には 100 GeV 以上になっていたはずなんだけれども、確か 60 GeV とか書いてあったかな。井上さん達でさえそうなんですから、なんか、その、偏見というのは怖いものですね。（間違っていたらごめんなさい。）

それはそれとして SUSY の話に戻ると、top クォークの superpartner — stop $\tilde{t}$ という粒子 — の質量を 1 TeV くらいに期待しているわけです。勿論、歴史は繰り返してしまったらどうしよう、という不安はありますね。つまり SUSY breaking のスケールが 10 TeV やったら実験的にみつからんかも知れんし、どうすんのやろう、というわけ。でも、そういう危険性というのは常にあるわけだけども、だからといって SUSY をやめるというのは話がおかしいわけで、理論屋というのは偏見なしに理論はできない。とゆーわけで、まぁ、思い込みも必要かなぁと。もちろん、それなりの裏付けも必要ですけどね。

2.3 ‘naturalness’ と対称性の soft な破れ

さっき soft な破れということを言ったんで、それに絡めてフェルミオンの質量の話に触れておきたいと思います。

SUSY みたいなものを考える非常に大きなモチベーションは、Higgs 場の質量、これの naturalness の問題があるからだったわけですね。ところで、世間みんな、 Higgs のことは問題にしますけど「フェルミオンの方は問題ないんか？」ということがちょっと疑問です。フェルミオンの質量には naturalness 問題ないんでしょうか。あるいは、ボソンとフェルミオン、どこがそんなに違うんでしょうか。実はこの疑問に答えることは非常に大きな洞察をもたらしてくれるんです。

Chiral 対称性と fermion 質量　まず M1 向けに、chiral 対称性とその破れというのを振り返っておきましょう。最初に Dirac 方程式の勉強するときには、四成分の Dirac スピノール というのを習いますが、実はそのうちの上 2 成分と 下 2 成分が、γ_5 の固有状態で固有値 -1 と $+1$、right と呼ばれる部分と left と呼ばれている部分の、それぞれ二階建てになっています。

$$\Psi_{\text{Dirac}} = \begin{pmatrix} (\psi_{\text{L}})_\alpha \\ (\psi_{\text{R}})^{\dot\alpha} \end{pmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow \gamma_5 = +1 \text{ の固有状態} \\ \longleftarrow \gamma_5 = -1 \text{ の固有状態} \end{matrix} \quad , \quad \gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \overline{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix} \Longleftarrow \text{chirality を flip} . \tag{2.3.1}$$

この基底で γ 行列を書くと、(2.3.1) の様に非対角的 (off-diagonal) な形になります。γ 行列というのが、ちょうど γ_5 の固有値をひっくり返す（flip する）ような構造をしていることがわかります。

この基底で Dirac のラグランジアンを書き直してみましょう。運動項の部分は

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \overline{\psi_{\text{L}}}\, i\partial\!\!\!/ \psi_{\text{L}} + \overline{\psi_{\text{R}}}\, i\partial\!\!\!/ \psi_{\text{R}} . \tag{2.3.2}$$

[5] これは、さっきの SUSY breaking から EW symmetry breaking が誘発される、というやつです。

そうすると、left-left の部分は、ちょうど $\overline{\psi_{\rm L}}$ と $\psi_{\rm L}$ の間に γ 行列が二つ隠れてるんで、— Dirac 共役の部分 $\overline{\psi_{\rm L}}$ と、演算子 $\partial\!\!\!/$ の部分に一つずつ隠れていますから、left で来たのが二回 flip して、もっかい left に戻ってる構造をしてます。えーと、right-right の方も同じ。ですから、運動項の部分というのは、ψ の位相変換を left の方で勝手にやるのと、right の方で勝手にやるの、独立な $U(1)$ 変換の下で不変です。

$$\begin{pmatrix} \psi_{\rm L} \\ \psi_{\rm R} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} e^{i\theta_{\rm L}} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_{\rm R}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{\rm L} \\ \psi_{\rm R} \end{pmatrix} . \tag{2.3.3}$$

こういうのを chiral 対称性と呼んだわけですよね。ま、この辺は M1 の人でももう勉強したと思うんですけど。

それに対して、ラグランジアンの質量項を書き直してみますと

$$\mathcal{L}_{\rm mass} = -\, m\,(\,\overline{\psi_{\rm L}}\,\psi_{\rm R} + \overline{\psi_{\rm R}}\,\psi_{\rm L}\,) \tag{2.3.4}$$

の形です。$(\psi_{\rm L})^\dagger$ と $\psi_{\rm R}$ の間に、γ_0 が一個だけ挟まっているので、質量項は chirality を flip してますね。つまり、left と right が couple してる。ということは、質量項というのは、さっきの「二つの独立な $U(1)$ 対称性」を壊してるわけです。Eq. (2.3.3) の変換で$\theta_{\rm L}$ と $\theta_{\rm R}$ が揃ってないと質量項は不変になってない。つまり、運動項の持っていた $U(1)_{\rm L}\times U(1)_{\rm R}$ 対称性が対角部分群（$\theta_{\rm L}=\theta_{\rm R}$）の $U(1)_{\rm diag}$ に落ちてるわけです。

$$U(1)_{\rm L}\times U(1)_{\rm R} \xrightarrow[m\neq 0]{} U(1)_{\rm diag} \ .$$

ここで注目してほしいのは、質量項全体 (2.3.4) にかかっている質量パラメータ m。これは chiral 対称性の破れのパラメータになっている、つまり、m がゼロだったら chiral 対称だし、ノンゼロだったらそれが破れるというわけだけども、大事なことは、そのパラメータが次元を持ってるということです。そりゃそうですよね。定義により、質量パラメータは質量次元 1 です。そして、そのような次元を持つパラメータによって対称性が explicit[6] に破れてる。一般に、次元をもったパラメータによる explicit な破れを「soft な破れ」と言います。

soft に破れた対称性と量子補正　何故 soft な破れと言うのか？ それは量子補正というものを考えてみると分かります。フェルミオンの質量に対する 1-loop ならば 1-loop、2-loop なら 2-loop の補正を考えてみたい。

まず、ナイーブな次元解析をやってみます。質量次元 1 を持っている訳だから、cutoff スケール Λ の一乗の項と、自分自身に比例するような項がでてきて、後者の係数は Λ を含む無次元な組み合わせ、つまり $\log\Lambda$ を含むものであろうと予想できます。

$$\text{素朴な次元勘定:}\quad \delta m_f \;=\; b_1\ \underbrace{\Lambda}_{\text{一次発散}} \;+\; m_f\ \underbrace{f(\ln\Lambda)}_{\text{高々 対数発散}} \ . \tag{2.3.5}$$

ところがさっき、実はフェルミオンの理論は chiral 対称性を持ってて、それが soft に破れた状況にある、と言いました。破れた対称性というのが全然意味がないかっていうと、そうではないんです。最初から全く対称性がなかったのとの違いがここで出てきます。つまり、もともとあった対称性が次元を持った量でのみ破れているということのために、実は一次発散がないということが分かるんです。

$$\boxed{\text{softly–broken chiral symmetry} \implies b_1 = 0 \quad \text{（一次発散なし）}}$$

議論は簡単でして、今 $m_f = 0$ とした理論 — chiral 対称な理論 — がくりこみ可能だというのを認めます。そうしますと、当然その質量に対する補正は発散を含まないはずです。ということは、Λ に比例する第一項は出てきてはいけない。つまり、対称性が破れた後の理論に一次発散が出てこない[7] ことは、実は対称な理論のくりこみ可能性が保証している訳です。

[6] mass パラメータを手で入れただけなので、自発的な対称性の破れではありません。

[7] lattice に興味がある人にとってはこの点は大変重要で、lattice っていうのは数年前までは一次発散がある世界だったんですね。そやけど何年か前から ‘chiral 対称’ な正則化があることになって、lattice の世界も一次発散が無いんだということになった訳ですね。

結局、soft に破れた chiral 対称性のおかげで、フェルミオンの質量というのは量子効果に対して安定だということです。つまり、input parameter m_f がゼロだとゼロだし、大きければ大きい、ちっちゃければちっちゃい、そういうものなんですね。

湯川相互作用の指導原理？ さて、話を整理すると、最初に二つの問題がある、一個は Higgs 質量の階層性問題、もう一個はフェルミオン —クォークとレプトン— の質量階層性の問題があると言いました。次に、そのような質量階層性を「あるがままに受け入れることができるか?」という問題提起をして、量子効果を考えるとそういうわけにはいかない、といいました。これは Higgs 質量に対しては正しいんだけども、フェルミオン質量の階層性は、今いった事情で、最初に階層性を input すれば、量子効果を加えてもこのまま安定にあることになります。だったら、それでもういいんじゃないか、とまぁ、普通の人はそう思うわけです。

$$\text{fermion質量の階層性は量子効果に対して安定} \quad \Longrightarrow \quad \text{あるがままに受け入れてもよい??}$$

ところがですね、ここから先は、幾分、個人的な考え方の部類になると思うんだけど、僕はそうじゃないと思います。というのは、僕が重要な問題と思っているものの一つに、湯川カップリングを支配する原理、それを場の理論は持っていない、という点があります。ということは、このままだと、永遠に「電子の質量を計算する理論」は無い、ということです。

そもそも、最初に場の理論を勉強するときに習うと思いますが、湯川相互作用といものは、ラグランジアンに入れてもいいけど無くてもいい、そういうどっちつかずの存在なんですね。湯川カップリングは、ゼロにしてもくりこみ可能だし、ノンゼロにしてもくりこみ可能という、理論としては、あってもなくてもいいものなんですね。

「湯川相互作用を支配する原理」は未知！
— 電子の質量を計算できる理論は無いのだろうか?
— くりこみ可能性: 湯川 couplings は無くても良い

参考までに、ゲージ理論の創始者である、C.N. Yang や内山さん（R. Utiyama）の言葉をちょっと引用します。Yang は、日本にずいぶん前に来たときに、ある一般講演で、『対称性が相互作用を支配している』(Symmetry dictates interactions）と言ってました。この場合、彼が言っている相互作用っていうのは、もちろんゲージ相互作用のことです。ゲージ相互作用っていうのは、ゲージ対称性を要請するとユニークにばちっと決まる、っていうのが非常に良かった訳ですよね。

ところが湯川相互作用っていうのはそうじゃない。内山さんの原論文を読みますと、その辺をどう書いているか、なかなか興味深いんです。ゲージ相互作用っていうのは、もちろん QED であるとか、(先を越された?）Yang たちのゲージ相互作用であるとか、それらは first class だと分類します。それに対して「湯川の」(と名指しで書いてあったと思いますが）相互作用は second class、つまり first class ではない、と書いてある。(エコノミークラス？、ってまぁいいや。)

とにかく、湯川相互作用を支配する原理が全然無くってですね、これについてなんとかしてやりたいというのが、この講義の後半、最後のパート III の話になります。

2.4 スカラー場の理論と naturalness

まぁとにかく、そういう与太話はいいことにしまして。えー、何が問題だったか。もっかいスカラー場の話に戻ります。スカラー場だけが問題なんかぁいうと、naturalness という意味からすると、そうだということでした。なんでそうなのか、問題の元凶を（対称性の観点から）考えてみます。

いま言ったように、スピン $\frac{1}{2}$ を持ったフェルミオンの質量項ってのは、chiral 対称性が支配してるわけです。chiral 対称性が exact だと、それはゼロ。ちょっと破れてても、破れた後の chiral 対称性が量子補正をコントロー

ルしてる。同じことがスピン 1 のゲージボソンについても言えるわけで、つまりこの場合はゲージ対称性が支配してるわけですよね。質量をコントロールしてくれる対称性がスカラー場にはない、このことが原因なんです。

$$\begin{array}{llcll} \text{scalar 場} & (\text{spin } 0) & \text{の質量} & \Longleftarrow & \quad ??? \\ \text{fermi 場} & (\text{spin } \frac{1}{2}) & \text{の質量} & \Longleftarrow & \text{chiral 対称性} \\ \text{gauge 場} & (\text{spin } 1) & \text{の質量} & \Longleftarrow & \text{gauge 対称性} \end{array} \tag{2.4.1}$$

いくつかのアイデア　こういうふうに問題の元凶を特定しますと、解決へのアイデアが何通りか出てくる。

(0) Higgs は fermion ペアの束縛状態

まず「スカラー場が悪いんだったらスカラー場をなくしちゃえ」という、ま、ゲージ場とフェルミオンの一元論（二元論？）ですね。あの一、テクニなんちゃら[8] とかいう一連のアプローチが、かつて…、かつて盛んに議論されたんですが、まぁでも、こういう考え方っていうのは将来また復活する可能性が…復活っていうか、死んでないと思ってる人もいるから、なかなかムツカシイっすけども。

とにかく、この辺の考え方の重要な点としては、Higgs のラグランジアンというのは、物性で言うところの Ginzburg-Landau の現象論、有名な相転移の現象論ありますよね、あれをちょうどやってるわけです。物性の超伝導の現象というのは Landau があぁいう現象論的なハミルトニアンを書いてから、結局はもっとミクロな、dynamical な理論 — BCS 理論 — に置き換わったわけですよね。それと似た発想です。

(1) 超対称性: Higgs は fermion の superpartnar

それに対して、「スカラー場をそんなに毛嫌いすることないじゃないか」っていうのが SUSY の考え方です。つまり、Eq. (2.4.1) のリストで、スカラー場を制御する対称性が「???」なので、「フェルミオン場とスカラー場の関係をつけちゃえ」というのが SUSY。標準模型で言いますと、Higgs っていうのを、ある種のフェルミオン — Higgsino — の superpartner であると考えよう、そういう発想です。そうすっと、chiral 対称性っていうフェルミオンに対する対称性が、スカラー場の方にも持ち込まれることになります。

(2) 余剰次元: Higgs は gauge 場の一成分 (A_5)

えー、三つ目。今から考えると不思議なわけですけども、この可能性になかなか気づかなかった…。ちょうど昨日までの講師である稲見さんたちの仕事[9] という仕事がありまして、高次元 Yang-Mills のゲージ対称性を使って Higgs 場をコントロールしよう、という発想もあります。

まぁ extra dimension の話は多分もう聞かれたと思うんで、僕の話では二番目の SUSY の考え方に集中してやっていきたいと思います。

四点の自己相互作用と triviality/stability 問題　さて、最初に Higgs のラグランジアンをお見せしたときに、質量項が負になってることも一つの問題だと言いましたけど、四点カップリングが正になってることも、実は良くわからない問題なんです。さっき「M1 向け」って言うて簡単なループ計算やりましたけど、あのことから実は、四点カップリングについても問題があることがわかります。

どういうことかと言うと、スカラーボソンのループ計算をした時、四点カップリング λ のスケール依存性のグラフがありました。図 2.2 の右図をもう一度見て下さい。グラフをみると、高エネルギーで $\mathcal{O}(1)$ 程度の値から出発しても、低エネルギーに来ると普通ちっちゃくなるってことがわかりますね。逆に低エネルギーで値が決まってますと、λ を高エネルギースケールに持っていくと、発散してしまいます。

われわれは Higgs の質量を予言するには、この λ という値を低エネルギーで知らないといけないんやけども、それが（低エネルギーで）ある値になってるとして、今度それを高エネルギースケールに外挿していきます。そうすると、λっていうのはあるスケールで発散してしまうというわけです。

[8] Higgs を techni-quark/antiquark の束縛状態と見做す technicolor 理論。

[9] H. Hatanaka, T. Inami and C.S. Lim, hep-th/9805067. 自分の不明を恥じないといけないんですが、研究会で最初にアイデアを聞いたとき、正直、何が面白いのか、わかりませんでした。最初にアイデアを聞いたときから比べて、論文になるのがかなり遅れたようですね。

これは、えーその、「triviality の問題」と呼ばれている、一般的な問題です。スカラー場だけの理論だと、低エネルギーで λ を fix すると、高エネルギーで発散しちゃう。逆に、高エネルギーで λ をある値に fix （理論のパラメータを input）すると、低エネルギーでの四点相互作用が無くなってしまう、いう問題です。

それに対して、フェルミオンループは逆符合で寄与しますから、実は低エネルギーの値から出発して高エネルギーに行くと、スカラーループの効果とは逆に、キュッと下がっちゃって、四点カップリング…ポテンシャルの係数[10] ですね、こいつが負になっちゃう。これは不安定性の問題です。

$$\begin{cases} \text{scalar} \quad \text{ループ} \quad \Longrightarrow \quad \text{triviality 問題:} \quad \lambda(\mu) \to 0 \\ \text{fermion} \quad \text{ループ} \quad \Longrightarrow \quad \text{不安定性の問題:} \quad \lambda(\Lambda) < 0 \end{cases}$$

で、そういう問題がありまして、そういう意味でも、スカラー場の理論というのは、全然量子補正がコントロールできてない。いいですか、この辺のことは場の量子論をもう少し深く理解しないと分からないんだけども、まぁ安直に言うと、こういう問題だということです。

このような問題に対して、SUSY –(1)– と余剰次元 –(2)– の二つの考え方ではどうなっているか、簡単にコメントしておきたいと思います。結論的にいうと、スカラー場の四点カップリング — Higgs の質量を決める部分 — っていうのは、ゲージカップリングの二乗になっているんです。そういう意味で、少なくとも不安定性の問題は解消している、というのが状況です。

$$(1) \text{ or } (2) : \boxed{\lambda = (\text{gauge coupling})^2} \tag{2.4.2}$$

とにかく、よく質量項の方だけが強調されるので、このことにもついでに触れておきました。

ここまでのまとめ　一応これまでの話をまとめます。

階層性問題には二つの側面がありまして、一つは「input parameter が何でそもそもそんなにちゃうんやろか」という問題（階層性問題の I)。もう一つは「input parameter に階層性があることを認めたとしても、そいつが量子補正に対して不安定である」という問題（階層性問題の II）です。

表 2.1 の左側と右側をそれぞれ見て下さい。左側に書いたように、Planck 質量に対して電弱スケールがちっちゃいのが謎だというのが問題 I と呼んだ方、一方、右側に書いたのは、階層的な質量をクォーク・レプトンが持ってるのが謎だというのが問題 II と呼んだ方です。後者（右側）のフェルミオンに関する問題っていうのは、フェルミオン質量 m がゼロの極限で chiral 対称性があって、$m \neq 0$ の時も、soft に破れた対称性が量子補正をコントロールしてるおかげで問題はない、ちゅうわけでした。

それに対して、前者（表の左側）のスカラーの方は、量子補正に対してもう全然不安定でして、なんか、えー、非常に困っちゃうわけです。そこで、この状況を改善するために、超対称性を導入しまして、フェルミオンの時のように、soft に破れた SUSY というのを考えてやろうというのが目論見です。

もちろん、「soft に破れる」っていうのの原因を突き詰めていくと、dynamical に SUSY を壊す、そういうシナリオを考える必要がある。そういうことをやって挙げ句の果てに、その electroeeak スケールというものの起源に迫りたい、というのが全体の流れとなっています。（この部分は、今回の講義では一切ふれません。）

ところで、階層性問題 II（表 2.1 の右側）は量子補正に対しても安定やということで、原理的な問題はないんじゃないのかなぁと思いたいんやけど、先程言いましたように、右側はそもそも指導原理が未知の世界です。最初に、Standard Model のラグランジアンで、ここが一番判らないといいましたね。

ところがですね、左側の問題を解決しようと思って SUSY を導入すると、実は右側で新たな問題 — supersymmetric なフレーバー問題 — が出てきまして、SUSY の導入はその解決をせまるってことになります。因みに、右側の ‘せまる’ と左側の ‘せまる’ってのは意味が違ってます。なんか日本語、難しい…、ま、いいや。

[10] 安定性の問題にとって重要なのは、場の値が大きいところでのポテンシャルの漸近形です。それが、高エネルギースケールでの結合定数 λ の振る舞いと関係しているという事実については、次の文献を参考にしてください: M. Bando, T. Kugo, N. Maekawa and H. Nakano, Phys. Lett. **B301** (1993) 83. 我田引水ついでに、ゲージ相互作用が入ると、triviality に関して理論の性質が変わってくることについては、M. Harada, Y. Kikukawa, T. Kugo and H. Nakano, Prog. Theor. Phys. **92** (1994) 1161.

“Higgs 質量をめぐって”	“湯川結合定数をめぐって”
階層性問題Ⅰ $m_{\rm EW} \ll M_{\rm P}$	階層性問題Ⅱ $m_{\rm 1st} \ll m_{\rm 2nd} \ll m_{\rm 3rd}$
量子効果に対して不安定	量子効果に対して安定
$\Downarrow$	$\Uparrow$
soft に破れた SUSY	soft に破れた $\chi_{\rm sym}$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
Dynamical SUSY breaking	Yukawa の 指導原理？
$\Downarrow$	$\Downarrow$
EW スケールの起源 の理解にせまる！	しかも SUSY の導入は ‘新たな問題’ の解決をせまる！

表 2.1: 階層性問題 - 2 つのアプローチ

とにかくそういうわけで、これから休憩を挟んで、まず左側のアプローチの supersymmetric な場の理論っていうのを、holomorphy っていうのをキーワードにしてやっていきます。それから、明日にかけて、SUSY のせいで左側の問題 —新しい問題— の解決を迫られること、supersymmetric なフレーバー問題ってのがどんなもんかっちゅうのを簡単にお話して、それに対するアプローチとして、superconformal field theory なんていう、わけわからんもんもあるんだ、そもそもそれはなんなのか、ということを説明する予定です。ま、いろいろ触れられないことが山ほどあって、もう、いちいち言い訳しません。

えー、長くなったんで、ここで十分から十五分休憩したいと思いますけど。質問とかあれば今。

（休憩終了）

実はさっき、最初にお見せするはずだったものを忘れていました。えーと、これから SUSY の割とスタンダードな話をやることにします。えーと、結局はこれ、自分で手を動かさないと分からないような話で、今からやる話も、知ってる人は知っている、知らない人は何じゃこれ、というような話になるのを心配してます。なるべくストーリーを辿って追っ掛けたいと思いますが…。そういう辛気くさい話に行く前に、実はですね、もうしばらくすると SUSY を考える動機が実験的なものになるかも知れないという話をします。

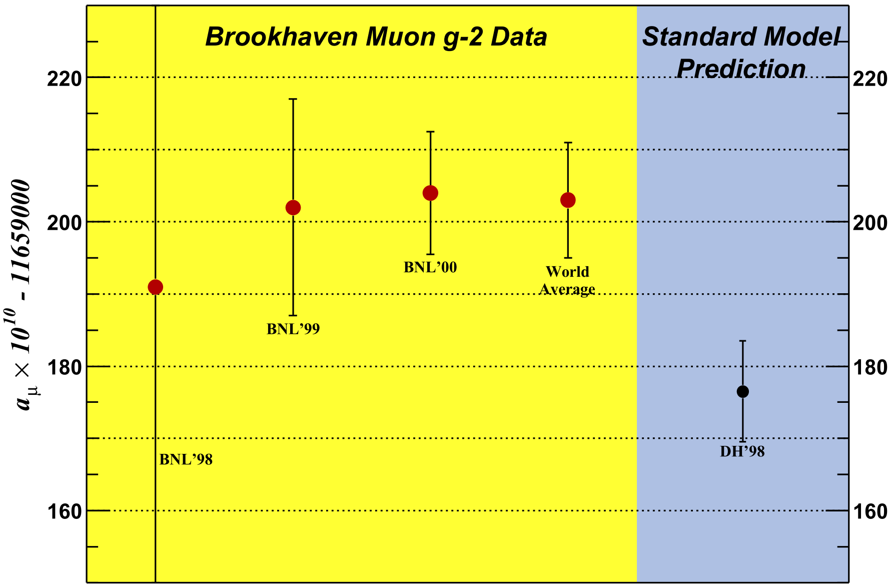


図 2.3: Recent measurements of α_μ (G.W. Bennett et al. (Muon (g-2) Collaboration), hep-ex/0208001)

これは、半年前ぐらいから出る出ると言われていて、つい最近の会議でやっと発表された、ミューオンの $g-2$ のデータ[11] ですが、あ、そもそもこういう絵をぱっと見せられて、これが何を意味するのかが分かる人が現象論ができる人だと思うんです。僕は良く分からないんですが (笑)、あの一ですね、理論と実験で何かズレがあるんじゃないか、というグラフです。

これが QED の理論計算、こちらが実験値で、98 年の段階では互いに consistent だったのが、まず 99 年に理論と実験でズレが見つかった。ただし electroweak の効果まで入ると、理論の方がちょっとズレまして、これもここがこうだこうだこうだ（実線と破線の間をポインターで示す）と二転三転しましが、結局このときは、ギリギリセーフと言うことでした。

それがですね、2000 年の実験データを見ますと、理論（SM）とのズレがこのくらいまで離れてきました。こいつに対してまだエラーバーの二倍の誤差で届くか届かないか、要するに 2σ ちょっとくらいなので、serious にとる必要があるかどうか分からないですけども、これが本当なら多分 SUSY のような新しい物理が比較的低いエネルギースケールにあるという事がかなり確からしい。なんか持って回った言い方や（笑）。

というわけで SUSY を勉強しとくのもいいんじゃないでしょうか。

[11] G.W. Bennett et al. [Muon (g-2) Collaboration], hep-ex/0208001 より引用。

第3章　「超対称な場の理論」入門

これからですね、superfield 形式というのをやっていきますが、話を簡単にするために、まず二次元で基本的な考え方を詳しくやります。我々が住んでいる四次元時空での SUSY というのは、その後で粗筋だけをさっさとやります。ですから細かい話が出てきても適当に聞き流してください。

3.1　アバウトな話

まず一般的な remark として、SUSY 変換というものはボソン場とフェルミオン場を入れ換えるようなもの

$$\text{超対称変換: Boson 場} \overset{Q_\alpha}{\longleftrightarrow} \text{Fermion 場}$$

なわけです。いま SUSY 変換の生成子を Q_α と書きましたが、これはスピノールになっています。このことから、こいつらの満たす代数の形を想像することができます。まず対称性からいってスピノール添字を二つ持っているような量は普通は γ 行列しか無いわけですね。ということは、γ 行列の μ という添字をつぶすものが必要なわけで、それはエネルギー・運動量 P_μ しかありません。したがって、Q_α と Q_β の代数は[1]

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} \;=\; 2\,(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\,P_\mu\,. \tag{3.1.1}$$

こういうのを supersymmetry algebra と呼んでいますけれども、ここで、非常にアバウトな話をさせて下さい。

むかしむかし、Dirac が Dirac 演算子を考えたわけですが、それはまぁ Klein-Gordon 演算子の平方根だと習いましたよね。もちろん微分演算子の平方根をとるのは普通にはできないので、(反可換な) 行列を持ち出したところが Dirac の天才だったとこです。

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Dirac 演算子}\\ i\,\gamma^\mu\partial_\mu + m\end{array}} \;\underset{\Uparrow}{\xleftarrow{\text{平方根}}}\; \boxed{\begin{array}{c}\text{KG 演算子}\\ \partial^\mu\partial_\mu + m^2\end{array}}$$

$$\text{‘反可換’行列}\,\gamma^\mu$$

SUSY も似たような状況でして、SUSY algebra (3.1.1) をみますと、だいたい Q^2 が P になっています。並進の演算子は x 微分 $\partial/\partial x$ なので、Q^2 が P になるためには、$\partial/\partial x$ の平方根を取らないといけない。そのために、反可換な座標というのを持ち出しましょうというのがこれからのお話です。

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{SUSY 生成子}\\ Q_\alpha \sim \partial/\partial\theta^\alpha\end{array}} \;\underset{\Uparrow}{\xleftarrow{\text{平方根}}}\; \boxed{\begin{array}{c}\text{並進 生成子}\\ P_\mu \sim \frac{\partial}{\partial x^\mu}\end{array}}$$

$$\text{SUSY 代数の実現: 反可換な‘座標’}\;\theta^\alpha\theta^\beta \;=\; -\,\theta^\beta\theta^\alpha$$

$$\boxed{\text{超空間}\;(\,x^\mu,\,\theta^\alpha\,)\;\text{上の場} = \;\text{超場}\;\Phi(\,x^\mu,\,\theta^\alpha\,)}$$

こういうのを superspace 形式[2] と呼んでいます。つまり、θ というのを serious に座標だと見做すことにしますと、これはフェルミオンみたいなものですから、反可換な量です。そして、通常の Minkowski の座標 x^μ に、スピノールの反可換座標を加えた superspace というのを考えて、その上で定義された場 — superfield — というものを考えていくわけです。

[1] フェルミオニックな量どうしの代数なので、交換関係ではなく反交換関係です。

[2] 「SUSY なら必ず superspace 形式か」というと、必ずしもそうではないんですが、そういう難しい話はおいておくことにします。

3.2 Euclid 二次元の超対称性理論

そーれで、今お話したようなものをこれから概観して行きたいのですけど、こう暑い中スピノール添字がごちゃごちゃ出て来る話をしたくもないし聞きたくもないでしょうから、二次元に次元を落しまして、お手軽なものをお話しします。しかも四次元（$3+1$ 次元）に似た構造を持たせるためにユークリッド空間で考えさせて下さい。

この章では二次元空間のベクトル添字を a, b などと書くことにしましょう。string に興味持っている人には、これからの話は string の world sheet 上の SUSY をやっていると思ってもらっても結構です。

スピノール添字の処理　ユークリッド二次元の γ 行列というのは、次の反交換関係を満たすものですね。

$$\text{Clifford 代数：}\qquad \{\gamma_a, \gamma_b\} \;=\; 2\delta_{ab}\ .$$

直ちにわかるように、この代数を満たすのは Pauli 行列で、例えば次のようにとれます。

$$\gamma_1 \;=\; \sigma_1 \;=\; \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}\ , \qquad \gamma_2 \;=\; \sigma_2 \;=\; \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}\ . \tag{3.2.1}$$

この γ 行列の掛け算を適当に何倍かしますと、四次元の γ_5 みたいなものを定義できまして、この行列

$$\gamma_3 \equiv -i\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \tag{3.2.2}$$

は γ_1 や γ_2 と反可換な三つ目の行列になります。要するに σ_3 のことです。そうすると σ_3 の固有値は $+1$ と -1 なわけですから、これは二次元空間でのいわゆる chirality を表す行列になっているわけです。四次元に似てるとはこういう意味です。

以下には Dirac 共役がどうのこうのと細かいことがいっぱい書いてありますが、これからしばらく、ちょっとつまんない話が続きます。えー、とにかく、荷電共役（charge conjugation）のこと[3] を思い出しましょう。

まず Dirac 共役 $\overline{\psi} \equiv \psi^\dagger A$ ですが、ユークリッド空間では単に $A = 1$ です。次に、荷電共役というのは、

$$\boxed{\begin{aligned} \psi^* &\equiv B\psi^c \\ +\,\gamma_a^* &= B\gamma_a B^{-1} \end{aligned}} \quad \underset{B^T A = C}{\Longleftrightarrow} \quad \boxed{\begin{aligned} \overline{\psi} &\equiv (\psi^c)^T\, C \\ -\,\gamma_a^T &= C\gamma_a C^{-1} \end{aligned}}$$

γ 行列の複素共役（あるいは転置）と元の行列とがユニタリー変換 B（あるいは C）で結び付くわけですが、それをえっちらおっちら計算しますと、

$$\begin{aligned} \gamma_1^* &= +\,\gamma_1 = B\gamma_1 B^{-1}\ , \\ \gamma_2^* &= -\,\gamma_1 = B\gamma_2 B^{-1} \end{aligned}$$

より、$B = C^T = \sigma_1$ です。従って、フェルミオン場 ψ の荷電共役は σ_1 でやることができる。つまり

$$\mathcal{C}\ :\ \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \;\longmapsto\; \psi^c = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^* \\ \psi_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2^* \\ \psi_1^* \end{pmatrix}\ . \tag{3.2.3}$$

とにかく大事なことは、今フェルミオンは二次元ですから 2 成分あるわけですね。それらを ψ_1, ψ_2 と書きます。これらの荷電共役というのは、単に複素共役を取るだけだと Lorentz 変換性が変わっちゃうので、何か荷電共役行列というものを掛けるわけですが、そいつが今 σ_1 だとわかりました。つまり上の成分と下の成分をひっくり返せば良いというわけです。これはどういう事かというと、上成分 ψ_1 というのは、chirality $+1$ の固有状態だったわけですけど、そいつの荷電共役は下成分（つまり、chirality -1 の固有状態）になる、つまり、荷電共役をとると chirality が反転（flip）するということです。これは 4 次元と全く同じ状況ですね。

[3] A とか B とか C とかいう書き方は、T. Kugo and P.K. Townsend, *Nucl. Phys.* **B221** (1983) 357 に従っています。

また、実なフェルミオンを考えるには、Majorana 条件

$$\psi^c = \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \psi_2 = (\psi_1)^* \ : \ \text{自由度半分} \tag{3.2.4}$$

を課します。すると、ちょうど ψ_2 というものが $\psi_1 \equiv \psi$ の複素共役 $\overline{\psi}$ になります。だから、それぞれが独立なもんでなくなって、自由度が半分になります。

あ、ここでは $\overline{\psi}$ の「バー」は複素共役です。Dirac 共役じゃなくって、複素解析の意味のバーです。記法がちょっと混乱してますけど、以下ではいわゆる Dirac 共役の $\overline{\psi}$ と、複素解析で「z の複素共役」を $\overline{z}$ と書くのと、バーが両方出てきます。適当に見分けてください。

SUSY 代数の書き換え これから、SUSY の代数をちょっと書き直します。一般には

$$\left\{ \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}, \overline{\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix}} \right\} = \{Q_\alpha, \overline{Q}_\beta\} = 2\,(\gamma_a)_{\alpha\beta}\,P^a \tag{3.2.5}$$

と書けるわけですが、— ここのバーは Dirac 共役やね — とにかく、 supercharge というのは Majorana 条件 (3.2.4) を満たす実なスピノールで、荷電共役行列を使って $\overline{Q}$ を Q に直すと、

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2\big(\gamma_a C^{-1}\big)_{\alpha\beta}\,P^a \tag{3.2.6}$$

のように書けます。右辺の行列は、今の場合は二次元だから、ヒョイヒョイと、目で追えるくらいの計算で、

$$\gamma_a C^{-1} = \begin{cases} \sigma_1\,\sigma_1^{-1} = 1 & (a=1) \\ \sigma_2\,\sigma_1^{-1} = -\,i\sigma_3 & (a=2) \end{cases} \tag{3.2.7}$$

となることがわかります。その結果、 supercharge の反交換関係が

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2\begin{pmatrix} P_1 - iP_2 & \\ & P_1 + iP_2 \end{pmatrix} \equiv 2\begin{pmatrix} L & \\ & \overline{L} \end{pmatrix} \tag{3.2.8}$$

のように、「1 方向の並進」と「2 方向の並進の $\pm i$ 倍」というふうに、引いたやつと足したやつになってる。それを俗に L とか $\overline{L}$ と呼ぶわけです。— 別にそう呼ぶ必要もないんだけども。とにかく、「斜め方向」の並進ですね。この反交換関係は、$Q \equiv Q_1$ および $\overline{Q} \equiv Q_2$ と定義すると、

$$\begin{array}{rcl} \{Q, Q\} & = & 2L \\ \{\overline{Q}, \overline{Q}\} & = & 2\overline{L} \end{array}, \qquad \{Q, \overline{Q}\} = 0\,. \tag{3.2.9}$$

確かに super 変換を二回やれば並進になる。そして、Q と $\overline{Q}$ は独立だということも分かりますね。なお、ここの Q と $\overline{Q}$ は、chiral、anti-chiral の意味ですね。

いま、x_1 と x_2 を複素に組んで、$z \equiv \left(x^1 + x^2\right)/2$ および $\overline{z} \equiv \left(x^1 - x^2\right)/2$ のように、二次元平面の z 座標を定義します。すると、結局 L と $\overline{L}$ というのは

$$\left.\begin{array}{c} L \\ \overline{L} \end{array}\right\} \equiv P_1 \mp iP_2 \sim -\,i\left(\frac{\partial}{\partial x} \mp i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \left\{ \begin{array}{l} -\,i\frac{\partial}{\partial z} \\ -\,i\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \end{array}\right. \tag{3.2.10}$$

のように z 微分で表せる。これは、運動量を微分演算子で書くという量子力学の処方箋と一緒です。

それじゃあ次にやりたいことは何かっていうと、Eq. (3.2.9) の右辺の L が座標 z の微分で表現されてますから、左辺の Q の方も、あらわにですね、なにか「微分演算子」の形で書けないかということを考えたいと思います。

3.3 superspace による実現

さて、そんなことができるのか?

ちょっとここで通常の場の理論を思い出してみたいと思います。そもそも、例えば $P_\mu = -i\,\partial/\partial x^\mu$ のように、保存量と変換の生成子っていうのを identify せよ、というのが量子化条件だったわけですね。だから、状態と演算子の変換、たとえば状態の並進と演算子の並進の関係というのは、

$$\begin{cases} \text{状態の並進} & : \quad |x\rangle \;=\; e^{+ixP}\,|x=0\rangle \\ \text{場 の並進} & : \quad \phi(x) \;=\; e^{-ixP}\,\phi(0)\,e^{+ixP} \end{cases} \tag{3.3.1}$$

でした。従って、$\phi(0)$ のように、ある 1 点で場を与えますと、あとはユニタリー演算子 $e^{\pm ixp}$ を使って、バッと任意の点にもっていける。こういうふうしてに $\phi(x)$ っていう場は定義されるのだと考えられます。

さらにこれを ϵ だけずらそうとすると、並進演算子が可換であるということを使って、

$$\begin{aligned} G(\epsilon)\,\phi(x)\,G^{-1}(\epsilon) &= \underline{G(\epsilon)\,G(x)}\,\phi(0)\,G^{-1}(x)\,G^{-1}(\epsilon) \\ &\qquad \Big\| \quad \text{by } [P_\mu, P_\nu]=0 \\ &= \underline{G(x+\epsilon)}\,\phi(0)\,G^{-1}(x+\epsilon) \;=\; \phi(x+\epsilon) \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

つまり単にパラメータを足すだけで場が ϵ だけずれる。いいですよね。これが並進演算子の表現だったんです。さらにこの式を ϵ で展開して、一次の係数を比べれば、左辺は交換関係、右辺は $\phi(x)$ の微分ですね。従って、

$$[\,P_\mu\,,\,\phi(x)\,] = -\,(\,-\,i\,\partial_\mu)\phi(x) \tag{3.3.3}$$

これが Heisenberg 方程式だったわけです。以上のように、状態空間上の並進の演算子の表現と、関数空間上での微分演算子としての表現は関係している。これがスタンダードな場の量子論のお話でした。

Superspace の導入　同じことを superspace っていうところで考えていきたいわけです。先ほどはアバウトな話で反可換座標を導入したらいいんじゃないか、と言いましたけれどもそれをやってみましょう。

$$\boxed{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{Grassmann 座標を導入:} \\ \theta^\alpha\theta^\beta \;=\; -\,\theta^\beta\theta^\alpha \;\; (\alpha,\,\beta=1,\,2) \end{array} & \begin{cases} \theta\;(\equiv\,\theta^1\,) & : \quad \text{chiral} \\ \bar\theta\;(\equiv\,\theta^2\,) & : \quad \text{反 chiral} \quad (\,\bar\theta\;=\;\theta^*\,) \end{cases} \end{array} \\ \Longrightarrow \begin{cases} \text{superspace 座標}: Z \equiv (z,\,\theta)\;,\; \overline{Z} \equiv (\bar z,\,\bar\theta) \\ \text{superfield: } \Phi\big(Z,\overline{Z}\big) \equiv \Phi\big(z,\bar z;\,\theta,\bar\theta\big) = \;\underline{\phi(z,\bar z)} + i\theta\,\underline{\psi(z,\bar z)} + \cdots \end{cases} \end{array}}$$

今、二次元でやってますからスピノール添字は $\alpha,\beta = 1,2$ を走ります。chirality の行列 γ_3 に対して、固有値 $+1$ を持ったやつ、-1 を持ったやつ、これらをそれぞれ θ、$\bar\theta$ と書かせてください。バーは複素共役の意味です。

それで何を考えたいかって言うと、さっきの正則座標 — holomorphic な z、つまり $x+iy$ みたいなやつと、それの複素共役 $\bar z$ に対して、θ と $\bar\theta$ を併せたもの、それを Z と $\overline{Z}$ と書きましょう。これは superspace の座標です。それで、これを座標とするような場の量子論を考えるわけです。いいですね。

そうしますと、この θ というのは Grassmann 座標ですから、2 乗してやれば 0 なので、θ の依存性はテーラー展開してやることで分かります。そうすると、Φ を一個考えると $\phi(z,\bar z)$ とか$\psi(z,\bar z)$ とか、こういう展開係数が、わらわらと出てきて、それが通常の空間上での関数、つまり場になっている。こういうことを今からやっていきたいわけです。

このとき主張は何かということをあらかじめ言っておきますと、「さっきの supercharge 、SUSY 変換の生成子っていうのは、この Grassmann 座標を使って次のような微分演算子で表せる」ということです。

• SUSY 生成子 $\begin{cases} Q \sim -\partial/\partial\theta + i\theta\,\frac{\partial}{\partial z} \\ \overline{Q} \sim -\partial/\partial\overline{\theta} + i\overline{\theta}\,\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \end{cases}$

• superfield 形式 $\simeq$「$Z, \overline{Z}$ の複素解析」

$\begin{cases} \text{chiral 超場} & = & \text{「}Z\text{ の正則函数」} \\ \text{反 chiral 〃} & = & \text{「}\overline{Z}\text{ の　〃　」} \end{cases}$

まぁ、今回の話で SUSY を初めて勉強した人は、最低限、どうやってこれを導くかっていう道筋を、今からの話で理解していただきたいと思います。

で、もうちょっと進んでですね、これからやる superfield 形式のエッセンスは、superspace 座標の複素解析をやっているようなものです。そうすると、複素解析の時は正則関数とか反正則関数っていうのが重要だったわけですが、それに応じて、chiral な superfield という概念が出てきます。後でやりたいのは、これを四次元に拡張するということです。

超空間上での SUSY 変換　まぁ、この辺は儀式みたいなもので、淡々とやることにしましょう。

座標並進の演算子と座標に対応して、super 変換の charge Q_α と、その相棒の座標を θ^α としてやります。

$$G(z,\bar{z},\theta,\bar{\theta}) \equiv \exp[-\,i\,x^a P_a + \theta^\alpha Q_\alpha] \;\equiv\; \exp\Big[-\,i\,(zL+\bar{z}\overline{L}) + (\theta Q+\bar{\theta}\overline{Q})\Big]\ . \tag{3.3.4}$$

いまの notation では、座標を z や $\bar{z}$、運動量演算子を L や $\overline{L}$ と書きましたけれども、それに応じて supercharge も Q と $\overline{Q}$ が現れます。面倒くさいので、以下ではバーをはずした片側 $G(Z) \equiv G(z,\theta) \equiv e^{-izL+\theta Q}$ だけを考えることにします。

先ほどの Minkowski の通常のときに何をやったか思い出しますと、このユニタリー演算子 $G(z,\theta)$ に対して、さらに微少並進を施したときにどうなるのか、ということを考えればいいわけです。そこで、$G(\epsilon,\eta)\,G(z,\theta)$ を計算します。Hausdorff の公式を思い出すと、

$$e^A\,e^B \;=\; \exp\left(A + B + \frac{1}{2}\,[A,B] + \cdots\right)\ ,$$

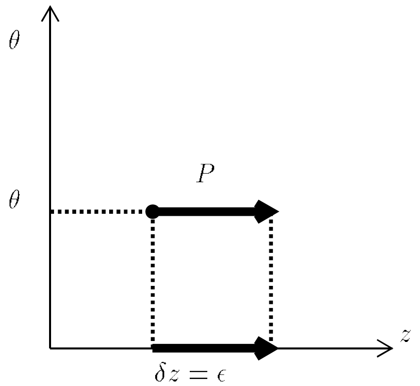
superspace の座標をそのままバッバッと足したものに加えて、さらに交換関係で表される項がでてきます。

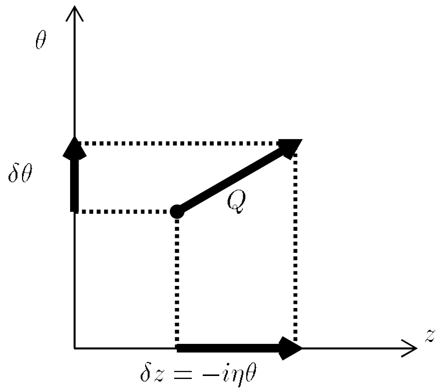
$$G(\epsilon,\eta)\,G(z,\theta) \;=\; \exp\Big\{-\,i\,(z{+}\epsilon)\,L + (\theta{+}\eta)\,Q + \frac{1}{2}\,\underline{\Big[\eta Q\;,\;\theta Q\Big]}\Big\}\ ;\qquad \Big[\eta Q\;,\;\theta Q\Big] \;=\; -\,\eta\theta\{Q,Q\}\ .$$

Q と Q の反交換関係が運動量演算子 L になるというのが supersymmetry 代数 (3.2.9) でしたから、$i\eta\theta$ だけ L の寄与が加わるわけですよね。そうすると、z という点から ϵ だけ並進したつもりだったんだけれども、余分に $i\eta\theta$ だけずれたということになってしまう。

$$G(\epsilon,\eta)\ \text{の作用}\ :\ \begin{cases} \delta z \;=\; \epsilon + i\eta\theta \\ \delta\theta \;=\; \eta \end{cases}\ . \tag{3.3.5}$$

この辺の事情を見てきたような絵を描いて説明してみましょう。横軸が我々の空間で、縦軸が fermionic な extra dimension、余分な次元のつもりです。





通常の並進（左図）というのは我々の空間方向に動かすだけ。せやけども、super 変換（右図）というのは、superspace 方向 — θ 方向 — にピュッと並進したつもりが、ややこしいことに時空の方にもちょっとずれるよ、ということです。実は、この調子で、「super 変換を二回やれば横にだけずれる」ということをお絵描きで味わうこともできるんですが、ま、そんなん描いてもしょうがないので省略しましょう。

ここで、えーっと、通常の理論と同様に、原点における場 $\Phi(0,0)$ を与えてやりますと、それをユニタリー演算子で一般の superspace に拡張することができます。

$$\Phi(z,\theta) \equiv G(z,\theta)\,\Phi(0,0)\,G^{-1}(z,\theta)\ . \tag{3.3.6}$$

いいですね。それを、さらに ϵ と η というパラメータで z 方向と θ 方向に並進してやります。

$$\begin{aligned} G(\epsilon,\eta)\,\Phi(z,\theta)\,G^{-1}(\epsilon,\eta) &= \underline{\Big[G(\epsilon,\eta)\,G(z,\theta)\Big]}\,\Phi(0,0)\,\Big[G(\epsilon,\eta)\,G(z,\theta)\Big]^{-1} \\ &\qquad\qquad = G(z+\epsilon-i\eta\theta\,,\,\theta+\eta) \\ &= \Phi(z+\epsilon-i\eta\theta\,,\,\theta+\eta) \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

$G(\epsilon,\eta)\,G(z,\theta)$ の計算はさっきやりましたよね。横方向（z 方向）に ϵ ずれるんじゃなくって、なんか「ねじれて」いる。そうしますと、結局、$\Phi(z,\theta)$ の変換というのは Eq. (3.3.7) のようになるわけです。

こいつを、例によって、無限小パラメータ ϵ や η について展開して一次をとりますと、

$$\Big[-i\epsilon L+\eta Q,\,\Phi\Big] \;=\; \left[\epsilon\,\frac{\partial}{\partial z}+\eta\left(\partial/\partial\theta-i\theta\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]\Phi$$

より、次の結果が得られました。

$$\big[L\,,\Phi\big] = -\left(-\,i\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi\,,\qquad \big[Q,\Phi\big] = -\left(-\,\partial/\partial\theta+i\,\theta\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi\ . \tag{3.3.8}$$

結局、最初に言いましたように、Q っていう supercharge は Eq. (3.3.8) の二番目の式のように superspace の微分演算子を使って表すことができるわけです。（まあ、二成分表示などの細かい話は省略しましょう。）

3.4 Component fields

で、えーっと、こんな変な空間上[4] で場の理論をやるのは一体どういうことなのか。

最近は SUSY よりも extra dimension に馴染みを持っている人が増えてきているかも知れないですけれども、extra dimension の時は何をやったかといいますと、例えば、五次元の座標を考えて、五次元目の座標について

[4]超空間というと SF みたいですけれども（笑）。

フーリエ展開をしなさい、そうすると、Kaluza-Klein モードがウジャウジャ出てくるよ、ということでした。それと全く同じで、いま superspace というのを考えてますが、余分な座標について (テーラー) 展開します。

いま、real で次元 0 をもった superfield Φ をθ と $\overline{\theta}$ で展開します。θ は二乗すると 0 でしたから、

$$\boxed{\Phi\big(z,\bar{z};\theta,\overline{\theta}\big) \;=\; \underset{\uparrow}{\phi(z,\bar{z})} + i\Big\{\underset{\uparrow}{\theta\psi(z,\bar{z})} + \underset{\uparrow}{\overline{\theta}\overline{\psi}(z,\bar{z})}\Big\} + \underset{\uparrow}{\theta\overline{\theta}F(z,\bar{z})}} \tag{3.4.1}$$

実スカラー　Majorana スピナー　auxiliary

(dim = 0)　(dim = 1/2)　(dim = 1)

この場合 Kaluza-Klein 展開とは違って、テーラー展開の一次 (θ の項と $\overline{\theta}$ の項)、$\theta\overline{\theta}$ の項、ここで終わります。無限には続かない。しかも θ というのが fermionic な量ですから、ϕ をボソンとすると、ψ、$\overline{\psi}$ はフェルミオンで、二成分合わせて Majorana スピノールを組んでいる。それから、$\theta\overline{\theta}$ component に一個余分な場 F が出てきます。

超対称性と両立する拘束条件　なお、Φ を実な量だとしましたけれど、なんで複素にしなかったのかというと、複素にすると理論の対称性 — superPoincaré 対称性 — の既約表現にはならないからです。つまり、Φ を複素のままやると、自由度が二倍になっちゃって、superPoincaré 代数の既約表現でないので、超対称な constraint

$$\Phi = \Phi^\dagger$$

を課して既約にしたということです。

supersymmetry の理論のいっちゃんうっとおしいところは、superfield を考えると有象無象にいろんな場が出てきちゃう、出て来すぎるんですけれども、それを拘束条件をかけて減らす必要があるんです。いいですか。そのとき、もちろん元の対称性に矛盾しないような拘束条件を課さないといけないんだけれども、そのような拘束条件を見つけるのが一般にはうっとおしい。今の場合はトリビアルですね、単に real だと宣言しただけです。あとでもうちょっと複雑な場合を考えます。

次数勘定の仕方　もうこの段階で、今考えているのがどういう素性の理論であるかというのも分かります。次元勘定をしてみますと

$$\begin{cases} \dim P \;=\; +1 \\ \dim x \;=\; -1 \end{cases} \quad \underset{Q^2\sim P}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} \dim Q \;=\; +\frac{1}{2} \\ \dim \theta \;=\; -\frac{1}{2} \end{cases} .$$

momentum P は $+1$ の次元を持っていて、座標 z は -1 の次元を持っている。それから algebra より、Q は P の square root でしたから、次元は半分の $+1/2$。そうするとそれに conjugate な座標 θ は次元 $-1/2$ です。

以上のことを知ってますと、Eq. (3.4.1) で[5] θ が次元 $-1/2$ を持っているので、fermion component は $+1/2$。それから F と書いた component は $+1$ の次元を持っている。すると、ラグランジアンを書こうとしても

$$\text{二次元作用} \;\sim\; \int d^2x\,\Big[(\partial\phi)^2 + \psi\, i\partial\!\!\!/\psi + F^2\Big] \tag{3.4.2}$$

しかないわけです。微分を含むやつはこれだけです。つまり、∂ が次元 1 を持っていますから、total action が dimensionless になるためには $(\partial\phi)^2$、これは通常の kinetic term です。むしろここから ϕ の次元が決まるわけですよね。それから、ψ は $\psi i\partial\psi$ の形で入って来て、また、F というのは次元が既に 1 ですから微分を含むことはできない。こういう F のように、理論をきれいに書くためだけに必要な — ダイナミカルな自由度を持たない— 場を補助場 (auxuliary field) と呼びます。

補助場の必要性　今、補助場っていうのが出てきましたね。ざざっとコメントするだけにしますけれども、こいつの役割を知るためにボソンとフェルミオンの自由度勘定をしてみます。(表 3.1 参照。)

[5] スカラー場 ϕ の次元が 0 というのは、二次元の理論を考えているから。

supermultiplet	ϕ	$(\psi, \overline{\psi})$	F
off-shell の自由度	$+1$	-2	$+1$
$\Downarrow$ EOM		$\downarrow$	$\downarrow$
on-shell の自由度	$+1$	-1	0

表 3.1: 自由度勘定: 但し、fermion の自由度は負で数えることにする。

今、 ボゾン場の自由度は real scalar が一発あるので $+1$、フェルミオン場の自由度は Majorana ですから 2 成分あって -2。そうすると、自由度が釣合ってない。ですからこの補助場っていうのが、場の自由度勘定を合わせてくれているわけです。

ところがややこしいのは、フェルミオンっていうのは一階の微分方程式に従っているわけですが、「粒子の自由度」というものを勘定する場合には、調和振動子の自由度を勘定しないといけない。つまり自由度とは二階微分方程式の解の個数なんですね。

そういう意味で、フェルミオンは off-shell では自由度 2 を持ってたとしても、on-shell っていうか粒子の物理的な自由度っていうのは、その半分しかないわけで、それが、ちょうどスカラー場の自由度とマッチしています。すると、もう補助場なんか要らない。そして実際、運動方程式を使うと F っていう場は、消去できちゃうんです。

成分場の超対称変換　さて、ま、そういう風な感じで、superspace とか superfield を考えますと、前半（前章）で言ったような、ボソンとフェルミオンの自由度がマッチした理論を自動的に作ることができる。何故こんなことが自動的にできたかというと、それはもちろん対称性があるからです。いまから、この対称性を成分場の変換に焼き直します。Φ は θ に依存した場で、それの微少変換を見てみると、変換パラメータを η として

$$\delta_\eta \Phi \;=\; \big[\eta Q, \Phi\big] = \eta\left(\partial/\partial\theta \;-\; i\theta\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\phi + i\theta\psi + i\overline{\theta}\overline{\psi} + \theta\overline{\theta}F\right) \tag{3.4.3}$$

$$= \eta\Big[(i\psi) + i\theta\,(-\,\partial\phi) + i\overline{\theta}\,(-\,iF) + \theta\overline{\theta}\,(\partial\overline{\psi})\,\Big]$$

$$\equiv \;\; (\delta_\eta\phi) + i\theta\,(\,\delta_\eta\psi\,) + i\overline{\theta}\,(\,\delta_\eta\overline{\psi}\,) + \theta\overline{\theta}\,(\delta_\eta F) \tag{3.4.4}$$

です。両辺を比較すれば（全部はフォローしないでも良いと思います)、

$$\delta_\eta\phi \;=\; i\eta\psi\;, \qquad \delta_\eta\psi \;=\; \eta\,\partial\phi\;, \qquad \delta_\eta\overline{\psi} \;=\; i\eta F\;, \qquad \delta_\eta F \;=\; \eta\,\partial\overline{\psi}\;. \tag{3.4.5}$$

重要なのは最後の部分、$\theta\overline{\theta}(\delta_\eta F)$ の項です。さっき F というのは余分な項と言いました。だけども、余分な場 F の super 変換を見ます。この F っていうのは、元々Grassmann 数展開の最高冪のところでしたね、これ以上行ったらあとは 0 っていう。ということは、こいつの変換、$\theta\overline{\theta}\,(\delta_\eta F)$ の形の項を作るためには、Eq. (3.4.3) のところで、微分演算子 $-i\theta\,(\partial/\partial z)$ の方を使わないといけないわけです。というのも、$\partial/\partial\theta$ は θ 微分した形、つまり θ を外すという項で、それに対して、$-i\theta\,(\partial/\partial z)$ はθ の次数を上げる項ですよね。で、それは必ず z 微分を伴っているわけです。いいですかね。以上の議論からわかる重要なことは、highest component（= Grassmann 展開の最高冪のところ）の変換を見てやれば、こいつは全微分になってたということです。

核心部分なので繰り返しましょう。super 変換の charge (3.3.8) は、θ の次数を下げる項と上げる項があって、そのうち上げる項は必ず superspace の並進 (3.3.5)、この並進は捻れてましたね、あの部分から来ている。

$$\text{SUSY 生成子 } Q \quad \sim \quad \underset{\text{下げる}}{\underset{\downarrow}{\boxed{\partial/\partial\theta}}} \quad + \underset{\text{上げる}}{\underset{\downarrow}{\boxed{\theta\,\frac{\partial}{\partial z}}}}$$

θ の次数を

こういう事情でですね、Grassmann 展開の最高冪の項を F term と呼ぶことにしますと[6]、F term の super 変換は全微分。したがって、仮に表面積分が落とせるんだとしますと、全空間積分によりこれは 0、つまり super 変

[6] 誰が書いたか知らないけれど、F と書きましたから

換したら不変になります。ということは、superfield の最高冪のところを $dzd\bar{z}$ 積分しておけば不変だと言ってるわけですよね。ところで、ある superfield の最高冪というのは、$\theta\bar{\theta}$ component の係数を読み取りゃいいわけですから、Grassmann 積分の性質を使えば、実は元の superfield を superspace 全体で積分すればよいということができる。

$$\text{SUSY 不変量} = \int d^2z\,[\text{highest comp.}] \;=\; \int \underline{d^2z\,d\bar{\theta}d\theta}\,[\text{任意の superfield}]$$

余談　いいですか。今までの計算は、スピノールの添字が出てこないので、ちょっと手を動かせば簡単に確かめられると思います。

わざわざ二次元をやってるのは実はですね、僕もマスターのときに最初に SUSY を勉強して、四次元 SUSY のスピノール添字に、なんじゃこりゃあって感じで、ちょっと挫けそうになったことがあるんです。そのとき実は、えーと、あのぉ、(昨日までの講師でもある) 稲見さんのゼミ — 稲見さんはその当時、基研に居はったのですが — で二次元の SUSY (実は後でちょっと出てくる superconformal field theory) を勉強したんですね。それで、なんやこんだけのことかいな、という感じが掴めた。そういうわけで、ここでも敢えてそれを取り上げてみました。これの方が SUSY に特徴的な理論の構造がわかりやすいんじゃないかと思います。

3.5　超対称な作用

えーと、とにかく続けます。超対称不変な作用を実際に書こうとすると、ま、作用をつくりたいんですから、実な superfield を持ってきて、それの最高冪をとれ、とやるわけです。すると、そいつの super 変換は全微分でしたから、作用自身は不変になっているのですね。

$$\begin{aligned}\text{超対称な作用} &= \int d^2z\,\big[\text{ある 実な超場の }\theta\bar{\theta}\text{ 成分}\big] \\ &= \int \underbrace{d^2z}_{\boxed{-2}}\;\; \underbrace{d\bar{\theta}d\theta}_{\boxed{+1}}\underbrace{\big[\text{実な `superfield'}\big]}_{\boxed{+1}}\,. \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

積分を superspace 全体に拡張してやれば、integrand は何か real な superfield を持ってきてやればいい。

あとは、integrand の superfield — ラグランジアンに相当する部分ですね — をどうやって決めるかということになります。まず次元勘定しますと、今、二次元だから x 積分は -2 だけの次元を持ってる。Grassmann 積分は微分と同じでしたから、えー、$+1$。ですから、integrand の質量次元が $+1$ になります。この integrand に何を持ってくるかっていうのは、今の場合は簡単で、単に「superfield 同士の積は、やっぱり superfield だよ」っていうことです。これ (積が superfield としての正しい変換性を持つこと) は簡単に確かめられる。

超共変微分　それから、微分を使いたい、やっぱラグランジアンを書くときには微分が要るなぁと思うわけです。

ここで、θ 微分について、ちょっと注意が必要です。どういう風にしなきゃいけないかっていうと、θ^α 微分を超対称性と consistent なもの — D_α と書きます — に拡張する必要がある。つまり、ある field が super 変換で共変な量であるとしたときに、それに D_θ を施した後の量も covariant であるべきです。(ゲージ理論のときと一緒ですよね。) そういうことを要請してやりますと、新しい θ 微分 D_α は SUSY 変換と可換になってなさい、つまり、生成子 Q とは反可換になっている必要があります。

「Φ が超場ならば、$D_\alpha\Phi$ も正しい変換性」$\Longleftrightarrow$「D_α は生成子 $\eta^\alpha Q_\alpha$ と可換」(Q_α と反可換)

そいつを求めますと、何か Q の表式の符号をどっかチョチョイと変えたような、次の組み合わせがこの要請を満たすことがすぐ確かめられます。

$$\text{supercovariant derivative:} \quad \boxed{\begin{aligned} D_1 = D \equiv \partial/\partial\theta + i\,\theta\frac{\partial}{\partial z}\ , \\ D_2 = \overline{D} \equiv \partial/\partial\overline{\theta} + i\,\overline{\theta}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\ . \end{aligned}} \tag{3.5.2}$$

こういうのを supercovariant な微分（超共変微分）って言うんです。

運動項　supercovariant 微分を使うと、ラグランジアン[7] を書くことができます。

$$\begin{aligned} S &= \int d^2z\, d\overline{\theta} d\theta \left[\frac{1}{2}\,\overline{D}\Phi\, D\Phi\, \left(+\frac{1}{2}\,m\Phi^2\right)\right] \\ &= \int d^2z\,\frac{1}{2}\left[\,\partial\phi\,\overline{\partial}\phi - (\psi\, i\overline{\partial}\psi + \overline{\psi}\, i\partial\overline{\psi}) - F^2\right]\ . \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

今の場合、次元 0 の elementary field Φ を持ってきまして、それと先ほどの supercovariant derivative をかけて作った、本当に運動項みたいな項です。あとまあ、もし付け加えたければ質量項も付け加えても良い。

二つ目の等号のところは、θ 積分をエッチラオッチラ計算します。すると、Φ の展開 (3.4.1) において、lowest component ϕ の z 微分と $\overline{z}$ 微分の積、それから fermion component では、ψ の $\overline{z}$ 微分と $\overline{\psi}$ の z 微分を含んでいます。（後者は二次元の Dirac 作用です。）それに対して、highest component である補助場 F には微分がかかりません。これは、次元勘定から予想されていたことですが、実際に計算で確かめられました。

質量項　今の系に質量項を加えると、ちょっとだけ non-trivial なことが言えます。

$$\left[\frac{1}{2}\,m\Phi^2\right]_F \equiv \left[\frac{1}{2}\,m\Phi^2\right]_{\theta\overline{\theta}} \;=\; m\left(\phi F + \psi\overline{\psi}\right)\ . \tag{3.5.4}$$

何かというと、えー、$[\ \ ]_F$ というのは「$\theta\overline{\theta}$ コンポーネントをとれ」という意味だと思って下さい、Φ の表式

$$\Phi(z,\overline{z};\theta,\overline{\theta}) = \phi(z,\overline{z}) + i\left\{\theta\psi(z,\overline{z}) + \overline{\theta}\overline{\psi}(z,\overline{z})\right\} + \theta\overline{\theta}F(z,\overline{z})$$

をもう一回みてやると、θ コンポーネントにフェルミオンが入っていて、$\theta\overline{\theta}$ コンポーネントに $F(z,\overline{z})$ っていう余分な場が入っている。これを二乗して $\theta\overline{\theta}$ コンポーネントをとるというのは、一回 F を拾えば反対側の方は lowest conponent ϕ ですし、一個ずつ Φ から θ、$\overline{\theta}$をとると、$\psi\overline{\psi}$ が出てくる。これが Eq. (3.5.4) の形です。

補助場 F の部分に着目すると、運動項は（微分を含まない）単なる二次だし、この mass term では ϕ っていう場と linear な相互作用をしていますから、運動方程式は単なる代数方程式です。

$$0 \;=\; \frac{\delta S}{\delta F} \;=\; -F + m\phi \tag{3.5.5}$$

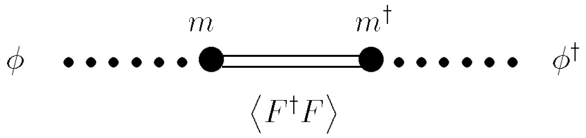
こいつを使ってですね、F を消去します。つまり、これをもう一回 action に突っ込むと、ちょうど、スカラー場の mass term（正確にいうと、mass-squared term）が生成されます。

$$S\big|_{F=m\phi} = \int d^2z\left[\frac{1}{2}\left(\partial\phi\,\overline{\partial}\phi + m^2\phi^2\right) - \frac{1}{2}\left(\psi\, i\overline{\partial}\psi + \overline{\psi}\, i\partial\overline{\psi} - m\psi\overline{\psi}\right)\right]\ . \tag{3.5.6}$$

ボゾンの質量項が、元々あったフェルミオンの質量項と同じ mass parameter m を持っていて、予告通りに、ボソンとフェルミオンで質量が縮退しているぞ、ということがわかります。

このことは、計算でやるより、下のような幼稚な Feynman diagram を描いた方が分かりやすいかも知れません。この二重線で描いてあるのが補助場のプロパゲータで、プロパゲータといっても 1 ですね、微分演算子を含まないから。ですから、ϕ がやって来て m っていう質量項を使って F に遷移し、さらにプロパゲータで $F^\dagger$、最後に $\phi^\dagger$へ。これがスカラー場の伝播の様子ということになります。（こんなことしながら飛んでいるので、遅くなる。）

[7] 簡単な例といいながら、実は superstring の world-sheet action だったりするかもしれない。



スケール不変な理論　まぁこういうふうにですね、二次元のオモチャの場の理論で superfield 形式をやってみました。(今のを superstring の world-sheet action だと思ってもいいんですね。) 折角ですから、この二次元のケースから、もうちょっと遊んでみたいと思います。

例えば m をゼロとしてみましょう。そーすると、ラグランジアンの中に質量次元をもったパラメータが一切なくなりますから、この系はスケール不変性を持つ理論となります。実は、場の理論の定理として、「スケール不変かつ回転不変な理論があると、対称性が共形 (conformal) 対称性[8] に持ち上がる」ことが知られています。(ここでは結果を引用するだけにしますが…。) さらに、回転対称性に super を含むと、結局、superconformal 対称性が存在することになります。明日、四次元の超対称ゲージ理論の場合にも、こういう superconformal な系が（量子論的にも！）存在し得るっていうことをコメントします。

それよりも、二次元でやったご利益というか、面白いことがあるんです。SUSY をわざと z や $\bar{z}$ っていう複素解析の言葉を使ってやりました。実は、そういう holomorphy と理論の chiral 構造っていうのがこの場合ピタッと同じものだということがわかるんです。普段こういうコメントはあんまりしないんだけども…。

どういうことかっていうと、さっきの action から運動方程式をつらつらと書くことができます。

$$0 = \partial\bar{\partial}\phi = \bar{\partial}\psi = \partial\bar{\psi} = F \ . \tag{3.5.7}$$

まず ϕ の運動方程式をみると、z と $\bar{z}$ で微分したらゼロなので、解は z だけの関数と $\bar{z}$ だけの関数（の和）ですよね。それから、ψ も、$\bar{z}$ で微分したらゼロってことは、z だけの関数になってる。今、ユークリッドでやってるので「z ってなんじゃろ?」って思うかもしれないですけど、Minkowski に戻しますと z っていうのは $t-x$ に相当します。要するに、$\phi(z)$ ってのは $t-z$ だけの関数ってことで、ちょうど右向きの進行波になってる。$\bar{\phi}(\bar{z})$ の方が $t+x$ だけの関数っていうのはその反対向き。

$$\begin{array}{rclcl}
\phi(z,\bar{z}) & = & \phi(z) & + & \bar{\phi}(\bar{z}) \\
\psi(z,\bar{z}) & = & \psi(z) & & \\
\bar{\psi}(z,\bar{z}) & = & & & \bar{\psi}(\bar{z}) \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \text{右向き進行波} & & \text{左向き進行波} \\
 & & \text{(chiral)} & & \text{(anti-chiral)}
\end{array} \tag{3.5.8}$$

いいですか? 二次元の（自由場の）波動方程式の解がそうなるっていうのは誰でも知ってるんだけども、それが今、「SUSY のおかげでフェルミオンの chirality と連動している」ということです。

それを、superfield や supercovariant derivative を使いますと、次のように特徴づけできます。

$$\begin{aligned}
\text{Right-mover}:\ 0 \ &= \ \bar{D}\Phi \ = \ i\bar{\psi} - \theta F + i\bar{\theta}\left(\bar{\partial}\phi\right) + \theta\bar{\theta}\left(\bar{\partial}\psi\right) \ , \\
\text{Left -mover}:\ 0 \ &= \ D\Phi \ = \ i\psi + \bar{\theta}F + i\theta\left(\partial\phi\right) - \theta\bar{\theta}\left(\partial\bar{\psi}\right) \ .
\end{aligned} \tag{3.5.9}$$

ここで $\bar{D}\Phi = 0$ である方を chiral superfield と呼びます。一方 supercovariant derivative のバーの方 $\bar{D}$ で微分してゼロというのが、ちょうど右向き進行波を特徴づける条件になっています。

以上、コメントでした。とにかく、こういうふうにボソンにも chiral 対称性が持ち込まれるというのが、階層性問題の解決としては、非常にうれしいことなんです。これで二次元 SUSY の場合、まぁオモチャの系の場合はおしまいにします。

[8]… conformal って、なんでしたっけ。 角度を保つ座標変換でしたね。

第4章　四次元 $\mathcal{N}=1$ 超対称な場の理論

これから 4 次元 SUSY で同じようなことをやります。最初に、これからやることのまとめをやっときましょう。（第 4.2 節以降で出てくるキーワードの紹介だと思って聞いてください。）

4.1　これからの目標

まず、物質場を表す chiral superfield というものを扱います。その後でゲージ理論に拡張していきたいと思います。実は、物質場の場合に出てくる chiral superfield には、スカラー場と、左巻きの chiral フェルミオンの他に、さっきのと良く似た補助場 F が出てきます。（むしろこちらを F と書くわけですが。）それに対して、後でやるゲージ理論の場合に出てくるベクトル superfield というのには、A_μ と書いたゲージ場と、その相棒のフェルミオンであるゲージーノの他に、D という補助場[1] が出てきます。

- matter 場　（第 4 章）:　chiral 超場　(ϕ, ψ_α) $\oplus$ 補助場 F
- gauge 場　（第 5 章）:　vector 超場　(A_μ, λ_α) $\oplus$ 補助場 D

表 4.1: 二種類の補助場

これらを使って超対称な作用を書くことができます。基本的な構造は、二次元の時と一緒で、superfield の highest component、つまり補助場をもってくると、その super 変換が全微分になるというものです。補助場としては、二次元の時には一個しかありませんでしたが、四次元では二種類あるので、四次元の超対称な作用は、D 項を使った作用と F 項を使った作用という二つのタイプのものがあります。そして、それぞれを特徴づけるものとして、supersymmetric な理論というのは三つの関数あって、それぞれ、Kähler ポテンシャルであるとか、ゲージ kinetic function であるとか、 superpotential と呼んでいます。

$$
\begin{array}{cccc}
S_{\mathrm{SUSY}} = & (D\text{–term 作用}) & + & (F\text{–term 作用}) \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\text{三つの関数:} & \boxed{\text{Kähler potential}} & \boxed{\text{gauge kin. fun.}} & \boxed{\text{super-potential}}
\end{array}
$$

表 4.2: 超対称な作用（まとめ）

これからの話で特に重要なのは superpotential の部分で、この部分が SUSY のおかげで非常に制限を受けることになります。（明日はゲージ kinetic function も重要になります。）なお、SUSY を良く知っている人への補足的なコメントですが、我々が本当に知りたいのは、実は Kähler ポテンシャルだということは認識しておいてくださ

[1] 多分、最初の人が ABCD という具合いに書いたときにたまたま D だったのが、そのまま固有名詞的に使われている例でしょう。

い。特に SUSY の現象論とか model building をやる人にとっては、この Kähler を如何に支配するかが最も重要なことですし、string 理論から、場の理論の Kähler を予言できるかというのも大事な問題です。

超対称理論のスカラーポテンシャル　もう少し言うと、スカラー場のポテンシャルは理論の安定性とか Higgs ポテンシャルを調べる時に重要なわけですけれども、やっぱり補助場の D の方と F の方から、それぞれの contribution があります。

$$V(\phi,\phi^*) \;=\; \frac{1}{2g^2}\,D^2 + |F|^2 \;\geq\; 0\;. \tag{4.1.1}$$

いまやっているような普通の SUSY 理論、つまりゲージ化する前の SUSY（global SUSY）では、ポテンシャルは正定値になっています。

多分今回の話では省略すると思うので、ここで SUSY breaking についてちょっとだけ触れておきましょう。さっきの二次元の場合を見直してもらうとわかると思いますが、この F や D という量はフェルミオンの super 変換だったわけです。つまり、これらの補助場は、基本的に supercharge とフェルミオンの交換関係で書けている、ということです。ですから、これら補助場の真空期待値が 0 になってないということは、実は Q が真空を消していない、つまり SUSY が spontaneous に破れているということと同じです。逆に言うと、 SUSY が spontaneous に破れていない — 真空が Q 不変である — という条件は、F の期待値とか D の期待値が 0 になっていることと等価です。

$$Q_\alpha\,|0\rangle = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \langle 0|\,F\,|0\rangle = 0 & : \quad F\text{–flatness} \\ \langle 0|\,D\,|0\rangle = 0 & : \quad D\text{–flatness} \end{cases} \tag{4.1.2}$$

$$\Longleftrightarrow\; \langle 0|H|0\rangle = 0\;. \tag{4.1.3}$$

Eq. (4.1.2) を F-flatness とか D-flatness と呼んでいます。上の表式 (4.1.1) からすると、ポテンシャルは D や F の 2 乗でしたから、0 になるところが最もエネルギーが低いわけですね。それが SUSY 不変な条件と言っているわけです。

4.2 supersymmetry 代数

要点[2] だけピックアップしていきます。今からやるのは 4 次元 SUSY です。Wess–Baggar の教科書[3] の convention に従って書きます。Minkowski 計量は ‘mostly plus’ な convention です。例えば、Clifford 代数は

$$\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\} \;=\; -\,2g_{\mu\nu}\;,\quad g_{\mu\nu} \;=\; \mathrm{diag}\,(-+++)$$

です。四次元の四成分スピノール添字をハット付きで書くと、supersymmetry 代数は

$$\Big\{Q_{\hat\alpha}\,,\,\overline{Q}_{\hat\beta}\Big\} \;=\; 2\,(\gamma^\mu)_{\hat\alpha\hat\beta}\,P_\mu \tag{4.2.1}$$

です。これはいいですよね。これを二成分スピノールにもっていきます。四成分スピノール添字を点つきスピノールと点なしスピノールで$\hat\alpha = (\alpha,\dot\alpha)$ などと表すと、

$$Q_{\hat\alpha} \;\equiv\; \begin{pmatrix} Q_{\,\alpha} \\ \overline{Q}^{\,\dot\alpha} \end{pmatrix}\,,\qquad \gamma_\mu \;=\; \begin{pmatrix} & (\sigma_\mu)_{\alpha\dot\alpha} \\ (\overline{\sigma}_\mu)^{\dot\alpha\alpha} & \end{pmatrix}$$

なので、二成分表示での supersymmetry 代数は

$$\boxed{\Big\{Q_\alpha\,,\,\overline{Q}_{\dot\alpha}\Big\} \;=\; 2\,(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}\,P_\mu\;,\qquad \Big\{\overline{Q}^{\,\dot\alpha},\,Q^\alpha\Big\} \;=\; 2\,(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\alpha}\,P_\mu\;,\qquad \{Q_\alpha\,,\,Q_\beta\} \;=\; \Big\{\overline{Q}^{\,\dot\alpha},\,\overline{Q}^{\dot\beta}\Big\} \;=\; 0\;.}$$

[2] 講義では、transparency を見せただけで省略した部分です。適当に文章化しました。
[3] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Suepergravity*, 2nd ed. (Princeton Univ. Press, 1992).

なお、四成分 Majorana 表示では次のようになっていて、Majorana supercharge が $\mathcal{N}$ 通りある場合を'$\mathcal{N}$ 重に拡張された' 超対称性などといいます。

$$\left\{Q_{\hat{\alpha}}, Q_{\hat{\beta}}\right\} = 2\left(\gamma^{\mu}C^{-1}\right)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} P_{\mu}\,, \qquad \mathcal{N} \equiv \#\{\text{Majonara supercharges}\}/4\,.$$

四次元ゲージ理論だと、$\mathcal{N}$ は最大 $\mathcal{N}=4$ まで、四次元の重力を含む理論だと最大 $\mathcal{N}=8$ まで可能なことが知られています。以下では $\mathcal{N}=1$ の最も単純な場合に話を限りましょう。

4.3 $\mathcal{N}=1$ superspace と代表的な superfields

やることは、さっき二次元でやっていたやつの繰り返しになります。(spinor 添字がぐちゃぐちゃ出てくるのがうっとおしいので)、再び、概略だけをざっと見ていくことにして、詳しくは Wess–Baggar の教科書を見て下さい。

今度は時空の座標をスタンダードに x^{μ} と書きましょう。そして、さっきのようなスピノール添字を持った、θ_{α} と $\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}$ という反可換座標を併せもった superspace を考えましょう。

$$\left(x^{\mu},\, \theta^{\alpha},\, \overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\right) \tag{4.3.1}$$

そして、スピノール添字をつぶしたやつを θ^2 で表します。実際は α が 1 のやつと 2 のやつの掛け算ですね。

$$\begin{aligned} \theta^{2} &\equiv \theta^{\alpha}\theta_{\alpha} = -2\,\theta^{1}\theta^{2}\,, \qquad \theta^{3} = 0\,, \\ \overline{\theta}^{2} &\equiv \overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}} = +2\,\overline{\theta}_{\dot{1}}\overline{\theta}_{\dot{2}}\,, \qquad \overline{\theta}^{3} = 0\,. \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

ですから、今度は三乗以上が全部 0 になります。

このような superspace 上の場を定義するには、最初に普通の場の理論の場合を復習したように、原点の場をユニタリー演算子を使って superspace に拡張します。そのユニタリー演算子には、P と Q と $\overline{Q}$ がある。それぞれに対してさっきの処方箋を繰り返しますと、Q を微分演算子に書くことができて、

$$i\,Q_{\alpha} = -\,\partial/\partial\theta^{\alpha} + i\left(\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\,, \qquad i\,\overline{Q}_{\dot{\alpha}} = +\,\partial/\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}} - i\left(\theta\sigma^{\mu}\right)_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \tag{4.3.3}$$

となります。それには θ の次数を下げる部分とあげる部分がある。で、あげる部分の方、θ 使っている部分は必ず時空の方の微分を伴っている、というのが結果です。それから super 変換が superspace の上の捻れた形式になっている、ということ。

それとすぐに後で必要になりますから、一応式だけ見せますが、Q と反可換な supercovariant derivative というのも書くことができて、答えは、単に符合を変えるだけです。

$$D_{\alpha} = +\,\partial/\partial\theta^{\alpha} + i\left(\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\,, \qquad \overline{D}_{\dot{\alpha}} = -\,\partial/\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}} - i\left(\theta\sigma^{\mu}\right)_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\,. \tag{4.3.4}$$

まあ、こんなわけで、何だか、式だけ見せていますが、詳しくは自分で手を動かしてみてください。

一般の superfield とにかく superfield っていうのを考えて、それを Grassmann 座標で展開しますと、一般に次のようになります。

$$\Psi\left(x,\theta,\overline{\theta}\right) = A(x) + i\theta^{\hat{\alpha}}\psi_{\hat{\alpha}}(x) + \cdots + \frac{1}{2}\theta^2\overline{\theta}^2 D(x)\ . \tag{4.3.5}$$

最初の A 項っていう項から始まって、以下テンテンテンと続きます。二次元に比べてスピノール の個数も多いですからね。だから、ダダダと展開しようとすると、Eq. (4.3.2) より、$\theta^2\overline{\theta}^2 \equiv \theta^4$ っていう項まである。

このように、一般の superfield というのを考えると、反可換座標について展開したとき、成分場がたくさん出て来すぎます。成分が多すぎる訳です。つまり、こういうのは super ポアンカレ代数の規約表現ではないんだ、ということです。そこで、うまく条件を課して制限してやりたい。(この辺、SUSY はあまりきれいじゃない部分ですね。) その課し方には二つ有名なものがあります。(他にも無いわけではないんだけども、普通は以下の二つで十分です。)

既約な superfield まず、良く使うのは先ほどの supercovariant derivative を作用させたら 0 になる superfield Φ です。

$$\boxed{\overline{D}_{\dot\alpha}\Phi = 0} \implies \Phi \sim \phi + \sqrt{2}\,\theta^\alpha \psi_\alpha + \theta^2 F\ . \tag{4.3.6}$$

この条件は super 変換に対して共変な概念[4] ですから、supersymmetry と矛盾しないのです。こういう条件式を課したものを chiral superfield といいます。あるいは、lowest component がスカラー場になるんで、scalar superfield っていう名前で呼ばれることもあります。これについては、次の節でもう少し詳しく説明します。

それに対して、場が実であるっていう条件式を課して、成分を制限するということもできます。二次元の時もやりましたね。

$$\boxed{V^\dagger = V} \ = \ \cdots - \theta\sigma^\mu\overline{\theta}A_\mu + \cdots + \frac{1}{2}\theta^4 D \tag{4.3.7}$$

この場合は実は、テンテンテンと展開していった中に、ベクトル場が入ってるっていうことが後で判ります。こいつを、vector superfield とか、superfield と呼びます。

二次元の例でやったように、superfield の最高冪の所が重要になります。まず chiral superfield の場合、直ぐ後で示すように、essential にいえば $\overline{\theta}$ 微分で消えなさい、という意味ですからθ^2 で展開が止まっちゃいます。ここの係数 — F と書いた部分 — が chiral の superfield の最高冪の項で、F term と呼ばれています。次に、vector superfield の最高冪の所、それを今度は D と一般には書きます。これらの最高冪の部分は、super 変換したら全微分になります。これは二次元の時に説明したのと同じ事情です。だからここでは繰り返しません。

記法の約束 これから後、F term を以下のような記号で表しますが、それは chiral な superfield の掛け算とったような量からθ^2 component を引き抜いた、あるいは superspace で積分したものです。

$$[\,\mathrm{chiral}\,]_F \equiv \int d^2\theta\ [\,\cdots\,] = -\frac{1}{4}D^2[\,\cdots\,]\ . \tag{4.3.8}$$

それから、 chiral とは限らないものの D と書いたときには、今度は θ と $\overline{\theta}$ 全部合わせた space で積分したもの

$$[\,\mathrm{general}\,]_D \equiv \int d^2\theta\, d^2\widehat{\theta}\,[\,\cdots\,] = \frac{1}{16}D^2\overline{D}^2\,[\,\cdots\,] \tag{4.3.9}$$

という意味です。

4.4 chiral superfield

いよいよ、四次元の chiral superfield について、具体的に説明していきます。まず contraint (4.3.6) を解くことを考えましょう。そのために、superspace の座標変換を行って、x を次のコンビネーションだけずらして、z という座標を使うことにします。

$$\left(x^\mu, \theta^\alpha, \overline{\theta}_{\dot\alpha}\right) \longmapsto \left(z^\mu, \theta^\alpha, \overline{\theta}_{\dot\alpha}\right)\ , \qquad \text{但し}\quad z^\mu \equiv x^\mu + i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\ . \tag{4.4.1}$$

よくあるように、座標変換すると、何を固定して微分するのかっていうことを考えながらやらなきゃいけないですよね。具体的にやってみると、$\overline{D}$ が（さっきのややこしいやつじゃなくて）単に $\overline{\theta}$ で微分するというものになっていることがわかります。

$$\overline{D}_{\dot\alpha} = -\,\partial/\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}\ . \tag{4.4.2}$$

そうしますと、この新しい z 座標で見ればさっきの constraint の解っていうのはすぐさまわかりますよね。解は、$\overline{\theta}$ の依存性がない、z と θ だけの関数になります。θ については Grassmann 展開をやりますとθ^2 で展開が終わるわけで、

$$\Phi = \Phi(z^\mu, \theta^\alpha) \ = \ \phi(z) + \sqrt{2}\,\theta^\alpha\,\psi_\alpha(z) + \theta^2 F(z) \tag{4.4.3}$$

[4] $\overline{D}_{\dot\alpha}$ が超対称変換の生成子 Q と反可換ということ。

のように、二次元の時と同じような構造です。ただし、違いはある。それは何かというと、こいつら全部、複素な座標、複素な量だということです。二次元の時と違って、real っていう条件はもはや課せません。何故かっていうと、条件式 (4.3.6) は $\overline{D}$ で消えなさいっていう条件ですから、複素共役とると D で消えろっていう条件になる。すると条件式が変わってしまいますから、複素共役っていうのはとれないわけですよ。

とにかく、ここに出てきた量は本質的に複素な量です。lowest component は複素なスカラーで、次の成分が Weyl のスピノール、そして最後に、複素な補助場がでてくる。こいつらを全部で chiral な supermultiplet と呼びます。

ここでまた自由度勘定してやる。もちろん、これらの multiplet を real で勘定すると、複素スカラーは 2 成分あることになる。それから Weyl スピノールっていうのは複素で 2 成分、だから real で勘定すると全部で 4 成分あって、それからループに回るとネガティブに効くわけですよね。最後に、補助場は 2 つあって、当然これはボーズ。結局、ボーズ (+2)、フェルミ (−4)、ボーズ (+2) ですから、全部で（off-shell の）場の自由度としては、ピッタリと数勘定が合う。いいですね。

$$
\begin{array}{cccccc}
\Phi = & \phi(z)\ + & \sqrt{2}\,\theta^\alpha\,\psi_\alpha(z)\ + & \theta^2 F(z) \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 & \text{複素スカラー} & \text{Weyl スピナー} & \text{auxiliary} \\
 & (\dim = 1) & (\dim = 3/2) & (\dim = 2)
\end{array}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{lccccc}
\text{off-shell d.o.f.} & = & +2 & -4 & +2 & = & 0 \\
\text{on-shell d.o.f.} & = & +2 & -2 & +0 & = & 0
\end{array}
\right.
$$

表 4.3: 4 次元 chiral supermultiplet の自由度勘定: フェルミオンは負に数える。

それから、さっき二次元でやったのと同様に運動方程式を使った後で勘定してみます。ボソン場から出てくるのはちょうど同じ数だけの粒子モードがでてくるのだけれど、フェルミオンからは半分。ディラック方程式を使うと、自由度半分になりますから。で、補助場は運動方程式で消去されるので、やっぱり on-shell の自由度も合っている。具体的にやりませんが、超対称性による発散の相殺なんていうのは、こういう形で働くわけです。

超対称理論の「テンソル解析」　普通、最初に相対論を勉強するときにテンソル解析をやらされましたよね、あれと同じで、supersymetric な理論っていうのでも、ある種の「テンソル解析」をやらないといけません。でも、superfield でやる分には比較的簡単です。これから結果だけをさっさっさと見ていくことにしましょう。

chiral な superfield っていうのは微分演算子 $\overline{D}$ で消えなさいっていうものだから、chiral なものと chiral なものの積はやっぱり chiral になっています。いま、Φ_i という superfield があったとして、ϕ component、ψ component、F component をそれぞれ $\Phi_i \sim (\phi_i\,,\psi_i\,,F_i)$ という風に書きましょう。このとき、chiral 同士のかけ算をして W という関数を作ってみると、Φ の関数である W が全体として一つの chiral な superfield になっています。そして、W の lowest component、ψ component、F component っていうのは

$$
W(\Phi)\sim\left(W(\phi),\,\frac{\partial W}{\partial\phi_i}\,\psi_i\,,\,\frac{\partial W}{\partial\phi_i}\,F_i-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 W}{\partial\phi_i\partial\phi_j}\,\psi_i\psi_j\right) \tag{4.4.4}
$$

のように計算することができます。

あとで重要になるのは F component の方です。F component って何だったかっていうと、θ っていう Grassmann 座標で展開したときの θ^2 の係数、つまり θ で二回微分した係数ですから、W の F component っていうのは、W を一回微分して Φ_i から θ^2 をはぎ取って F を引き抜いてくるものと、W を二回微分して Φ の θ component をそれぞれとってくるものと、二通りの可能性がありますね。それをいっているのがこの公式です。将来、第一項がスカラーポテンシャル、第二項がフェルミオンの質量項、あるいは湯川カップリングになるものです。

このように、chiral × chiral は簡単なんですけど、chiral と anti-chiral をかけ算する場合は少々複雑です。一方は θ だけ、もう一方は $\bar\theta$ だけの関数なわけだから、結局元に戻っちゃう訳ですね。そうするともうワケわかんなくなるかと思いきや、 supercovariant derivative $\overline{D}$ を使って以下のように考えることができます。

そもそも、$\overline{D}$ は Grassmann 座標 $\bar\theta$ による微分でした。それを二回作用させると、もともと $\bar\theta$ については二次までしかなかったわけですから、二回微分しちゃえばもう残ってないはずですよね。つまりそれは chiral になってるんです。いいですか。これにもう一回 $\overline{D}$ を作用させれば必ずゼロになる。

例えば、Φ の エルミート共役 $\Phi^\dagger$ は anti-chiral ですが、これに二回 $\overline{D}$ を作用させますと、結果は chiral になっている。これを具体的に計算するのは、一番いやなところだけども、えっちらおっちらやると

$$-\frac{1}{4}\overline{D}^2\,\Phi^\dagger \;\sim\; \left(F^\dagger,\, i\partial\!\!\!/\,\overline{\psi},\, \Box\,\phi^\dagger\right) \tag{4.4.5}$$

という結果になる。この計算はえーと、まぁ、認めてください。とにかく anti-chiral なものに $\overline{D}^2$ を作用させると、chiral になります。こういうものを kinetic multiplet と呼びます。

さて、Φ っていう chiral なものと、$-\frac{1}{4}\overline{D}^2\Phi^\dagger$ っていう chiral なもの、この chiral どうしのかけ算っていうのはやっぱり chiral ですから、その F component をとると超対称な量になります。いいですか、今のロジック。chiral なものと chiral なものをかけ算して、それの F term をとる。そうすると super 変換不変なものになっている。

ところが実はですね、F term の中の $\overline{D}^2$ っていうのは$\bar\theta$ を二回剥ぎ取るということ。それはさらに Grassmann 積分の性質から $\bar\theta$ で積分するというのと一緒ですね。ですから、全体を $\Phi\Phi^\dagger$ の D term と書くことができます。

$$\left[\Phi\left(-\frac{1}{4}\overline{D}^2\Phi^\dagger\right)\right]_F \;=\; \left[\Phi\Phi^\dagger\right]_D \;. \tag{4.4.6}$$

いいですか? F とか D とか忘れてるかもしれないので、もう一回言いますと、Eqs. (4.3.8)–(4.3.9) で定義したように、F と書いてあるのは、θ だけ積分するもの。D と書いてあるのが、θ と $\bar\theta$ 両方の積分です。今は、この θ 積分というのが「$\overline{D}$ を二回作用させる（微分を二回する）こととおんなじだ」ということを使いました。

今はとにかく、カイラル多重項を$\Phi_i \sim (\phi_i, \psi_i, F_i)$ と表してるわけですが、それと、Eq. (4.4.5) の kinetic multiplet $-\frac{1}{4}\overline{D}^2\Phi^\dagger$ とのかけ算をやって、さっきの公式 (4.4.4) を使って F term をとってみます。あるいはこれはもとから言うと、$\Phi\Phi^\dagger$ ていう量の D term を計算する、というものなんだけども、とにかくそれやりますと、

$$\text{Eq. (4.4.6)} \;=\; \phi\left(\Box\,\phi^\dagger\right) - \psi\left(i\partial\!\!\!/\,\overline{\psi}\right) + F\left(F^\dagger\right) \quad \simeq -\left|\partial_\mu\phi\right|^2 - \overline{\psi}\,i\overline{\partial\!\!\!/}\psi + |F|^2 \tag{4.4.7}$$

となります。最後の形を見ると、普通のスカラー場・フェルミオン場・補助場の運動項になってることに気付きます。つまり、superfield を使うと、微分なんか一切使ってないはずなのに、あれよあれよという間にふつうの運動項が書けてしまったわけです。

ということで、超対称な場の理論をやるときには、運動項っていうのは見掛け上、微分を一切使わないんです。$\Phi\Phi^\dagger$ というふうに superfield で書くと、非常に簡単な形にまとまることになります。ここまでくるのは結構大変でしたが、一旦ここまでくると、（微分やら spinor 添字やらが隠れてしまっているので）むしろ簡単になっていますね。細かい計算は自分で確かめてもらうしかないので、まぁ今は、気分だけわかってもらえばいいと思うんですけども。

4.5 Wess-Zumino 模型

じゃあ例えばどんな系があるかということなんですけど、実は 4 次元で一番最初に supersymmetric で interactive[5] な理論を作ったのは Wess と Zumino ということになっています。これは最も簡単な超対称理論で、ある意味で標準模型での Higgs–Yukawa セクタの super 版になっています。

[5] 非摂動論的な意味で相互作用してるかどうかは良くわかりませんが…。

一般的なラグランジアン　表 4.4 で K って書いたもののことを Kähler potential っていいます。なんで Kähler って言うのかっていうのは、これもコンポーネント展開をやらないとわかんないんだけども、Kähler 多様体というもののメトリックを決める関数になっているからです。まあ、そういうことは省略。忘れましょう。

$$S = \int d^4x \; \underbrace{d^4\theta\, K\big(\Phi,\Phi^\dagger\big)}_{\substack{\text{一般超場 } K \text{ の}\\ D\text{-term}}} + 2\,\mathrm{Re}\int d^4x \; \underbrace{d^2\theta\, W\big(\Phi\big)}_{\substack{\text{chiral 超場 } W\\ \text{の } F\text{-term}}} \tag{4.5.1}$$

$$\text{ここで}\begin{cases} K = K\big(\Phi,\Phi^\dagger\big) & : \ \text{Kähler potential} \quad (\text{dim.}\,2) \\ W = W(\Phi) & : \ \text{superpotential} \quad (\text{dim.}\,3) \end{cases} \tag{4.5.2}$$

表 4.4: supersymmetric action の一般形（ゲージ場がない場合）

ここで重要なことは、この x 積分は x が長さの次元でその 4 乗ですから、質量次元でいうと -4 になります。θ の次数っていうのも同じように勘定すればよくって、$d^4\theta$ は $+2$ の次元を持っている。まあ x 積分の半分で、しかもボソンとフェルミオンで逆だと思えばいいわけです。

そうすると、θ 積分が $+2$ の次元をもっているので、K っていうのは次元が 2 でないといけない。つまり普通のラグランジアンが次元 4 だったのに比べて、次元が半分になってるわけですね。これだけ発散が楽になってることがわかるんだけど…これはまあいいや。それから W の部分の x 積分は -4 の次元を持ってて、θ 積分が $+1$ ですから W は次元 3 の関数です。

もっと重要なことは、K っていうのは単なる実関数なんだけども[6] 一方 W の部分っていうのは、chiral どうしのかけ算が再び chiral になるためには正則関数でないといけない。どういう意味かというと、特に深い意味ではなくて、「$\Phi^\dagger$ を含まない」というだけの意味で使ってます。superpotential っていってる部分 W は holomorphic になってる。それがすぐ後で説明する「非繰り込み定理」にとって重要なことです。

くりこみ可能なラグランジアン　上では、わざわざ一般的なラグランジアンの形を出したんだけども、はなっから繰り込み可能性を要請したとしましょう。そうすると、さっきの次元勘定から、

$$K \;=\; \Phi^\dagger\Phi\,, \qquad W \;=\; \frac{1}{2}\,m\,\Phi^2 + \frac{1}{3}\,y\,\Phi^3 \tag{4.5.3}$$

となります。特に、W では場 Φ の三次までの項を含めるわけですが、場の二次のところの係数を m 、三次の係数を y と書いておきます。今からこれらがそれぞれ質量と湯川カップリングになっているということを見ます。

そのために、作用をコンポーネントにばらしてみます。まず D term の項は先ほど言ったように運動項で、特に補助場の運動項が（微分なしの）係数 1 で入ってる。

$$\mathcal{L}_{\rm kin} = \big[\Phi\,\Phi^\dagger\big]_D = \; -\,|\partial_\mu\phi|^2 - \overline{\psi}\, i\overline{\partial\!\!\!/}\psi + |F|^2 \;.$$

それに対して相互作用項と言いますか、W の F component を計算すると、

$$\mathcal{L}_{\rm int} = \big[\, W \,\big]_F + \text{H.c.} = m\left(F\phi - \frac{1}{2}\,\psi\psi\right) + y\left(F\phi^2 - \phi\,\psi\psi\right) + \text{H.c.}\,.$$

となっていて、F が一次で出てくるわけです。そうすると、 F の運動方程式を使って、

$$0 \;=\; \frac{\delta S}{\delta F} \qquad \Longrightarrow \qquad -\,F^\dagger \;=\; \frac{\partial W}{\partial \phi} \;=\; m\phi + y\phi^2 \tag{4.5.4}$$

[6] ラグランジアンがエルミートであるためには実関数でなくてはならない。

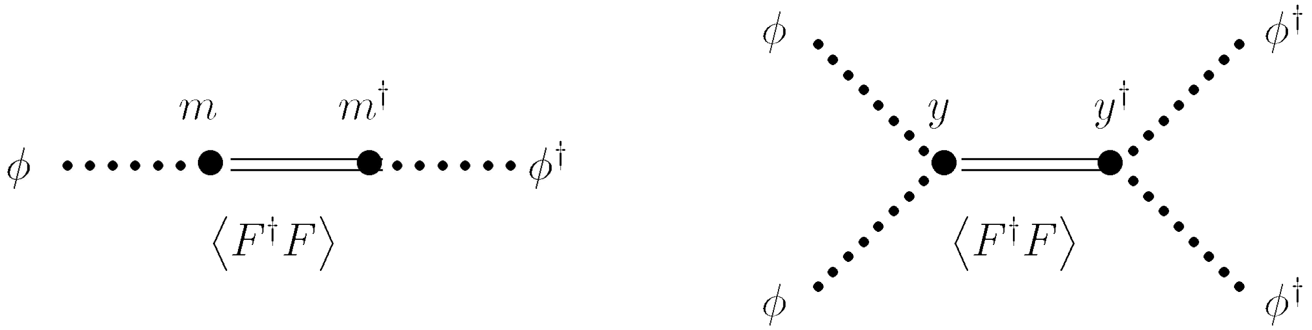


図 4.1: スカラー場の質量項と四点結合の Feynman diagram

という風になってます。これをもう一回ラグランジアンにつっこみますと、

$$\mathcal{L}_{\rm WZ} \;=\; -\,|\partial_\mu\phi|^2 - \left|\frac{\partial W}{\partial\phi}\right|^2 - \overline{\psi}\,i\overline{\partial\!\!\!/}\psi - \left(\frac{1}{2}\,m\,\psi\psi + y\,\phi\psi\psi + \text{h.c.}\right) \tag{4.5.5}$$

となって、W の ϕ 微分 $W'(\phi)$ の二乗の項がでてきます。それがちょうどラグランジアンにマイナスで入ってててスカラーポテンシャルに相当するんですね。またフェルミオン質量とか湯川相互作用とかもそのまま出てくる。

補助場の運動方程式の解 (4.5.4) を使って、$W'(\phi)$ の二乗の項をばっと展開してやれば、ボソンの質量項であるとか、四点相互作用項とかが入っています。質量項はちょうどフェルミオン質量の二乗だし、四点結合定数は y^2、つまり湯川結合定数の二乗になっています。

今日の最初に、発散をキャンセルするための条件として、ボソンとフェルミオンの質量が等しいとか、結合定数の間に関係がついている、ということを言いましたけど、今の系では具体的にそれらが実現できているわけです。

$$\boxed{\text{超対称性} \;\Longrightarrow\; \begin{cases} m^2_{\rm boson} & = \; m^2_{\rm fermion} \\ \text{四点結合} & = \; [\text{湯川結合}]^2 \end{cases}}$$

特に質量項の方は、補助場（$F, F^\dagger$）の exchange （図:4.1）の様にϕ と F の linear coupling を使ったというふうに理解できます。また、四点結合が湯川結合の二乗になるということは、ちょうどスカラー場（$\phi, \phi^\dagger$）の二体と補助場（$F, F^\dagger$）との湯川結合が、補助場の exchange を通じてスカラー場の四次の項が induce されている、こういう理解ができます。

4.6 R 対称性と非くりこみ定理

そろそろお腹減って来たのでもう手短にやりたいと思うんだけども、今日最初にですね、ループ計算を具体的にやってみて、1-loop で発散が相殺するかということをみました。それが all order に拡張できるということが知られています。

> **(F−term) non-renormalization theorem:**
> 「摂動論では superpotential はくりこみを受けない」

非くりこみ定理の証明ですが、最初は Grisaru、Roček、Siegel という三人組が中心に、摂動論の Feynman rule を作ってガチャガチャとやりました。これが 1979 年。それが 1993 年にですね、Seiberg という人が holomorphy という性質を使った証明というのを提案しまして、一挙に理解が進んだわけです。えー、十何年も経って急に理解が進んだのは、途中に何かあったわけですね。何があったかというと、まさに（第一期か第二期か知らないけ

ど）string の revolution があって、string 理論がわーっと調べられた時期が間に挟まっていたわけです。93 年というのは、ちょうど string の停滞期というか、その次の revolution の一歩手前の時期にあたります。Seiberg は string も場の理論もわかる人なわけで、要するに何が言いたいのか言うと、彼がこういうことを言い出したのは、実は string 理論からの教訓をかなり引き出していたわけです。

特に string 理論では[7] いわゆる普通の field theory の結合定数 λ に対し、力学自由度を持った chiral superfield $\Lambda(z,\theta)$ があって、それの真空期待値が場の理論の結合定数に対応している、と考えられています。

$$\text{場の理論の結合定数}\ \lambda\ =\ \langle \text{chiral 超場}\ \Lambda(z,\theta)\rangle\ . \tag{4.6.1}$$

だとすると、Φ についてだけではなく、結合定数についても superpotential っていうのは正則な関数になっているはずだ、という予想がつきます。いいですか。そうすると、結合定数について正則、つまり結合定数の複素共役 $\overline{\lambda}$ が W の correction には現れないんだ、ということになります。このことに着目したのが Seiberg です。

ただし、少し注意が必要です。string 理論の時には、この field $\Lambda(x,\theta)$ が本当に dynamical な、つまり particle 自由度を持った場なわけなんだけども、いまからやる証明と言うのは、あくまでも filed theory のくりこみに関する証明なわけで、Λを dynamical な場とは見做しません。ここは、非常に微妙なんだけど大切なところで、いまから結合定数を chiral superfield であって、しかも x に依らない一様な外場と見做しますね。

それでもって、そういう考え方に基づくことで、くりこみの高次補正を含んだ、effective な superpotential W_{eff} というものの形を三つの条件で縛ることができます。表 4.5 を見て下さい。

一つは正則性。但し、dynamical な field についてはもちろんのことですが、今いったように、結合定数という外場に対しても正則である、ということを要請します。それから対称性。これも普通の、本当の対称性だけでなくて、外場を動かすような ‘対称性’ も考えます。逆に言うと、外場というのは、本当はある値に決まっているもんなんだから、それを動かす対称性というのは explicit に壊れているわけですね。そういうものを使ってやろうというわけです。あともう一個。いろんな極限でこの正則関数 W_{eff} がどう振舞うのかということを利用します。

今の説明で外場というものがよくわからなかった人もいるかも知れませんね。本当に、結合定数 λ に対応するような dynamical な場があって、それが condense してるんだとすると、Nambu-Goldstone ボソンが出てくるはずだとか、対応する particle mode はどうするんだと、かいうが問題になってきます。実際、 string 理論の現象論ではその点が大問題なわけです。これを「moduli 問題」といいます。それに対して、ここでは、あくまで Λ は外場であって、対応した力学自由度は持たないものと考えます。非くりこみ定理の証明には、これで十分なんですね。

なお、外場としては、ここでは SUSY を保つもののみを考えます。明日は（時間があれば）SUSY を破る外場を使って、もっとすごいことを言う予定[8] です。

- 弦理論からの教訓： (gauge coupling の場合は後で)

  $\underline{\text{場の理論の結合定数}\,\lambda\ =\ \langle\, \text{chiral 超場}\,\Lambda(z,\theta)\,\rangle}$

  $\Longrightarrow$ 「superpotential は λ についても正則だろう」
- 正しくは、結合定数を$\underline{\text{「chiral な一様外場」}}$と考える
- このとき、有効 superpotential W_{eff} の形を制限：

  (1) 正則性 — 場と外場の両方に対して

  (2) 対称性 — 外場により explicitly broken

  (3) さまざまな極限での振る舞い

Remark

— 外場 (spurion) のダイナミクスは考える必要ない

— ここでの外場は SUSY を保つもの　(cf. SUSY を破る外場)

表 4.5: ‘holomorphy’ に基づく非くりこみ定理の証明

[7] ゲージ結合定数については後でちょっとコメントします。
[8] 結局時間切れになりました。

古典的には、 Wess-Zumino 模型の superpotential というのは質量項と三次の相互作用項から成ります。

$$W_{\rm tree} = m\,\Phi^2 \left[1 + \frac{\lambda\,\Phi}{m} \right] . \tag{4.6.2}$$

これをくりこんで、'exact' に量子補正を含んだ、effective superpotential を知りたい。(exact と書かないで $W_{\rm eff}$ と書いている微妙な意味は省略します。) まず、$W_{\rm eff}$ は正則関数でないといけないから、$\Phi^\dagger$ は使えないし、質量や coupling も chiral な外場なので $m^\star$ や $\lambda^\star$ のような複素共役は使えない。で、こうなる。

$$W_{\rm eff} = W_{\rm eff}(\Phi\,;\,m,\,\lambda) \ . \tag{4.6.3}$$

次に二種類の対称性を考えます。表 4.6 を見て下さい。

	Φ	m	λ	$\lambda\Phi/m$
$U(1)_\phi$	$+1$	-2	-3	0
$U(1)_R$	0	$+2$	$+2$	0

表 4.6: 対称性の charge assignment

一つめは Φ を plus charge でまわすもので、外場 m が -2 の charge を持つとし、λ が -3 の charge をもっているとします。定数が charge を持つことは有り得ないけども、今は外場と考えているからいいわけです。このとき、$\lambda\Phi/m$ が neutral combination になっていることがすぐわかります。

もう一つは R 対称性という SUSY 固有の対称性で、これが SUSY で最も大切なところかもしれません。「extra dimension という compact 化された内部空間があると、そこの一般座標変換が四次元時空のゲージ対称性に対応する」というのが Kaluza-Klein のアイデアですが、R 対称性はその super 版みたいなもので、superspace の座標変換が SUSY 固有の対称性として重要です。

$$\theta^\alpha \ \longmapsto \ e^{+i\beta}\theta^\alpha \ , \qquad \overline{\theta}_{\dot\alpha} \ \longmapsto \ e^{-i\beta}\overline{\theta}_{\dot\alpha} \ . \tag{4.6.4}$$

このとき、同じ chiral field の multiplet に入っていたボソン $\phi(x)$ とフェルミオン $\psi_\alpha(x)$ を考えますと、これらは θ の次数が違った項だったので、違う変換を受けるわけです。例えば、superfield Φ 全体が不変だとすると、

$$\phi(x) \ \longmapsto \ \phi(x) \ , \qquad \psi_\alpha(x) \ \longmapsto \ e^{-i\beta}\psi_\alpha(x) \ . \tag{4.6.5}$$

これが R 対称性の変換で、同じ supermultiplet に入っているのに、ボゾンとフェルミオンで変換が違います。さらに面白いのは、θ が座標変換で変換を受けますから、ラグランジアンが不変であるためには、W 自身が charge を持たなければいけないことです。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\rm int} \ &= \ \int d^2\theta\, W(\Phi) + {\rm H.c.} \ \text{が}\ R\,\text{不変} \\ &\Longleftrightarrow {\rm superpot.}\, W(\Phi) \ \ \text{は}\ R\ {\rm charge} + 2 \end{aligned} \tag{4.6.6}$$

ラグランジアンが不変というのは場の理論ではよくあったんだけども、有限の charge を持たなければいけないというのは非常に特殊ですね。

さて、$U(1)$ 変換に対しては $\lambda\Phi/m$ が正則な不変量で、さらに、全体に R charge とか次元を合わせるためには、effective superpotential は $m\Phi^2$ に比例しないといけないことがわかります。

$$W_{\rm eff} \ = \ m\Phi^2 f\left(\frac{\lambda\Phi}{m}\right) \ . \tag{4.6.7}$$

一般形がここまで制限されました。

最後に、いろいろな極限での振る舞いを検討します。具体的には、正則不変量 $\lambda\Phi/m$ の値をある値 z に保ちつつ、weak coupling limit $\lambda \to 0$ をとります。（同時に massless limit $m \to 0$ もとることになります。）その極限では $W_{\rm eff}$ は相互作用の影響が消えて、古典的なものにもどるはずです。つまり、$W_{\rm eff} \to W_{\rm tree}$ のはずだから、

$$f(z) \longrightarrow 1+z \quad \text{for} \quad {}^{\forall}z \equiv \frac{\lambda\Phi}{m} \,. \tag{4.6.8}$$

結局、関数 $f(z)$ は tree の形にならないといけないんだけども、これは任意の z に対して言えた。ということは、任意の coupling constant についても、$W_{\rm tree}$ の形が exact であるということになります。

このように、正則性や極限の振る舞いを調べることで、少なくとも摂動論では superpotential のくりこみはない、ということが言えました。（今日のはじめの方で、ぐちゃぐちゃと摂動論の計算をしたのと比較してください。）超対称性の存在が、ここまで厳しいことを要求しているわけです。

第5章　四次元 $\mathcal{N}=1$ 超対称ゲージ理論

それで、もうそろそろ終わらんといかんのやけど…、どうしようかな。次、ゲージ理論なんですが、さっと駆け足でいきますか。

5.1　超対称とゲージ理論

今度は超対称なゲージ理論を考えます。reality 条件 $V^\dagger=V$ を満たす超場 $V\bigl(x^\mu,\theta,\overline{\theta}\bigr)$ は

$$C+\left\{\begin{array}{l} +i\theta\chi+\frac{i}{2}\theta^2(M+iN) \\ -i\overline{\theta}\overline{\chi}-\frac{i}{2}\overline{\theta}^2(M-iN) \end{array}\right\}-\theta\sigma^\mu\overline{\theta}A_\mu+\left\{\begin{array}{l} +i\theta^2\overline{\theta}\left(\overline{\lambda}+\frac{i}{2}\overline{\partial\!\!\!/}\chi\right) \\ -i\overline{\theta}^2\theta\left(\lambda-\frac{i}{2}\partial\!\!\!/\overline{\chi}\right) \end{array}\right\}+\frac{1}{2}\theta^4\Bigl(D+\frac{\Box}{2}C\Bigr)\ . \tag{5.1.1}$$

こんなの見るのも嫌ですよね。成分勘定（表 5.1）とかも結構おもしろいんだけど、もう省略さしてもらいます。

	C 実 scalar	χ マヨラナ	$M+iN$ 補助場	A_μ gauge 場	λ gaugino	D 実補助場
off-shell	$+1$	-4	$+2$	$+4$	-4	$+1$
on-shell $(m\neq 0)$	$+1$	-2	0	$+3$	-2	0
↓				↓	↓	↓
$m=0$		gauge 自由度		$+2$	-2	0

表 5.1: vector supermultiplet

あとはその、SUSY 理論でのゲージ対称性についてだけちゃんと説明しておきます。Φ という chiral field の物質場があって、それが λ というパラメータで次の変換をするとします。

$$\left\{\begin{array}{lll} \Phi & \longmapsto & e^{-i\lambda}\,\Phi \\ \Phi^\dagger & \longmapsto & \Phi^\dagger\,e^{+i\lambda^*} \end{array}\right. . \tag{5.1.2}$$

$\Phi^\dagger$ をとると複素共役になります。そうすると、$\Phi^\dagger\Phi$ — これは運動項でしたけども、それが不変であるためには λ というパラメータが real でなければならない。ま、単に普通の位相変換でありなさい、ということですね。これは普通の話。

今、こういうグローバルな対称性があった時に、それをローカルな変換に拡張したらどうなるかということを考えます。つまり、$\Lambda(x)$ っていうローカル変換のパラメータを考えてやりたいんですけど、x だけの関数っていうのはSUSY ではありえないわけです。これは superspace に拡張しないといけない。

$$\lambda(x)\ \xrightarrow{\text{SUSY}}\ \Lambda\bigl(x,\theta,\overline{\theta}\bigr)\ . \tag{5.1.3}$$

ところが今、Φ っていう chiral multiplet の変換を考えてますから変換した後の量が chiral に留まるためには、Λ 自身が chiral multiplet でないといけない訳ですね。つまり、chiral な superfield である Λ をパラメータとす

るような変換を考えることになります。

$$\begin{cases} \Phi \quad \longmapsto \quad e^{-i\Lambda}\,\Phi & \left(\,\overline{D}_{\dot\alpha}\Lambda\ = 0\,\right) \\ \Phi^\dagger \quad \longmapsto \quad \Phi^\dagger\, e^{+i\Lambda^*} & \left(\,D_\alpha\Lambda^\dagger = 0\,\right) \end{cases} \tag{5.1.4}$$

ところがどっこい。一方で kinetic term $\Phi^\dagger\Phi$ が不変であるためには Λ が実でないといけないんだけども、一方で SUSY が chirality を変えないためにはΛ は chiral でないといけない。これは矛盾した概念なんですね。逆に言うと、Λ の変換に対する不変性を理論は持ち得ないということになります。つまりこの運動項はこの対称性で不変ではない。

こんなとき、どうするかっていうと、接続場を導入してやろう、ということになります。$\Phi^\dagger\Phi$の間に、丁度、変換を打ち消すような場 — e^{2V} と書きました — を導入しまして、そいつが丁度 $\Phi^\dagger$ と Φ の変換をキャンセルするような変換を受けるものとしましょう。

$$e^{2V} \;\longmapsto\; e^{-i\Lambda^\dagger}\, e^{2V}\, e^{+i\Lambda}\ . \tag{5.1.5}$$

このように導入される場 $V\big(z,\theta,\overline{\theta}\big)$ は接続の場、つまり gauge 場なんですね。なお、今のを Abelian で書いてやりますと、V の変換は

$$V \;\longmapsto\; V + \frac{i}{2}\left(\Lambda - \Lambda^\dagger\right) \tag{5.1.6}$$

のように簡単になります。Non-Abelian の場合は、$V \equiv V^a T^a$ のように、群の表現行列の分だけ複雑です。

いま、変換パラメータ超場を $\Lambda \sim (\phi_\Lambda, \psi_\Lambda, F_\Lambda)$ として Eq. (5.1.6) を具体的に計算すると、次のようになります。

$$\left.\begin{array}{ccccc} C & \longmapsto & C & - & \mathrm{Im}\,\phi_\Lambda \\ \sqrt{2}\,\chi & \longmapsto & \sqrt{2}\,\chi & + & \psi_\Lambda \\ M{+}iN & \longmapsto & M{+}iN & + & F_\Lambda \end{array}\right\} : 場のシフト \tag{5.1.7}$$

$$\boxed{A_\mu \quad \longmapsto \quad A_\mu \quad + \ \partial_\mu(\mathrm{Re}\,\phi_\Lambda)} : \text{gauge 変換!} \tag{5.1.8}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} \lambda & \longmapsto & \lambda \\ D & \longmapsto & D \end{array}\right\} : \ \text{gauge 不変} \tag{5.1.9}$$

ごちゃごちゃしたのがたくさん出ますが、とにかく V っていう superfield を展開したときに、ある成分にベクトル場があってそれが通常のゲージ変換を受けるよ、ということです。Eq. (5.1.7) を使って、必要無いものを一切がっさい消去しまして、vector superfield をある特定なゲージ（Wess-Zumino ゲージ）で書きます。

$$V_{\mathrm{WZ}} = -\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)A_\mu + \left\{\begin{array}{c} +i\theta^2\overline{\theta}\,\overline{\lambda} \\ -i\overline{\theta}^2\theta\,\lambda \end{array}\right\} + \frac{1}{2}\theta^4 D\ . \tag{5.1.10}$$

すると、その一番低い成分にベクトル場があります。Eq. (5.1.8) を見ると、それがさっきの意味でローカル変換の接続場として働くゲージ場になっているわけですね、まさに。さらに高い成分には、相棒のフェルミオン λ や補助場 D ってのが現れる。λ は gaugino と呼ばれます。

それで、それらについて action をどう書くかという話は…、えー加減辛くなってきたので、今日はこの辺にして、続きは明日にしたいと思います。ちょっと中途半端になっちゃいましたけども、時間がきたのでここで終わりにします。

第6章　くりこみ群と超対称性

どうもおはようございます。

えっと、昨日の続きをはじめる前に、ちょっと振り返ってみますと、最初にですね、階層性問題ということについて、二つのの問題 — Higgs の問題と世代階層性の問題 — をお話しました。

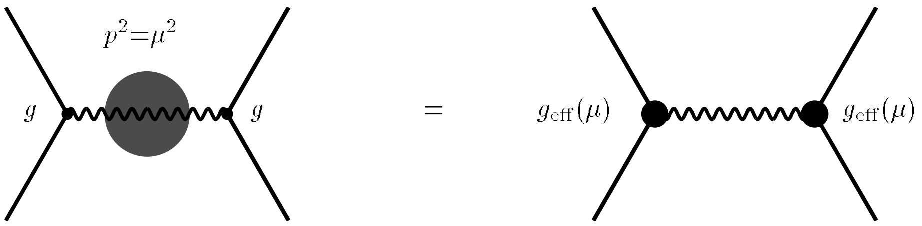
そして、次にですね、Higgs の問題、いわゆる naturalness の問題を解決する、一つの有力な方法として SUSY というものを考えました。知ってる人にはちょっと退屈だったかもしれないけども、まぁ、マスターの人向けに SUSY の代数的な話をさせてもらいました。その時のキーワードは、「superfield 形式」と「正則性」。まぁちょっと大道具なんだけども、エレガントにやろうというので、superfield 形式というのを持ち出しました。そうしますと正則性というものがはっきり見えてきますから、それを説明しました。

ちょっとゲージ理論の話が残ってるんですけども、先にですね、予定通り、くりこみ群の話をしたいと思います。この辺は、SUSY とは外れるかもしれないんだけども、マスターの人にとっては場の量子論を勉強する時に一つの目標になると思うんですよね。昨日の午後にポスターセッションがありましたけど、何人かの人がくりこみ群を用いていろんな物理をやっていました。えー、「くりこみ群」というのと「場の量子論」というのは、ほとんど同じ意味に思っていいほど非常に重要な概念なわけです。

くりこみ群で何をやるのかということをちょっと矮小化して、というか、端的に言いますと、「いわゆる量子補正 — 摂動論で計算するようなループ補正 — っていうのを、システマティックに足しあげていく」ための一つの方法です。もうちょっと概念的、物理的な言い方をしますと、僕らが考えているような short distance での物理が、実際に観測にかかるようなマクロなところ、つまり long distance での物理とどう関係するのか、ということを考えることになります。そういう ultraviolet と infrared の間の関係をつなぐような強力な方法論、それがくりこみ群なわけです。というわけで、「くりこみ群」がどういうものだったか、というのをザッと概観して行きましょう。

6.1　「くりこみ群」入門

えーと、ちょっと荒っぽい言い方なんだけども、こういう散乱過程を考えましょう。



物質場が入ってきて、ゲージ場を交換して、物質場が出ていく。大きい影つきの丸の部分は、何らかの発散グラフを表していると思ってください。そして、その時の運動量移行（momentum transfer）— ゲージボソンが持ってる運動量ですね — が μ^2 というところでその発散グラフをくりこんだとします。運動量移行が μ というスケールを持ってるような、そういう Feynman グラフです。

くりこみ理論では何をやるかっていうと、量子補正つきのプロセスを、元のラグランジアンに入ってるエレメンタリーなバーテックスで置き換えてしまう。ただしその時に、左図の真ん中に影つきの丸で描いた量子補正の部分を結合定数 $g_{\rm eff}(\mu)$ にくりこんでしまえる、ということが核心だったわけです。この $g_{\rm eff}(\mu)$ を有効結合定数と呼ぶことにします。ただし、くりこんだスケールが μ だということをこの結合定数が覚えてまして、そういう意

味で本来は定数であった g というのがスケール依存性を持ってくることになります。これが量子効果の一つの重要な効果ですね。以下、 $g_{\rm eff}(\mu) \equiv g(\mu)$ と書くことにします。

では、この有効結合定数はくりこみ点 μ を変えたときにどういうふうに変わっていくのか、それを記述するのがくりこみ群方程式です。例えば $g(\mu)$ をゲージ結合定数だとしますと、それのスケール依存性って言うのは μ で微分[1] すれば分かりますよね。

$$\mu \frac{d}{d\mu} g(\mu) \;=\; -\,\frac{b}{16\pi^2}\, g^3(\mu) + \cdots \;\equiv\; \beta\Big[g(\mu)\Big] \ . \tag{6.1.1}$$

それを摂動論で計算しますと、例えば 1-loop 補正は結合定数の 3 乗から始まるような形になるんだけども、結合定数の関数になります。これをベータ関数と呼びます。

実際に 1-loop の摂動計算をやってみますと、ゲージ coupling のベータ関数の係数 b っていうのは

$$b \;=\; \frac{11}{3}\, C_2(G) - \frac{2}{3} \sum_{\rm Weyl} T(R) - \frac{1}{3} \sum_{\rm scalar} T(R) \tag{6.1.2}$$

と書けます。これが計算の結果。あのー、ここでいろんな群論的な因子を書きましたけども、これがいちばん一般的な表式です。だいたいどんなんかっていうと、「ゲージボソンのプロパゲータのところでゲージボソンがくるくる回る」のと「ゲージボソン自身がバーテックスで回る」のを合わせたもの、それが第一項です。非可換ゲージ理論だとこういう効果があるんですね。それに対して第二項、フェルミオンがループを回る効果、これが逆符号で効いてきたりとか、あるいは第三項にはスカラー場の効果が現れてます。二項と三項は 1/3 っていう因子を除くと、スカラー場はスピンゼロで一成分しか持ってないということと、フェルミオンはアップスピンとダウンスピンの二つ持ってるということに対応しています。まぁ、比較的理解しやすい結果ですね。

ここでの群論的な因子は — 多分 M1 の人は今「群論勉強せぇ」って言われてると思うんだけども — いろんな名前が付いてる因子で、$SU(N_{\rm c})$ 群にしますと、以下のようなものです。

$$\begin{aligned}
&\text{群の Casimir 不変量 :} && C_2(G) = \; N_{\rm c} \\
&\text{表現の Dynkin 指数 :} && T(R) = \begin{cases} 1/2 \ (\text{基本表現}) \\ N_{\rm c} \ (\text{随伴表現}) \end{cases} \\
&\text{cf. 基本表現の Casimir :} && C_2(R) = \frac{N_{\rm c}^2 - 1}{2N_{\rm c}} \ .
\end{aligned}$$

1-loop くりこみ群を解く　もうちょっと急ぎます。くりこみ群にもう少し親しみを持つために、最低次の近似 — 1-loop 近似 — でさっきのくりこみ群方程式 (6.1.1) を解いてみましょう。そうしますと、$1/g^2$ という組み合わせを作っとくと便利で、1-loop では

$$\mu \frac{d}{d\mu} \left(\frac{8\pi^2}{g^2} \right) = -\,\frac{16\pi^2}{g^3} \cdot \beta(g) \;=\; b \tag{6.1.3}$$

と定数になります。そうしますと、普通、微細構造定数は $e^2/4\pi$と定義するわけだけども、今回の話では一貫して、さらに 2π で割った組み合わせ

$$\alpha \;\equiv\; \frac{g^2}{8\pi^2} \tag{6.1.4}$$

を α と呼ばせて下さい。まぁとにかく今そういう記号の約束をしますと、この微分方程式 (6.1.3) は、$1/\alpha$ の微分が定数である、というわけだから、こいつを μ から Λ まで積分すると

$$\frac{1}{\alpha\,(\mu)} \;=\; \frac{1}{\alpha(\Lambda)} + b \ln \frac{\mu}{\Lambda} \tag{6.1.5}$$

[1] 次元変えないように μ をかけておく。

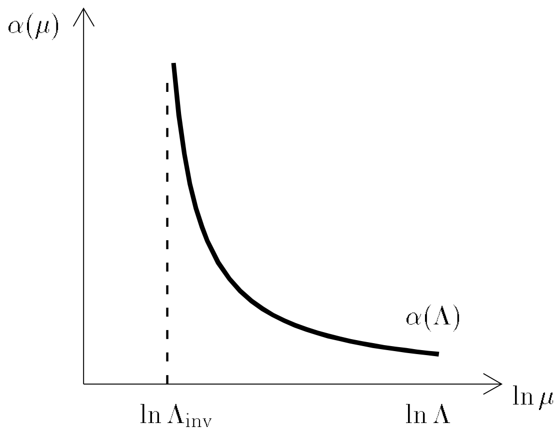


図 6.1: Running coupling の様子（$b>0$ の場合）

と簡単な式になります。こいつをエイヤーっと逆数とりますと、こんなふうにまとめることができます。

$$\alpha(\mu) \;=\; \frac{\alpha(\Lambda)}{1-b\,\alpha(\Lambda)\ln(\Lambda/\mu)}\ . \tag{6.1.6}$$

これが 1-loop のくりこみ群方程式の解なわけで、その意味をちょっと考えてみます。

分母に結合定数が入っているから、そいつをまぁ仮にちっちゃいと思ってバタバタッと展開しますと、$1/(1-x)$ の展開ですから下のようなべき級数になります。

$$\alpha(\mu) \;=\; \alpha(\Lambda)\left[1+\left(b\,\alpha(\Lambda)\ln\frac{\Lambda}{\mu}\right)^1+\left(b\,\alpha(\Lambda)\ln\frac{\Lambda}{\mu}\right)^2+\cdots\ \right]\ . \tag{6.1.7}$$

あらためて眺めてみると、最初の 1 っていう項は、最初の tree レベルの効果。それに対して α の一次、二次、三次 $\cdots$、1-loop、2-loop、3-loop $\cdots$ という補正が、なんか知らないけど、足しあげられている。もともとベータ関数というのは 1-loop で計算された量だったんだけども、それを使った微分方程式を逐次積分することによって高次の補正が系統的に足しあげられてるわけです。

もちろんこれは exact なもんじゃなくって、近似です。今の 1-loop のくりこみ群では、leading log って言いますけども、Eq. (6.1.7) のような log の足し上げになる。これを 2-loop のくりこみ群にすると、next leading という、もうちょっと違う形の log が足しあげられることになります。それが系統的な近似である、という意味です。

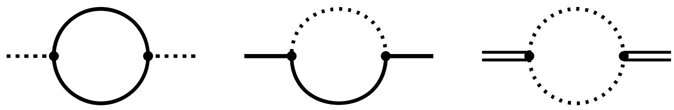
いいですかね、これが摂動論的な意味のくりこみ群です。もうちょっと物理的にはですね、あ、僕はこの running coupling というのは全然物理的じゃないと思ってるんだけども (笑)、とにかく、さっきのくりこみ群方程式の解をグラフに書いてみましょう。横軸をエネルギースケールの log にしますと、結合定数というのは図 6.1 のような関数です。今、くりこみ群方程式の係数 b が正の場合ですけども、μ っていうスケールが Λ に比べて充分小さくなると、Eq. (6.1.6) で $\ln(\Lambda/\mu)$ が大きくなって 1 とコンパラになる。そうすると分母が発散することがあるんですね。だからこんな形で低エネルギー側で結合定数が blow up するという振る舞いがえられます。逆にスケール上がっていきますと、ちっちゃくなる。これが「漸近自由な場の理論」というものでした。

面白いのは、結合定数が発散するスケール $\Lambda_{\rm inv}$ です。このスケールはさっきの Eq. (6.1.6) の分母がゼロになるということから、1-loop だと

$$\Lambda_{\rm inv}\equiv\mu\,\exp\left[-\frac{8\pi^2}{b\,g^2\,(\mu)}\right] \tag{6.1.8}$$

という表式が得られるわけですけども、面白いことにこのスケール自身は（結合定数が発散するエネルギースケールという意味で）一つの固有のエネルギースケールになっています。これは、右辺をくりこみ点 μ で微分したらゼロになるという意味で、「くりこみ群不変なスケール」という言い方をすることがあります。

とにかく、よく言われる言い方をしますと、「もともと次元を持たなかった結合定数って定数が、量子論を考えると実は質量スケールというものに化けてるんだ」ってこと。結合定数がいくらいくらという情報が質量スケール



点線：スカラー
実線：フェルミオン
二重線：補助場

図 6.2: 波動関数くりこみの 1-loop ダイアグラム

を決めてる。こういう現象を dimensional transmutation（次元転移）なんて呼んだりします。一番最初に陽子の質量について触れましたが、QCD という理論では、陽子の質量を、このタイプのエネルギースケールを基準にして、それの何倍かという形で予言するという格好になっています。

6.2 超対称ゲージ理論のベータ関数

今のはマスター向けのくりこみ群のイントロだったんやけども、こいつをですね、僕らが興味持ってる supersymmetric な理論に関して考えます。ここでは $\mathcal{N}=1$ の場合を考えましょう。

ゲージ結合定数のくりこみ　さっき 1-loop ベータ関数の係数 b に対して、一般的にはこうなるよという公式 (6.1.2) をお見せしましたけども、supersymmetric な理論における b はこういう形になります。

$$b^{\mathcal{N}=1} \;=\; 3\,C_2(G) - \sum_{\text{chiral}} T(R) \;. \tag{6.2.1}$$

例えば昨日最初にやったカイラル多重項 (ϕ^i, ψ^i_α) では、複素スカラー場と Weyl フェルミオンが一対になってる。それがゲージ群のある特定の表現に入ってるとしますと

$$-\,\frac{1}{3}\,T(R) - \frac{2}{3}\,T(R) \;=\; -\,T(R) \;. \tag{6.2.2}$$

スカラー場の効果と Weyl フェルミオンの効果がスピンの数だけ合わさって、右辺のようになる。だからカイラル多重項一発分に対して、Eq. (6.2.1) の二項目のような効果がベータ関数にある。んで、昨日の最後にちょっとお話ししましたベクトル多重項 $(A^a_\mu, \lambda^a_\alpha)$ については、ゲージ場に対して同じ随伴表現のフェルミオン — マヨラナフェルミオン — が入って来ます。これをゲージーノというわけですが、同じ随伴表現ですから λ^a_α のフェルミオンの効果が入ってきます。

$$\frac{11}{3}\,C_2(G) - \frac{2}{3}\,C_2(G) \;=\; 3\,C_2(G) \;. \tag{6.2.3}$$

つまり、ベクトル多重項一つに対して、ゲージ場の効果とゲージーノの効果が合わさって 3 倍の Casimir になる。フェルミオンを表す第二項は、前の式とだいたい同じ。T か C_2 かがちょっと違うだけですね。

こういうわけで、Eq. (6.2.1) の形で書ける。…なんかあのぉ、すっきりしましたね。別に物理的な意味はなんにもないんだけども…。（$\mathcal{N}$ が高いところは省略します。）

波動関数のくりこみ　今のはゲージ結合定数のくりこみでした。すぐ後で「SUSY の理論だと、もうちょっと exact なベータ関数がわかる」というお話しをしますが、その前に物質場のくりこみをやっておきましょう。

例えばカイラル多重項を考えますと、ラグランジアンの運動項というのはスカラー場の項、フェルミオンの項、その他に SUSY を manifest なきれいな形に書くために補助場っていうのが必要だっていうことを昨日いいました。こいつらのポテンシャル項は正則性に支配されているために、「非くりこみ定理」なるものがあって、くりこみを受けないということもお話しました。けども、運動項というのはそういう正則性の縛りを受けません。昨日、Kähler ポテンシャルのところで言ったことですね。

なので実際に図 6.2 の 1-loop の補正を考えてみます。

えー、補助場のくりこみも nontrivial なので、これも考えないとワケわからなくなりますが、とにかくこういう 1-loop のグラフを書いてみたら全然ゼロじゃないわけです。つまり、この ultraviolet のスケール Λ で定義さ

れたラグランジアンがあったとして、それを低エネルギーのスケール μ まで引っ張っていくと、この図の量子補正のぶんだけズレが出てくる。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\rm UV}_{\rm kin}(\Lambda) &= - \quad |\partial_\mu\phi|^2 - \quad \overline{\psi} i \overline{\partial}\psi - \quad |F|^2 \,, \\
\mathcal{L}^{\rm IR}_{\rm kin}(\mu) &= - Z^{-2}|\partial_\mu\phi|^2 - Z^{-2}\overline{\psi} i \overline{\partial}\psi - Z^{-2}|F|^2 \,.
\end{aligned}
\tag{6.2.4}
$$

それは場の規格化をズラすような効果なわけで、「波動関数くりこみ」といって、この式では Z で表されています。

実際、図 6.2 のグラフでは右端のグラフを計算するのが一番簡単で、その計算を具体的にやったとします。補助場とスカラーのバーテックスを湯川カップリング y と呼んでますけど、1-loop ですからそれの二次の補正 $y^\dagger y$ が現れるということが確かめられます。

$$
Z^{-2}(\mu,\Lambda) \,=\, 1 + \frac{y^\dagger y}{8\pi^2}\ln\frac{\Lambda}{\mu}\,. \tag{6.2.5}
$$

これがボソンループ、フェルミオンループ全部共通に現れるわけです。

それで、えーと、くりこみ理論ってなんだったかというと、場の規格化がズレてしまったら、それをもっかい 1 に戻しましょう、いうことでした。つまり運動項を「再規格化」(re-normalize) するわけですね。

$$
\Phi_{\rm un}(\Lambda) \,=\, Z(\mu,\Lambda)\ \Phi_{\rm ren}(\mu)\ . \tag{6.2.6}
$$

Λ っていうスケールで定義されたもとの場を unrenormalized の意味で $\Phi_{\rm un}(\Lambda)$ と書いて、運動項がズレたぶん、Eq. (6.2.4) の Z ですね、それを元に戻すために Z factor[2] を吐き出した場 — くりこまれた場 $\Phi_{\rm ren}(\mu)$ — を定義しなさい、ということです。

波動関数くりこみをやりますと、運動項はもちろん 1 に元に戻るんだけども、この補正が今度はポテンシャル項の方に現れます。例えば質量項を考えてやりますと、これは superfield で $[m\Phi\Phi]_F$ と書けてたわけですが、それを componet にばらすと、補助場とスカラーの相互作用項と、フェルミオン同士の相互作用項が出てくる。その補助場を消去してやると通常のスカラー場の 2 乗質量項が出てきたわけですが、今は補助場を消去する前にくりこみを全部やっちゃうことにします。

$$
\begin{aligned}
\big[\,m\,\Phi\Phi\,\big]_F &= \quad m(\Lambda)\ F_{\rm un}\,\phi_{\rm un} \quad + \quad m(\Lambda)\ \psi_{\rm un}\,\psi_{\rm un} \\
&= \underline{Z^2 m(\Lambda)}\,F_{\rm ren}\phi_{\rm ren} \;+\; \underline{Z^2 m(\Lambda)}\,\psi_{\rm ren}\psi_{\rm ren}\,.
\end{aligned}
\tag{6.2.7}
$$

もともとのラグランジアンは一行目の形です。こいつは、量子補正を計算しても変わらない、ということを昨日いいました。つまり、昨日の「非くりこみ定理」がいってることは、ここの質量に対するバーテックス補正がない、ということなわけです。けども、いま運動項の方を再規格化するためには波動関数ぶんだけズラさなイカンわけで、そうしますと帳尻を合わせるために mass parameter が Z factor の分だけズレて、二行目のようになります。つまり superpotential 自身は全然くりこみを受けなかったんだけども、正しく規格化された場で見てやると

$$
m(\mu) \,=\, Z^2(\mu,\Lambda)\,m(\Lambda) \tag{6.2.8}
$$

といった形で mass parameter であるとか結合定数であるとか、そういうものが、ちょうど場の数だけ Z factor をかぶるということになります。いいですね。

そういう Z 因子というものを 1-loop で計算すると、1 という古典的な値からちょっとずれて、

$$
Z^2(\mu,\Lambda) = 1 + \gamma\ln\frac{\mu}{\Lambda} + \cdots \xrightarrow[\rm RG]{} \left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)^\gamma \tag{6.2.9}
$$

となります。ずれを表す γ の定義は、Z をスケール μ で微分したもの、つまり

$$
\gamma \equiv \mu\frac{d}{d\mu}\ln Z^2(\mu,\Lambda) = \frac{yy^\dagger}{8\pi^2} + \cdots \tag{6.2.10}
$$

[2] あ、ごめんなさい。Eq. (6.2.4) では、普通の場の理論に書いてある波動関数の定義から、2 乗の分だけわざとずらして書いてあります。この辺、普通じゃないので、M1 の人は注意して下さい。

一般の「湯川結合」を考える: $W = \frac{1}{3!} y^{ijk}\, \Phi_i \Phi_j \Phi_k$

$$\begin{aligned} y^{ijk}(\mu) &= Z_i(\mu,\Lambda)\, Z_j(\mu,\Lambda)\, Z_k(\mu,\Lambda)\, y^{ijk}(\Lambda) \\ &\sim y^{ijk}(\Lambda) \left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)^{\gamma_{ijk}}, \qquad \gamma_{ijk} \equiv \frac{1}{2}(\gamma_i + \gamma_j + \gamma_k) \\ &\quad \uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow \\ &\text{定性的振る舞い} \qquad\qquad \text{anom.dim.の和} \end{aligned}$$

表 6.1: 湯川カップリングのくりこみ

で、例えば 1-loop だと $yy^\dagger/8\pi^2$ という定数です。そして、そういう因子を 2-loop、3-loop $\cdots$ と計算して、それを例によって足し上げる。すると、log の足し上げで指数関数の形にまとまるわけです。これがくりこみ群の一つの特徴です。

本来 1 だった波動関数くりこみの定数が、量子補正のためスケール依存性をもってくるんだけれども、これは質量次元が γ というものののスケーリングを示している。つまり、スケールが 2 倍になると 2 の γ 乗になる。あたかも定数だったのが質量次元を獲得しているようなものです。このような、古典的な次元解析からのずれを異常次元 (anomalous dimension) と呼んでいます。

そのずれは波動関数くりこみを微分してみれば得られる。こういう異常次元とか量子補正を含んだ Z 因子を使いますと、湯川結合定数というのは本来 superfield の 3 次の結合定数で、W がくりこみを受けないのということだったわけですが、場の方がくりこまれますから、結合定数は ijk と添字の数だけ三つくりこみを受けるわけです (表 6.1)。もちろん SUSY が無い場合と比べますと、バーテックス補正に対応した因子がないことに相当しています。一方、SUSY の場合はこういうきれいな形になっているわけだけれどもそれぞれの Z 因子は異常次元によって決まるようなスケール依存性を持っているわけですから、この湯川結合定数というのは、定性的に言って、それぞれの superfield が持っている異常次元の和の分だけスケーリング次元を獲得しているわけです。ちょうど、物性理論の相転移における臨界指数のようなものです。

第7章　四次元 $\mathcal{N}=1$ 超対称ゲージ理論（続き）

今まで SUSY のくりこみ群の摂動部分を大雑把に見てきたわけですが。もうちょっと exact なことを知りたい。これから、「ゲージ coupling のくりこみに対しても実は正則性という概念が適用できる」ということを説明していきたいと思います。そのために、（昨日できなかった）supersymmetric なゲージ理論のラグランジアンについて、必要な部分だけやっておきましょう。

7.1　Field Strength Multiplet

昨日、superfield というのを考えていたわけですが、グラスマン反可換な座標、丁度、四次元の他にスピノール座標という余分な次元があるんだけれども、その座標に依存するような field を Grassmann 座標について展開すると、θ^4 までで止りますね。それに real な constraint をかけて制限したものが vecor superfield (5.1.1) です。これはエッセンシャルには、ベクトル場と gaugino といわれるフェルミオン、それから補助場から成り立っていました。Wess-Zumino ゲージ での vecor superfield (5.1.10) です。

$$V_{\mathrm{WZ}} = -\left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)A_{\mu} + \left\{\begin{array}{c} +i\theta^2\overline{\theta}\,\overline{\lambda} \\ -i\overline{\theta}^2\theta\,\lambda \end{array}\right\} + \frac{1}{2}\theta^4 D \ . \tag{7.1.1}$$

次に、超対称ゲージ理論のラグランジアンを書き下すために、普通のゲージ理論で何をやったかというのを思い出してみることにします。ゲージ場 A^a_μ を考えたときに、ゲージ場自身はゲージ変換で非線型な変換をしちゃうものでしたから、ゲージ共変な場の強さ、または電場磁場みたいなものをつくっときなさい。こうやってゲージ共変な量が見つかれば、それからゲージ不変な量を作るのは比較的簡単です。

$$\begin{aligned} A^a_\mu \ &\longrightarrow\ \text{gauge 共変量}: F^a_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + \left(A_\mu \times A_\nu\right)^a \\ &\longrightarrow\ \text{gauge 不変作用} \end{aligned} \tag{7.1.2}$$

これが通常のゲージ理論の処方でしたね。

それと同じことを SUSY の場合にも考えます。つまり、field strength に相当する F というものを含むような superfield を探してこようというわけです。但し準備として、4 階反対称テンソル ϵ を使って、$F_{\mu\nu}$ を self-dual な部分と anti self-dual な部分

$$F^{(\pm)}_{\mu\nu} = \pm\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}F^{(\pm)}_{\rho\sigma} : \left\{\begin{array}{c} \text{self-dual 部} \\ \text{反 self-dual 部} \end{array}\right. \tag{7.1.3}$$

に分解しておくことにしましょう。

時間がないので、いきなり答えを言います。問題の V_{WZ} は vector superfield でしたけれども、これの exponential の supercovariant derivative を…まあ、non-abelian に書いているからややこしいですが、とにかく V_{WZ} を適当に微分してみます。V_{WZ} ていうのは θ と $\overline{\theta}$ に依存した難しい場でしたけれども、そいつを $\overline{\theta}$ について 2 階微分しておくと、もはや $\overline{\theta}$ を含まない。よって、$\overline{\theta}$ で 2 階微分した場は chiral な superfield になっているはずです。

$$\begin{aligned} W_\alpha &\equiv -\frac{1}{4}\overline{D}^2\left[\frac{1}{2}e^{-2V}D_\alpha\left(e^{2V}\right)\right] \\ &= -i\lambda_\alpha + \theta^\beta\left[\underline{\epsilon_{\alpha\beta}}D + \frac{i}{2}\underline{\left(\sigma^{\mu\nu}\epsilon^{-T}\right)_{\alpha\beta}}F^{(+)}_{\mu\nu}\right] + \theta^2\left(\not{\partial}\overline{\lambda}\right)_\alpha \ . \end{aligned} \tag{7.1.4}$$

こういうのを定義しますと、gaugino というものが第一成分に顔を出していて、全体としてはスピナー添字を持った、W_α という chiral superfield が得られます。

そのとき面白いことに、全体がスピナー添字 α を一つ持っていて、第二成分で Grassmann の θ^β で展開していますから、θ の係数は二つのスピナー添字 $\alpha\beta$ を持っているわけですね。スピン 1/2 と、スピン 1/2 の合成ですから、スピン一重項とスピン三重項の二つが出てきます。スピン三重項というものは 3 成分もっているわけですが、ちょうど、field strength 6 成分の半分が $F^{(+)}_{\mu\nu}$ として顔を出しているわけです。

残りの半分はというと、anti chiral な $\overline{W}$ というものをもってくれば得られることが確かめられます。

$$\begin{aligned}\overline{W}^{\dot\alpha} &\equiv -\frac{1}{4}D^2\left[\frac{1}{2}e^{-2V}\,\overline{D}^{\dot\alpha}\left(e^{2V}\right)\right]\\ &= +i\overline{\lambda}^{\dot\alpha}+\overline{\theta}_{\dot\beta}\left[\underline{\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}}D+\frac{i}{2}\underline{\left(\overline{\sigma}^{\mu\nu}\epsilon^T\right)^{\dot\alpha\dot\beta}}F^{(-)}_{\mu\nu}\right]-\overline{\theta}^2(\overline{\not{D}}\lambda)^{\dot\alpha}\ . \end{aligned} \tag{7.1.5}$$

まぁこの辺は自分でやってみないと、「確かになってるなぁ」というのがわからないと思うんだけども、今は先に進ませて下さい。

7.2 Gauge-invariant Action

とにかく、ゲージ covariant な field strength を含む組み合わせが見つかりましたから、ゲージ不変なラグランジアンを書くには、その組み合わせの二乗を作ってみればよいわけです。ところがちょっとだけ注意しておきたいことは、さっき self-dual パート $F^{(+)}$ とか anti self-dual パート $F^{(-)}$ というのがありましたね。field strength 半分ずつ。いまそれを二乗しますから、それぞれの二乗が出てきます。

$$\left[\frac{1}{4}W^\alpha W_\alpha\right]_F = -\frac{1}{8}F^2_{\mu\nu}-\frac{i}{16}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}-\frac{1}{2}\lambda\, i\not{D}\overline{\lambda}+\frac{1}{4}D^2\ , \tag{7.2.1}$$

$$\left[\frac{1}{4}\overline{W}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha}\right]_{\overline{F}} = \quad 〃 \quad + \quad 〃 \quad - \quad 〃 \quad . \tag{7.2.2}$$

これをもとの F で書き換えてみますと、通常の F^2 っていう項の他に ϵ テンソルを使った部分 — いわゆる $F\widetilde{F}$ — が足し算で入ってる。もう一方の anti self-dual パートの方ではそれが逆符号で入ってくる、ということがわかる。それに、ゲージーノとか補助場の分がついてます。こんな $F\widetilde{F}$ が入ったラグランジアンというのは普通のゲージ理論では欲しくはないものなわけで、Eqs. (7.2.1)–(7.2.2) を単純に足し算しますと第二項同士が打ち消します。結局 super Yang-Mills 理論のラグランジアンはこういう形です。

$$\mathcal{L}^{\mathcal{N}=1}_{\rm SYM} \;=\; \int d^2\theta\,\frac{1}{4g^2}\,{\rm Tr}\left[\frac{1}{4}W^\alpha W_\alpha\right]+{\rm H.c.} = -\frac{1}{g^2}{\rm Tr}\Bigg[-\underset{\substack{\uparrow\\ \text{YM 場}}}{\frac{1}{4}F^2_{\mu\nu}}-\underset{\substack{\uparrow\\ \text{gaugino}}}{\lambda\, i\not{D}\overline{\lambda}}+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{auxiliary}}}{\frac{1}{2}D^2}\Bigg]. \tag{7.2.3}$$

これは chiral な 場の F term をとりなさい、という形で書いてあります。そうするとこのゲージ理論の運動項と、それの相棒であるゲージーノの運動項、それと補助場の運動項がでてくる。

後であんまり使わないかもしれないけども、ゲージ粒子と物質場との相互作用項も見ておきしょう。これは

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm matter} &= \int d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\ \Phi^\dagger e^{2V}\Phi\\ &\simeq -\left|\Big(\partial_\mu - i\,A_\mu\Big)\phi\right|^2-\psi\, i\Big(\not{\partial}-i\not{A}\Big)\overline{\psi}+|F|^2\\ &\qquad -\sqrt{2}\left[\,\overline{\psi}\Big(i\,\overline{\lambda}\Big)\phi-\phi^\dagger\Big(i\,\lambda\Big)\psi\,\right]+\phi^\dagger D\,\phi \end{aligned} \tag{7.2.4}$$

の中に入ってます。昨日いちばん最後にちょっとだけ言ったように、通常の物質場の運動項 — Kähler ポテンシャル $\Phi^\dagger\Phi$ — を局所ゲージ不変にするためには、間に e^{2V} を挟めばよいわけでした。普通の共変微分、Eq. (7.2.4)

二行目の $\partial_\mu - i\,A_\mu$ っていうのが、superfield で書くと一行目のこんだけで終わってるわけです。ま、そういう意味で superfield 形式ってのに一旦慣れちゃうと、ラグランジアンも非常にお手軽に書ける。「一度しんどい思いをしておくと後は楽。高みから見下ろすと非常に見晴らしがよろしい」ということですね。

まぁとにかく、SUSY に関係する部分を見ましょう。すると、もともとのフェルミオンとゲージ場の相互作用（図 7.1 左）の他に、SUSY 変換で結びついたような相互作用がわらわらわらと出ています。図 7.1 の真ん中のグ

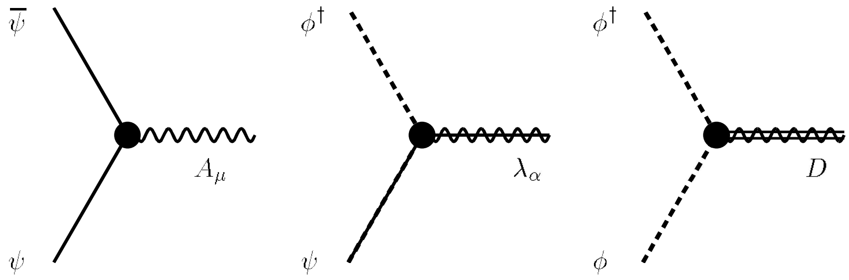


図 7.1: 物質場との相互作用

ラフはゲージ場をゲージーノに置き換えたもの。これはゲージ場の相棒のフェルミオンだということで、なんかこういう波線に棒を引いたような書き方をします。右のグラフは、ここだけの notation として、波線に棒を二本引いた補助場との相互作用項です。

7.3 Dilaton-Axion Multiplet

ここまでの話は標準的な話なんだけども、次章で、くりこみ群での厳密なベータ関数っていうのを紹介したいので、もうちょっと一般化した話をしておきます。

えー、先程のゲージ場の運動項に相当する部分を、少しだけ一般化しましょう。

$$\Big[\, W^a W^a \,\Big]_F \;\xrightarrow[\text{一般化}]{}\; \Big[\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{chiral 場の正則函数}}}{\underline{f_{ab}(\Phi)}}\, W^a W^b \,\Big]_F \qquad (a\,,\, b\ \text{は adjoint 添字}) \tag{7.3.1}$$

何かっていうと、これは F term ですから、chiral な場が何発か掛ってても SUSY 不変性には矛盾しません。だから後はゲージ対称性が満たされれば良い、つまりゲージの添字がうまくがあってればいいわけです。ただ大事なことは、SUSY を保つために、この f が正則関数でなければならないということです。この f のことを一般に、ゲージ kinetic function と呼んでいます。

例として、ゲージ kinetic function が、ある一つのゲージ一重項の場 S で与えられる場合を考えましょう。

$$f_{ab} \;=\; k_a\,\delta_{ab}\,S\ . \qquad (\,k_a \;=\; \text{‘level’}\,) \tag{7.3.2}$$

ここでは f は無次元としています。もし次元を持つとしたければ、Planck スケールか string スケールなんかで規格化したと思ってください。その一重項を component にバラすと、

$$S = \varphi + i\,\frac{\eta}{8\pi^2} + (\text{fermion}) + \theta^2 F_S\ . \tag{7.3.3}$$

ここで第一項と第二項は複素スカラー場の実部と虚部。最後の項は superfield としての F term です。特に実部を見てみますと、この φ が定数なら f_{ab} も定数なので、もとのゲージ理論のラグランジアンに戻るわけですね。それが今 φ という場に昇格してると思えばいい。このスカラー場のことを dilaton 場と呼んでいます。

実際、10 次元の superstring の理論を 4 次元まで（適当に）コンパクト化しますと、Eq. (7.3.2) のように dilaton 場 S が現れることが知られています。それで string 理論なんかでは「ダイナミカルな dilaton 場が真空期待値を持ったとしなさい。それがちょうど我々の世界の結合定数 $1/g^2$ を与えるものなんだ」と考えます。

$$\text{dilaton 場 } \varphi \text{ の真空期待値} \quad \longrightarrow \langle\varphi\rangle = \frac{1}{g^2} \ . \tag{7.3.4}$$

だから弦理論は「本質的に結合定数を持たない理論である」なーんていう言い方をされます。このことが 4 次元の effective な SUSY 理論ではどう見えるかって言うと、dilaton 場を含む (chiral) multiplet が、さっきの Eq. (7.3.2) のように、ゲージ kinetic function に出てくるということです。（あ、ちなみに、現象論の業界ではこれを S と書くわけだけども、Seiberg-Witten とか、もうちょっと理論的なパートではこれを $i\tau$ と書くのかな。業界によって notation がずいぶん違って、たまに何を言ってるかわかんないときあるんだけども (笑)。まぁそれは余談です。）

Axion 場との結合　で、えー、先ほど f_{ab}は chiral 場の正則な関数だと言いましたよね。そうすると、Eq. (7.3.4) のように、ゲージ結合定数に対応する実な場があれば、当然、それの虚部があるはずです。Eq. (7.3.3) ではそれを $\eta(x)$ と書きました。実はこの虚部がこれからの話では大変重要な役割を果たします。というわけで、もし虚部の方の場 — axion 場と呼びます — が期待値を持ったとすると、どういうラグランジアンになるか見ておきましょう。

$$\text{`axion' 場 } \eta \text{ の真空期待値} \quad \longrightarrow \langle\eta\rangle = \Theta \ . \tag{7.3.5}$$

ラグランジアンの構成要素としては、先ほど Eq. (7.2.1) で普通の field strength（第一項）に虚部の反対称テンソルを使ったような部分（第二項）がくっついていました。f_{ab} に虚部がないとすると、それとエルミート共役 (7.2.2) を足して、ちょうど $F^{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu}$ の項がキャンセルしてたわけです。ところが、f_{ab} に虚部があると、その分だけ反対称テンソルを使った項が残ってラグランジアンに顔を出します。つまり、

$$\mathcal{L}^{k=1}_{\mathrm{SYM}} = -\frac{1}{4g^2}\,\mathrm{Tr}\,F^2_{\mu\nu} - i\,\frac{\Theta}{32\pi^2}\underbrace{\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}}_{\text{(摂動論で見えない) 全微分項}} \tag{7.3.6}$$

QCD をよく知ってる人は、これはインスタントン効果に関係した vacuum θ angle だということをご存じだと思うんですが、とにかくそいつがラグランジアンに付け加わります。

普通、ゲージ理論のラグランジアンを書くとき、このような項を気にしないのは、この反対称テンソルを使った部分 $F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}$ が実は（説明を省きますが)、この項は全微分に書き換えることができるものになっているんです。だから「ラグランジアンに全微分なんかがあってもなくても関係ないやん」って思う人には、そんなもんどうでもいい項なわけです。もっとちゃんというと、Θ 項っていうのは全微分なので、Feynman rule に一切顔を出さないんです。その結果、この項は摂動論を考える限り、あってもなくても同じだということになります。実は、このことが後で大変重要になってきます。

全微分項についての議論

質問 ラグランジアン (7.3.6) のゲージ変換は「全微分が残る」という意味で、Chern-Simons current 同様ゲージ不変ではないのでは？ ゲージ不変でない項を勝手に落として大丈夫でしょうか？

回答 Non-purturbative に（例えばインスタントン効果で）こいつが生成されてしまったら、それを勝手に落とすわけにはいかないです。同様に、Eq. (7.3.5) のように η が condese か何かすることで Θ がノンゼロだとして、ラグランジアンにこの項があったとすると、勝手に落とすわけにはいきません。その意味では、確かにおっしゃる通りです。ただし、ポイントは何かっていうと、摂動計算やってもこの項は一切顔を出さない。いいですか。

あ、アノマリーは除いて下さいね。アノマリーは、まさにこの項なので。実はあの、今回、本来ならばやるはずだった、もう 1 個の「anomalous $U(1)$ ゲージ対称性」(4 ページの囲み参照) というのは、まさにこの項を使って、アノマリーをキャンセルするとかいう話だったんだけども、それについては省略させて下さい。

補足 ちょうど今質問が出たように、この項っていうのは全微分なんだけども、全微分の中身がゲージ不変性を破るようなもので、量子化されないといけないようないろんなことがあるわけなんです。現象論的にも QCD にこの項が入ってると、この項にかかってる i 倍のせいで 強い相互作用においても CP 不変性を破る。そんなものがあると実験にかかっちゃうわけですね。でもそれは 10 の… 何乗でしたっけ、もの凄くちっちゃくないといけない。そういう storong CP 問題というのがあります。まぁとにかく意外とこの項は理論的にも現象論的にも重要な項。

関連した余談 いずれにせよ、後で重要になることは、Θ 項っていうのは一切 Feynman rule に顔を出しませんから、非摂動効果はともかく、少なくとも摂動補正では見えない、ということです。

本筋からはそれますが、余談として、このことに関連した話を紹介します。さっき string 理論におけるゲージ結合定数の話をちょっとしましたね。今回「素粒子の質量を計算できるか?」なんて大風呂敷から始めてますから、もう一発だけ大風呂敷広げると、それに関連した疑問として、

> 「弦理論というのが最終的に究極の理論であるというなら、ゲージ結合定数ですね、例えば QED の微細構造定数が 1/137 でしたっけ、そういう値を、ちゃんと計算できるか?」

というのがあります。で、それはちょうど、「dilaton 場の真空期待値 (7.3.4) を如何に計算するか」という問題だということができます。そうすると問題は、「この dilaton 場のポテンシャルというのはどういう形なのか」ということになります。

実はこの dilaton ポテンシャルについては、1980 年代に string 理論が精力的に調べられ初めて以来、深刻な問題[1] が知られています。さっき言ったことから、axion 場 η は摂動補正で絶対顔を出さないはずです。ところで、axion 場 η は超対称性で dilaton 場 φ と超多重項を組みます。この二つの事実から、超対称性が成り立つ限り、「dilaton 場のポテンシャルに摂動論的な補正は出ない」ということが証明できてしまいます。つまり弦理論は摂動論では結合定数を決めることはできない。こういう問題があります。本当は、もっと問題は深刻なんですが…、それはもういいことにしましょう。

7.4 超対称 QCD

ちょっと細かい部分もいいましたけども、とにかく、以上のようにして supersymetric なラグランジアンを書くことができます。えーっと、(ちょっと飛ばしまして)、具体的にどういうシステムがあり得るかっていうのを駆け足で見ておきましょう。

よく調べられている例として、$\mathcal{N}=1$ の supersymetric な QCD[2] を取り上げます。これは、要するに $SU(N_\mathrm{c})$ をゲージ群とする supersymetric なゲージ理論 (super Yang-Mills 理論) に、vector-like な物質場 — ま、通常の QCD とまったく同じで右巻きと左巻きのクォークが同じ表現に入ったもの — を加えたものです。

$$SU(N_\mathrm{c})\mathrm{SQCD} \;=\; \mathrm{SYM} \oplus \underline{\text{vector-like}}\text{ な物質場}$$

ただし僕らは物質場を chiral な superfield で表したい。chiral ってのは左巻きなら左巻きに決まっているので、あえて「右巻きクォーク」の方を荷電共役にとって、「左巻きの反クォーク」で表します。そうすると基本表現だったものは反基本表現になる。それを $\overline{Q}$ というふうに書きましょう。そして Q と $\overline{Q}$ 対の数 N_f をフレーバー数と呼ぶことにします。

$$N_\mathrm{f}\text{ 対の chiral 超場}\;\begin{cases} Q^i(N_\mathrm{c}) & : \quad \text{‘quark’} \\ \overline{Q}_{\bar{i}}(N_\mathrm{c}^*) & : \quad \text{反 ‘quark’} \end{cases}$$

[1] M. Dine and N. Seiberg, *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 366.
[2] もちろん現実の QCD は supersymetric とは無縁なわけで、これは名前だけ QCD から借りてきたものです。

$N_\mathrm{f} < N_\mathrm{c}$	非摂動superpot.の生成 ($\Longrightarrow$ 理論が不安定)
$N_\mathrm{c} \le N_\mathrm{f} < \frac{3}{2} N_\mathrm{c}$	有効superpot.による強結合ダイナミクスの記述 基底状態 (moduli) の分類、閉じ込め と 束縛状態
$\frac{3}{2} N_\mathrm{c} < N_\mathrm{f} < 3N_\mathrm{c}$ (=‘conformal window’): §5.4	スケール不変性の回復 (非自明な$^\exists$赤外固定点) $\mathcal{N}=1$ 双対性: $SU(N_\mathrm{c}) \underset{\text{dual}}{\longleftrightarrow} SU(N_\mathrm{f}-N_\mathrm{c})$
$N_\mathrm{f} > 3N_\mathrm{c}$	漸近自由性がこわれる ($\Longrightarrow$ 多分IRで自由理論)

表 7.1: SQCD のダイナミクス [Ref] Intrilligator & Seiberg ('95)

こういう系が一番簡単な supersymmetric なゲージ理論になります。

$$\mathcal{L}^{\mathcal{N}=1}_{\mathrm{SQCD}} = \mathcal{L}^{\mathcal{N}=1}_{\mathrm{SYM}} + \Big[Q^\dagger \underbrace{e^{+2V}}_{\text{基本表現}} Q + \overline{Q}\, \underbrace{e^{-2V}}_{\text{複素共役表現}} \overline{Q}^\dagger \Big]_D \tag{7.4.1}$$

このシステムについては非常に詳しくダイナミクスが調べられてまして、ある意味では現実の QCD よりもよく解っているくらいです。えーと、今からざっと結果だけを紹介しますけど、詳しく知りたい方は Intriligator と Seiberg が非常に詳しい review[3] を書いているのでそれを見て下さい。

今、$SU(N_\mathrm{c})$ というゲージ群でフレーバーの数 N_f を 0 から 1, 2, 3, 4 と足していくんですね。そうすると、フレーバーの数 N_f がカラーの数 N_c よりちっちゃい時、つまり非常に漸近自由性が強い場合なんですけども、その時実際に superpotential が dynamical に生成されるんだ、ということが確かめられています。このことは、(摂動論の範囲で成り立っていた) 非くりこみ定理が非摂動効果によって破れる、ということの例になっています。こういう路線を突き詰めていって階層性問題を解こうっていうのが大きなシナリオです。そうなんですが、残念ながらこの場合は、理論が不安定になっちゃうことも分かってます。infra のダイナミクスが強すぎて理論じたいが「破綻」しちゃったってことですね。

今度は逆にですね、カラーの数の 3 倍よりもフレーバー数をぽーんと大きくします。前に、β 関数の係数が一般公式 (6.2.1) のようになると言いました。プラスの寄与を与える項は、ゲージループの効果で決まります。この効果は supersymmetric な理論では Eq. (6.2.1) の $3C_2(G) = 3N_\mathrm{c}$ の項です。一方、物質場は今の場合、基本表現と反基本表現とで N_f 対あるから $\sum_{\mathrm{chiral}}$ は N_f 項の和。ですから b が正である、つまり漸近自由であるためには、フレーバーの数が多かったらあかんわけですね。昨日ポスターセッションでやってましたよね。non-susy QCD の場合は 16.5 が限界でしたっけ。SUSY の場合は $3N_\mathrm{c}$ を越えると、漸近自由性が壊れちゃって、infrared free な理論になっちゃいます。

ちょっと後でもいいますが、面白いのは途中の領域です。詳しく言うと、二つの領域があって、以下のようなことが Seiberg 達によって調べられました (表 7.1)。

- $N_\mathrm{c} \le 3N_\mathrm{c}/2$、つまり、カラーの数が $3N_\mathrm{c}/2$ よりもちっちゃいところ。$3N_\mathrm{c}/2$ がどっちにはいるか分かんないですけど、ま、いいや、そういう場合には依然として強結合の理論で、実際閉じこめとか束縛状態とか出ちゃったりするんだけども、低エネルギー有効理論としては、superpotential をある程度決定することができてしまう。特に基底状態の様子に関しては完全に解っちゃう。

- $3N_\mathrm{c}/2 < N_\mathrm{f} < 3N_\mathrm{c}$ のところはもっと面白いことがおきます。フレーバーの数はそんなに多くなく、漸近自由性は依然としてあるんだけども、かといってあんまり強結合でもない。この場合、くりこみ群の意味で non trivial な fixed point が現れるんです。このことについては次章でもう少しお話ししたいと思います。

[3] K. Intriligator and N. Seiberg, hep-th/9509066.

コメント　いずれにしても驚きなのは、通常の QCD でなかなか難しかったところ — 閉じこめなどの（低エネルギーでの）非摂動ダイナミクス — について、対称性の縛りが強いおかげで、特に正則性なんかを使うとかなりのことが分かっちゃう、ということです。もちろん、充分な理解を得るためには $\mathcal{N}=1$ ではまだ足りないんだけども、non-SUSY に比べると大きな違いです。だからある意味で、SUSY っていうのが仮に自然界になかったとしても、場の理論の実験場としては非常に良い玩具だと言えるかも知れません。もちろん SUSY は本当にあると思いたいですけどね。

今日の最後に、現実世界で SUSY のシッポを掴む一つの試みとして、$3N_\mathrm{c}/2 < N_\mathrm{f} < 3N_\mathrm{c}$ のところを使う話を紹介します。これはちょっとした予告。

そもそも QCD がなぜ難しいかっていうと、摂動論が全然使えない…あ、低エネルギー側でですよ、結合定数が非常に強いのでそう思われてるわけです。ところが、SUSY の場合はですね、この摂動論をもうちょっと improve することができ、しかもある程度厳密なことがいえます。これを次にお話しします。

第8章　超対称ゲージ理論と「厳密な」くりこみ群

今日一番最初にくりこみ群の簡単な review をしまして、摂動論、特に 1-loop で雰囲気を見ました。でも、もうちょっと厳密なことが言いたい、つまり結合定数が強くても成り立つような性質を言いたい。ただ、厳密なくりこみ群って言うと、業界では別のもん（Wilsonian くりこみ群のこと）を指すことになってるので、ちょっとカッコ付けさしてもらって「厳密な」くりこみ群と呼ぶことにします。

8.1　ゲージ結合定数と正則性

まず、さっきゲージ場の運動項 $F_{\mu\nu}^2$ っていうのは chiral superfield の F-term に入っていると言いました。そうすると、昨日の話を聞いた人は、「ちょっと待って下さい、じゃあ非くりこみ定理は成り立たないんですか」ということが当然疑問になってくると思います。（昨日、superpotential term、一般に F-term はくりこみを受けない、ということを Sieberg 流に証明しましたね。）ところがですね、実は W の定義式を良く見てみると、

$$W^\alpha \equiv -\frac{1}{4}\overline{D}^2\Big(D^\alpha V\Big) \tag{8.1.1}$$

となっていて、$\bar{\theta}$ で二回微分することによって、ゲージ場を含む vector superfield を無理矢理 chiral にしてたわけです。ですからこれ、F-term に見えて実は全然 F-term じゃないんです。この微分演算子 $\overline{D}$ をはずすと、

$$\Big[W^\alpha W_\alpha\Big]_F = \Big[\big(D^\alpha V\big)\,W_\alpha\Big]_D\ . \tag{8.1.2}$$

つまりゲージ場の運動項は D-term （一般の superfield の最高冪 $\theta^2\overline{\theta^2}$ の項）だったんです。ですから、その係数であるゲージ結合定数 $1/g^2$ に対しては、通常の意味での正則性の議論も成り立たないし、非くりこみ定理も成り立たないはずです。まずこのことは大前提。

にもかかわらず、実は別の意味で、ゲージ結合定数のくりこみに対して exact なことが言えます。それは何かって言うと、さっき弦理論の dilaton 場の話をしました。何か dynamical な場があって、それの実部が凝縮すればゲージ結合定数の逆数を決定することができる、ということを言ったんだけども、ここではもちろん弦理論のことを考えてるわけではないんで、場の理論としてこのセットアップを使いたい、つまり外場として dilaton 場に相当する物を入れます。で、同じ記号 S を使います。

$$S = \frac{8\pi^2}{\hat{g}_{\mathrm{H}}^2} + i\Theta\ . \tag{8.1.3}$$

こいつはやっぱり chiral な superfileld で、フェルミオン成分以下は省略しました。こいつを一度 field と思っといていろんな量を計算しといてから、定数に戻すという操作をやります。これの実部はもちろん $1/g^2$（便宜上 $8\pi^2$ をいれときました）。そうすると、虚部はさっきの Eq. (7.3.6) の全微分項の係数、Θ angle みたいなもの。また、ちょっと後で出てくる、いわゆる「本当のゲージ結合定数」と区別するために、$\hat{g}_{\mathrm{H}}$ という記号を用いています。「Θ と正則な組み合わせをつくる」という意味で、これを「holomorphic なゲージ結合定数」と呼ぶことにします。

とにかくそうしますと、この S は chiral な field なんで、S 全体を結合定数だと思ってくりこみを実行すると、補正部分は、正則性から $S^\dagger$ という量には依らない、S だけの関数になるはずです。S 自身が結合定数（の逆数）

なんで、摂動展開って言うのは、S^{-1} に関する冪展開です。

$$\begin{aligned} S \;\longrightarrow\; f(S) &= S + \delta S \\ &= S + b_1 + \underbrace{\frac{b_2}{S} + \frac{b_3}{S^2} + \cdots}_{=\,0\ (\Theta\ \text{は摂動論でくりこみを受けない})} \end{aligned} \tag{8.1.4}$$

ところがどっこい、一方で、僕らが知っているのは S の虚部 Θ は摂動補正には効かないということ。あるいは、それがくりこみを受けないということを知っている。ですから、両辺の虚部を比較してみて Θ がずれてはいけないわけです。右辺の虚部が消えていないとならない。で、 1-loop の係数の部分 b_1 については、それが虚数だと Θ をずらすことになるんで、実だと問題ないですね。ところが 2-loop 以上の項というのは、結合定数の Θ 倍というのが必ず入ってきます。こういう項があってはいけない。つまり、2-loop 以上の項というのは、正則性及び Θ ていうものの素性のおかげで 0 であるということが言えちゃった。

つまり、S の実部 — 正則な結合定数 $\widehat{g}_{\rm H}$ — というのは 1-loop まででくりこみが exact なわけです。実際、摂動計算の結果 (6.2.1) との比較から、1-loop の係数 $b = 3C_2(G) - T(R)$ を用いて

$$b_1 \;=\; b \ln \frac{\mu}{\Lambda} \tag{8.1.5}$$

と書けます。なので、あらわに言うと、スケール μ での正則な結合定数は、スケール Λ でのものと

$$\frac{8\pi^2}{\widehat{g}_H^2(\mu)} = \frac{8\pi^2}{\widehat{g}_H^2(\Lambda)} + b \ln \frac{\mu}{\Lambda} \tag{8.1.6}$$

という関係で結ばれているということです。そして、この関係が exact なわけです。

8.2 物理的なゲージ結合定数と「厳密な」ベータ函数

こういうことが分かりますと、理論の振る舞いがよく分かるはずなんですが、世の中そんなに甘くなくて、20 年ぐらい続いた「anomaly パズル」という問題[1] があります。

今言いましたように、正則なゲージ結合定数というのは、一般論から 1-loop exact なはずです。ところが、実際に 2-loop、3-loop と計算してみると、そうなっていない。(僕なんかにはちょっとやれないんだけども。)何を計算するかというと、gauge 結合定数の β 関数です。これは「本来は定数であったものが定数でなくなった」というスケール不変性の破れ — 一種の anomaly — を表すものでしたが、それに対する高次補正があるわけです。おかしいじゃないか、一方では 1-loop exact であって一方ではそうでない。これを anomaly パズルと言います。

このパズルをどうやって理解するかは、いろいろ微妙なわけですが、最も clear な理解は、Arkani-Hamed と Murayama の 1997 年の論文[2] で与えられた、と言っていいんじゃないかと思います。

要するにパズルの元凶をひとことでいうと、

正則な結合定数 $\widehat{g}_{\rm H}$ は、物理的な結合定数 g とずれている

という点に起因するということです。ここで、「物理的なゲージ結合定数」とは何ぞや、というと、これはゲージボソンの vertex の係数そのもの、摂動計算で使う 1PI(一粒子既約)な結合定数のことです。いままで扱ってきた S の実部、だと $1/\widehat{g}_{\rm H}^2$ かな、これは物理的じゃないんだ、というのがポイントです。

じゃあ、どうずれているか、どのように関係しているかが問題ですが、答えを言うと、物理的なのは、$\widehat{g}_{\rm H}$ と物質場の波動関数くりこみ Z のある特定のコンビネーション

$$\frac{1}{2}\left(S + S^\dagger\right) - T(R) \ln Z \;=\; F[\alpha] \;\left(=\; \frac{1}{\alpha} + C_2(G) \ln \alpha + \cdots\right) \tag{8.2.1}$$

[1] 例えば、V.A. Novikov, M.A. Shifman, A.I. Vainstein and V.I. Zakahrov, *Nucl. Phys.* **B229** (1983) 381; *Nucl. Phys.* **B260** (1985) 157.

[2] N. Arkani-Hamed and H. Murayama, *JHEP* **0006** (2000) 030. 因みに、preprint が出たのは 1997 年です。

である、つまり、左辺第二項の分だけ物理的なゲージ結合定数 α とずれている、というのが答えです。$F[\alpha]$ の具体形を摂動計算で求めると、1-loop 、2-loop と何かズレが出るわけです。これが anomaly パズルの元凶だということです。

さて、なんでずれるのかということについては、この辺は 20 年くらいみんなが悩んだ難しい問題なわけです。なので、すぐさま納得できるわけでもないと思いますけど、三、四枚のトラペでまぁやってみます。

対称性を用いた議論 で、以下の議論は Arkani-Hamed、Giudice、Luty、Rattazzi の四人組の論文[3] で与えられたものです。表現 R に属するようなある物質場 Φ があったときに、そいつの global 変換を考えてやります。

$$\Phi \longmapsto e^{-\Lambda}\Phi\,, \qquad \Phi^\dagger \longmapsto \Phi^\dagger e^{-\Lambda^\dagger}\,. \tag{8.2.2}$$

Φ の古典的なラグランジアンの運動項は $\Phi^\dagger\Phi$ という形ですが、それに波動関数くりこみに対する外場 Z を入れて $\Phi^\dagger Z^2\Phi$ としておきます。そうしますと、上の変換で運動項が不変に保たれるためには、外場を

$$\Phi^\dagger Z^2\Phi\ \text{が不変} \iff \ln Z^2 \longmapsto \ln Z^2 + \left(\Lambda + \Lambda^\dagger\right) \tag{8.2.3}$$

と動かさなければいけない。これは、ちょうど $\ln Z^2$ がゲージ場の役割を果たしているようなものです。

このとき、chiral な field に対してこういう変換をやると anomaly が現れるということは聞いたことがあると思うんですが、径路積分の汎関数測度を変数変換したときのヤコビアンから、anomaly 項が現れます。

$$\begin{aligned}
&\int\mathcal{D}\big[e^{-\Lambda}\Phi\big]\,\exp\bigg[-\int d^4x d^2\theta \qquad \frac{S}{32\pi^2} \qquad \mathrm{Tr}\,W^\alpha W_\alpha\bigg]\\
&= \int\mathcal{D}\big[\Phi\big]\,\exp\bigg[-\int d^4x d^2\theta\,\frac{S-2T(R)\,\Lambda}{32\pi^2}\,\mathrm{Tr}\,W^\alpha W_\alpha\bigg]\,.
\end{aligned} \tag{8.2.4}$$

anomaly は $-2T(R)\Lambda$ の項[4] です。量子論ではこの項が 1-loop で現れるというわけです。

一方ですね、super Yang-Mills のラグランジアン (7.2.3) を、いま、dilaton-action multiplet (7.3.2) を使って書いています。特に重要なことは、古典的なラグランジアンに Eq. (7.3.6) の第二項のような、anomly と同じ形をした項が入っているということです。その結果、汎関数積分の測度が対称性に対して不変ではないんだけれども、それを anomaly と言うんだけれども、その不変ではない部分は S の変換を使ってキャンセルできるわけです。

$$S \,\equiv\, \frac{8\pi^2}{\hat{g}_H^2} + i\Theta \longmapsto S + \underbrace{2\,T(R)\,\Lambda}_{\substack{\uparrow\\ U(1)\,\text{anomaly を相殺}}} \tag{8.2.5}$$

これは S という結合定数に対応する場を、anomaly の部分だけ shift することによって、全体を不変に保つことができるということを意味しています。

まとめると、classical theory を不変に保つために、波動関数くりこみに対応する外場を Eq. (8.2.3) のように変換させます。一方、量子論的に path-integral を不変に保つためには、結合定数に対応する外場を Eq. (8.2.5) のように変換させます。とにかく、これを不変性と思ってもいいし、場の再定義だと思ってもいいんだけど、両方同時にやってはじめて、理論全体は不変になります。

ところが、正則なゲージ結合定数 S も 波動関数くりこみも結合定数 Z も動いちゃうといっているわけで、それらは別個には physical な量ではありません。理論の物理的内容は場の再定義に対して不変であるべきです。そして、その不変な組み合わせを探すと、ちょうど $\Lambda+\Lambda^\dagger$ と $2T(R)\Lambda$ をキャンセルするように作ればよくて、

$$\frac{1}{2}\left(S{+}S^\dagger\right) - T(R)\,\ln Z^2 \,=\, F[\alpha] \,=\, \left(\text{物理的な}\ \alpha \equiv \frac{g^2}{8\pi^2}\ \text{のある函数}\right)\,. \tag{8.2.6}$$

[3]N. Arkani-Hamed, G.F. Giudice, M.A. Luty, R. Rattazzi, *Phys. Rev.* **D58** (1998) 115005.

[4]ここで $T(R)$ というのは表現の index で 1/2 みたいなものです。補足 : Λ の lowest component の虚部が、フェルミオン場のカイラル変換なので、対応する Eq. (8.2.4) の項（に共役を加えたもの）が本当の anomaly です。

左辺が、Eqs. (8.2.3)–(8.2.5) で不変になるように、正則なゲージ結合定数（S の実部）と波動関数のくりこみ定数（の外場）を組み合わせたものです。で、それは当然 physical な結合定数と関係がついているだろう。それを関数 $F[\alpha]$ と書いておこう、というのがこの式です。

とまぁ、こういう議論です。なんだか、ちょっとだまされたような気がするんだけれども、えー、非常に見通しのよい議論であることには間違いない。これが対称性に基づく議論です。もちろん、対称性といっても本当の対称性ではなくって、何度も出てきたように、外場によって explicit に破れた対称性による selection rule のようなものを考えたということです。

Exact beta function 上の議論だけでは、関数 $F[\alpha]$ の形を決めることはできません。つまり、それがどういう関数かっていうのは計算してみないと分からない。そこで、とりあえず摂動論で計算するぐらいしか思いつきません。そしてその結果が Eq. (8.2.1)

$$F[\alpha] \;=\; \frac{1}{\alpha} + \underline{C_2(G)\ln\alpha} + \cdots$$

です。第一項は、古典的には正則な $\hat{\alpha}_{\rm H}$ と物理的な α は等しいという項。第二項が universal にこの形になるというのは、村山さんたちが示したことです。

結局ですね、どういう話になったか。具体的に $N_{\rm f}$-flavors をもった $SU(N_{\rm c})$ の場合を考えてみましょう。まず、かたや正則な結合定数というのは 1-loop exact であることが分かっています。正則性のおかげでしたね。

$$\frac{1}{\hat{\alpha}_{\rm H}(\mu)} \;=\; \frac{1}{\hat{\alpha}_{\rm H}(\Lambda)} + (3N_{\rm c} - N_{\rm f})\ln\frac{\mu}{\Lambda}\;. \tag{8.2.7}$$

それに対してこの量自身は physical な量ではなくて、それは physical なゲージ結合定数とこういう関係にある。

$$\frac{1}{\hat{\alpha}_{\rm H}(\mu)} + N_{\rm f}\ln Z^{-2} \;=\; F[\alpha] \;=\; \frac{1}{\alpha(\mu)} + N_{\rm c}\ln\alpha + \cdots\;. \tag{8.2.8}$$

つまり正則なゲージ結合定数の側で言うと、波動関数くりこみの $N_{\rm f}$ 倍だけずれている。右辺でいうと $\ln\alpha$ の $N_{\rm f}$ 倍の項がついてくる。（以下は 3-loop 以上の高次。）

てことはですね、$\hat{\alpha}_{\rm H}^{-1}(\mu)$ に対して exact な形 (8.2.7) を知っているので、Eq. (8.2.8) の両辺を μ 微分すると

$$F'[\alpha]\,\mu\frac{d\alpha}{d\mu} \;=\; 3N_{\rm c} - N_{\rm f} + N_{\rm f}\,\gamma(\alpha) \tag{8.2.9}$$

を得るわけです。ここで Z-factor の微分というのは異常次元 γ の定義 (??) そのものですね。さらに、$F[\alpha]$ に $\alpha^{-1}(\mu) + N_{\rm c}\ln\alpha$ までの項を突っ込みますと、gauge coupling constant の β function が

$$\beta(\alpha)_{\rm NSVZ} = -\alpha^2\,\frac{(3N_{\rm c}{-}N_{\rm f}) + N_{\rm f}\,\gamma(\alpha)}{1 - N_{\rm c}\alpha} \tag{8.2.10}$$

こういう形で求まりました。この形のベータ関数が exact だということを最初に言ったのはロシアのグループ（Novikov、Shifman、Veinstein、Zakharov）で 1983 年のことです。

特徴はですね、 1-loop β 関数に加えて、物質場の異常次元の効果がくっついている。これは結合定数の関数なわけで、β 関数に対して 2-loop から始まる項を与えます。で、その他に特徴なのは分母の形ですね。Eq. (8.2.8) の $N_{\rm c}\ln\alpha$ 項に対応した singularity がある。結合定数が $1/N_{\rm c}$ くらいになると β 関数自身が発散するという、謎の振る舞いをします。これは、何か理論が破綻することの兆候みたいなものです。

というふうにして、超対称なゲージ理論を考えてやりますと、くりこみ群についてかなり exact なことが分かります。もちろん $\gamma(\alpha)$ というのは、摂動論かなにかで計算しないといけない量なんだけれども、関数形としてはこれが exact だというわけです。

A remark で、そろそろちょっと休憩にしたいと思うんだけれども、えーとですね、 ちょっと Remark。何かというと、「こんなこと本当なんやろか」と一応疑問は持っておくべきです。今のを真に受けるようじゃダメです。

つまり何を言いたいかというと、今 supersymmetry というのを “full” に使った議論をしましたけれども、場の量子論として supersymmetry という対称性が本当に保たれているのか、というのをちょっと頭の隅に置いておいて下さい。特に非摂動論的にですね、supersymmetry を保つ正則化というのがあるのか無いのか。ある状況では作れる[5] が、ある状況では難しい、ということがあり得ます。別の言い方をすると、超対称理論を「構成的に定義」できるかのかという問題です。

- 「超対称性を保つ正則化」の存在を仮定
  - 摂動論では ‘Dimensional Reduction’。
  - 非摂動的な正則化法は (まだ) 知られていない。
- 「超対称理論は構成的に定義できるか？」
  - ‘Wilsonian’ くりこみ群における gauge 不変性？
  - 「格子上の超対称性」の最近の試み…。

例えば昨日のポスターセッションでも何人かの人が Wilson くりこみ群 — いわゆる exact なくりこみ群 — を議論されていました。これを用いる方法は有力な非摂動的方法の一つですが、それがゲージ理論に適用できるかどうかというのはやはり深刻な問題なわけです。構成的定義という意味から言いますと、lattice で作っちゃえばいいじゃないか、と思うわけですが、これまた大問題で、最近いろんな試みがなされていますね。ま、その結果を注意深く見守りたいと思いますが、とにかく、そういった保留付きで、exact な結果が一応得られているんだ、そう思ってください。

8.3 超対称 QCD のダイナミクスについて

とにかく、そういう保留つきで、exact なベータ函数がわかった、くりこみ群方程式が exact にわかっちゃった、とします。すると、改めて考えるまでもなく、これはかなり強烈なことを言っています。先ほど、supersymmetric QCD に対して、いろんなダイナミクスが分かりましたよー、分かってきましたよー、ということを紹介したんですけども、それをもう一度振り返ってみます。

- $N_\mathrm{f} \leq 3N_\mathrm{c}/2$ のとき (図 8.1 の左)

  物質場の数が少ないと、現実の QCD とおんなじで漸近自由になります。ベータ函数 $\beta(\alpha)$ が負になってるわけです。ベータ函数っていうのは結合定数の μ 微分でしたから、それが負やっていうことは、結合定数 α については傾きが負のグラフを描けばいいわけですね。横軸をスケールにとって、傾きが負のグラフって、図 8.1 の左下のようなグラフ。「右肩下がり」の、まぁ日本経済のような…。

- $3N_\mathrm{c} \leq N_\mathrm{f}$ のとき (図 8.1 の右)

  それに対してベータ函数が正になっちゃうような、フレーバーの数 N_f が $3N_\mathrm{c}$ を越える場合だと、ベータ函数は正ですから、結合定数は逆に「右肩上がり」なグラフになります。「右肩上がり」が良いかというと、どっかで発散しちゃうから困る。逆に言うと、高エネルギースケールでの結合定数を有限のある値に fix して物理を見た場合、インフラ側で結合定数が消えてしまう。そういう free theory になるという理論です。そういう意味で構成的に定義できないと思われている理論ですね。

- $3N_\mathrm{c}/2 < N_\mathrm{f} < 3N_\mathrm{c}$ のとき (図 8.1 の中央)

  面白いのはこの中間で、conformal window と呼ばれている領域です。

  ベータ函数のグラフ、左のと右のを繋げって言われたらなんかこんな形かなって想像しますよね。途中で零点が一発出てくるということが重要です。そうしますと、零点の左では結合定数の傾きが負だから、α のグ

[5] vector-like な超対称ゲージ理論などなど。

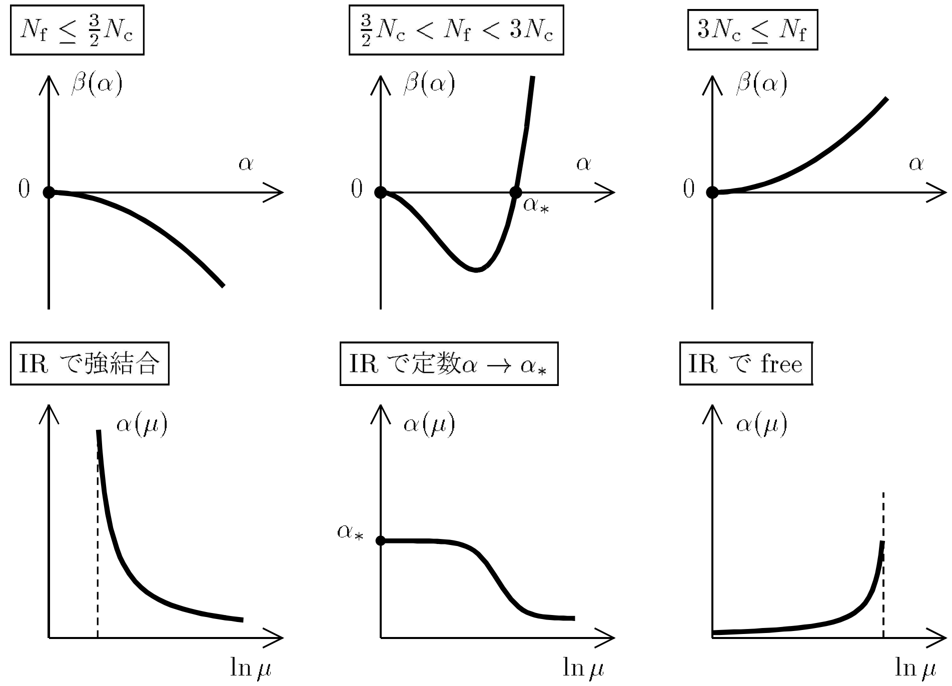


図 8.1: ベータ函数の coupling 依存性 (上) と、coupling のスケール依存性 (下)

> ラフは右から左に上がっていくんです。で、零点の右だったら大きい方から下がっていくわけで、カップリングの flow を見ますとちっちゃい側からは大きくなる。大きい側からはちっちゃくなる。というわけで、吸い込み型の fixed point だとわかりました。つまりインフラの領域で、結合定数がだんだんとこの α_* という値に近づいてくる。で、いったんここに載っちゃうと…まぁ載ることはないですけども…近づくと、傾きがゼロだから漸近的に定数。結合定数が本当に定数になっちゃうワケです。このような α_* を赤外（安定な）固定点といいます。

あ、えーと、ちょっとコメントです。こういう赤外固定点については、超対称理論でなくても、昔、Banks と Zaks が予測したものです。過去十年に SUSY の文脈で、いろいろなことが言われたのですが、最近はそれを承けて non SUSY の業界でも盛んに議論されてるようです。（国内でも名古屋大のグループがやってますね。）

赤外固定点とスケール不変性　赤外固定点では、ゲージ結合定数が本当に定数になっちゃうといいました。それ以外の場合、結合定数って「走る」わけだけども、最後の場合には、グラフの真ん中辺りで「歩き」始めて、切片のところで止まっちゃう。Eq. (??) のところでコメントしたように、「結合定数が走る」ってのは、古典論が典型的なスケールを持ってなくても、量子効果により理論に特徴的なスケールが現れるってことを意味します。逆に、「結合定数が走らなくなる」ってことは、そんなスケールが出てこなくなるということ。そういうわけで「ベータ函数の零点では、古典的な意味のスケール不変性が回復しているはずである」ということになります。

スケール不変性がありますと、昨日、二次元の系でちょっとコメントしたように、回転対称性がさらに conformal 不変性というのに持ち上がる、ということが場の理論の定理として知られています。今の場合 super もありますから、superconformal 対称性が固定点直上では現れている。そういうものがあるんじゃないかということが、ベータ函数のグラフに零点があることから予想されるわけです。

補足: 赤外固定点の存在について　もうちょっとだけ補足します。conformal window、つまり N_f が

$$\frac{2}{3}N_\mathrm{c} < N_\mathrm{f} < 3N_\mathrm{c} \tag{8.3.1}$$

をみたす領域を考えます。フレーバーの数がてきとぉーな領域。漸近自由性がてきとぉーに弱い。そういうところだと赤外固定点があるだろう、ということでした。

この予想をどうやったら確かめられるかについて、少し補足したいと思います。exact なベータ函数、さっき描きましたよね、Eq. (8.2.9) ですか。赤外固定点ってのは結合定数が止まるところですから、この右辺がゼロにならないといけない。そうしますと、右辺に現れている異常次元 $\gamma(\alpha)$ っていう量が、フレーバーの数 $N_{\rm f}$ であるとかカラーの数 $N_{\rm c}$ であるとかを使って

$$\gamma(\alpha_*) = -\frac{3N_{\rm c}-N_{\rm f}}{N_{\rm f}} \ (\equiv -\epsilon) \tag{8.3.2}$$

という組み合わせで書けることになります。今 Eq. (8.3.1) のために漸近自由でないといけないから、この式の右辺はマイナスの定まった値です。一方、左辺は結合定数の関数としてどういう関数かっていうと、非常に難しい関数のはずです。というのも、異常次元は波動関数くりこみと関係した量ですから holomorphy の議論は適用されず、だから、補正がどんどんどんどん higher loop に続くはずなので。いずれにしても、赤外固定点があるかどうかっていうのは、unknown な関数 $\gamma(\alpha)$ に対して「この式が $\alpha_* \neq 0$ の解をもつかどうか」という問題なんです。こういう問題のセットアップの仕方っていうのは Leigh と Strassler[6] が非常に精力的に議論してました。

いずれにしても、この問題の答えは一般的にはわからないんです。SUSY 理論でも依然としてむずかしい。だけど、ある種の極限をとると比較的簡単になります。どういう極限かっていうと、$N_{\rm c}\alpha$ を一定に保って $N_{\rm c}$ を無限大に飛ばしてしまおうというもので、large N 極限 と呼ばれてます。詳しくは説明できませんが、一般にこの種の極限では場の理論が割と簡単になる、ということが知られています。$N_{\rm c}\alpha$ を一定にしながら $N_{\rm c}$ 無限大にするということは、α がゼロ。かなり weak coupling limit を計算することになりますね。

これだけだと、単なる large $N_{\rm c}$ 極限ですが、さらに、その「修正版」を考えます。つまり、カラーの数を増やすだけじゃなくって、同時に物質場の数もバーンとやっちゃおう[7] というわけです。但し、

$$\frac{N_{\rm f}}{N_{\rm c}} = \frac{3}{1+\epsilon} \tag{8.3.3}$$

を固定する形で $N_{\rm c}$ と $N_{\rm f}$ を無限大に飛ばします。えっと Eq. (8.3.1) より、ちょうど $N_{\rm f}/N_{\rm c} = 3$ のときが漸近自由ぎりぎりのところだから、そこからちょっとだけ弱めときます。漸近自由性を保ったまま、ϵ というパラメータを入れといて、同時に $N_{\rm f}$ を無限大に飛ばそうというわけです。そうすっと conformal window (8.3.1) の不等式の右側の範囲に保ったまま weak coupling limit の計算をします。そのとこでは γ を摂動計算で reliable に計算できまして、結果だけ言いますと

$$\gamma(\alpha) \approx -N_{\rm c}\,\alpha \tag{8.3.4}$$

となります。そうすっと、赤外固定点の条件は Eq. (8.3.2) でしたから、赤外固定点の値が求まっちゃったわけですね。つまり $N_{\rm c}\alpha_*$ 自身は

$$N_{\rm c}\alpha_* \equiv \frac{N_{\rm c}\,g_*^2}{8\pi^2} \approx \epsilon \tag{8.3.5}$$

というちっちゃい量です。weak coupling limit ではこういうふうに赤外固定点の存在が計算で確かめられます。

ところが、$N_{\rm c}\alpha_*$ を $\epsilon \to 1$ の極限までもっていくと、Eq. (8.3.3) より $N_{\rm f}/N_{\rm c} \to 3/2$ になるから、window の範囲の小さい方（不等式の左辺側）に行ってしまう。すると何が起こるかというと、実は $N_{\rm c}\alpha = 1$ っていうのは例の exact ベータ函数 (8.2.10) の pole になっていて、ここでベータ函数が発散してしまう。というわけで、ある意味で $\epsilon = 1$ が限界なんです。

まぁもうちょっと物理的な言い方[8] も出来てですね。conformal window (8.3.1) から左側に外れると、つまり $N_{\rm f} < \frac{3}{2}N_{\rm c}$ で漸近自由が強まると、異常次元がどうなるか。Eq. (8.3.2) で ϵ が 1 を越えるわけだから、物質場の

[6] R.G. Leigh and M.J. Strassler, *Nucl. Phys.* **B447** (1995) 95.

[7] 余談。昔、別の文脈でよく似たことを考えたことがありました。参考までに（っていうか、宣伝ですね、すみません）: M. Harada, Y. Kikukawa, T. Kugo and H. Nakano, *Prog. Theor. Phys.* **92** (1994) 1161.

[8] 普通、superconformal 代数の表現論を用いる議論が一般的ですが、あまりよくわからないので…。

$Q^\dagger Q$ っていう演算子を考えたら、もともとそれぞれスカラー場が次元 1 を持っているところに、量子補正のせいで異常次元が加わるわけだけども、それが -1 を越えるわけだから、全体として次元が 1 より下がります。

$$\dim Q^\dagger Q = (1+1) + \gamma \leq 1 \ . \tag{8.3.6}$$

実はこれをくりこみ群の言葉でいうと、Kähler ポテンシャルに

$$\Delta K = \frac{1}{\Lambda^2} \left(Q^\dagger Q\right) \left(\overline{Q}\, \overline{Q}^\dagger\right) \sim \frac{1}{\Lambda^2} \left(Q\overline{Q}\right)^\dagger \left(Q\overline{Q}\right) \tag{8.3.7}$$

のような、くりこみ不可能なはずの演算子が relevant に効いてくる。つまり、本来無視できるはずのものが低エネルギーで効いてくる、いうことです。そして、これをちょっと組み替えますと、ある種の束縛状態 $Q\overline{Q}$ — メソン場 — の運動項のように見えるものになります。そいつが infra で効いてくるというわけですから、何らかの意味で、infra 側で束縛状態が出てくるということの兆候だと考えられます。

ま、物理的に言うとこういうことです。もっと形式的には、さっきのベータ函数が発散することで何となくわかるんだけども、それだけだと物理はわかんないわけです。こういうことを考えてやると、なんやら conformal window というのは本当に正しそうだということになります。

ここまでのまとめ　最後の方は駆け足でしたけども、ここまでのところをちょいとまとめておきましょう。昨日からお話ししてきたことは、大きな流れとしては、正則性というのが如何に威力があるかということです。これを幾分大げさに表現しますと、“the power of holomorphy” ですか。

超対称理論の大きな特徴として、 superpotential — 質量項だとか湯川カップリングとか — が量子補正に対し安定である、ループ補正に対して安定である、という性質がありました。この「非くりこみ定理」は holomorphy を使って証明できます。このことは、階層性問題の方から言うと、もともとの SUSY の動機 — EW スケール（Higgs とかの質量）に対する補正を安定化させるということ — に対応するものです。もっというと、非くりこみ定理の非摂動論的な破れを実現できれば、それは EW スケールそのものの起源を問うことに繋がっていくだろう、ということになります。これは SUSY を考えることの一つの大きな動機です。

そしてもう一個、ゲージ結合定数と holomorphy についてお話ししました。ゲージ結合定数についてはちょっと事情が違うんだけども、やっぱり holomorphy が重要な役割を果たしました。chiral な場に対応した holomorphic なゲージ結合定数っていうものは 1-loop exact であって、しかも、物理的なゲージ結合定数との間に、それなりにクリアな関係がついている。その関係を使ってやると、例えば、ある場合には赤外固定点が存在するはずだ、なんてことがわかってしまう。普通、理論のダイナミクスなんていうのはめちゃめちゃ難しいものなんだけど、今の場合、holomorphy のおかげで、ゲージ理論の非常にダイナミカルな振る舞いに対して、かなり深い洞察が得られるわけですね。

えー、というわけで、この辺でちょっと休憩にしたいと思います。

第9章　超対称性は自然界で実現されているか

昨日の最初にですね、まぁしょーもない喩え話で申し訳ないですけど、物理をサッカーに喩えた話[1] をしました。そのとき、『理論』と『場の理論の一般的な話』と『現象論』、我々はどこにいるんやろかということを常に意識しないといけない、なぁーんて言っときながら、自分がどういう話をするのか言い忘れてました。まぁ今までお聞きになってわかるように、必ずしも現象論の話ではなかったわけです。motivation はですね、最後尾のゴールキーパーの辺り — ここ Higgs にしましょう — motivation は Higgs から。そこから現象論的な話を一通りしまして、場の理論の一般的な話に進んできました。ただそれが最前線の理論のところまで行ってるかどうかは疑問ですけど、まぁとにかく、そういう方向で進んできました。ですが、ここでもう一回 “defensive” にいきましょう。

あれには前後関係をひっくり返したバージョンⅡがありました[2] けども、それを使って現象論的に偏った言い方をしてみます。“ペナルティエリア” のところに「なんか」あるわけだけども、“トップ” の Linear Collider 目指して、あるいは Large Hadron Collider でもいいですが、そういう将来検証可能な物理というのを目指して “攻め上がって” 行きたいわけです。ここでは、Minimal Supersymmetric Standard Model（MSSM）というのを取り上げて、これからその話をしたいと思います。（ただし、今日の最後はまた “defensive” に終わることになっちゃうんですが…。）

それはそうと、予定表によると、裏番組[3] の高エネルギーパートでは、なんか、「Linear Collider の夢と現実」ってのをやっている（ことになっている）ようですね。われわれ理論の方も、実験のみなさんに負けないように頑張りましょう。

まぁそれはとにかく、われわれ理論屋としても、いろんな motivation があり得るんだと思います。実際、僕自身も階層性問題というのが本当に問題なのか、今一つ分からないところがあるんですが、いったん超対称性という世界を知ってしまうと、これ、非常に美しい。Witten の言葉を借りれば、“beautiful mathematical structure”. ただ、そこで終わってしまうのでは物理学ではない。当然それが現実の世界で実現しているのかどうかっていうのをちょっと知りたい。…ちょっとじゃないですね、すごい知りたいわけです。それに関しては、少なくとも我々の標準模型の 100 GeV という世界まででは、その兆候がない。こういう厳しい現実がある。ユメとゲンジツ。

どういうことかって言うと、例えば昨日も出てきましたけど、超対称性が exact にあると、ボソンとフェルミオンが縮退した質量を持っていないといけない。

$$m^2_{\mathrm{Boson}} = m^2_{\mathrm{Fermion}} \ . \tag{9.0.1}$$

でも現実はそうではなく、我々の知っている素粒子の相棒（superpartner）は、まだ見つかっていないので、少なくとも 100 GeV 程度以上の質量を持たないといけない。そういう実験的な lower bound がついてるわけです。

$$|m_{\mathrm{B}} - m_{\mathrm{F}}| \gtrsim \mathcal{O}(100)\ \mathrm{GeV}\ . \tag{9.0.2}$$

ところが昨日最初に説明したように、階層性問題っていうのを serious にとりますと、あるいはもっと理論的にですね、スカラー場の理論をどうにかコントロールしたいと思ったときに、その解決策として SUSY というのが非常に美しい アイディアであることは間違いない。

ソフトに破れた超対称性　昨日、「対称性の soft な破れ」っていうのを説明しました。そのときにも触れたんですが、発散の相殺という意味からは、必ずしも質量の縮退というのが無くても、カップリングの関係さえあれば、二

[1] 第 1 章冒頭、“WHERE ARE WE ?” ver.I 参照
[2] 同 ver.Ⅱ 参照。
[3] この日予定されていた講義「LEP から LHC そして JLC へ、エネルギーフロンティア ~ 夢と現実」のこと。

次発散の相殺が起こるわけですね。そこで、超対称性が自然界にあるかどうかってのを問いかけたときに、それは「隠されて」いるんじゃないか[4] と考えたいわけです。そして、期待することは何かというと、超対称性の破れが soft な破れである、つまり、質量次元を持ったパラメータだけで破れていて、発散の相殺は損なわない、ということです。

- 超対称性は『隠されている』（自発的に破れている）のではないか？
- その結果、超対称性は、質量次元をもつパラメータによって soft に破れている。
  - （無次元の）結合定数の関係は、超対称なまま、
  - ボソンとフェルミオンの mass difference が大体 TeV 領域である。

結局、結合定数の関係を変えずに、ボソンとフェルミオンの mass difference が大体 TeV 領域である、ということを期待します。TeV っていう数字は、別に理論的な根拠が深くあるわけではないんだけれども、将来観測可能な領域というのは、高々数 TeV、どんなに頑張っても 10 TeV でしょう。それを超えていたら、もう SUSY はしばらくは見つからない。まぁそういうことも含めての期待です。（こういうのを "low-energy supersymmetry のシナリオ" なんて呼ぶときがあります。）

9.1 「超対称標準模型」入門

具体的にみていきましょう。我々の Standard Model — $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ の理論 — を見てみますと、グルーオンから始まるゲージボソンたちがわらわらといまして、それから三世代のクォーク、レプトンがいます。それにたぶん Higgs 場がないと困る。こういう Standard Model にですね、supersymmetry で結び付く相棒 — superpartner — を導入しましょう。

gauge bosons $g,\ W,\ Z,\ \gamma$	$\longleftrightarrow$	gauginos $\tilde{g},\ \widetilde{W},\ \widetilde{Z},\ \tilde{\gamma}$
scalar fermions $\begin{cases} \tilde{q}_i: & \text{squarks} \\ \tilde{\ell}_i: & \text{sleptons} \end{cases}$	$\longleftrightarrow$	chiral fermions $\begin{cases} q_i: & \text{quarks} \\ \ell_i: & \text{leptons} \end{cases}$
Higgs bosons $\begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix}$	$\longleftrightarrow$	Higgsinos $\begin{pmatrix} \widetilde{H}_2^+ \\ \widetilde{H}_2^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{H}_1^0 \\ \widetilde{H}_1^- \end{pmatrix}$

表 9.1: MSSM の役者たち（matter content）

ボソンの superpartner は -ino をつけて呼ぶのが習わしでして、ゲージ場については gaugino、Higgs 場については Higgsino、記号としてはティルダ（~）をつけて表します。じゃぁニュートリノは何かの superpartner かというと、もしこれが Higgs の superpartner だったら美しかったんだけれども、現象論的にはそうはいかなくて、残念ながらニュートリノと Higgino は別物です。

それに対してクォークとレプトン、つまり chiral フェルミオンの部分があるわけですが、それらに対する相棒はスカラー場であり、ちょっと紛らわしい名前ですが、スカラーフェルミオンと呼びます。スカラー場の癖に、「フェルミオン」という名前は変なんだけれども、具体的には、スカラークォーク、スカラーレプトンのことです。こいつらはスクォーク（squark）、スレプトン（slepton）と略されることの方が多いかも知れません。

[4] 普通は「自発的破れ」といいますが、ある意味、なんか分かったような分からないような言い方です。「隠されている」といった方が分かり易いと思うんだけれども…。（本当は、hidden は別の意味になることがあります。）

このパターンを見せられたら「なんで我々は superparter の方を先に知らなかったんだろう」と不思議に思うかも知れないんだけれども、少なくともゲージボソン、フェルミオンについてはもう理由を知っていますよね。つまりゲージ対称性がゲージボソンの質量を protect している。一方ゲージーノはそうではない。chiral フェルミオンについては、chiral 対称性が質量を protect するから軽かった。というように、この二つは理由がはっきりしているわけです。むしろ不自然なのは Higgs のところなんだけれども、こいつについては時間がないのでもう何も言わないことにします。

とにかく先ほど言いましたように superpartner、まぁ Higgs もそうですが、それらは見つかっていないので、superpartner たちが $\mathcal{O}(1-10)$ TeV 領域の質量を持つように、soft–SUSY-breaking パラメータを導入します。

$$\mathcal{L}_{\rm SSM} = \underline{\mathcal{L}_{\rm SUSY}} + \underline{\mathcal{L}_{\rm soft}} \tag{9.1.1}$$

$\uparrow$	$\uparrow$
Yukawa 結合行列 y_u , y_d , y_e Higgsino 質量 μ	gaugino 質量 $M_{1/2}$ scalar 質量 m_0^2 scalar 結合 A, B
superpot. パラメータ	soft-breaking パラメータ

これを手で "パパッ" と入れちゃうのがいわゆる現象論で、その起源まで問うというのが理論屋のやることなわけですけど、ここではまず現象論的なアプローチとして、supersymmetric なラグランジアンに soft パラメータを持ったラグランジアンを付け加えます。supersymmetric な部分は、例えばゲージ相互作用の他に、湯川相互作用の行列が up 系列、doun 系列、荷電レプトンセクタごとにあります。(Higgs の質量パラメータについては今日は説明を省略します。) 一方、それに付け加える soft term というのは、ゲージーノの質量（スピン 1/2 ですから $M_{1/2}$ と書きます)、それとスカラークォーク、スカラーレプトンとかがわんさかいるわけですけれども、当然、そいつらの mass パラメータがあります。その他にもスカラー場の trilinear coupling とか bilinear coupling などもあります。

なお、これからはクォーク、レプトンの場と chiral superfield を同じ記号で書いたりします。

こういう supersymmetric な Standard Model の minimal version が MSSM と呼ばれているものです。ここでは、これから最後に向けて湯川セクタの物理を考えていきたいので、そこに着目します。superpotential

$$W = W_{\rm MSSM} + W_{\rm extra} \tag{9.1.2}$$

の第一項が（通常の）湯川相互作用を含む部分です。

$$W^{(3)}_{\rm MSSM} = (y_u)\, q_{\rm L}\, u^c_{\rm R}\, H_2 + (y_d)\, q_{\rm L}\, d^c_{\rm R}\, H_1 + (y_e)\, \ell_{\rm L}\, e^c_{\rm R}\, H_1 \ . \tag{9.1.3}$$

こいつらは全部 superfield だと思ってください。まず quark doublet と up quark の singlet、次が quark doublet と down quark の singlet、最後が lepton doublet と荷電 lepton singlet。湯川相互作用の行列 — 三世代構造に対応した三行三列の行列 — を三つ持っている。これは通常の Standard Model を supersymmetric にしただけのものです。ということは、要は焼き直しただけですから、湯川カップリングに対して何か新しいことが言えたかというと全く言えてない。つまり、問題 (階層性問題 II) はそのまま先送りされているわけです。

湯川セクタ: 基本的には non-SUSY SM の焼き直し$\Longrightarrow$ 階層性問題 II は先送り。

なお、Higgs セクタについては、あれこれ言わないことにします。で、えーっと、superpotential には、MSSM の他に余分な項 $W_{\rm extra}$ があるかも知れなくて、本当は重要な点があるんですが、それも省略させて下さい。

9.2 Soft SUSY Breaking パラメータ

次に、ラグランジアン (9.1.1) の SUSY breaking の項をもうちょっと具体的に見てみましょう。

soft に supersymmetry を破るにはどうするかというと、次元を持った部分だけで SUSY を破ります。一方、（繰り返しになりますけれども）、次元を持たないような結合定数 — 例えばゲージであるとか湯川であるとか、スカラーの四点カップリングであるとか、そういう部分 — は exact SUSY を保ったままとします。

なんでこんな勝手なことができるのか、ここで質量の部分について言っておきましょう。ゲージーノであるとかスフェルミオン達は元々、ゲージボソンや chiral フェルミオンの「道づれ」で massless になっていました。そもそも、ゲージボソンや chiral フェルミオンの場合は、ゲージ対称性であるとか、chiral 対称性であるとか、そういう対称性がそれらの粒子が massless であることを保証していたんでした。それに対して、superpartner（gaugino、sfermion）が massless になっていたのは、ひとえに、ゲージボソンや chiral フェルミオンと SUSY で結び付いていたからだったわけですよね。

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{gaugino} & \lambda^a \\ \text{sfermion} & \phi_i\end{array}\right\} \text{は} \left\{\begin{array}{ll}\text{gauge boson} & A^a_\mu \\ \text{chiral fermion} & \psi_i\end{array}\right\} \text{の「道づれ」で massless。}$$

そうなので、一旦 SUSY が破れると、ゲージーノや スフェルミオン達が massless に留まる理由は一切ありません。

$$\boxed{\mathcal{L}^{(2)}_{\text{soft}} = -\frac{1}{2}\left(\underbrace{M_a}_{\text{gaugino 質量}}\lambda^a\lambda^a + \text{H.c.}\right) - \underbrace{\left(m^2\right)_{ij}}_{\text{scalar 質量}}\phi^\dagger_i\,\phi_j} \tag{9.2.1}$$

ここで a という添字は $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ のゲージ群に対応するものと思ってください。スクォーク、スレプトン達の質量項は一般に、$(m^2)_{ij}\phi^\dagger_i\phi_j$ の形をしています。ここで i、j と添字を付けて書きましたが、後でこの点が重要なんですが、i 番目の世代と j 番目の世代のスフェルミオンとあって、それらの質量行列 — 対角行列とは限らない — があると思ってください。

また、超対称性の大切な性質は、スカラー場の相互作用、スカラー場の理論を制御するんだということでしたから、このポテンシャルに対応する三次の項とか二次の項というのも、当然 SUSY によって制御されていたものです。それが今や解放されて、いろんなものがバサバサっと出てくる。それを A-parameter（scalar 三点結合）とか、B-parameter（scalar 二点結合）であるとか呼ぶんですが、とにかくそれらを書き下してみましょう。

$$\boxed{\mathcal{L}^{(3)}_{\text{soft}} = -\frac{1}{3!}\,(yA)_{ijk}\,\phi_i\phi_j\phi_k - (B\mu)\,H_1H_2 + \text{H.c.}} \tag{9.2.2}$$

で、とにかく、A-parameter であるとか B-parameter とか、ゲージーノの質量 M_a や $(m^2)_{ij}$（の平方根）も、みんな質量次元 1 を持っているパラメータで、soft SUSY-breaking パラメータと呼ばれます。

コメント いま、可能な soft SUSY-breaking パラメータを羅列しましたが、ちょっとコメント。

- スカラー質量 $(m^2)_{ij}$ 以外は全部、$U(1)_R$ 対称性をこわすものになっています。
- それから、現象論的に大事なこととして、sfermion の質量行列であるとか、A-term もそうなんだけれども、一般にこいつらは世代を混ぜてしまう可能性があります。つまり、soft SUSY-breaking パラメータは、世代構造（や CP の破れ）の新たな起源を与えるものです。これが重大な問題を引き起こすことになるのですが、それについてはまた後で考えることにします。
- このことはかなり nontrivial なんですけれども、理論的にも現象論的にも面白い点です。何かというと、
  - soft SUSY-breaking パラメータそのものを superfield 形式で記述することができる。
  - 実は soft SUSY-breaking パラメータのくりこみは、SUSY が制御している！

  という点です。つまり、超対称性は、破れた後でさえ、破れのパラメータを制御しているというわけです。後半は時間がないので詳しくは説明できませんが、前半の雰囲気については、これからちょいと見て行きたいと思います。

9.3 Superfield 形式による soft SUSY Breaking パラメータの記述

今、soft breaking を手で導入する、ということにしましたけど、もともと soft breaking term というのがどういう起源で出てくるかをちょっと考えてみようと思います。

Gaugino Mass の起源　まずゲージーノの質量を例にとって説明しましょう。さっき別の目的で dilaton superfield の役割を説明しましたね。

$$S = \varphi + i\,\frac{\eta}{8\pi^2} + \sqrt{2}\,\theta\psi_S + \theta^2 F_S\ ;\ \ \langle\varphi\rangle = \frac{1}{g^2} \tag{9.3.1}$$

この φ がゲージ結合定数を与えるスカラー場でした。また、η はそれと複素に組む擬スカラー場、ψ_S がそれらのフェルミオン partner、そして、F_S が補助場です。昨日の話を思い出すと、supersymmetry っていうのは superspace の並進でしたから、ψ の変換が F になってました。このことが以下で重要な点です。

この supermultiplet を使って SUSY breaking を考えてみます。そもそも、SUSY の自発的な破れっていうのは「supersymmetry 変換の生成子 Q_α が真空を消さない」ってことですが、supercharge Q_α はフェルミオニックですから、ノンゼロの真空期待値を持つためには、フェルミオン ψ_S の super 変換を考えてやらなきゃならない。ってことは、補助場 F_S がノンゼロの真空期待値を持つことによって SUSY breaking が実現することになります。

というわけで、いま仮にですよ、dilaton 場の F-term がノンゼロの期待値を持ったとしましょう。

$$0 \neq \langle F_S\rangle \propto \left\langle 0 \middle| \left\{ Q_\alpha\,,\,\psi_S \right\} \middle| 0 \right\rangle\ . \tag{9.3.2}$$

ここでは何故そうなのか[5] は一切問わないで、何らかの dynamics の結果としてこういうことが起きたとします。その結果、何が起こるかを考えたいわけです。

そもそも、dilaton 場 S はゲージ場の運動項に顔を出してました。ですから、dilaton F-term の影響は

$$\mathcal{L}_{\rm gauge} = \left[\frac{1}{4}\,S\,W^a W^a\right]_F = -\,\frac{1}{2}\,\langle F_S\rangle\,\lambda^a\lambda^a + \cdots\ . \tag{9.3.3}$$

となります。ここで、“field strength superfield” W^a が第一成分にゲージーノを含む

$$W^a = -i\lambda^a + \cdots$$

ってことは今日いいましたよね。ですから、ラグランジアン (9.3.3) の F-term（θ^2 の係数）をとるとき、S の方に θ^2 項があってそれをひらっちゃうと、W の方からは θ を持たない第一成分、$\lambda\lambda$ をとって来ないといけない。そうすると、Eq. (9.3.3) の右辺に書いたように、ゲージノの双線形項 $\lambda\lambda$ の係数が次元 1 を持った[6] 量 F になるので、ちょうどゲージノの質量項に相当するものができることになります。

というわけで、SUSY の破れって言うのは基本的にですね、こういう補助場の期待値として理解できるわけですが、それは自動的に次元を持っているパラメータとして見えてくる。そして、こういうふうに SUSY breaking を考えると、soft な破れが自然な形で得られます。

一般の soft term　これをもっと拡張します。SUSY の破れのパラメータとして、ゲージーノとかスカラーの質量の二乗とかあったんですけども、こいつを全部 superfield に格上げすることができます。

$$\text{gaugino 質量} \quad \longrightarrow \quad \int d^2\theta\,\frac{1}{g_a^2}\left(1 - M_a\theta^2\right){\rm Tr}\,W^a W_a\ , \tag{9.3.4}$$

$$(-A)\text{-term} \quad \longrightarrow \quad \int d^2\theta\,y_{ijk}\left(1 + A_{ijk}\theta^2\right)\Phi_i\Phi_j\Phi_k\ , \tag{9.3.5}$$

$$\text{scaler 質量} \quad \longrightarrow \quad \int d^2\theta d^2\overline{\theta}\,Z_i^2\left(1 - m_i^2\theta^4\right)\Phi_i^\dagger\Phi_i\ . \tag{9.3.6}$$

[5] この理由を考えるのが dynamical supersymmetry breaking のシナリオです。
[6] えーと、 dilaton 場は無次元な量ですからこれ自身は次元 1 を持ってる。

最初の Eq. (9.3.4) は今さっき説明した gaugino 質量項ですね。全体を $1/g^2$ で括ったとき、θ^2 項にゲージノ質量が含まれてるというわけです。今は現象論的なアプローチとしてですね、「dynamical な field の期待値」というふうには考えないで、とにかく constant な質量パラメータを（x-independent な）superfield に格上げして、全体を外場と考えてやる。そういうことを考えます。

二番目の A-term (9.3.5) についてはもう省略します。これからの話ではスカラー質量の部分 (9.3.6) が重要になりますから、こいつについての説明を、ここだけ黒板を使って五分ぐらいやりたいと思います。

Contact Term — Soft Scalar Mass の起源　えーと今、soft スカラー質量、特にスクォークの質量が SUSY の破れからどういうふうに現れるか、について考えましょう。Kähler ポテンシャルというのがありましたよね。これはいろんな chiral field の holomorphic ではない（つまり、ϕ と $\phi^\dagger$ の）関数です。で、特にいま、i 番目の世代のクォーク場を Q_i と書きますと、その運動項は

$$K = Q_i^\dagger Q_i \tag{9.3.7}$$

ですね。もちろん運動項ですから、世代については対角化されてます。

ここでですね、余分な相互作用としてこういうのがあったらどうか。

$$K = Q_i^\dagger Q_i + \frac{1}{M_p^2}\Phi\Phi^\dagger Q_i^\dagger Q_j \ . \tag{9.3.8}$$

えーと、Φ っていうのがなんか余分な場です。K は次元 2 でなくてはいけないので、M_p^{-2} をかけておきます。

新たに導入した場 Φ は standard model のゲージ群に対しては singlet なものとします。こいつも superfield ですからこう展開してやれますね。

$$\Phi = \phi + \cdots + \theta^2 F \ . \tag{9.3.9}$$

何考えてるかっていうと、この singlet field Φ の F-term がノンゼロの真空期待値 $\langle F\rangle$ をもったとします。すると、Φ のフェルミオン component の super 変換がノンゼロになってるということですから、これで supersymmetry が破れることになります。とにかく、こういうことが起こったとして、なんか別のセクタで dynamical SUSY breaking が起こったとして、その結果、何が起こるかを考えるわけです。

このとき Eq. (9.3.8) の相互作用項をみてみます。ラグランジアンは K の θ^4 項 — 正確には $\theta^2\bar\theta^2$ 項ですね — をとれ、ということでしたから、この Φ の θ^2 項をとって、かつ、$\Phi^\dagger$ の方の $\bar\theta^2$ 項をとってやれば、$Q^\dagger Q$ の部分はスカラー component で置き換えられることになります。ということは、この余分な項からスクォークたちの質量が得られました。

$$\mathcal{L} \ = \ -\frac{|\langle F\rangle|^2}{M_p^2}\tilde Q_i^\dagger \tilde Q_j \ . \tag{9.3.10}$$

別のセクタで dynamical SUSY breaking が起こったとしたとき、その破れの効果が、こういう形で — 例えばこの場合は Planck 質量の 2 乗分の 1 ですから、ちょうど万有引力定数ですね。つまり Newton 定数に比例する形で — 我々のスクォークとレプトンに伝えられることになります。

こういうのを “gravity medition” と世間では呼んでます[7] けども、呼び方はともかく、こういうふうにして soft 質量項を生成することができます。

ここで、ちょこっと付け加えときますと、K は Kähler ポテンシャルなので、holomorphy の議論が使えません。ですから、摂動論でも、波動関数くりこみやら、いろんな補正項がバンバン出てくるはずです。また、もっと基本的な理論を考えてやりますと、例えばそれが Planck 質量というエネルギースケールで特徴づけられるものだとすると、当然、その辺では重力ががんがん効いてる世界なわけで、もはやくりこみ可能性というのは指導原理ではないわけですね。ですから、Planck スケールの逆数で抑えられているような相互作用でも、一般に対称性で

[7] 補足 :「重力相互作用が SUSY breaking を mediate している」かの印象を持ってしまいますが、全くの誤解です。本当に（graviton の交換という意味の）重力相互作用なら flavor blind なはずですが、Eq. (9.3.8) の contact term はそうなっていません。

許されるものはすべてある、というふうに考えてやるのが自然です。だから、くりこみ不可能な相互作用であろうがなかろうが、Eq. (9.3.8) ような項 — contact term — もあると予想されます。

このとき重要なポイントは、こうして得られるスクォーク質量項の世代構造です。運動項を対角的 (9.3.7) にした基底で考えたとき、この相互作用項 (9.3.8) の方は起源が特定できてない、ある意味で "雑多的なもの" ですから、その係数が 1 になっているとか、i と j が揃ってるとか、そういう特殊なことが起る理由が全然ないわけです。そういう意味で、ここで得られるような、我々のセクタの soft スカラー質量っていうのは、i 番目の世代のスクォークと j 番目の世代のスクォークをめちゃめちゃに混合させるような、そういう soft 質量項が出てくるだろう。そう思わざるを得ないことになります。

Superfield 形式による soft scalar mass　で、いまざっと説明したように、dynamical な SUSY breaking とか、その mediation まで立ち入って考えようとすると、soft term っていうのはなんかやっぱり dynamical な場 — 何らかの粒子に対応する場 — の F term を起源とするものだと考えられます。でも、（そういうのを一切 "積分" してしまった）effective theory の立場から見てやると、もはやそんな場はどこにもありません。そこで、Eq. (9.3.4) や Eq. (9.3.5) では、ゲージカップリング g_a であるとか、湯川カップリング y_{ijk} であるとか、結合定数を（external な）superfield に格上げすることで soft term を理解できるということを言ってたわけです。

同じことを soft scalar mass についてやろうとすると、Eq. (9.3.6) の運動項の部分には、soft term に対応するような結合定数が無いように見えます。その代わり、運動項の係数がちょうど波動関数くりこみの Z 因子なので、この Z をある意味で superfield に格上げする[8] そういう形式を考えることになります。

9.4　Soft SUSY Breaking と世代混合

いま説明しましたように、スクォークやスレプトンの質量、主にそいつに着目していきたいと思いますけども、そいつが世代を混ぜない理由が見あたらない。まぁ他にもいろいろ問題があるので、一通りまとめておきましょう。

一般的に言ってですね、low-energy SUSY のシナリオを考えれば、soft SUSY breaking パラメータがワンサカ出てくるわけですが、そいつらが新たなフレーバー混合とか CP の破れの起源になります。

- スクォークやスレプトンの質量が「世代について対角的」な理由がない。— $\delta_{\mathrm{LL,RR}}$ の問題。
- スカラー三点結合が湯川結合と align $(yA)_{ijk} = y_{ijk}A$ している理由がない。— δ_{LR} の問題。
- $U(1)_R$ 対称性を破るパラメータ（M_a, A_{ijk}, B）は複素位相をもち得る、つまり、実である理由がない。

これは一方では、可能なモデルを制限することになりますが、逆にいうと、そうした現象を見つけることで、SUSY のシッポを捕まえたい、さらに、ゆくゆくは、soft SUSY breaking パラメータを実験的に決めたいわけです。

- soft SUSY breaking パラメータはフレーバー混合や CP の破れの新たな起源
  - low-energy SUSY の理論に対する厳しい実験的制限。
  - 逆に、これらに対する精密実験は、SUSY を検証する一つの方法。

例えば、B-Factory で考えると、問題になるのは CP の破れですね。まぁ今の B Factory で SUSY を見つけるとことまで行けるかどうかはちょっと難しいかもしれないけど…。一方ですね、我々の標準模型、なにも拡張しない non SUSY の標準模型がかなりの部分の実験結果をよく再現していることが、それこそ B-Factory などを通してわかりつつあります。まぁ昨日ミューオン異常磁気能率（$g-2$）がひょっとしたらズレてるんじゃないか、という話を紹介しましたが、そういうのを除きますと、フレーバー violation について、ほとんどズレは見当たらない。というか、変な効果（SM に対する余分な効果）は見えないぐらいちっちゃい。つまりそれは、現象論的に導入した soft パラメータのタイプを非常に厳しく制限することになります。

[8] 補足：世代構造に注意すると、$Z_{ij} = \delta_{ij} + \cdots - m^2_{ij}\theta^4$ のような感じです。なお、A-term は superfield Z の θ^2 部分と考えた方がわかりやすいです。詳しくは、例えば、G.F. Giudice and R. Rattazzi, *Nucl. Phys.* **B511** (1998) 25 を見て下さい。

おさらい : 世代混合とは　ここで、標準模型のフレーバー混合って何だったのかについて、サッとおさらいしておきましょう。そもそも、素粒子の「世代」というのが単なるコピーであって、その間に混合が一切なければ、（第一世代で出来ている）我々は二世代目の存在すら気付かなかったはずですし、問題も無かったはずです。ところが、現実には混ざっている。

問題はですね、Flavor-Changing Neutral Current、略して FCNC と呼ばれているプロセスです。フレーバーを変える…えー、「フレーバー」といわれてもピンとこないかも知れないので、「世代を変える」と言い換えましょうか。例えば、一世代目と二世代目を変えるようなもので、しかも中性カレントによる相互作用です。

例えば K^0 っていうメソンと、その反粒子に相当する $\overline{K}^0$ ってやつの間には混合があるんだけども、非常に小さいってのが実験的な事実でした。

$$\boxed{K^0(d\,\bar{s}) \longleftrightarrow \overline{K}^0(s\,\bar{d})\ \text{混合}}$$

これについて、標準模型ではどういう説明をしてるか？ いまから少々、教科書的な説明をやってみます。ポイントはですね、とにかく CKM（Cabbibo-Kobayashi-Maskawa）混合行列 V_{ij} がユニタリー行列だということです。

まず tree レベルではどうなっていたか。図 9.1 を見て下さい。Z との結合（右図）は世代（$i=1,2,3$）対角的で、charge を持ったカレント相互作用である $W^{\pm}$ ボソンとの結合（左図）では、相互作用項にまさにこの混合行列 V_{ij} があって、j 番目の世代（d_j）が i 番目の世代（u_i）に飛びます。そういう、下系列クォークから上系列クォークに変わる相互作用項があるわけです。右図の中性ゲージボソンでは、今の場合（QED の γ とか QCD の g はどうでもよくて）Z ボソンがいちばん問題ですけど、そこは世代については対角的な coupling しかない。

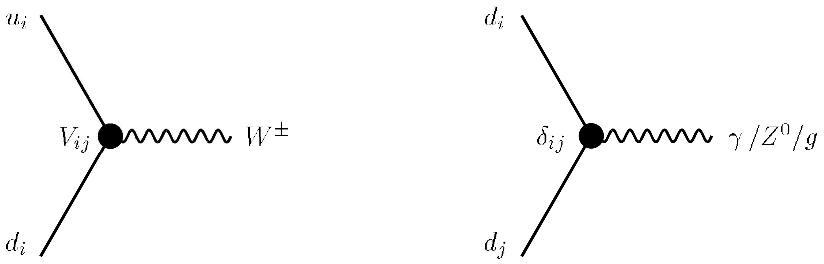


図 9.1: tree レベル : Z との結合は世代 $(i=1,2,3)$ 対角的

こうして tree レベルでは FCNC はないんだけども、もちろん 1-loop へ行きますと、チョロッと出てきます。K^0 メソン（図 9.2 の右側）ってのは、$\bar{s}$ クォークと d クォークから出来てるやつですが、これが $W\pm$ ボソンを二発交換することによって、$\overline{K}^0$（図 9.2 の左側）に遷移できます。この反応は、W^+ と W^- を交換したことで、全体としては中性カレント相互作用ですね。詳しく見ると、始状態（右側）のダウンクォーク d が、CKM 混合行列 V_{id} を使って、i 番目の世代の上系列クォーク u_i へ移ります。それは要するにアップかチャームかトップのどれかですけど、そいつに遷移して今度は、エルミート共役 $V^{\dagger}$を使って s クォークになる。そういうプロセス。そーすっと全体を通して（図 9.2 の右から左に向かって）K^0 が $\overline{K}^0$ に変わってるわけですね。そして、こういう反応が実験的には、非常に厳しく制限されているんだけど、ほんのわずかに起っているというわけです。

GIM 相殺機構　このような FCNC 過程が小さいことをどうやって説明しているかっていうのを、上の box ダイアグラムの、例えば上側の線に沿って考えてみます。添字を右（始状態）から左（終状態）へ追うと、d クォークが i 番目の上系列クォーク u_i に行く。そこで質量項を拾って、次に行って s クォークに変わる、という反応です。したがって、この部分だけ考えると、遷移振幅は

$$\left\langle \overline{K}^0 \middle| K^0 \right\rangle \propto \sum_i \left(V^{\dagger}\right)_{si} \left(m_u\right)_i \left(V\right)_{id} \tag{9.4.1}$$

ってな感じです。

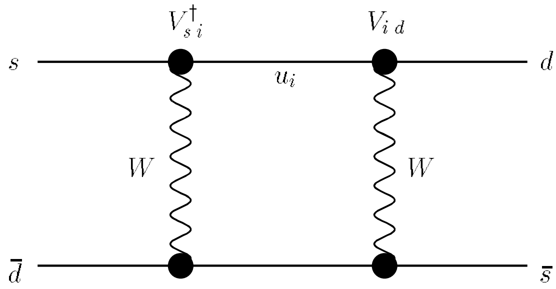


図 9.2: BOX ダイアグラム (1-loop) : 世代間で相殺する

ポイントはもし中間状態のクォークたちが縮退している、つまり例えば up クォークと charm クォークの質量が等しい…まぁ思い切って、仮に top クォークまで全部等しいとやっちゃうと、上の式で間に挟まっている m_u は単位行列になりますから、外にポンと放り出すことができて、$V^\dagger V$ と括れちゃいます。この場合だと、二世代目（添字 s）と一世代目（添字 d）の行列要素ですが、$V^\dagger V$ は単位行列になりますから、非対角要素である sd 成分はゼロ。結局、クォークたちが縮退する極限で FCNC はゼロになります。これを GIM（Glashow-Iliopoulos-Maiani）相殺機構といいます。ま実際は、クォークが完全には縮退してないんで、GIM の相殺が不完全になって、その結果、チョビっとだけ実験にかかってますよ、という事です。まぁこれはいいですよね。

$$\text{クォークが縮退する極限で}\qquad \sum_i \left(V^\dagger\right)_{si}\left(m_u\right)_i\left(V\right)_{id} \longrightarrow m_u\left(V^\dagger V\right)_{sd} = 0\ . \tag{9.4.2}$$

SUSY から FCNC への寄与？　問題はですね、これに対して SUSY contribution があるということで、これも概念的に非常に大雑把に説明させてもらいます。

スクォーク $\tilde{q}$ たちの質量行列とはどんなものか。スクォークたちっていうのは SUSY が破れない極限でクォークと縮退するものなわけですから、その i 世代目と j 世代目を混ぜる $\tilde{q}$ の質量は次のような構造をしています。

$$\left(m^2_{\tilde{q}}\right)_{ij} = \underbrace{\left(m^\dagger_q m_q\right)_{ij}}_{\uparrow\ \text{Yukawa}} + \underbrace{\left(\tilde{m}^2_q\right)_{ij}}_{\uparrow\ \cancel{\text{SUSY}}} \quad : \quad 3\times 3\ \text{行列}\ . \tag{9.4.3}$$

第一項の $m^\dagger_q m_q$ は、フェルミオンの質量行列、つまり湯川 coupling で決まる質量行列です。それに soft term $\tilde{m}^2_q$ を加えたのが第二項。これが消える極限 — SUSY limit — では確かにフェルミオンと縮退します。

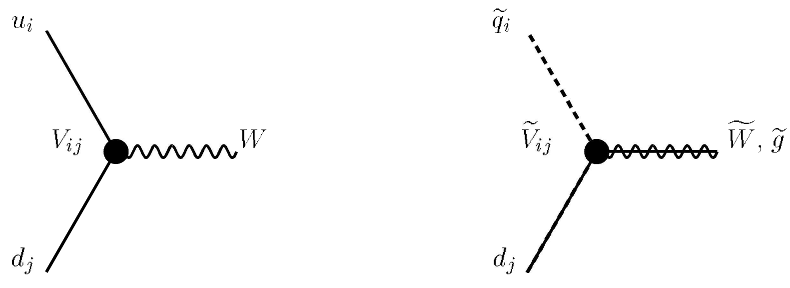


図 9.3: フレーバーを混合するバーテックス

Eq. (9.4.3) の第一項 $m^\dagger_q m_q$ は、CKM 混合行列を議論したときに出てくる行列です。今、図 9.3 左の方を見て下さい。$m^\dagger_q m_q$ を対角化するように、フェルミオン（$q_i = u_i, d_j$）の基底を取り替えたとき、W ボソンとの相

互作用項に行列 V_{ij} が出てくるという話でした。それは、Left-handed の u_i を回すユニタリー行列 $V_{\rm L}^\dagger(u)$ と、Left-handed の d_j を回すやつ $V_{\rm L}(d)$ の mismatch で出てくるやつです。

$$V \;=\; V_{\rm L}^\dagger(u)\, V_{\rm L}(d) \;. \tag{9.4.4}$$

それに対して、同じことをスクォークでやります（図 9.3 右）。今度問題になるのはクォーク d_j がゲージーノと couple してスクォーク $\widetilde{q}_i$ に変わるというバーテックスです。当然クォークを回すユニタリー行列は前と同じ $V_{\rm L}(d)$ ですが、それに対してスクォークを対角化するときには $m_q^\dagger m_q$ ではなく m^2 の行列全体を対角化しなければあきませんよね。— ここがポイント。それを仮に $V_{\rm L}(\widetilde{q})$ と書いたとします。それら両者の mismatch がこのゲージーノのバーテックス $\widetilde{V}$ です。

$$\widetilde{V} \;=\; V_{\rm L}^\dagger(\widetilde{q})\, V_{\rm L}(d) \;. \tag{9.4.5}$$

恐ろしいことには、ここに W ボソンの superpartner であるウィーノ $\widetilde{W}$ の他に、QCD グルーオンの superpartner であるグルウィーノ $\widetilde{g}$ にも、世代を変えるバーテックスが出てくるということです。

で、さっきの BOX ダイアグラムの super 版を書いてみます。図 9.4 を見て下さい。

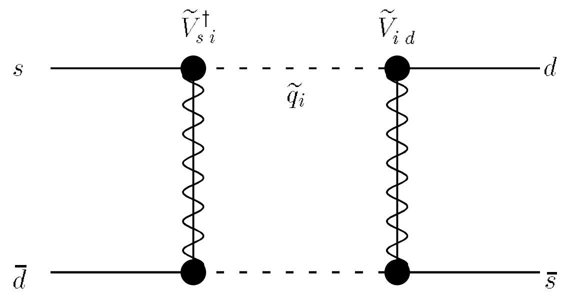


図 9.4: フレーバー混合に対する SUSY contribution（superbox diagram）

内線はクォークだったところをスクォーク $\widetilde{q}_i$ に置き換えます。添字は i 世代。W ボソンのところも、ウィーノもしくはグルウィーノで置き換えてやる。こういう寄与があって、さっきのやつの足し算 (9.4.2) をこの $\widetilde{V}$ というバーテックス使って計算するわけですが、さっきと同じように、この寄与は実験的に制限されていて ちっちゃくないといけない。そのためには $\widetilde{q}_i$ の質量に対する制限がついてくるわけですね。とにかく、実験事実と矛盾しないためにはこれ全体の寄与が小さくなっていないといけない。逆にそのズレが見つかったら SUSY の証拠である。で、今のところは見つかっていないので非常に厳しい制限を受けているわけなんです。

SUSY Flavor Problem と可能な解決策　SUSY contribution が十分ちっちゃいというためには、さっきの $\widetilde{V}$ っていうバーテックスがヤバイわけですね。これがクォークの方と同じになっていればそんなに悪さをしない。そのためにはどうであれば良いかということを考えてみると、$m_q^\dagger m_q$ を対角化する行列と、$m_q^\dagger m_q + \widetilde{m}_q^2$ を対角化する行列が同じユニタリー行列であればよろしい、つまり 2 つの質量行列が同時対角化できればよい

$$0 \;=\; \left[\, m_q^\dagger m_q \,,\; m_q^\dagger m_q + \widetilde{m}_q^2 \,\right] \;=\; \left[\, m_q^\dagger m_q \,,\; \widetilde{m}_q^2 \,\right] \tag{9.4.6}$$

ということになります。これは結局、

soft term $\widetilde{m}_q^2$ と（湯川で決まる）クォークの質量行列 $m_q^\dagger m_q$ が同時対角化できるか

という問題だということができます。

そうすると solution はいくつか考えられるわけだけれども、popular に考えられているのは実はこのスクォーク質量行列が単位行列に比例する[9] と思え、というものです。

[9] “flavor universal” とか “flavor blind” という呼び方をされる時があります。

$$\left(\widetilde{m}_q^2\right)_{ij} = \quad m_0^2\,\delta_{ij} \quad : \quad \widetilde{q} \text{ や } \widetilde{\ell} \text{ は "flavor universal"（世代対角的かつ縮退）}. \tag{9.4.7}$$

まぁ、単位行列であればどんな行列とも可換ですから、この条件が成り立てば、確かに、flavor structure に依らずに（つまり、湯川結合の性質に依らずに）SUSY contribution を suppress できます。つまり、スクォークとかスレプトンってやつらの質量がですね、世代を混ぜない、対角的であるということはもちろんながら、「一世代目と二世代目について縮退していなさい」ということが条件になるわけです。

他に「みょーちくりん」な solution — "alignment solution" であるとか "decoupling solution" であるとか — もありますけど、まぁ省略させて下さい。

もちろん、こういうことを言うのは勝手なんだけれども、それを natural に実現するようにしないといけないわけで、そうなってきますと、$m_q^\dagger m_q$ の世代の問題というのをシリアスに考えていく必要があります。特に世代の問題については、湯川 coupling の階層性を追いたいということを今回の講義では最初に問題提起してあったわけですけども、それをやりたいと思ったときに、一方でクォークたちには階層性を持たせつつ、スクォークについては階層性を持たしてはいけない。つまり、新たに SUSY を考えることで、flavor 問題っていうのはジレンマに陥っている、っていうか、余計に複雑になっている。そういう状況になっています。

（D-term の話は今回は省略させてもらうとゆーことで）、何が問題かの説明が終わったところで、お配りしたトラペはもう終わっちゃいました…。で、これから後は、（多分 Web の方に載ってましたけど）、最近やってる仕事に絡めた話をさせて下さい。もう一回、五分か十分ぐらい休憩しましょう。

第10章　最近の話題から — Flavor 問題 と SCFT

最後に、講義の部分でお話しした場の理論的な内容に基づいて、SUSY flavor 問題に対する解決策の話をします。今までの話で強調した点は、超対称理論の持つ holomorphy という性質は非常にパワフルなもので、holomorphy のおかげで超対称ゲージ理論の dynamics が比較的詳しく調べられたり、強結合理論についてのかなり深い洞察が得られたりしている、ということでした。一方で、SUSY が我々の世界で実現しているか、ってことを現象論的に考えるときに、先ほどいった、「supersymmetric なフレーバー問題」に直面することになります。

で、これからお話ししたいのは、この二つ、理論の進展と現象論の問題を繋げようという話です。SUSY フレーバー問題というのがどんな問題だったかをもう一回振り返った後、それにどういう風にアプローチしていったらいいんだろう、ということについてお話しします。具体的には、今日説明した「超対称ゲージ理論の強結合 dynamics」をうまく使うことによって、SUSY フレーバー問題を解いてやろうという、そういう試みについてお話をします。そして、僕が京大の小林さん、金沢大の寺尾さんと一緒にやってる最近の仕事、あるいは、(今日はここまでいけないと思うんだけども)、京大の野口君や新潟大の山田君とかとやってる仕事の話も交えながら、話していきたいと思います。

で、あのぉ、ここからですね、ちょっとセミナーみたいな形でガンガンやります。トラペ[1] も英語です。これ本当は、日本語版を準備するつもりだったんですが、力尽きました。すいません。

10.1　Introduction

もう一回問題を振り返ってみます。根本的な問題としては「なんで世代数は三つやねん」という大問題もあるし、「湯川カップリングを支配する原理は何か」ってものありますが、まぁそこまではいけないとして、ここでは特に、クォーク・レプトンの一世代目、二世代目、三世代目、そいつらが持っている湯川カップリングの階層構造 — 昨日は階層性問題 II と呼びました — に着目したいと思います。それに対して、今さっき言ったように、スクォークですとかスレプトンという相棒の人たちっていうのは、縮退していて欲しい、そういう欲求があるわけです。

$$
\begin{array}{lccccc}
\text{[A]:} & \text{quarks} & \& & \text{leptons} & \cdots & \text{hierarchy} \\
\text{[B]:} & \text{squarks} & \& & \text{sleptons} & \cdots & \text{degeneracy}
\end{array}
$$

今それらを並べて書きましたけど、これらを同時に説明するにはどうすればよいか、これが考えたい問題です。いいですか、一方だけでは満足しません。同時に説明できないと満足しないという、いちばん強い立場で臨みたいと思います。

で、さっきの繰り返しなんですけども、もう一回ポイントを言いますと、SUSY breaking ていうのは、何かある chiral field Φ の F component が期待値を持つことで起きます。で、そのときに、i 番目と j 番目の世代のクォーク superfield （今度は小文字で書きます)、それと SUSY breaking を担う場 Φ が、こういうふうに Kähler ポテンシャルで couple しているとします。

$$
\mathcal{L}_{\mathrm{CT}} \;=\; \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\; c_{ij}\,\frac{\Phi^\dagger\Phi}{M_{\mathrm{P}}^2}\,q_i^\dagger q_j \;. \tag{10.1.1}
$$

ラグランジアンはこれの D-term、つまり full な superspace 積分ですから、正則性で制御できていません。ですから、Planck スケールにおける有効理論を考えると、くりこみ可能性がもはや指導原理ではないのでこういう一般的な相互作用項が許される、対称性でゆるされるものは全部ある、と考えられます。

[1] ここから先のトラペは何処かで見たことある人もいるかも知れませんね。使い回して申し訳ないです。

というわけで、i 番目の世代と j 番目の世代を混ぜる、上のような相互作用項があるはずです。これに補助場の期待値 $\langle\Phi\rangle = \theta^2 F$ をつっこむと、次のような、スクォークの soft 質量項が生成されます。

$$m_{ij}^2(\widetilde{q}) \ \sim \ c_{ij}\,\frac{|F|^2}{M_{\mathrm{P}}^2}\ . \tag{10.1.2}$$

分母が Planck 質量だとして、$\langle F\rangle$（の平方根）が大体 10^{10} GeV とか 10^{11} GeV とかいう中間スケールであれば、ちょうど 1 TeV オーダーの質量が得られることになります。

ところが問題は、制御が全然効いてないですから、i と j を混ぜるようなスクォーク質量も得られてしまうことです。つまり、さっき縮退っていうことをいったんですけども、ま、クォークの縮退っていうのがキャッチフレーズになってるのはよくないと思うんですが、そんなもんじゃ駄目で、この非対角成分をどうにかしないといけない。この contact な、接触相互作用といいますけど、こういうものが問題だということはずいぶん前からわかっていた事ですが、それを最近の言い方で言いますと、SUSY breaking を担う場 Φ と、クォーク・レプトンの superfield が接触相互作用をしている。それがよろしくない。こういうものは殺さないといけない。

で、それを実現するためには「我々の MSSM のセクタ」と「SUSY breaking を担っているセクタ」が完全に分離していなさい、と。それを hidden と表現するのでは弱すぎるというので、sequester されているべきだ、という言い方をします。辞書によると “sequestered” とは「隠遁」とか「完全に隠されている」とかそういう意味らしいです。

で、もちろん先ほどから何度も言ってますように、Kähler なので正則性は使えません。それに、今は symmetry もあまり役にも立ちません。— いままでは、Yang の言葉の通り、「symmetry が相互作用を支配する」なんていってたわけだけども…。もし仮に i と j が異なれば係数が $c_{ij} = 0$ となる対称性があったとすると、そういう対称性は、必要な湯川相互作用 y_{ij} もなくなっちゃうことを意味しかねない。逆に言うと、一方の湯川では世代構造や世代混合を許しつつ、他方、superpartner の方では世代混合を禁止できる、そんな都合の良い対称性は想像しにくい、粗っぽく言うとこういうことです。

最近流行の考え方　じゃあ対称性が使えない時にはどうすればいいのかというのが、最近いろいろ考えられてるわけなんです。それについて、まぁ今回の講義では一切ふれることができませんでしたけども、通常の、世間の人々が考えてるアプローチっていうのはこういうものです。

‘Conventional’ Approach（本命？）：

> What is a proper SUSY breaking/mediation
> no matter how Yukawa Hierarchy arises？

- **Extra Dim. $\Longrightarrow$ Geometrical Separation**　　L. Randall & R. Sundrum (’98)
  - ‘sequestered’ SUSY breaking sector
  - flavor-blind mediation

$$\boxed{\text{(M)SSM}} \xleftarrow{\text{mediate}} \boxed{\text{SUSY br.}}$$

湯川の階層性って、指導原理も何にもなくて難しい問題なので、これは置いとくことにして、それが何であれ、squark degeneracy が保証されるような、うまい SUSY breaking であるとか、SUSY breaking の mediation mechanism ってものを探そう、という考え方です。これはこれで、確かに魅力的な考え方ですね。

例えば Randall と Sundrum が考えたことは、「そういううまい setup が extra dimension を考えると実現できるだろう」っていうこと。僕らが住んでる (M)SSM の世界…ま、標準模型を含む世界と、SUSY breaking に

関係する世界が、例えば 5 次元方向に分離されてるとします。つまり我々の住む brane というのがあって、5 次元方向にちょっと離れたところにそれとは別の brane っていうのがある。そうしますと 5 次元の場の理論における局所性（locality）のおかげで、(M)SSM セクタと SUSY breaking セクタ間の接触相互作用は禁止されると考えられます。そういうふうに、extra dimension を使って二つのセクタを分離しよう、先ほど言った sequesterring（完全な分離）っていうのを幾何学的に実現しようという発想です。そして、そのあと分離したままだったら困りますから、うまく世代を混合させないように、SUSY breaking を伝える（mediate する）ことを考えます。その mediation の方法にはいろいろあって、こういうのがまぁ、ある意味で流行なわけですね。

別の考え方　僕はどうも流行に逆らいたいというところがあって、(これから言うことはちょっとあの講義向きじゃないんですが)、逆の、新しいアプローチをとりたい。とにかくあの、まぁその、世間の流行に乗っかるんじゃなくって、流行は自ら作るものだ、という心意気でやりたいですね。まぁ、言うのは勝手なんだけども (笑)。

で、どうするかっていうと、SUSY breaking の詳細は問いません。それは置いとく[2] ことにします。全く逆の発想で、「世代の階層性を作るような dynamics そのものが、SUSY フレーバー問題を解くんじゃないか」。

New Approach（大穴！）：

What is a proper Flavor dynamics
no matter how SUSY is broken/mediated？

- **Coupling to Superconformal Gauge Theories**

  $\Longrightarrow$ **Large anomalous dim. by "walking"** G_{SC}

  – generate the Yukawa hierarchy　　A. Nelson & M. Strassler, hep-ph/0006251

  – "wash out" non-degeneracy of sfermions　　T. Kobayashi & H. Terao, hep-ph/0103028

$\boxed{\text{(M)SSM}} \xleftrightarrow[\text{via}]{\text{couple}} \boxed{\text{SCFT}}$

MESSENGER
interactions

それがどうやれば出来るかっていうのを、実は今日、最初の方で言いました superconformal な強結合のゲージ理論。それを G_{SC} と表すことにします。まぁこれ、SuperConformal でも Strongly-Coupled でもどっちにとってもらっても結構ですけども、そういうゲージ理論がありまして、それが $\mathcal{O}(1)$ の、大きな異常次元を生成させます。この異常次元は、くりこみ群方程式にしたがって、湯川カップリングなどのスケール依存性を決めてるものですけども、そいつをうまく使って湯川階層性を生成する。これは、一昨年くらいに Nelson と Strassler の二人組が提唱した考え方ですね。そのすぐ後にですね、京大の小林さんと金沢大の寺尾さんが「この湯川階層性の生成シナリオを考えると、スクォーク・スレプトンの flavor violation を "wash out"、小さくすることができる」ということを指摘しました。僕はその話を聞いて、こりゃすごいと思って、一緒に仕事しようということになったんです。

で、合い言葉はですね、"superconformal field theory"（SCFT）。

superconformal な場の理論っていうのを、我々の世界（MSSM）とは別のところに持ってきて — もちろんこの「別の」というのは extra dimension のこと言ってるわけじゃなくって、単にその辺に superconformal セクタ

[2]誤解がないように補足すると、SUSY breaking については、既存の、素朴なもので良い、ということです。その場合、例の接触項 (10.1.1) が禁止できてないですが、それでも FCNC を出さないように、flavor dynamics を工夫しよう、ということです。

の場がうようよしているかも知れないんだけども（笑）—、ある種の相互作用で MSSM と SCFT を結合させることによって、MSSM をうまくコントロールしたい、そういうことを考えていきます。

10.2 何故 SCFT を考えるか？

で、まず最初に、基本的な考え方というか、なんでそんな superconformal field theory なんていうモノゴッツイものを持ち出すんや、について大雑把なことから説明しましょう。

10.2.1 湯川カップリング の Power-Law Suppression

そのために、一般的な場の三次相互作用を考えます。

$$W \;=\; \frac{1}{3!}\, y_{ijk}\;\Phi_i\Phi_j\Phi_k \;. \tag{10.2.1}$$

講義で説明したように、湯川カップリング y_{ijk} は波動関数くりこみにをつうじてスケール依存性を持ちます。非くりこみ定理の結果、vertex correction が無いので、それぞれ場の数だけの波動関数くりこみを受ける。で、それぞれの波動関数を異常次元 γ_i で特徴づけると、それらを全部足したやつは

$$\gamma_{ijk} \;\equiv\; \gamma_i + \gamma_j + \gamma_k \;, \quad \gamma_i \;\equiv\; \mu\frac{d}{d\mu}\ln Z_{\Phi_i}^{-1} \;. \tag{10.2.2}$$

これを用いると、非常に高エネルギーの cutoff スケール Λ から低エネルギー世界 μ までくりこみ群で引っ張ってきた結果は、まぁ naïve には[3]

$$\boxed{\; y_{ijk}(\mu) \;\sim\; y_{ijk}(\Lambda)\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)^{\gamma_{ijk}} \;. \;} \tag{10.2.3}$$

というベキ的な振る舞いになります。そうするとですね、μ/Λ は 1 よりちっちゃい量ですから、そのベキ γ_i を使って、湯川カップリングの階層性を出せるんじゃないか、説明できるんじゃないか、ということが期待できます。（もちろん、その場合には、$y_{ijk}(\mu)$ をクォーク・レプトンの湯川カップリングと見做します。）

でも、そういう期待は、残念ながら、通常の MSSM なんかでは実現できません。というのも、γ_i は摂動補正であって、大体 $1/16\pi^2$ のような、ちっちゃい量です。だからそんな振る舞いというのはほとんど効きません。弱結合の理論では、 Eq. (10.2.3) のようなくりこみ群の効果で、世代階層性を作るなんてことはできないんです。

基本的な発想は、「じゃあ、強結合にすりゃええやないか」ということです。といっても、「強結合」という言葉で実際に何を意味するか[4] についてはちょっと注意が必要です。“強結合” 理論の代名詞というと QCD ですが、概念図 10.1 の破線を見て下さい。QCD-like な理論では、たとえ Planck スケールで coupling が弱くても、充分 infrared に行くと coupling が blow up します。通常、我々はそういう理論を “強結合” 理論と呼んでいる訳なんです。

それはある意味では確かに正しいんですけど、くりこみ群の意味では強結合になるスケールは一瞬だけです。（実際、我々の QCD っていうのは、例えば Z ボソンの質量より上のエネルギースケールでは、充分摂動が使えるような弱結合な理論です。）でも、それでは Eq. (10.2.3) のような、強烈な power-law の振る舞いは得られません。いま、我々が必要としている強結合理論って言うのは、「coupling が強くなるスケールが一瞬だけ」というような “ちゃちい” ものではなくて、ある、有限なエネルギー領域で 強結合理論がちゃんと続いて、$\gamma = \mathcal{O}(1)$ となってくれるやつです。そういうのは何かって言うと、結局、赤外固定点を持つようなゲージ理論です。だからそういう理論を考えることになります。ここまではいいですか。

---

[3] 付記：この辺り、説明を単純化しています。ここでは、異常次元があたかも定数であるかのような説明をしていますが、通常の場の理論では、異常次元自身がスケールに依存するので、結合定数のスケール依存性は log 的でした。

[4] この辺りの事情は、Nelson & Strassler の論文の最初の方に高らかに謳い上げてありますので、一度読んでみてください。

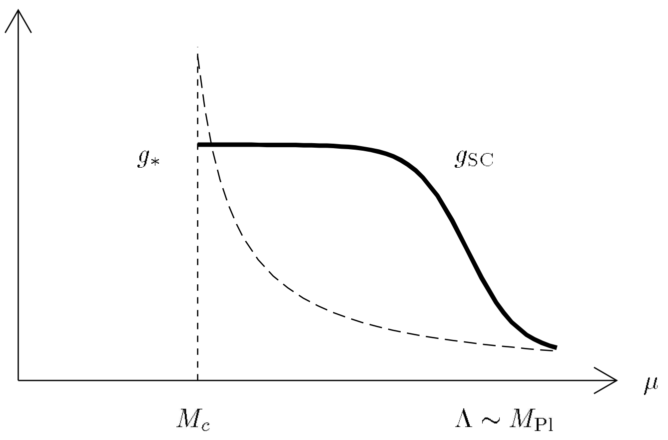


図 10.1: QCD-like な理論（破線）と赤外固定点を持つ理論（実線）の結合定数のスケール依存性

Conformality からの脱出　もちろん赤外固定点をもった理論がずっと低エネルギーまで続くなんて考えているわけではありません。どうしてかっていうと、もし SCFT との結合が例えば weak スケール M_W まで続くとすると、湯川カップリングに対する power-law suppression が働き続けるってことになります。UV cutoff Λ を Planck スケール $M_{\rm P}$ ぐらいとすると、$M_W/M_{\rm P} \sim 10^{-18}$ の γ 乗なんていう、強烈な suppression になっちゃいます。しかも、$\gamma = \mathcal{O}(1)$ で。さすがにこれはやり過ぎ、というか、端的に言うと、これは湯川相互作用が irreleavant だ、低エネルギーで重要でない、ということをいっているわけで、そんなことがあったら困りますね。

というわけで、我々が考える superconformal field theory、あるいは赤外固定点を持つ理論っていうのは、どっかで "ぶちっ" と終わらないといけません。それを我々は "superconformal field theory の decoupling" と呼んでる[5] んですが、その decoupling が起るスケールを M_c と書かせて下さい。(なんで M_c やねん、というのは…、ま、とにかく。)

実際の decoupling スケールの値として、どのぐらいのものを考えているか、その目安の値があった方が、これからのストーリーを想像しやすいかと思います。まぁ、現象論的な制限を考えると、いろいろな理由があってなかなか難しいんですが、とりあえず $M_c \sim 10^{13}$ — 10^{15} GeV ぐらいを考えているということにしておきたいと思います。そうすると、Planck スケールから固定点にある理論の場合でも、$M_c/M_{\rm P} \sim 10^{-3}$ — 10^{-5} 程度ですから、まぁ、湯川階層性の種としては手頃な感じになってきます。

10.2.2　スクォーク・スレプトン質量の IR Convergence — The Power of SCFT

で、もう一個、言いたいことがあります。Seiberg の "The Power of Holomorphy" というキャッチフレーズをもじって、"The Power of SCFT" と言ってるんですけども、それはですね、スクォークやスレプトンの soft 質量について考えたとき、さっき考えたような強結合なダイナミクスのおかげで強烈なくりこみ群的な振る舞いが得られるということです、図 10.2 を見て下さい。

いま横軸として、Planck 質量を基準にしたエネルギースケール — 正確には $\log_{10}(\mu/M_{\rm p})$ — をとりました。縦軸の m^2 というのは、(TeV なら TeV で測った) スクォーク・スレプトンの soft スカラー質量です。我々の立場では、Planck スケールでの初期値については、まぁどんな値でもいい。

このとき、この図の示していることは、スクォーク・スレプトン質量が、くりこみ群の意味で、ギューと赤外に向かって抑えられて小さくなる、IR で suppress されるということです。このことは、極めて大雑把に言うと、SCFT の強結合ダイナミクスのおかげで、クォーク・レプトンの superfield が $\mathcal{O}(1)$ の異常次元を獲得したこと

[5] 良く誤解を受けるので、補足します。「conformal な理論が decouple する」というのは、文字通りとると矛盾した表現ですね。ここで考えている理論は、例えば conformal fixed point 直上の理論に、小さい mass perturbation をかけたものだと考えてください。従って、近似的に superconformal な理論、$\mu \gg M_c$ で superconformal と見做せる理論です。

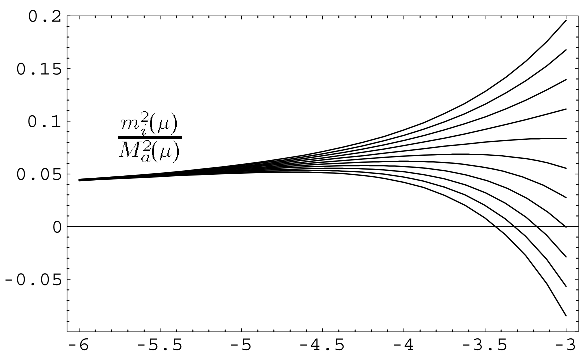


図 10.3: The ratio to MSSM gaugino mass M_a^2

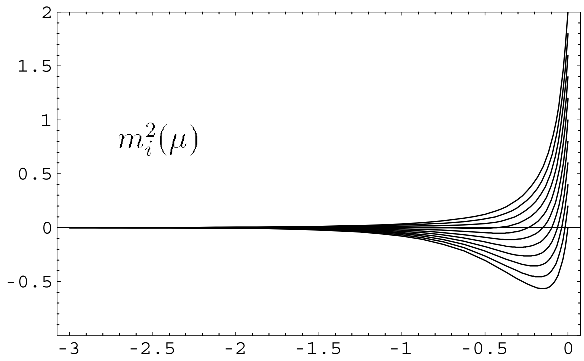


図 10.2: IR suppression of Squark/Slepton masses

による結果です。それをもう少しちゃんというには、superfield 形式を用いて、soft パラメータのくりこみ群方程式を書き下し、その一般的な構造を調べてやるとわかるんですが…、とにかく、このスクォーク・スレプトン質量たちがギューッと絞られる、非常にちっちゃな値に収束するということを示すことができます。

いま図 10.2 や図 10.3 に書いてあるのは、いま例えば、3×3 のスクォーク質量行列の i 番目の対角成分です。この対角成分については、図 10.3 のように、ゲージ相互作用の効果で、その分だけ有限の値に持ち上がるんです。もちろん、こういった、くりこみ群の suppression は非対角成分についても起きます。このとき大事なことは、非対角成分にゲージ相互作用の効果は効かないということです。そうすると、スクォーク・スレプトン質量行列の非対角要素はギュッと 0 に絞られて、SUSY flavor 問題の一番主要な部分は解けるだろう、ということになります。とにかく、そういう非対角成分の suppression が大事な点です。

ただし、ちょっと注意すべき点があります。何かというと、どの基底でスクォーク質量行列を考えているのかという点です。いまの話は、湯川カップリングの行列の方がまだ対角化されていない基底での話です。このとき、対角成分が縮退していないと、湯川カップリングを対角化する基底で書き直したとき、またスクォーク質量に非対角成分が出てきてしまいます。そこで、実際に対角成分が縮退するかしないが問題になりますが、これは SCFT を用いた具体的なシナリオ、model building の問題になってきます。(この点が Nelson–Strassler のシナリオと、我々のシナリオの違いになるんですが、それは最後に少しだけコメントします。)

10.2.3 Claim — 我々のシナリオ

えー、説明してないことが色々あるからちょっとやりにくいんだけども、いつでも終われるように、我々のシナリオのエッセンス、主張を言っておきましょう。このような赤外固定点を持つ強結合理論のセクタと超対称標準模型のセクタを結合させる。そして、両者を結ぶ coupling を世代順に λ_1、λ_2、λ_3 と呼ぶことにします。(これらについてはすぐ後で説明します。) このとき、主張はですね、我々の湯川結合定数じゃなくって、この結合定数 λ_i が世代階層性の起源だと考えよう、ということです。

実際に、我々のシナリオでは、この結合定数 λ_i がそれが何らかの原因[6] で階層構造を持つ、というところから出発します。その代わりに、重要な点として、infrared の固定点は世代構造を持たないとします。

- **Set up**:

A: hierarchical $\lambda_i \quad \Longleftarrow \quad$ anomalous $U(1)_X$
B: Superconformal fixed point : flavor-indep.!

[6] この部分は、anomalous $U(1)_X$ ゲージ対称性というのを使って説明できるんですが、省略させて下さい。

これだけの setup から何が言いたいか。インプットの階層性として、結合定数 λ_i の一世代目がいちばん強くって、二世代、三世代と弱くなるような逆階層性を持っている、というところから出発します、そうすると、強結合の相互作用が階層性を転写してくれる、つまり、ちょうどこいつらを固定点に持ち込んで、逆に湯川結合定数 y_i らを下げる、という…なんか、なに言ってるのかわかりませんね (笑)。詳しくはまた後で。

- **Then, we argue that**

> A: The hierarchy is Transferred to SM Yukawa's!
>
> UV : $\boxed{\lambda_1 \gg \lambda_2 \gg \lambda_3}$ $\Longrightarrow$ IR : $\boxed{y_1 \ll y_2 \ll y_3}$
>
> B: SUSY flavor violation is Washed Out !

とにかく我々の主張は何かというと、湯川の階層構造を説明すると同時に、固定点構造がフレーバーに依らないおかげで flavor violation が suppress されるということです。

10.3 Messenger Interaction と Superconformal Fixed Point

今の「主張」をするために、まず setup をもう少しちゃんと説明させて下さい。

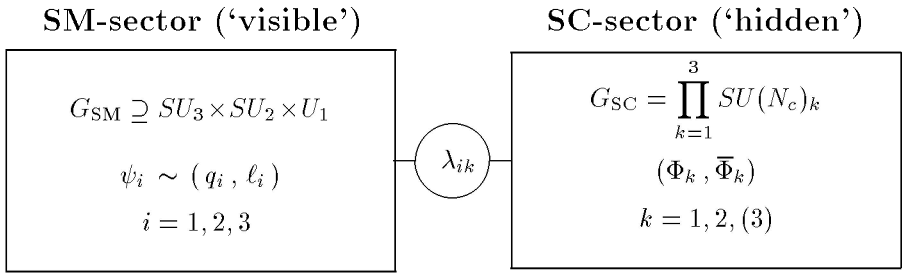


図 10.4: 基本的な setup

今は簡単のために、強結合セクタ（SC sector）として $SU(N)$ ゲージ理論を使うことにします。この理論の基本表現の場を Φ_k、反基本表現の場を $\overline{\Phi}_k$ とします。（まぁ昔 Q とか $\overline{Q}$ と書いたやつですかね。）添字は $k = 1, 2, 3$ まで走っているとしましょう。で、この二つのセクタを結ぶ相互作用 λ_{ik} を考えます。

$$W \;=\; \sum_{i,j} \underline{y_{ij}}\, \psi_i\, \psi_j\, H + \sum_{i,k} \underline{\lambda_{ik}}\, \psi_i\, \Phi_k\, \overline{\Phi}_k \;. \tag{10.3.1}$$

えーと、標準模型セクタのクォーク・レプトン ψ_i たちと、強結合セクタの物質場 $\Phi_k, \overline{\Phi}_k$ の間を結ぶような結合なので、僕らは "messenger interaction" と呼んでます。一方、クォーク・レプトンとヒッグス — いま象徴的に H とだけ書きました— の間の、通常の湯川カップリングは y_{ij} です。

補足的なコメント。

- λ_{ik} が対角的である理由は全くありません。一般的にはそうで、そのままでもできるんだけども、ここでは簡単のために、λ_{ik} が混合を持たないような、k と i が揃ってる場合に限ることにします。

- SUSY breaking は適当にどこかで起っているとします。それが何処でもいい、というのがこのアプローチの売りと言えば売り。（ちょっと大きめの gravitino mass を仮定するとか、いろいろありますが、省略します。）

- いま superconformal field theory って呼んでいるものは、実はちっちゃい mass パラメータを含んでいて、どこか適当なスケールで decouple する、という事は仮定さして下さい。これが dynamical に実現できるということを、最近ちょっとやってるんだけども…。

Superconformal Fixed Point　さて。もう最後まで行かないことはほとんど確実なんですが…（苦笑)。とにかく、superconformal の固定点って何だったかというと、くりこみ群のところで説明しましたね。(下図 10.5、および図 8.1 を参照)。

$$\boxed{\begin{array}{c} SU(N_\mathrm{c})\ \text{SQCD with} \\ \frac{3}{2}N_\mathrm{c} < N_\mathrm{f} < 3N_\mathrm{c} \\ \text{i.e. } \frac{1}{3}N_\mathrm{f} < N_\mathrm{c} < \frac{2}{3}N_\mathrm{f} \end{array}}$$

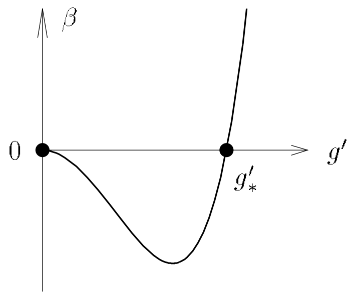


図 10.5: Seiberg の conformal window では gauge β 函数に零点が生じる。

くりこみ群のベータ関数というのはなんだったかというと、結合定数[7] をスケールの関数としてグラフを書いたとき、グラフの「傾き」を表すものでした。つまり、coupling がスケールに対して上がるのか下がるのかを決めるようなもの。だから、零点より右（$g' < g'_*$）では、ベータ関数（つまり coupling のグラフの傾き）が負である、つまり漸近自由な場合に対応します。漸近自由ですから、infrared に行けば coupling は大きくなっていきます。Coupling が大きくなってくると、2-loop 以上の高次の補正が効いて、ベータ関数がキューっと持ち上がってきます。そして、適当に漸近自由性が弱ければ、零点が現れてきます。SUSY の理論では、conformal window という領域に物質場の数が入っていれば、こういう事が起こるだろうということはほぼ確実です。ここでは、後の便利なように、フレーバー数 N_f に対する条件を、カラー数 N_c に対する条件にペッペッペッと書き直した式も書いてありますが…。とにかく、そういう零点より大きい coupling に対しては、ベータ関数（つまり傾き）の符号が逆転するので、infrared に行けば coupling は小さくなる。結局、$g' = g'_*$ という赤外固定点が存在するだろうと考えられます。そういう話でした。

クォーク・レプトンとの結合　今説明したようなゲージ理論を強結合セクタ（superconformal セクタ）に採ります。

$$G_\mathrm{SC} \;=\; G_\mathrm{SC}^{(1)} \times G_\mathrm{SC}^{(2)} \times G_\mathrm{SC}^{(3)}\,, \qquad G_\mathrm{SC}^{(i)} \;=\; SU(N_\mathrm{c}^{(i)})\ .$$

ここで、うるさい添字（i）を書いてますが、これはですね、強結合セクタを product 群の形で、一世代目用、二世代目用、三世代目用の三つ持ってきてる、今は簡単のためにそういう setup[8] をしているためです。

例えば E_6 GUT というのがあります — Grand Unified Theories については何も言わなかったんだけども、まぁ適当なゲージ群と思ってください — けども、この場合、クォーク・レプトンを含む物質場 ψ_i は E_6 っていうゲージ群の 27 次元表現に属します。27 次元表現っていうのは、その三乗の不変量が存在するという性質が知られているので、先ほどの $\Psi(27)$ を、superconformal matter $\{\Phi(27), \overline{\Phi}(27)\}$ にカップルさせる相互作用 — これが messenger 相互作用と呼んでいるものです — がゲージ不変な形に書けます。

$$W_\mathrm{mess} \;=\; \lambda_i \Phi_i(27)\,\overline{\Phi}_i(27)\,\psi_i(27)\ . \tag{10.3.2}$$

まぁまぁそういう、ややこしい事情がある。とにかくそういうふうに一端ゲージ群を決めると、superconformal セクタの matter が何個必要か、ということが決まります。つまり、$G_\mathrm{SC}^{(i)}$ 理論のフレーバー数 $N_f^{(i)}$ が決まったことになります。どういう事かというと、いいですか、我々の世界のゲージ対称性の表現が 27 次元表現ということは、$\Phi(27)$ たちは自分自身のゲージ相互作用持ってるわけですね。で、それについて 27 個コピーがあるわけだか

[7] ゲージ結合定数を g ではなく g' と書いているのは、SM セクタのものと区別するためです。つまり、g' は SC セクタの G_SC ゲージ理論の coupling を表しています。

[8] まあ、「そんなもんを好き勝手に持って来られても困るよ、そんなもん自然界にあるんか、不自然ちゃうの？」という印象を持つ人は多いかも知れませんね。でも、こういう一見不自然な setup が、string の compact 化で実現できるのではないか、というが、この間、野口君たちと一緒にやった仕事になるんだけど…、まあいいや。

ら、フレーバーの数が 27。それを conformal window の条件にぶち込むと、カラーの数は 10 から 17 までの間じゃないといけない、という事が分かるわけです。

$$G_{\mathrm{SM}} \;=\; E_6 \;: \qquad N_{\mathrm{f}}^{(i)} = 27 \;\;\Longrightarrow\;\; 9 < N_{\mathrm{c}}^{(i)} < 18 \tag{10.3.3}$$

この場合は、なんだかやたらめったらでっかいゲージ群が要求されてますね。例えば $SU(10)$ なんてやつ。それが嫌なら、もう少し賢いチョイスもあって、E_6 の代りに、SUSY SM を含むセクタのゲージ群を、例えば

$$G_{\mathrm{SM}} \;=\; SU(3)_{\mathrm{C}} \times SU(3)_{\mathrm{R}} \times SU(3)_{\mathrm{L}} \times Z_3 \;: \quad N_{\mathrm{f}}^{(i)} = 9 \;\;\Longrightarrow\;\; 3 < N_{\mathrm{c}}^{(i)} < 6 \tag{10.3.4}$$

に選ぶと、強結合セクタのゲージ群 G_{SC} も適当に小さくすることが出来て、$SU(4)$ か $SU(5)$ を準備すればいいことになります。まぁ細かいことは省略させてもらいます。

赤外固定点 と 大きな異常次元　で、重要なことはですね、赤外固定点では conformal 不変性が実現していることです。その意味では conformal fixed point とも言いますけど、この固定点でスケール不変性があることが何を意味するかについて考えてみたいと思います。

そのために、exact β function の形を考えてみます。

$$\beta_{g'_i} \;\propto\; -3N_c^{(i)} + N_f^{(i)} - N_f^{(i)}\gamma(\Phi_i)\;. \tag{10.3.5}$$

第一項と第二項の定数項の部分が 1-loop の β 関数に対応する部分で、それに加えて、最後の項に、物質場 ϕ の anomalous dimension[9] がある。基本表現のクォークと反クォークの異常次元は等しく、その対が N_{f} あるので、N_f 倍されています。これが exact な β 関数と呼ばれるものでした。

で、スケール不変性が成り立ちなさいと言うことは、これが 0 になりなさい

$$0 = \beta_{g'_i} \;\propto\; -3N_c^{(i)} + N_f^{(i)} - N_f^{(i)}\gamma(\Phi_i)$$

ということですから、異常次元がこういう式で書けます。

$$\gamma_*(\Phi_i) \;=\; \gamma_*(\overline{\Phi}_i) \;=\; -\frac{3N_{\mathrm{c}}^{(i)} - N_f^{(i)}}{N_f^{(i)}} \;<\; 0\;. \tag{10.3.6}$$

固定点での値なので γ_* って書いてますが、(conformal window の条件から) 0 から -1 までの範囲[10] に入っています。(なお、この式は messenger coupling の値に依らず、ゲージ結合定数が固定点にある限り成り立ちます。)

で、重要なことは、異常次元が負になっていることです。異常次元が負ということは、$\Phi\overline{\Phi}$ という演算子が持ってる次元が、古典的な次元 — 2 でした — からちょっと減ってるわけですよ。そのせいで、$\Phi\overline{\Phi}$ と我々のクォーク・レプトンを結合させる相互作用

$$W \;=\; \sum_i \lambda_i\, \psi_i\, \Phi_i \overline{\Phi}_i \tag{10.3.7}$$

に対応する結合定数 — messenger coupling λ_i — は infrared に向かってどんどん、どんどん大きくなっていく。要するに、“成長する” カップリング — relevant coupling[11] になってるわけです。

これを絵で書いたのが図 10.6 です。横軸にゲージカップリングをとって、黒丸が Banks–Zaks の固定点です。ゲージ結合定数は infrared でそこに向かって流れていくワケですね。

それに縦軸方向、messenger coupling の軸を立てます。すると、Banks–Zaks 固定点のまわりでこの演算子 (10.3.7) の次元を調べてみると負だということですから、結合定数 λ_i は infrared に向かって、どんどん、どん

[9] γ_ϕ と書くと小さくなっちゃうので、目の健康のため、$\gamma(\phi)$ と書きます。

[10] 付記 : anomalous dimension の定義は人によって違うので、文献と比較する際には注意して下さい。なお、理論が conformal window の “弱結合側” にあることを要請すると、$-1/2 < \gamma_* < 0$ です。

[11] 付記 : 正確には、coupling が relevant か irrelevant かが決まっているわけでなく、この固定点では relevant、あの固定点では irrelevant というふうに固定点ごとに決まるものです。今の messenger coupiing の場合、Banks-Zaks 固定点で relevant で、新しい固定点では、そこが赤外安定なので、irrelevant です。flow 図に向きが書いてないのがよくないんですが、向きを想像してみてください。

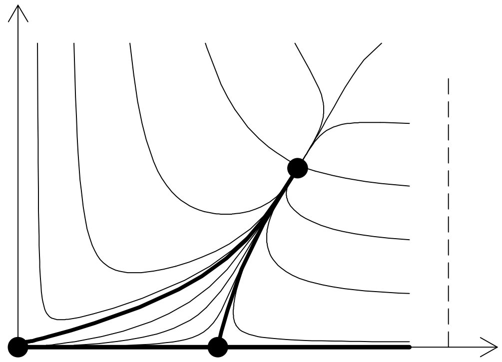


図 10.6: Conformal Fixed Point: 横軸は gauge coupling $g_i^2/8\pi^2$ で、縦軸は messenger coupling $\lambda_i^2/8\pi^2$。横軸上の黒丸は Banks–Zaks の固定点、右上の黒丸が赤外安定な固定点。なお、破線は gauge beta 関数が発散する位置。

どん成長していく。で、そのままどこまで行くかというと、この辺に新しい fixed point が見つかります。理論が conformal window の弱結合側に入ってると、最後には右上の new fixed point に入ってしまうことがわかります。

この新しい固定点が SUSY flavor 問題を解くのにこれから使いたい、superconformal 固定点です。この固定点では、λ_i の成長が止まっているわけで、そのベータ函数 β_{λ_i} が 0 になっているはずです。このベータ関数は、各々の場の異常次元の足し算で与えられますから、結局、新しい固定点では次式が成り立つことになります。

$$0 = \beta_{\lambda_i} \propto \ \gamma(\psi_i) + \gamma(\Phi_i) + \gamma(\overline{\Phi}_i) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\gamma_*(\psi_i) \ = \ + \frac{3N_c^{(i)} - N_f^{(i)}}{N_f^{(i)}} \ . \tag{10.3.8}$$

さっき $\gamma(\Phi)$ と $\gamma(\overline{\Phi})$ は負だということがわかったわけですから、$\gamma(\psi)$ は正になるしかないわけです。ですから、それは何を言ってるかというと、messenger interaction のお陰で、我々のクォークレプトンが非常に大きな — 大きなといってる意味は、weak coupling ではないということです — $\mathcal{O}(1)$ の異常次元を獲得した、ということになります。

10.4 Nelson–Strassler シナリオ

そろそろ時間がやばくなってきました…。とにかく、こういう大がかりな道具立てをして何をやりたいのか。Nelson たちが言ったことは、今説明したような「強結合 dynamics が階層性の起源に使えないか」ということです。

先ほど、強結合ゲージセクターとして、例えば $SU(4)$ もしくは $SU(5)$ が可能だ[12] と言いました。そこで、以下、二世代模型を考えることにして、$G_{\rm SC} = SU(5)_1 \times SU(4)_2$ という状況を考えてみましょう。今、強結合セクタ $SU(5)_1$ に結合してる物質場を Φ_1 と $\overline{\Phi}_1$ と呼ぶことにします。そしてこれらと messenger interaction λ_1 で結合してるクォーク・レプトンを ψ_1 とします。このとき、先ほどの公式 (10.3.6) に従って異常次元を計算すると、4/3 っていう値が出てきます。

$$SU(5)_1 \ : \quad (\Phi_1, \overline{\Phi}_1) \underset{\lambda_1}{\longleftrightarrow} \psi_1 \quad \Longrightarrow \quad \gamma_*(\psi_1) = \frac{4}{3} \ . \tag{10.4.1}$$

$SU(4)_2$ の場合は、ゲージ群がちっちゃくなったぶんだけ異常次元もちっちゃくなって 2/3 になります。

$$SU(4)_2 \ : \quad (\Phi_2, \overline{\Phi}_2) \underset{\lambda_2}{\longleftrightarrow} \psi_2 \quad \Longrightarrow \quad \gamma_*(\psi_2) = \frac{2}{3} \ . \tag{10.4.2}$$

このように、値がパチッと exact に計算できちゃうところが、SUSY のきれいなところですね。

[12] 実はこれ嘘なんですよね。互いに Seiberg の意味で dual なので…。まぁいいか (笑)。

そうしますと異常次元がわかりましたから、今度は、我々の湯川カップリング[13] のくりこみ群を考えてみます。湯川カップリングは、強結合相互作用が働らいている間だけ 4/3 という異常次元に従ってスケールしますから、たとえ Planck スケールで階層性を持たない（オーダーが 1 の）初期値から出発したとしても、$SU(5)_1$ に couple してるクォーク・レプトンの湯川カップリング y_1 は、decoupling scale t_c を次のように定義して

$$y_1^{\rm eff} \sim e^{-\frac{4}{3}|t_c|} \quad \ll \quad y_2^{\rm eff} \sim e^{-\frac{2}{3}|t_c|} \qquad\qquad : t_c \equiv \ln \frac{M_c}{M_P} \tag{10.4.3}$$

この左辺のように suppress されてる。一方の $SU(4)_2$ に couple している湯川カップリングっていうのは、右辺のようなベキで suppress されてる。つまり指数関数的な suppression を受けるわけです。

これが弱結合の理論だと、異常次元は 非常にゼロに近い値なので、exponential は全然 suppression factor じゃないんだけども、今はこれが 2/3 や 4/3 のように大きくなる理論だということが重要です。そうしますと、共に $\mathcal{O}(1)$ から始まった結合定数 y_1 と y_2 がお互いにそれぞれ Eq. (10.4.3) のような階層構造を持つ。で、改めて見てみると、$y_1^{\rm eff}$ が第一世代の、$y_2^{\rm eff}$ が第二世代のクォーク・レプトンの湯川カップリング「だったんだ」ということがわかります。しかも、さっきチョロッと言いましたように、非対角成分のスクォーク質量たちがゼロになってフレーバー問題もかなり楽になる。これが Nelson-Strassler のシナリオで、dynamics を非常に 巧妙に使った model building ですね。こういうのが基本的な考え方でして、この方向でもう少し追求したいわけです。

湯川の階層性、湯川カップリングを、原理的に第一原理から計算できるかというと、実際は "無政府状態" にあるわけですね。そこで、いま述べた部分が象徴的なんですけども、Eqs. (10.4.1)–(10.4.2) のように、強結合のゲージ dynamics を持ち出すことによって階層性を作り出す。これが目指してることの最初のステップです。

Sfermion Mass の IR Suppression 次に、SUSY flavor problem の後半について考えてやりたい。まぁ湯川の階層性を出すだけだったら、こんな強結合の dynamics を考えなくっても、フレーバー対称性かなにか適当なもので充分だったんだけども、違いはですね、superpartnar の質量がどうなっているか、というところです。スクォーク・スレプトンが充分縮退するか、（あるいは、クォーク・レプトンを対角化した基底で言うと、スクォーク・スレプトン質量の非対角成分が 0 になっているか）という点です。SUSY の枠組みでフレーバーの問題を議論する以上、『落とし前』はちゃんとつけましょう、ということですね。

この点について、Nelson–Strassler シナリオは、それなりに、いや、かなり巧くいっています。Kobayashi–Terao や Nelson–Strassler の計算によると、

- スクォークに対してはまぁそんなに悪くない、
- スレプトンについては 'marginal' — ちょっとやばいかな、というぐらいの flavor violation が残ってしまう。

本当にこれが巧くいってれば、それで文句なかったんだけども、スレプトンの部分がちょっぴり残念な結果です。

スクォーク・スレプトン質量の赤外収束性についても、ちゃんと言いたかったんだけども、もう時間的に厳しいですね…。だいたいどんな様子かをお絵描きで…。

図 10.7 は Nelson たちの原論文から借りてきたものです。横軸の右端に Planck スケール $M_{\rm P}$がある。とりあえず、これを cutoff Λ と考えます。GUT スケール $M_{\rm GUT}$ があるかどうかは、まぁ知りません。そして、それよりちょっと下の $M_c \sim 10^{13}$ — 10^{15} GeV ぐらいまでの間に、強結合セクタが decouple すると仮定します。

強結合セクタは $\Lambda \sim M_{\rm P}$ から M_c の間、非常に高エネルギーの世界でのみ存在するというわけだから、強結合 dynamics の直接的な consequence なんて我々の weak scale M_W には無いだろう、まぁ普通そう思うわけです。しかし、全く無いのかというとそうではなくて、ここで登場するのが例の "The Power of SCFT" のお話です。ちゃんと説明できませんでしたが、結果だけを述べさせてもらうと、強結合セクタの dynamics のおかげで、スクォーク・スレプトン質量はある値 — 非常に小さいけど有限の値[14] — にキューッと収束するんです。そして、その "収束値" は、decoupling scale M_c より低いエネルギー領域でくりこみ群方程式を解く際に、スケール M_c での境界条件を与えることになります。

[13]「我々の湯川」というのは、（我々のセクタの）クォーク・レプトンの湯川カップリングという意味です。ここでは、y_1 と y_2 のこと。
[14]図 10.3 を参照のこと。

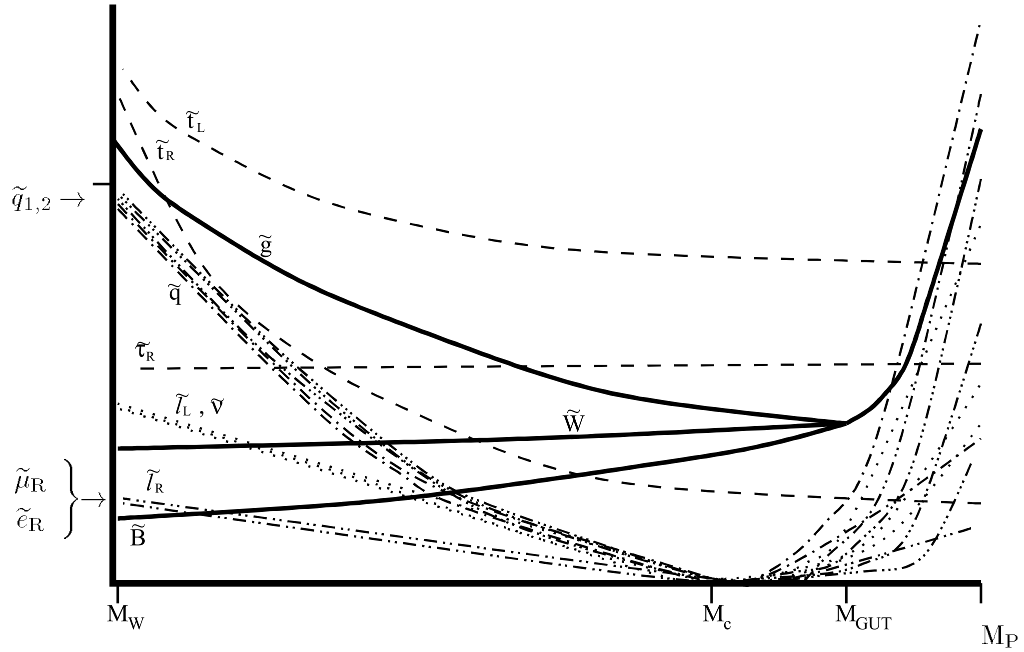


図 10.7: 予想される Sparticle Spectrum (© Nelson and Strassler, hep-ph/0006251)

図 10.7 でその様子を具体的に見てみましょう。点線になっているのはスクォークとかスレプトンの質量ですけども、そいつらのくりこみ群の evolution を追ってみます。強結合セクタと couple している間は、異常次元が大きいということから、まぁおおよそ、ワーッと指数関数的にちっちゃくなっている[15] ということが見て取れますね。そこは、今回のところは省略させて下さい。とにかく M_c 付近で、もう見えないくらいずっとちっちゃくなっちゃう。そすと…そうなると、まずいわけですよね。スクォークの質量はもともと SUSY の破れのパラメータとして入れたんですから、ノンゼロでないと困るんだけども、とにかく、一旦 suppress しておきます。

それに対して、次にゲージーノの質量を考えます。図に実線が三本引いてあるのは、上から順に $SU(3)$ の gluino、$SU(2)$ の wino、$U(1)$ の bino の三つです。重要なことは、こいつらは messenger interaction なんて持っていませんから、スクォークなんかとは違って、強結合セクタの影響をあまり受けないということです。つまり、今考えている setup では、強結合セクタと標準模型セクタは superpotential term (10.3.7) で結合しているので、スクォーク・スレプトンは強結合 dynamics の影響をもろに被るんだけども、一方、標準模型セクタのゲージーノたちはそんなに[16] 影響を受けません。ですから、こいつらは実線のように、自分自身のくりこみ群方程式に従って、えっちらおっちらと低エネルギーの世界にやってくだけです。

こうして、強結合セクタの dynamics の効果で、スクォークたちの質量は、decoupling scale M_c のあたりで、一旦 “ほとんどゼロ” に収束します。一方、MSSM のゲージーノ質量は、そういう効果をあまり受けず、「われ関せず」てなもんです。（この結果、スケール M_c での境界条件は、いわゆる no-scale タイプと言われているものに似たものが得られたことになります。）

Decoupling 後の RG evolution　で、M_c のエネルギースケールから低エネルギー側では、強結合セクターは decouple してしまって、通常の SUSY 標準模型のくりこみ群方程式を考えればよいことになります。本当は、soft SUSY breaking パラメータのくりこみ群方程式について、ちゃんとやりたかったんだけども、時間不足・準備不足でした…。（すみません。）とにかく、それを勉強するとわかること（勉強しないとわからないこと？）を 図 10.7 を使って、見てきたような説明をしてみます。

[15] この振る舞いをもっとちゃんと書いたのが図 10.2 です。
[16] M_c より上の高エネルギー側で漸近自由性が失われて、ランニングが急傾斜になることは、まぁ技術的ですが、別の問題です…。

実線で表されたゲージ相互作用で、点線のスフェルミオン質量が、低エネルギーへ向かってギューッと引き上げられる効果というのがあるんです。特に、スクォークたち $\tilde{q}_{1,2}$ — QCD 相互作用を持ってるやつら — っていうのは、QCD のゲージ相互作用のおかげで、左側でかなりギューッと持ち上がっています。それだけ輻射補正（radiative correction）を大きく受けるんです。このとき、この輻射補正は世代を区別しないので、その結果得られるスクォーク質量は精度良く縮退することになります。この図 10.7 はそのことを言っているんです。

それに対して、スレプトン、こいつは QCD の相互作用持ちませんから、$SU(2)$ のゲージーノ $\widetilde{W}$ であるとか、$U(1)$ のゲージーノ $\widetilde{B}$ の効果だけでちょっとだけと持ち上がってます。そうしますと、スレプトンの質量っていうのは、$\tilde{\ell}_{\mathrm{L}}$ の点線のようになる。これはスレプトンの二重項の方ですけども、このくらいは持ち上がる。しかし、$SU(2)$ の相互作用さえしないような、right-handed の $\tilde{e}_{\mathrm{R}}$ とか $\tilde{\mu}_{\mathrm{R}}$ とか、こういうやつらがいちばん軽くなってくる[17] いうわけです。

こういうわけで、非常に典型的にいって、このような超対称粒子の spectrum が予想される、それが SCFT を用いたアプローチの特徴なんです。特にスレプトンが比較的軽いということが generic な予言になります。ま、$\tilde{e}_{\mathrm{R}}$ や $\tilde{\mu}_{\mathrm{R}}$ が軽いということが、願わくば $g-2$ と結びついてくれれれば非常にハッピーということですけども、そこまでうまくいきますかどうか…。

10.5 Master Formula と Yukawa Hierarchy Transfer

でですね、もうそろそろ時間なんで終わらないといけないんで、ちょっと飛んじゃって、まとめに向かって行きますね。ま、講義でくりこみ群の話をせっかくやったんで、湯川カップリングの階層構造を superconformal dynamics から生成する仕方について、もうちょっとだけ説明してみます。

我々の湯川カップリング y_{ij} とそれから messenger coupling λ_i のくりこみ群的な振る舞いを考えてやります。もう、くりこみ群方程式まで行かないで、直接、波動関数くりこみの因子を議論しましょう。

$$y_{ij}(\mu) = Z_{\psi_i}(\mu,\Lambda)\; Z_{\psi_j}(\mu,\Lambda)\;\; y_{ij}(\Lambda)\;, \quad Z_H \;\approx\; 1 \tag{10.5.1}$$

$$\lambda_i(\mu) = Z_{\psi_i}(\mu,\Lambda) Z_{\Phi_i\bar{\Phi}_i}(\mu,\Lambda)\,\underline{\lambda_i(\Lambda)} \;\longrightarrow\; \lambda_*^{(i)}\;. \tag{10.5.2}$$

Z_ψ の部分がクォーク・レプトンの波動関数くりこみです。Higgs の波動関数くりこみは殆んど $Z_H = 1$ なので以下では無視します。それに対して、messenger interaction についている Z_Φ は、superconformal セクタの物質場の波動関数です。で、 cutoff スケール（Planck スケール）Λ から低エネルギーのスケール μ までくりこみ群の evolution を積分すると、こういう形になっているはずです。

すぐあとで重要になるのは、messenger coupling λ_i の振る舞いです。さっきいったように、こいつは新しい fixed point に向かって入り込んでいます。（Banks–Zaks の意味の gauge coupling の fix point でなくって。）高エネルギースケールでの初期値 $\lambda_i(\Lambda)$ がどんな値であったとしても、充分これをくりこみ群で run させますと、低エネルギースケールでは固定点 $\lambda_*^{(i)}$ に吸い込まれていく。このことをちょっと頭に置いてててください。

さて、我々がいちばん知りたいのは、もちろん、低エネルギー世界での湯川 $y_{ij}(\mu)$ です。湯川カップリングは高エネルギー世界ではまったく無秩序、全て $y_{ij}(\Lambda) = \mathcal{O}(1)$ というところから出発して、現実的なでの湯川カップリングの階層構造を説明できるかが問題です。そのためには、Eq. (10.5.1) において、クォーク・レプトンの波動関数 Z_{ψ_i} を知る必要があります。これは本来、物質場の異常次元で決まっているものですが、ところが、Eq. (10.5.2) をみると、

$$Z_{\psi_i}(\mu,\Lambda) \;=\; \frac{\lambda_i(\mu)}{\lambda_i(\Lambda)} \times Z^{-1}_{\Phi_i\bar{\Phi}_i}(\mu,\Lambda) \tag{10.5.3}$$

のように表すことができますね。つまり、Z_ψ が知りたければ messenger coupling の初期値、fixed point の値、そして、superconformal matter の波動関数 Z_Φ がわかってればいいわけです。これはいいですね。

[17] 付記：講義では時間がなくて触れませんでしたが、実はこの点が重要なポイントです。つまり、slepton に対しては M_c 以下の輻射補正が小さいために、SCFT による収束値が flavor-blind か否かが重要になってきます。オリジナルな Nelson–Strassler シナリオはこの点で不満が残る、そして、それを改善したいというのが我々の motivation になるわけです。

ここまでは単なる書き換えなんですが、ポイントは、Z_Φ の部分が exact β 関数を用いて求めてしまうことができるってことです。講義の方で説明しましたけども、holomonophic な gauge coupling は 1-loop exact です。一方、摂動論なんかで計算する physical な gauge coupling α_i — これは i 番目の SCFT のゲージカップリングです — は、holomonophic coupling と物質場の波動関数くりこみの、ある特定の combination と関数関係にありました。つまり、その組合わせを $F[\alpha_i]$ と書いたんです。ま、なんかその辺で議論したことを用いる[18] と、欲しかった Z 因子が superconformal セクタのゲージカップリングを用いて表せちゃうわけです。結果を書くと

$$
\begin{aligned}
Z_{\psi_i}(\mu,\Lambda) &= \frac{\lambda_i(\mu)}{\lambda_i(\Lambda)} \times Z^{-1}_{\Phi_i\bar{\Phi}_i}(\mu,\Lambda) \\
&= \underbrace{\boxed{\frac{\lambda_i(\mu)}{\lambda_i(\Lambda)}}}_{\text{inversely prop. to } \underline{\text{the initial } \lambda_i(\Lambda)\,!}} \times \boxed{\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)^{\gamma_*^{(i)}}} \times \exp\frac{F[\,\alpha_i(\Lambda)\,]-F[\,\alpha_i(\mu)\,]}{N_{\rm f}^{(i)}}\ . \qquad (10.5.4)
\end{aligned}
$$

while $\lambda_i(\mu) \longrightarrow \lambda_*^{(i)} =$ family-indep.

我々の湯川カップリングはこれに比例するわけで、この因子で階層性を表せればいいわけです。なので、これを master formula と呼んでおきます。

よくみると、master formula (10.5.4) の右辺に、異常次元を使った power-law 的な振る舞いを表している因子が確かにあって、そのべきが superconformal fixed point における異常次元になっています。さっき紹介した Nelson–Strassler の考え方というのは、このべきの部分に世代依存性を持たせる、つまり異常次元 $\gamma_*^{(i)}$ が一世代目と二世代目のクォーク・レプトンとで違う、と考えるわけです。そうすれば、確かに、我々の湯川カップリングは世代階層性を持ちます。

ところが、異常次元が世代依存性を持つってことは、クォーク・レプトンと結合している強結合ダイナミクス自体が世代を区別しているということです。そうすると、現象論的にちょっとまずいところがあって、(スクォークはともかく)、スレプトンの縮退が不完全だということをさっきいいました。

そこで、よくよく考えてみると、世代構造の起源は、必ずしも異常次元でなくてもいいわけです。master formula でいうと、右辺の最初の因子であるとか、最後のこの複雑に見える部分であるとか…。とにかく、いろんなことが考えられます。それらをまとめてしまうと、次のような感じです。

- Nelson–Strassler シナリオ。異常次元（右辺の第二因子）が世代階層性の起源。純粋に dynamical なアプローチだが、slepton の縮退が不十分。

- Yukawa hierachy transfer シナリオ（その一）。Flavor symmetry を援用することで、UV 領域での messenger coupling（右辺の第一因子）に階層構造を作る。それを世代を区別しない SC ダイナミクスで湯川階層性に転写する。

- Yukawa hierachy transfer シナリオ（その二）。extra dimension 的な setup を援用することで、SC セクタのゲージ結合定数（右辺の最後の因子）に世代依存性を持たせる。それを世代を区別しない SC ダイナミクスで湯川階層性に転写する。

スクォークとかスレプトンの質量を完全に縮退させようとすると、二番目や三番目のシナリオがよろしいということになります。

で、えーと、なんか、向う（原子核パート）ももう終わったみたいですから、こちらもそろそろ終わりますね。後はお絵かきだけで、最初の transfer シナリオを大慌てで説明して、終わることにしましょう。

スクォークとかスレプトンの質量を完全に縮退させるために、SCFT は世代を全く区別しないものとします。例えば、各世代について同じもののコピーを準備します。そのかわり、世代階層性を master formula でいうと、

[18] 本質的にやることは、exact β 関数を積分するだけです。詳しくは、次の文献をご覧下さい : T. Kobayashi, H. Nakano, T. Noguchi and H. Terao, *JHEP* **0302** (2003) 022.

$$
\begin{array}{ccccc}
\lambda_1 \gg \lambda_2 \gg \lambda_3 & & & & y_1 \approx y_2 \approx y_3 \\
\Downarrow & & & & \Downarrow \\
\Downarrow & & \longrightarrow \text{SC dynamics} \longrightarrow & & \Downarrow \\
\Downarrow & & & & \Downarrow \\
\lambda_i^{\text{eff}} = \lambda_* & & & & y_1^{\text{eff}} \ll y_2^{\text{eff}} \ll y_3^{\text{eff}}
\end{array}
$$

図 10.8: “Yukawa Hierarchy Transfer” Scenario: UV 領域における messenger coupling の階層構造（左上）が、flavor-independent なダイナミクスにより IR 領域における Yukawa coupling の階層構造（右下）に転写される。

$\lambda_i(\mu)/\lambda_i(\Lambda)$ の部分からひねりだそうというものです。これは何かって言うと、分子の方は fixed point の値なんだけど、分母の方は高エネルギースケールの初期値です。

UV cutoff スケールで「ある種のフレーバー対称性」を考えて、図 10.8 の左側の messenger カップリングに世代階層性を作ります。（これが湯川だと、よくある話です。そうしないところがミソ。）しかも inverse hierarchy の形で三世代目の湯川カップリングが一番ちっちゃくなるようにしておきます。これを初期値にして、くりこみ群の evolution を追っていくと、強結合の dynamics の結果、左側の messenger カップリングが世代に共通な固定点に入っていく、のと同時に、右側の湯川カップリングの方は、初期値の inverse の形で階層性を受け取ることになります。これをもって僕らは transfer — 階層性の転写 — と呼んでいます。まぁ、あのぉ、messenger だとか transfer だとか、DNA のお話みたいですけども。

とにかくそれをフレーバーに依らないような、世代を区別しないような dynamics で引き起こそうとしてますから、一方では湯川階層性という好ましいものを作りつつ別の方でクォーク質量の縮退というものを完全に実現しよう、と言うのが僕らのシナリオ。でまあ、時間切れで具体的にやれなかったんでちょっと残念ですが、まとめに入りたいと思います。

10.6 結びにかえて

今回はですね、だいたい『現象論』と『理論』の中間的な、いわば “mid fielder” の役をやろうと割り切って、あまり現象論的な解説に立ち入らないで、supersymmetric な場の理論のお話しをしました。もちろん、最初の動機は階層性問題にあったわけで、実際 SUSY を real world に適用しようとしたら、SUSY フレーバー問題という問題があるということでした。そして最後に、それに対する一つのアプローチとして、superconformal field theory に基づく試み — 湯川階層性の背後に実は『隠れた dynamics』があるんじゃないかっていう — を紹介しました。

最後にちょっとだけ、いいわけと言うか、コメントを付け加えさせてください。いろいろ言った挙げ句の果てに、「電子の質量を計算できるか」という最初の問題に帰ってみると、結局できません。まだそんなところまで行ってません。でも、改めて、湯川の世代階層性を巡って色々なことを考えてみると、考えられるアプローチは大体三つぐらいあるんじゃないかと思います。

一つは、今回やれなかったようなフレーバーの対称性、例えば $U(1)$ のようなもので、我々の知らないような『隠れた対称性』を考えてやる。クォークやレプトンが我々がまだ知らない量子数を持っていて、その結果で、世代階層性が生じているんだという考え方です。

もう一つは extra dimension —『隠れた次元』ですか…。これにもやっぱり面白い物理があって、string の compact 化で（最近では場の理論の方でも）使われてる orbifold ですとか、そういう compact 化のやり方が知られてますけども、そういうところの幾何学に訴える。なんか第一世代のクォークはあっちの方、第二世代のクォークはあっちの方っという具合いに割り振っておいて、それらの波動函数の overlap がちっちゃいって言う、そういう風に説明したい。ところがそういう方法は、対称性にせよ、幾何学にせよ、単純にそれだけでは、スクォーク・スレプトンのセクタで困ったことが起こりがちだ、って言うのが何となく僕の経験です。

いま僕が一番面白いって思うシナリオは対称性と幾何学と並べて比較したときに、もうちょっとどろどろとしたダイナミクスに基づいて説明しようというもの。特に、ここで取り上げたのは、本当に赤外固定点をもった理論、

superconformal な理論です。そして、SUSY flavor 問題の意味からすると、Nelson–Strasler のシナリオは実は、全部をダイナミクスに基づいて説明しようという、非常に徹底した考え方になっています。湯川の階層性は異常次元だし、SUSY flavor violation も（湯川階層性を生成するのと）同じダイナミクスで wash out するという。それは非常にきれいなシナリオなんだけど、残念ながら完全にうまくいっているわけではないという結論です、今のところ。それで、僕らはちょっと一歩引いてですね、純粋に dynamics ができればそれが良いんですけども、まぁそれはしゃあないということで、transfer シナリオ — 対称性を援用した理論ですとか、幾何学を援用した考えであるとか — を検討しているところです。

ちょっと、完全にはできませんでしたけど、ということで、今回の話を終わりたいと思います。

付記

この『講義録』を作成するにあたっては、担当の北海道大学のみなさんにいろいろご苦労をお掛けしました。

実際この『講義録』は、北大のみなさんに手分けしてテープ起こししてもらったものと、講義の際に使用した transparency の TEX ファイル（ぐちゃぐちゃのソースファイルです）の二つに基づいて、まず北大のみなさんに編集していただき、それに中野が手を入れるという手順をとりました。中野の怠慢もあって、原稿の推敲の段階で予想以上に時間がかかってしまい、北大のみなさんには大変ご迷惑をお掛けしまったのではないかと思います。すみません。ありがとうございました。

また、推敲にあたっては、当初の予定では、実際の講義になるべく忠実になるよう、最低限の日本語の修正にとどめるつもりでしたが、実際に作業を進めるうちに気が変わり、特に後半になると、大幅に加筆修正しました。そのせいで、忠実な講義録でもなく、かといって、よくまとまった講義ノートからも程遠いものになってしまったのではないかということを恐れています。いずれにしても、推敲はここで中断して『講義録』としたいと思います。

中野 博章

謝辞

この講義録を作成するに当たって、講師の中野先生にはお忙しい中、私たちの作った粗雑な講義ノートを丁寧に校正していただき、また一部加筆修正して頂きました。それによってより内容が豊富になり、これからこの分野を学ぶ若手にとって大変貴重な講義録が出来上がったと思います。これらの中野先生のご尽力に対して、この場を改めて借りてお礼申し上げます。本当にありがとうございました。

北海道大学 講義録作成者一同