1 Introduction

素粒子論の目標

自然界を記述する『微視的究極理論』を構築すること。

$\Downarrow$

これから”何でも”出る

素粒子の世界

- 3 世代の quarks & leptons
  様々な質量 (数 MeV — 170GeV)、mixing
- 4 つの基本的な力

  - 弱 } $\Rightarrow$ Weinberg-Salam model } 標準模型
  - 電 }
  - 強 $\Longrightarrow$ QCD }
  - 重力相互作用 $\Longrightarrow$ (古典的には)Einstein 一般相対論

しかし、標準模型で満足は出来ない。

- 18 個 (20 数個) の任意パラメータを含む
  $\Uparrow$
  実験と一致するように手で決める (自動的には決まらない)
  何故、6 種類の quarks& leptons がそういう質量で存在するのか?
- 量子重力理論を含んでいない。
  Einstein 理論の naive な量子化は、制御不可能な ∞ を伴う (繰り込み不可能)
- その他いろいろ

$\Downarrow$

GUT

$\Downarrow$

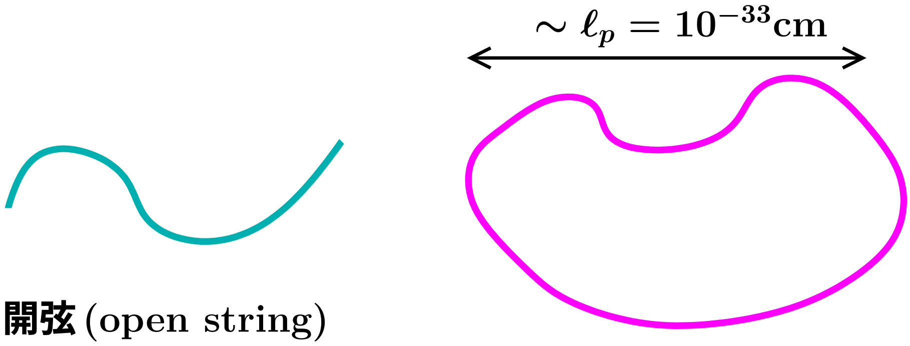
Supergravity

$\Downarrow$

Superstring

- 無矛盾な量子重力理論
- 任意パラメータを含まない
- 標準模型を含み得る (?)
- 超対称性
- 高次元時空上の理論
  (9+1 次元、25+1 次元)
- 基本的自由度が点粒子ではなく**ひも**

ひも理論

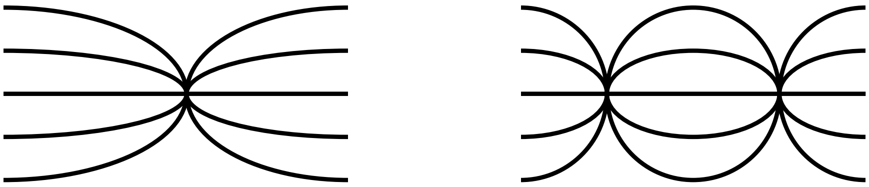


開弦 (open string)

閉弦 (closed string)

ひもは、切れたり・くっついたり、の相互作用をする。

振動モード



(自由端振動)

振動エネルギー ⇒ 質量 ⇒ 色々な質量・スピンを持った粒子

特に、

- 開弦 $\ni$ massless vector = ゲージ場
- 閉弦 $\ni$ massless tensor (spin 2) = 重力子 (graviton)

ここで話すのは

- 弦理論の BRST 第一量子化 (軽く)
- 弦の場の理論 (の初歩)

弦理論の定式化

- 摂動論的弦理論
  $\Rightarrow$ 共形場理論 (CFT)= world-sheet(string の Feynman diagram) 上の二次元場の理論
- 非摂動論的弦理論 $\Rightarrow$???

弦の場の理論 (String Field Theory=SFT)

- Yang-Mills 理論や Einstein 理論の自然な拡張として弦理論を定式化
  string 的局所ゲージ対称性 (=無限個のゲージ対称性) を持ったゲージ理論
- 力学変数は弦の配位 $X^\mu(\sigma)$ の汎関数としての弦場 (string field)$\Phi[X^\mu(\sigma)]$.
- Lorentz 共変かつゲージ不変な定式化は 1985 年頃に出来た。弦理論の非摂動論的解析に役立つものと期待されたが.... 不遇な 15 年間を過ごしてきた。
- しかし、1999 年頃から『タキオン凝縮』という物理の解析において非常に重要な役割を果たして来ている。
  弦理論のソリトン解 (古典的非摂動論的 object)
- これから更に SFT の活躍が期待されるが...
- 定式化自体においても、未完成な部分がある:
  - 閉弦の場の理論
  - 超弦の場の理論

2 BRST 1st-quantization of bosonic string

2.1 弦の作用

まず粒子

$$S_{\text{粒子}} = \int_{t_I}^{t_F} d\tau\, \mathcal{L}_{\text{粒子}} = -m \int_{t_I}^{t_F} d\tau \sqrt{-\left(\dot{x}^\mu(\tau)\right)^2} \quad (\text{世界線の長さ})$$

但し

$$\left(\dot{x}^\mu(\tau)\right) \equiv \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau} = -\left(\dot{x}^0(\tau)\right)^2 + \left(\dot{\boldsymbol{x}}(\tau)\right)^2$$

$S_{\text{粒子}}$ は世界線の reparametrization, $x^\mu(\tau) \to x^\mu\left(f(\tau)\right)$ に対して不変。

$$\text{正準運動量:} \quad p_\mu(\tau) = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{粒子}}}{\partial \dot{x}^\mu(\tau)} = m \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\left(\dot{x}^\mu\right)^2}}$$

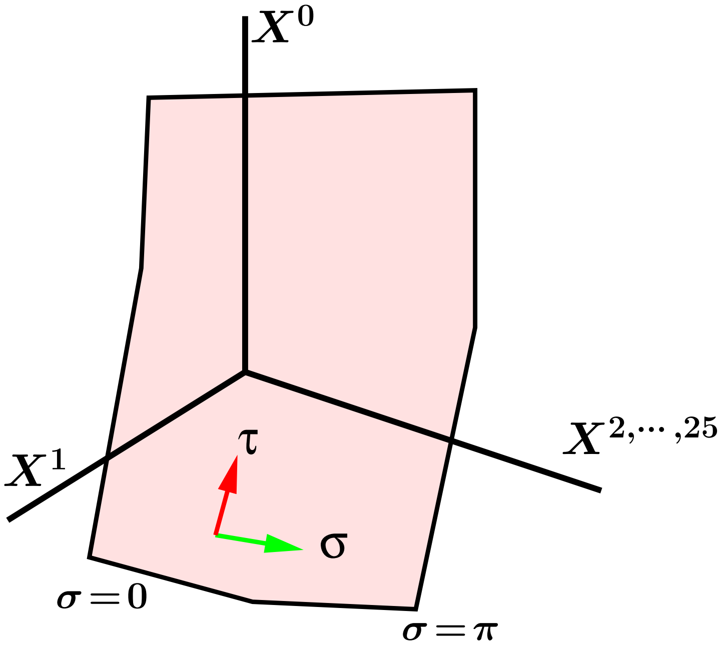
$$\left(p_\mu\right)^2 + m^2 = 0$$

$\tau = x^0$ ゲージを取ると

$$S_{\text{粒子}} = -m \int_{t_I}^{t_F} d\tau \sqrt{1 - \left(\dot{\boldsymbol{x}}(\tau)\right)^2}$$

$$\boldsymbol{p} = m \frac{\dot{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\boldsymbol{x}}^2}} = m\boldsymbol{v}$$

南部・後藤作用



以下、bosonic 開弦理論を考える。

弦の作用 $\Rightarrow$ 弦の世界面の面積:

$$S_{\text{N-G}} = -\underbrace{\frac{1}{2\pi\alpha'}}_{\text{張力}} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma \sqrt{-\det h_{ab}}$$

with

$$\begin{aligned} h_{ab} &= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu(\tau,\sigma)}{\partial \sigma^a} \frac{\partial X^\nu(\tau,\sigma)}{\partial \sigma^b} \quad \text{(Induced metric on 世界面)} \\ \sigma^a &= (\sigma^0, \sigma^1) = (\tau, \sigma) \end{aligned}$$

Reparametrization 不変性:

$$X^\mu(\tau,\sigma) \to X^\mu\left(f(\tau,\sigma), g(\tau,\sigma)\right)$$

しかし、以下の議論のためには、南部・後藤作用よりも、次の Polyakov 作用を用いる方が便利。

Polyakov 作用

$$S_{\text{Polyakov}} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma \sqrt{-g}\, g^{ab} \partial_a X^\mu \, \partial_b X^\nu \, \eta_{\mu\nu}$$

ここに

$$\begin{aligned} &g_{ab}(\tau,\sigma): \quad \text{世界面上の計量} \\ &g^{ac} g_{cb} = \delta^a{}_b \\ &g \equiv \det g_{ab} \end{aligned}$$

g_{ab} の運動方程式を用いると、S_{Polyakov} は $S_{\text{N-G}}$ に帰着する (**演習問題**)。

Reparametrization 不変性 (世界面上の一般座標変換) (無限小変換: $\sigma^a \to \sigma^a + \epsilon^a(\tau,\sigma)$)

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon X^\mu &= -\epsilon^a \, \partial_a X^\mu \\ \delta_\epsilon g_{ab} &= -\partial_a \epsilon^c \, g_{cb} - \partial_b \epsilon^c \, g_{ac} - \epsilon^c \, \partial_c g_{ab} \\ \delta_\epsilon g^{ab} &= \partial_c \epsilon^a \, g^{cb} + \partial_c \epsilon^b \, g^{ac} - \epsilon^c \, \partial_c g^{ab} \end{aligned}$$

Weyl 不変性:

$$g_{ab}(\tau,\sigma) \to e^{\phi(\tau,\sigma)} \, g_{ab}(\tau,\sigma), \quad \delta_\phi \, g_{ab} = \phi \, g_{ab}$$

但し、

$$\delta_\epsilon S_{\text{Polyakov}} = -\int d\tau \int_0^\pi d\sigma \, \partial_a(\epsilon^a \, \mathcal{L}_{\text{Polyakov}}) = 0 \;\Rightarrow\; \epsilon^1(\tau,\sigma) = 0 \quad \text{at } \sigma = 0 \text{ and } \pi$$

この理論の量子化 (弦の第一量子化) には

- Light-cone gauge 量子化
- Old covariant 量子化
- BRST 量子化 (Kato-Ogawa '83)

2.2 Yang-Mills 理論の BRST 量子化

Polyakov action の BRST 量子化の前に、$SU(2)$ Yang-Mills 理論の BRST 量子化を思い出そう。

$$\mathcal{L}_{\mathrm{YM}} = -\frac{1}{4g^2} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu}, \quad F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + \varepsilon_{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

$\mathcal{L}_{\mathrm{YM}}$ は局所ゲージ変換に対して不変:

$$\delta A^a_\mu = (D_\mu \lambda)^a \equiv \partial_\mu \lambda^a + \varepsilon_{abc} A^b_\mu \lambda^c \quad \Rightarrow \quad \delta F^a_{\mu\nu} = \varepsilon_{abc} F^b_{\mu\nu} \lambda^c \quad \Rightarrow \quad \delta \mathcal{L}_{\mathrm{YM}} = 0$$

量子化のためには、ゲージ固定項+ghost 項を $\mathcal{L}_{\mathrm{YM}}$ に加えなければならない (経路積分量子化では、gauge volume の抜き出し)。このために、ゲージ場 $A^a_\mu(x)$ の他に、

$c^a(x)$: (Faddeev-Popov) ghost 場 (Grassmann-odd=fermionic な場)
$b^a(x)$: anti-ghost 場 (Grassmann-odd な場)
$B^a(x)$: (中西-Lautrap) 補助場 (Grassmann-even=bosonic な場)

を導入し、
<u>BRST 変換</u>

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{B}} A^a_\mu &= (D_\mu c)^a = \partial_\mu c^a + \varepsilon_{abc} A^b_\mu c^c \\
\delta_{\mathrm{B}} c^a &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{abc} c^b c^c \\
\delta_{\mathrm{B}} b^a &= i B^a \\
\delta_{\mathrm{B}} B^a &= 0
\end{aligned}$$

BRST 変換は

$$\text{Grassmann-even 場} \xleftrightarrow{\delta_{\mathrm{B}}} \text{Grassmann-odd 場}$$

Leibniz 則は

$$\delta_{\mathrm{B}}(AB) \equiv (\delta_{\mathrm{B}} A) B \pm A (\delta_{\mathrm{B}} B) \quad (+ : A = \text{even}, \ - : A = \text{odd})$$

とする。

Nilpotency of δ_{B}

$$(\delta_{\mathrm{B}})^2 = 0$$

例えば **(演習問題)**

$$(\delta_{\mathrm{B}})^2 A_\mu^a = \delta_{\mathrm{B}} \left(\partial_\mu c^a + \varepsilon_{abc} A_\mu^b c^c\right) = \ldots = 0$$

$\mathcal{L}_{\text{GF+ghost}}$

量子化のための total lagrangian は

$$\mathcal{L}_{\text{total}} = \mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_{\text{GF+ghost}}$$

with

$$\mathcal{L}_{\text{GF+ghost}} = -i\delta_{\mathrm{B}} \left[b^a \left(\partial^\mu A_\mu^a + \frac{1}{2}\alpha B^a\right)\right] = B^a\, \partial^\mu A_\mu^a + \frac{\alpha}{2} (B^a)^2 + i\, b^a \partial^\mu (D_\mu c)^a$$

で与えられる。(α は任意=ゲージ・パラメータ)

$\mathcal{L}_{\text{YM}}$ には局所ゲージ不変性はもはや存在しないが、代わりに、BRST 不変性が発生:

$$(\delta_{\mathrm{B}})^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_{\mathrm{B}} \mathcal{L}_{\text{total}} = \underbrace{\delta_{\mathrm{B}} \mathcal{L}_{\text{YM}}}_{0} + (\delta_{\mathrm{B}})^2 (\cdots) = 0$$

$$\boxed{\text{BRST 不変性} \Longrightarrow \text{理論の unitarity, 繰り込み可能性}}$$

$\mathcal{L}_{\text{total}}$ の BRST 不変性に付随した Noether current:

$$J_\mu^{\mathrm{B}} = B^a (D_\mu c)^a - \partial_\mu B^a\, c^a + \frac{i}{2} \varepsilon_{abc} (\partial_\mu b^a) c^b c^c - \partial^\nu \left(F_{\mu\nu}^a c^a\right) \ \Rightarrow\ \partial^\mu J_\mu^{\mathrm{B}} = 0$$

(保存)Noether charge = BRST charge

$$Q_{\mathrm{B}} = \int d^3x\, J_0^{\mathrm{B}}, \qquad [iQ_{\mathrm{B}}, \mathcal{O}]_{\mp} = \delta_{\mathrm{B}} \mathcal{O}$$

$$(\delta_{\mathrm{B}})^2 = 0 \ \Rightarrow\ (Q_{\mathrm{B}})^2 = 0 \quad \text{(Nilpotent)}$$

物理的状態は

$$Q_{\mathrm{B}} |\text{phys}\rangle = 0$$

を満たすものとする (Kugo-Ojima)。

この条件+理論の BRST 不変性により、負ノルム状態が物理量に寄与しなくなっている。

$$|\text{phys}\rangle = \underbrace{|\,\text{真に物理的}\,\rangle}_{\text{正定値 norm}} + \underbrace{Q_{\mathrm{B}} |*\rangle}_{\substack{\text{zero-norm} \\ \text{物理量に効} \\ \text{かない}}}$$

2.3 開弦の BRST 第一量子化

再び Polyakov action:

$$S_{\mathrm{Polyakov}} = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\tau\int_0^\pi d\sigma\sqrt{-g}\,g^{ab}\partial_a X^\mu\,\partial_b X^\nu\,\eta_{\mu\nu} = \int d\tau\int_0^\pi d\sigma\,\mathcal{L}_{\mathrm{Polyakov}}$$

Reparametrization および Weyl 不変性 ($\Leftarrow$ 局所不変性) に対して

$$\text{conformal gauge: } g^{ab} = \eta^{ab} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を取り、BRST 量子化を行う:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{total}} = \mathcal{L}_{\mathrm{Polyakov}} + \mathcal{L}_{\mathrm{GF+ghost}}$$

with

$$\mathcal{L}_{\mathrm{GF+ghost}} = -\frac{i}{2}\,\delta_{\mathrm{B}}\Big[b_{ab}\left(g^{ab} - \eta^{ab}\right)\Big]$$

ここに

<u>BRST 変換</u>

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{B}} X^\mu &= -c^a\partial_a X^\mu \quad (\text{reparametrization 変換 で } \epsilon^a \to c^a) \\
\delta_{\mathrm{B}} g^{ab} &= \partial_c c^a\,g^{cb} + \partial_c c^b\,g^{ac} - c^c\,\partial_c g^{ab} - c_{\mathrm{W}}\,g^{ab} \quad (\text{同上 + Weyle 変換で } \phi \to c_{\mathrm{W}}) \\
\delta_{\mathrm{B}} c^a &= -c^b\,\partial_b c^a \\
\delta_{\mathrm{B}} c_{\mathrm{W}} &= -c^a\partial_a c_{\mathrm{W}} \\
\delta_{\mathrm{B}} b_{ab} &= iB_{ab} \\
\delta_{\mathrm{B}} B_{ab} &= 0
\end{aligned}$$

<u>新役者</u>

$$\begin{aligned}
c^a &: \ \text{reparemetrization ghost (2 成分; } a = 0, 1) \\
c_{\mathrm{W}} &: \ \text{Weyl ghost (1 成分)} \\
b_{ab}\,(= b_{ba}) &: \ \text{anti-ghost ((今は)3 成分)} \\
B_{ab}\,(= B_{ba}) &: \ \text{補助場 (3 成分)}
\end{aligned}$$

(演習問題)

$(\delta_{\mathrm{B}})^2 = 0$ を確認せよ。

$\underline{\mathcal{L}_{\text{GF+ghost}}}$

Yang-Mills の場合と同様に、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{GF+ghost}} &= -\frac{i}{2}\,\delta_{\text{B}}\Big[b_{ab}\left(g^{ab}-\eta^{ab}\right)\Big]\\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\,B_{ab}\left(g^{ab}-\eta^{ab}\right)}_{\mathcal{L}_{\text{GF}}}\underbrace{-\frac{i}{2}\,b_{ab}\left(\partial_c c^a\,g^{cb}+\partial_c c^b\,g^{ac}-c^c\,\partial_c g^{ab}-c_{\text{W}}\,g^{ab}\right)}_{\mathcal{L}_{\text{ghost}}}\end{aligned}$$

Equations of motion

$S_{\text{total}}=S_{\text{Polyakov}}+S_{\text{GF+ghost}}$ の各場の変分から得られる運動方程式は:

$$\begin{aligned}\delta_X S_{\text{Polyakov}}\Big|_{g^{ab}=\eta^{ab}} &= -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d\tau\int_0^\pi d\sigma\,\partial_a X^\mu\,\partial^a\delta X_\mu\\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'}\left(\int d\tau\Big[\partial_\sigma X^\mu\cdot\delta X_\mu\Big]_{\sigma=0}^{\pi}-\int d\tau\int_0^\pi d\sigma\,\delta X_\mu\,\partial_a\partial^a X^\mu\right)\end{aligned}$$

より

$$\text{運動方程式:}\quad \partial_a\partial^a X^\mu=\left(-\partial_\tau^2+\partial_\sigma^2\right)X^\mu=0$$

および

$$\text{境界条件:}\ \begin{cases}\dfrac{d}{d\sigma}X^\mu(\tau,\sigma)=0\quad\text{at}\quad\sigma=0,\pi\quad(\text{Neumann 条件})\\ \text{あるいは}\\ \delta X^\mu(\tau,\sigma)=0\quad\text{at}\quad\sigma=0,\pi\qquad(\text{Dirichlet 条件})\Rightarrow\text{D-brane}\end{cases}$$

同様に、

$$\begin{aligned}X^\mu:&\quad \eta^{ab}\partial_a\partial_b X^\mu=\left(-\partial_\tau^2+\partial_\sigma^2\right)X^\mu=0\quad(g^{ab}=\eta^{ab}\text{ を用いた})\\ B_{ab}:&\quad g^{ab}=\eta^{ab}\\ g^{ab}:&\quad 2\pi\,B_{ab}=T^X_{ab}+T^{\text{gh}}_{ab}\\ c_{\text{W}}:&\quad \eta^{ab}b_{ab}=0\quad(\text{つまり }b_{00}=b_{11})\\ b_{ab}:&\quad \eta^{ac}\,\partial_c c^b+\eta^{bc}\,\partial_c c^a-\eta^{ab}\,c_{\text{W}}=0\quad(g^{ab}=\eta^{ab}\text{ を用いた})\\ &\quad \eta_{ab}(\text{上式})^{ab}\Rightarrow\ c_{\text{W}}=\partial_a c^a\\ &\quad \text{これを元に代入して：}\quad \eta^{ac}\,\partial_c c^b+\eta^{bc}\,\partial_c c^a-\eta^{ab}\partial_c c^c=0\\ c^a:&\quad \eta^{bc}\,\partial_b b_{ac}=0\end{aligned}$$

ここに、T^X_{ab} と T^{gh}_{ab} は matter$(=X)$ および ghost の (世界面上の)energy-momentum tensor:

$$T^X_{ab}=-4\pi\ \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{Polyakov}}}{\partial g^{ab}}\bigg|_{g^{ab}=\eta^{ab}}=\frac{1}{\alpha'}\left(\partial_a X^\mu\,\partial_b X_\mu-\frac{1}{2}\,\eta_{ab}\,\partial_c X^\mu\,\partial^c X_\mu\right)$$

$$
\begin{aligned}
T^{\rm gh}_{ab} &= -4\pi\,\frac{\partial\mathcal{L}_{\rm ghost}}{\partial g^{ab}} = 2\pi i\Big(b_{ac}\,\partial_b c^c + b_{bc}\,\partial_a c^c + \partial_c(b_{ab}\,c^c) - b_{ab}\,c_{\rm W}\Big)\\
&\underset{c_{\rm W}=\partial_c c^c}{\Longrightarrow}\ 2\pi i\Big(b_{ac}\,\partial_b c^c + b_{bc}\,\partial_a c^c + (\partial_c b_{ab})\,c^c\Big)
\end{aligned}
$$

これらは共に保存し、traceless である (EOM を使う):

$$
\eta^{ab}\partial_a T^{\alpha}_{bc} = 0, \quad \eta^{ab}T^{\alpha}_{ab} = 0 \quad (\alpha = X,\ \text{ghost})
$$

$T^{\rm gh}_{ab}$ も traceless である:

$$
\eta^{ab}T^{\rm gh}_{ab} = 2\pi i\Big(2\eta^{ab}b_{ac}\partial_b c^c + \partial_c\underbrace{(\eta^{ab}b_{ab})}_{0}\,c^c\Big) = 0
$$

ここに

$$
0 = b_{ab}(\text{EOM of } b_{ab})^{ab} = b_{ab}\left(\eta^{ac}\,\partial_c c^b + \eta^{bc}\,\partial_c c^a - \eta^{ab}\partial_c c^c\right) = 2\,\eta^{ab}b_{ac}\partial_b c^c
$$

を用いた。

境界条件 at $\sigma = 0$ and π

$$
\begin{aligned}
&\delta_X S = 0 \ \Rightarrow\ \partial_1 X^\mu = 0 \ (\text{Neumann 条件を取る})\\
&\delta_{\rm B} S_{\rm Polyakov} = -\int d\tau\int_0^\pi d\sigma\,\partial_a(c^a\mathcal{L}_{\rm Polyakov}) = 0 \ \Rightarrow\ c^1(\tau,\sigma=0,\pi) = 0\\
&\delta_{\rm B} X^\mu = -c^a\,\partial_a X^\mu \ \text{も Neumann 条件} \ \Rightarrow\ \partial_1 c^0 = 0\\
&\qquad\Big(\text{しかし、EOM: } \partial_0 c^1 - \partial_1 c^0 = 0 \text{ より、上の } c^1 = 0 \text{ からの帰結}\Big)\\
&\delta_c S = 0 \ \Rightarrow\ \int d\tau\Big[b_{a1}\delta c^a\Big]_{\sigma=0}^{\pi} = 0 \ \Rightarrow\ b_{01}(\tau,\sigma=0,\pi) = 0 \ (\because\ \delta c^1 \equiv 0)
\end{aligned}
$$

Kato-Ogawa との対応

$$
b_{00} = b_{11} = \bar{c}_1, \quad b_{01} = b_{10} = \bar{c}_0
$$

$\sigma^\pm$ 座標

世界面上の light-cone 座標 $\sigma^\pm$

$$
\sigma^\pm = \sigma^0 \pm \sigma^1 = \tau \pm \sigma
$$

を用いると、各式が簡単になる:

$$
\begin{aligned}
\text{EOM}:&\ \partial_- c^+ = \partial_+ c^- = 0, \quad \partial_- b_{++} = \partial_+ b_{--} = 0, \quad b_{+-} = 0\\
\text{境界条件}:&\ (c^1 = 0 \Rightarrow)\ c^+ = c^-, \quad (b_{01} = 0 \Rightarrow)\ b_{++} = b_{--} \quad (\text{at } \sigma = 0,\ \pi)
\end{aligned}
$$

正準運動量 & 正準 (反) 交換関係

$$P_\mu(\tau,\sigma) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\tau X^\mu(\tau,\sigma)\right)} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\,\partial_\tau X^\mu, \quad [P_\mu(\tau,\sigma), X^\nu(\tau,\sigma)] = -i\delta(\sigma-\sigma')\,\delta_\mu{}^\nu$$
$$\Pi_{c^a} = \frac{\partial_{左}\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 c^a)} = -i\,b_{0a}, \quad \{\Pi_{c^a}(\tau,\sigma), c^b(\tau,\sigma')\} = -i\delta(\sigma-\sigma')\,\delta_a{}^b$$

モード展開

運動方程式、境界条件、正準 (反) 交換関係を満足するように展開:

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x^\mu + 2\alpha'\,p^\mu\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\alpha_n^\mu\,e^{-in\tau} - \alpha_{-n}^\mu\,e^{in\tau}\right)\cos n\sigma$$
$$P_\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{\pi}\left(p_\mu + \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n^\mu\,e^{-in\tau} + \alpha_{-n}^\mu\,e^{in\tau}\right)\cos n\sigma\right) = \frac{1}{\pi\sqrt{2\alpha'}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_{n,\mu}e^{-n\tau}\cos n\sigma$$

with

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu}, \quad [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\,\delta_{m+n,0}\,\eta^{\mu\nu}, \quad \alpha_n^{\mu\,\dagger} = \alpha_{-n}^\mu, \quad \alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'}\,p^\mu$$

ここに、

$$x^\mu: \text{重心座標}, \quad p_\mu = \int_0^\pi d\sigma\,P_\mu(\tau,\sigma): \text{重心運動量}$$

Ghost 部分は、

$$c^\pm(\tau,\sigma) = c^0(\tau,\sigma) \pm c^1(\tau,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,e^{-in(\tau\pm\sigma)}$$
$$2\,b_{\pm\pm}(\tau,\sigma) = i\Pi_{c^0} \pm i\Pi_{c^1} = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{b_{00}+b_{11}}_{b_{00}} \pm 2\,b_{01}\Big) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n\,e^{-in(\tau\pm\sigma)}$$

with

$$\{c_m, b_n\} = \delta_{m+n,0}, \quad c_n^\dagger = c_{-n}, \quad b_n^\dagger = b_{-n}$$

BRST charge

BRST 対称性の Noether current を構成し oscillator で表現すると

$$Q_{\mathrm{B}} = :\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}\left(L_n^X + \frac{1}{2}L_n^{\mathrm{gh}} - a\,\delta_{n,0}\right):$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}L_n^X - \frac{1}{2}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}(m-n):c_{-m}c_{-n}b_{m+n}: - a\,c_0$$

ここに、a は ordering に関する不定定数であり、

$$L_n^X = :\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\alpha_{n-m}^{\mu}\,\alpha_{m\,\mu}:$$
$$L_n^{\mathrm{gh}} = -:\sum_{m=-\infty}^{\infty}(m-n)b_{m+n}c_{-m}:$$

は energy-momentum tensor のモード

$$2\,T_{\pm\pm}^X = T_{00}^X + T_{11}^X \pm 2\,T_{01}^X = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n^X\, e^{-in(\tau\pm\sigma)}$$

(対称 ($T_{ab}=T_{ba}$) かつ traceless ($\eta^{ab}T_{ab}=0$) より、独立な成分はこの二つだけ。)

Nilpotency of Q_{B}
上の Q_{B} の表式の三つの項 (cL^X, cL^{gh}, ac_0) を代入して **(演習問題)**

$$Q_{\mathrm{B}}^2 = \frac{1}{2}\{Q_{\mathrm{B}}, Q_{\mathrm{B}}\} = \frac{1}{2}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\Big([L_m, L_n] - (m-n)L_{m+n}\Big)c_{-m}c_{-n}$$

ここに

$$L_n = \{Q_{\mathrm{B}}, b_n\} = L_n^X + L_n^{\mathrm{gh}} - a\,\delta_{n,0}$$

各 $L_n^{X,\mathrm{gh}}$ は次の Virasoro 代数を満たす:

$$[L_m^\alpha, L_n^\alpha] = (m-n)L_{m+n}^\alpha + A^\alpha(m)\,\delta_{m+n,0} \quad (\alpha = X,\ \mathrm{gh})$$

with centers given by

$$A^X(m) = \frac{D}{12}(m^3-m), \quad A^{\mathrm{gh}}(m) = \frac{1}{6}(m-13m^3)$$

$$[L_\ell,[L_m,L_n]] + [L_m,[L_n,L_\ell]] + [L_n,[L_\ell,L_m]] = 0 \quad (\ell+m+n=0)$$

より

$$(m-n)A(\ell) + (n-\ell)A(m) + (\ell-m)A(n) = 0$$

$\ell = 1$, $n = -m-1$ として

$$(m-1)A(m+1) = (m+2)A(m) - (2m+1)A(1)$$

この一般解は

$$A(m) = c_1 m + c_3 m^3$$

これを用いて

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + A_{\mathrm{total}}(m)\,\delta_{m+n,0}$$

with

$$A_{\mathrm{total}}(m) = A^X(m) + A^{\mathrm{gh}}(m) + 2am = \frac{D-26}{12}\,m^3 + 2\left(a - \frac{D-2}{24}\right)m$$

したがって、$Q_{\mathrm{B}}^2 = 0$ のための (十分) 条件は

$$\boxed{D = 26 \quad \text{and} \quad a = 1}$$

逆に $Q_{\mathrm{B}}^2 = 0$ ならば

$$[L_m, Q_{\mathrm{B}}] = [\{Q_{\mathrm{B}}, b_m\}, Q_{\mathrm{B}}] = [b_m, Q_{\mathrm{B}}^2] = 0$$

であり、これを用いて

$$[L_m, L_n] = [L_m, \{Q_{\mathrm{B}}, b_n\}] \underset{\text{Jabobi}}{=} -\{Q_{\mathrm{B}}, \underbrace{[b_n, L_m]}_{(n-m)b_{m+n}}\} + \{b_n, \underbrace{[L_m, Q_{\mathrm{B}}]}_{0}\} = (m-n)L_{m+n}$$

であり、$D = 26$ と $a = 1$ が必要。

<u>Ghost-zero-mode expansion of Q_{B}</u>

Q_{B} を (anti-)ghost zero-mode に関して展開すると:

$$Q_{\mathrm{B}} = c_0 L + \widetilde{Q}_{\mathrm{B}} + b_0 M$$

with

$$L = L_0 = \alpha' p_\mu^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\alpha_{-n}^{\mu}\alpha_{n,\mu} + n\,[c_{-n}b_n + b_{-n}c_n]\Big) - 1$$

$$\widetilde{Q}_{\mathrm{B}} = Q_{\mathrm{B}}\Big|_{b_0=c_0=0} = \sum_{n\neq 0} c_{-n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\,\alpha_{-n}^{\mu}\alpha_{-n,\mu} + \sum_{\substack{n\neq 0, m\neq 0\\ n+m\neq 0}} \frac{m-n}{2}\,c_m c_n b_{-m-n}$$

$$M = -2\sum_{n=1}^{\infty} n\,c_{-n}c_n$$

後で使う恒等式:

$$0 = (Q_{\mathrm{B}})^2 = (c_0 L + \widetilde{Q}_{\mathrm{B}} + b_0 M)^2 = c_0\underbrace{[L, \widetilde{Q}_{\mathrm{B}}]}_{0} + b_0\underbrace{[M, \widetilde{Q}_{\mathrm{B}}]}_{0} + \underbrace{(\widetilde{Q}_{\mathrm{B}})^2 + LM}_{0} + b_0 c_0\underbrace{[M, L]}_{0}$$

より、特に、

$$(\widetilde{Q}_{\mathrm{B}})^2 = -ML = -LM$$

Physical states

開弦の物理的状態は

$$Q_{\mathrm{B}}|\mathrm{phys}\rangle = 0$$

を満たす事を要求する。

$$|\mathrm{phys}\rangle \to |\mathrm{phys}\rangle + Q_{\mathrm{B}}|\mathrm{any}\rangle$$

の任意性を用いて

$$\text{Siegel gauge:} \quad b_0|\mathrm{phys}\rangle = 0$$

を取る事にする。b_0 を対角化 ($c_0 = \partial/\partial b_0$) すると、Siegel gauge の state は b_0 に比例する ($(b_0)^2 = 0$):

$$|\mathrm{phys}\rangle = -b_0 \underbrace{|\phi\rangle}_{b_0\,\text{を含まず}}$$

この $|\phi\rangle$ に対して

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{B}}|\mathrm{phys}\rangle &= \left(c_0 L + \widetilde{Q}_{\mathrm{B}} + b_0 M\right)(-b_0|\phi\rangle) \quad (c_0 = \partial/\partial b_0) \\ &= -L|\phi\rangle + b_0\,\widetilde{Q}_{\mathrm{B}}|\phi\rangle \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} L|\phi\rangle &= 0 \\ \widetilde{Q}_{\mathrm{B}}|\phi\rangle &= 0 \end{aligned}$$

一般の Fock state

$$|\phi\rangle = \prod_i \alpha^{\mu_i}_{-m_i} \prod_j c_{-n_j} \prod_k b_{-\ell_k}|0\rangle, \quad |0\rangle : \text{Fock vacuum;} \quad (\alpha^\mu_n, c_n, b_n)\,|0\rangle = 0 \ (n \geq 1)$$

に対して

$$L|\phi\rangle = 0 \ \Rightarrow \ \alpha' p_\mu^2 + \underbrace{\sum_i m_i + \sum_j n_j + \sum_k \ell_k - 1}_{\alpha'(\mathrm{mass})^2 = -1, 0, 1, 2, \ldots} = 0$$

具体例

$$|0;p\rangle : \quad (\mathrm{mass})^2 = -\frac{1}{\alpha'} \quad (\text{Tachyon})$$

$$\zeta^\mu \alpha_{-1,\mu}|0;p\rangle : \quad (\mathrm{mass})^2 = 0 \quad (\text{massless vector=photon})$$

$$\underset{\substack{\Downarrow \\ c_{-1}\alpha_1^\nu \alpha_{0,\nu}}}{\widetilde{Q}_{\mathrm{B}}} \left(\zeta^\mu \alpha_{-1,\mu}|0;p\rangle\right) = \sqrt{2\alpha'}\, p_\mu \zeta^\mu\, c_{-1}|0;p\rangle = 0 \ \Rightarrow \ p_\mu \zeta^\mu = 0 \quad (\text{transversality})$$

3 Free SFT

open string 理論 $\ni$ photon=$U(1)$ ゲージ理論 (Chan-Paton factor$\Rightarrow$Yang-Mills 理論)
closed string 理論 $\ni$ graviton
したがって、
(open) String Field Theory (SFT)= stringy ゲージ理論

3.1 String field (SFT の力学変数)

局所 (普通の) 場の理論では、空間の各点 $\boldsymbol{x}$ に力学変数 $\Rightarrow$ 場は時空座標の関数:$\phi(x) = \phi(\boldsymbol{x}, t)$

弦の場の理論 (String Field Theory=SFT) では、弦場 (string field) は弦の (空間的) 配位の汎関数: $\Phi[\boldsymbol{X}(\sigma), t]$?
しかし、Lorentz 共変性を考えると、$\Phi[X^\mu(\sigma)]$ (関数 $X^\mu(\sigma)$ を与えると、それに対応した値 $\Phi[X^\mu(\sigma)]$ が決まる)
実は、弦場は $X^\mu(\sigma)$ だけではなく、(anti-)ghost 座標 $c(\sigma)$ $b(\sigma)$ にも依る:

$$\Phi[X^\mu(\sigma), c(\sigma), b(\sigma)]$$

ここで、string 座標 $(X^\mu(\sigma), c(\sigma), b(\sigma))$ は σ のみの関数 (τ には依らない) 事に注意。

弦の様々な振動モード $\Rightarrow$ 無限種類 ($m^2 = (1/\alpha')(n-1)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$) の粒子
弦場は一つでこれらの全ての粒子の場を含む。

(開) 弦座標 $(X^\mu(\sigma), c(\sigma), b(\sigma))$ の内:
<u>$X^\mu(\sigma)$</u>

$$X^\mu(\sigma) = X^\mu(\tau = 0, \sigma) \quad \text{with} \quad \left.\frac{d}{d\sigma} X^\mu(\sigma)\right|_{\sigma=0,\pi} = 0$$

<u>Ghost 座標 (思い込みだけの問題)</u>
開弦の BRST 第一量子化の際

$$\{\Pi_{c^a}(\tau, \sigma), c^b(\tau, \sigma')\} = -i\delta(\sigma - \sigma')\delta_a{}^b \quad (a, b = 0, 1)$$

だった。ここでは、

$$c(\sigma) = c^1(\tau = 0, \sigma), \quad b(\sigma) = i\Pi_{c^0}(\tau = 0, \sigma),$$

と取る。境界条件は

$$c(\sigma) = \frac{d}{d\sigma} b(\sigma) = 0 \quad \text{at } \sigma = 0, \pi$$

なお、

$$\Pi_{c^1}(\tau = 0, \sigma) = -i\frac{\delta}{\delta c(\sigma)}, \quad c^0(\tau = 0, \sigma) = \frac{\delta}{\delta b(\sigma)}$$

弦座標の汎関数としての Φ の具体的表現:

1. $X^\mu(\sigma)$ を

$$X^\mu(\sigma) = x^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} x_n^\mu \cos n\sigma \quad (x^\mu = x_0^\mu)$$

とモード展開し、

$$\Phi[X^\mu(\sigma)] = \Phi[x^\mu, x_1^\mu, x_2^\mu, \cdots] \quad (x_n^\mu \text{ の関数})$$

2. Fock space 表現:

$$X^\mu(\sigma) = x^\mu + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_n^\mu - \alpha_{-n}^\mu) \cos n\sigma$$

$$P_\mu(\sigma) = -i\frac{\delta}{\delta X^\mu(\sigma)} = \frac{1}{\pi}\left(p_\mu + \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{n,\mu} + \alpha_{-n}^\mu) \cos n\sigma\right)$$

および

$$\frac{\delta}{\delta b(\sigma)} \mp c(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{\pm in\sigma}$$

$$b(\sigma) \mp \frac{\delta}{\delta c(\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \, e^{\pm in\sigma}$$

および Fock vacuum $|0\rangle$,

$$(\alpha_n^\mu, c_n, b_n)\,|0\rangle = 0 \quad (n \geq 1)$$

を用いて

$$\Phi[X^\mu(\sigma), c(\sigma), b(\sigma)] \Rightarrow |\Phi(x^\mu, b_0)\rangle = \sum_{|\{n,\ell,m\}\rangle \in \text{Fock space}} |\{n,\ell,m\}\rangle \, \varphi_{\{n,\ell,m\}}(x^\mu, b_0)$$

$$|\{n,\ell,m\}\rangle = \prod_a \alpha_{-n_a}^{\mu_a} \prod_b c_{-\ell_b} \prod_c b_{-m_c} |0\rangle$$

つまり、振動モード依存性は Fock space の states $|\{n,\ell,m\}\rangle$ で表現し、zero-modes (x^μ, b_0) ($p_\mu = -i\partial/\partial x^\mu$, $c_0 = \partial/\partial b_0$) 依存性は成分場 $\varphi_{\{n,\ell,m\}}$ の変数として表す。

以下では、Fock space 表現を用いる。

Ghost number

諸量	$\lvert 0\rangle$, $\langle 0\rvert$	α_n^μ	c_n	b_n	Q_{B}	$\int db_0$
N_{gh}	0	0	1	-1	1	1

$$N_{\mathrm{gh}}[AB] = N_{\mathrm{gh}}[A] + N_{\mathrm{gh}}[B]$$

$$N_{\mathrm{gh}} = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{-n}b_n - b_{-n}c_n) - b_0 \underbrace{\frac{\partial}{\partial b_0}}_{c_0}$$

3.2 Free SFT action

まず、相互作用を切った、free SFT を考えよう。

$$S_{\mathrm{free}}[\Phi] = -\frac{1}{2}\,\Phi \cdot Q_{\mathrm{B}}\Phi = -\frac{1}{2}\int d^{26}x \int db_0 \,\langle \Phi(x,b_0)|Q_{\mathrm{B}}|\Phi(x,b_0)\rangle$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d^{26}p}{(2\pi)^{26}}\int db_0 \,\langle \widetilde{\Phi}(-p,b_0)|Q_{\mathrm{B}}|\widetilde{\Phi}(p,b_0)\rangle$$

with

$$|\widetilde{\Phi}(p,b_0)\rangle = \int d^{26}x \, e^{ip\cdot x}|\Phi(x,b_0)\rangle$$

大雑把には (“$\pi-\sigma$” は後で分る)

$$S_{\mathrm{free}} = -\frac{1}{2}\int \mathcal{D}X^\mu \int \mathcal{D}c \int \mathcal{D}b\, \Phi[X(\pi-\sigma), -c(\pi-\sigma), b(\pi-\sigma)] Q_{\mathrm{B}} \Phi[X(\sigma), c(\sigma), b(\sigma)]$$

- Grassmann 数 b_0 の諸性質:

$$(b_0)^2 = 0, \qquad \int db_0 = 0, \qquad \int db_0\, b_0 = 1 = -\int b_0\, db_0$$

- $N_{\mathrm{gh}}[\Phi] = -1$ とする:

$$N_{\mathrm{gh}}[S] = \underbrace{N_{\mathrm{gh}}[\textstyle\int db_0]}_{+1} + \underbrace{N_{\mathrm{gh}}[\langle\Phi|]}_{-1} + \underbrace{N_{\mathrm{gh}}[Q_{\mathrm{B}}]}_{+1} + \underbrace{N_{\mathrm{gh}}[|\Phi\rangle]}_{-1} = 0$$

- Hermiticity of Φ:
  String field Φ に対して次のエルミート性の条件を課す:

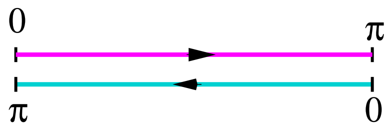
$${}_2\langle\Phi(2)| = \int_1 {}_{1,2}\langle R(1,2)|\Phi(1)\rangle_1$$

  ここに

$$\int_1 \equiv \int d^{26}x_1 \int db_0^{(1)} \quad \text{or} \quad \int \frac{d^{26}p_1}{(2\pi)^{26}} \int db_0^{(1)}$$

$${}_{1,2}\langle R(1,2)| = {}_1\langle 0|{}_2\langle 0| \exp\left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n}\alpha_n^{(1)} \cdot \alpha_n^{(2)} + c_n^{(1)} b_n^{(2)} + c_n^{(2)} b_n^{(1)} \right) \right\}$$
$$\times \underbrace{(2\pi)^{26}\delta^{26}(p_1+p_1)}_{\delta^{26}(x_1^\mu - x_2^\mu)\ \text{in}\ x\text{-rep.}} \times \underbrace{\delta(b_0^{(1)} - b_0^{(2)})}_{b_0^{(1)} - b_0^{(2)}}$$

  は



の接続を表す 2-string vertex であり、

$$\langle R(1,2)| \left\{ \begin{matrix} X^{(1)\mu}(\sigma) - X^{(2)\mu}(\pi-\sigma) \\ c^{(1)}(\sigma) + c^{(2)}(\pi-\sigma) \\ b^{(1)}(\sigma) - b^{(2)}(\pi-\sigma) \end{matrix} \right\} = 0$$

$$\langle R(1,2)| \left(\alpha_n^{(1)} + (-1)^n \alpha_{-n}^{(2)},\ c_n^{(1)} + (-1)^n c_{-n}^{(2)},\ b_n^{(1)} - (-1)^n b_{-n}^{(2)} \right) = 0$$

$$\langle R(1,2)| \left(Q_{\mathrm{B}}^{(1)} + Q_{\mathrm{B}}^{(2)} \right) = 0$$

を満足する。

$\boxed{\Phi\text{ のエルミート条件} \Rightarrow \text{タキオン場、photon 場, etc のエルミート性}}$

S_{free} のゲージ対称性

S_{free} は、stringy ゲージ変換

$$\delta_\Lambda \Phi = Q_{\mathrm{B}} \Lambda, \quad \delta_\Lambda |\Phi\rangle = Q_{\mathrm{B}} |\Lambda\rangle \quad \left(\delta_\Lambda \langle \Phi| = \langle \Lambda | Q_{\mathrm{B}} \right)$$

に対して不変:

$$\delta_\Lambda S_{\mathrm{free}} = 0 \quad \left(\because\ (Q_{\mathrm{B}})^2 = 0 \right)$$

ここに、Λ は、 $N_{\mathrm{gh}}[\Lambda] = -2$、Grassmann-even で、anti-hermitian 性:

$$_2\langle \Lambda(2)| = - \int_1 \int_2 {}_{1,2}\langle R(1,2)|\Lambda(1)\rangle_1 \quad \Rightarrow \quad Q_{\mathrm{B}}|\Lambda\rangle \text{ は hermitian}$$

を満たす、string 座標の任意の汎関数である。

(後で見るように、δ_Λ は、photon の $U(1)$ ゲージ変換を含む。)

3.3 b_0-分解

Φ を anti-ghost zero-mode b_0 依存性をあらわにして

$$|\Phi(x,b_0)\rangle = -b_0|\phi(x)\rangle + |\psi(x)\rangle$$

と表す。

$$\begin{aligned}
&N_{\mathrm{gh}}[\Phi] \;\Rightarrow\; N_{\mathrm{gh}}[\phi]=0, \quad N_{\mathrm{gh}}[\psi]=-1 \\
&\phi: \ \text{Grassmann-even}, \quad \psi: \ \text{Grassmann-odd}
\end{aligned}$$

この分解を S_{free} に代入する。まず、

$$\begin{aligned}
Q_{\mathrm{B}}|\Phi\rangle &= \Big(\underset{\substack{\Downarrow \\ \partial/\partial b_0}}{c_0} L + \widetilde{Q}_{\mathrm{B}} + b_0 M\Big)\left(-b_0|\phi\rangle + |\psi\rangle\right) \\
&= -L|\phi\rangle + \widetilde{Q}_{\mathrm{B}}|\psi\rangle + b_0\left(\widetilde{Q}_{\mathrm{B}}|\phi\rangle + M|\psi\rangle\right)
\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{free}} &= \frac{1}{2}\int d^{26}x \int db_0 \left(-b_0\langle\phi| + \langle\psi|\right)\left[-L|\phi\rangle + \widetilde{Q}_{\mathrm{B}}|\psi\rangle + b_0\left(\widetilde{Q}_{\mathrm{B}}|\phi\rangle + M|\psi\rangle\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\int d^{26}x \left\{\langle\phi|\left(L|\phi\rangle - \widetilde{Q}_{\mathrm{B}}|\psi\rangle\right) - \langle\psi|\left(\widetilde{Q}_{\mathrm{B}}|\phi\rangle + M|\psi\rangle\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\int d^{26}x \left(\langle\phi|L|\phi\rangle - \langle\phi|\widetilde{Q}_{\mathrm{B}}|\psi\rangle - \langle\psi|\widetilde{Q}_{\mathrm{B}}|\phi\rangle - \langle\psi|M|\psi\rangle\right)
\end{aligned}$$

更に、ゲージ変換 functional も

$$|\Lambda\rangle = b_0|\lambda\rangle + |\mu\rangle$$

$$\begin{aligned}
&N_{\mathrm{gh}}[\Lambda]=-2 \;\Rightarrow\; N_{\mathrm{gh}}[\lambda]=-1, \quad N_{\mathrm{gh}}[\mu]=-2 \\
&\lambda: \ \text{Grassmann-odd}, \quad \mu: \ \text{Grassmann-even}
\end{aligned}$$

と分解すると、

$$Q_{\mathrm{B}}|\Lambda\rangle = -b_0\left(\widetilde{Q}_{\mathrm{B}}|\lambda\rangle - M|\mu\rangle\right) + L|\lambda\rangle + \widetilde{Q}_{\mathrm{B}}|\mu\rangle$$

より、

$$\begin{aligned}
\delta_\Lambda|\phi\rangle &= \widetilde{Q}_{\mathrm{B}}|\lambda\rangle - M|\mu\rangle \\
\delta_\Lambda|\psi\rangle &= L|\lambda\rangle + \widetilde{Q}_{\mathrm{B}}|\mu\rangle
\end{aligned}$$

3.4 成分場展開

String field および gauge 変換 functional を Fock space 展開する。但し、

- 成分場は $N_{\mathrm{gh}} = 0$ (Grassmann-even) のものに限る $\Rightarrow$ ゲージ変換はこれらで閉じる。
- ここでは、Level 0 と 1 の Fock states に限る。

具体的には、

$$
\begin{aligned}
|\phi(x)\rangle &= |0\rangle t(x) + \alpha_{-1}^{\mu}|0\rangle A_{\mu}(x) + \dots \\
|\psi(x)\rangle &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\, b_{-1}|0\rangle\, B(x) + \dots
\end{aligned}
$$

hermiticity より、$t(x)$, $A_{\mu}(x)$, $B(x)$ は real (hermite) 場。更に、

$$
\begin{aligned}
|\lambda\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}}\, b_{-1}|0\rangle \varepsilon(x) + \dots \\
|\mu\rangle &= \dots
\end{aligned}
$$

これらを S_{free} に代入すると:

$$
\begin{aligned}
L &= -\partial^2 + (\mathrm{mass})^2 \quad (\alpha' = 1) \\
\widetilde{Q}_{\mathrm{B}} &\ni c_{-1}\alpha_1\alpha_0 = -i\sqrt{2}\, c_{-1}\alpha_1^{\mu}\partial_{\mu} \\
M &\ni -2c_{-1}c_1
\end{aligned}
$$

を用いて、

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{free}} &= -\frac{1}{2}\int d^{26}x \Big(\underbrace{\langle\phi|L|\phi\rangle}_{t(-\partial^2-1)t + A_{\mu}(-\partial^2)A^{\mu}} - 2\, \overbrace{\langle\psi|\widetilde{Q}_{\mathrm{B}}|\phi\rangle}^{B\,\partial^{\mu}A_{\mu}} - \underbrace{\langle\psi|M|\psi\rangle}_{-\,B^2} \Big) \\
&= -\frac{1}{2}\int d^{26}x \left\{ t(-\partial^2-1)t + A_{\mu}(-\eta^{\mu\nu}\partial^2 + \partial^{\mu}\partial^{\nu})A_{\nu} + (B - \partial^{\mu}A_{\mu})^2 \right\} \\
&= \int d^{26}x \left\{ -\frac{1}{2}(\partial_{\mu}t)^2 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}(\underbrace{B - \partial^{\mu}A_{\mu}}_{B_{\mathrm{redefined}}})^2 \right\}
\end{aligned}
$$

これは、tachyon 場 $t(x)$ と photon 場 $A_{\mu}(x)$ の free action である。

更に、ゲージ変換は、

$$\delta_\Lambda|\phi\rangle = \underbrace{\widetilde{Q}_\mathrm{B}|\lambda\rangle}_{\alpha^\mu_{-1}|0\rangle\partial_\mu\varepsilon} - M|\mu\rangle, \quad \widetilde{Q}_\mathrm{B} \ni c_1\alpha_{-1}\alpha_0 = -i\sqrt{2}\,c_1\alpha^\mu_{-1}\partial_\mu$$

$$\delta_\Lambda|\psi\rangle = \underbrace{L|\lambda\rangle}_{-(i/\sqrt{2})b_{-1}|0\rangle\partial^2\varepsilon} + \widetilde{Q}_\mathrm{B}|\mu\rangle$$

より

$$\begin{aligned}
\delta_\Lambda t &= 0 \\
\delta_\Lambda A_\mu &= \partial_\mu\varepsilon \quad (U(1)\text{ ゲージ変換}) \\
\delta_\Lambda B &= \partial^2\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \delta_\Lambda(B - \partial^\mu A_\mu) = 0
\end{aligned}$$

Free SFT は $U(1)$ ゲージ理論を含んでいる。
Higher mass field sector もゲージ理論となっている。

3.5　Free SFT のゲージ固定と BRST 対称性

SFT の量子化 $\Rightarrow$ stringy 局所ゲージ対称性 δ_Λ のゲージ固定 & Faddeev-Popov ghosts の導入

まず、gauge-invariant action S_{free} は

$$i\,\delta_{\text{B}}|\Phi\rangle \equiv Q_{\text{B}}|\Phi\rangle \quad \Rightarrow \quad \delta_{\text{B}} S_{\text{free}} = 0 \quad \left(\because\ (Q_{\text{B}})^2 = 0\right)$$

なお、Φ の hermiticity を用いいると

$$i\,\delta_{\text{B}}\langle\Phi| = \langle\Phi|Q_{\text{B}}$$

この “BRST 変換”δ_{B} は本当の BRST 変換を導入するための道具である。

b_0-分解をすると:

$$\begin{aligned} i\,\delta_{\text{B}}\Phi &= i\,\delta_{\text{B}}\left(-b_0\phi + \psi\right) = i\left(b_0 \delta_{\text{B}}\phi + \delta_{\text{B}}\psi\right) \\ Q_{\text{B}}\Phi &= b_0\left(\widetilde{Q}_{\text{B}}\phi + M\psi\right) - L\phi + \widetilde{Q}_{\text{B}}\psi \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} i\,\delta_{\text{B}}|\phi\rangle &= \widetilde{Q}_{\text{B}}|\phi\rangle + M|\psi\rangle \\ i\,\delta_{\text{B}}|\psi\rangle &= -L|\phi\rangle + \widetilde{Q}_{\text{B}}|\psi\rangle \end{aligned}$$

Siegel gauge: $\quad \psi = 0 \quad (b_0|\Phi\rangle = 0)$

にゲージ固定した BRST 対称性を持った理論は

$$\text{Gauge-fixed action: } \widehat{S}_{\text{free}}[\phi] \equiv S_{\text{free}}[\Phi = -b_0\phi + \psi]\Big|_{\psi=0} = -\frac{1}{2}\int d^{26}x \langle\phi(x)|L|\phi(x)\rangle$$

$$\text{BRST 変換: } i\,\widehat{\delta}_{\text{B}}|\phi\rangle \equiv \left(i\delta_{\text{B}}|\phi\rangle\right)_{\psi=0} = \widetilde{Q}_{\text{B}}|\phi\rangle$$

で得られる。但し、$|\phi\rangle$ の成分場は、**全ての** N_{gh} のものを許すものとする。

この $\widehat{S}_{\text{free}}$ と $\widehat{\delta}_{\text{B}}$ は次の性質を満たす:

BRST 不変性: $\widehat{\delta}_{\text{B}}\widehat{S}_{\text{free}}[\phi] = 0$

(On-shell) nilpotency: $(\widehat{\delta}_{\text{B}})^2|\phi\rangle = 0 \quad$ (using EOM $L|\phi\rangle = 0$)

[証明]

$$\left.\begin{array}{r} i\,\widehat{\delta}_{\rm B}|\phi\rangle = \widetilde{Q}_{\rm B}|\phi\rangle \\ i\,\widehat{\delta}_{\rm B}\langle\phi| = -\langle\phi|\widetilde{Q}_{\rm B} \end{array}\right\} \Rightarrow\ i\,\widehat{\delta}_{\rm B}\widehat{S}_{\rm free} = -\frac{1}{2}\int d^{26}x\langle\phi|[L,\widetilde{Q}_{\rm B}]|\phi\rangle \underset{\substack{\Uparrow \\ [L,\widetilde{Q}_{\rm B}]=0}}{=} 0$$

$$(\widehat{\delta}_{\rm B})^2|\phi\rangle = (\widetilde{Q}_{\rm B})^2|\phi\rangle \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{恒等式}}}{=} -ML|\phi\rangle \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{EOM: } L\phi=0}}{=} 0$$

[証明終わり]

具体的に、level 0 and 1 まででは、

$$|\phi(x)\rangle = |0\rangle\, t(x) + \alpha^{\mu}_{-1}|0\rangle\, A_\mu(x) - b_{-1}|0\rangle\, C(x) - i\, c_{-1}|0\rangle\, \overline{C}(x)$$

with

$$\begin{aligned} &C:\ \text{FP-ghost 場}\quad N_{\rm gh}[C] = +1, \quad C^\dagger = C \\ &\overline{C}:\ \text{FP-anti-ghost 場}\quad N_{\rm gh}[\overline{C}] = -1, \quad \overline{C}^\dagger = \overline{C} \end{aligned}$$

これを $\widehat{S}_{\rm free}$ に代入すると

$$\widehat{S}_{\rm free} = -\frac{1}{2}\int d^{26}x\langle\phi|L|\phi\rangle = -\int d^{26}x \left\{\frac{1}{2}\, t(-\partial^2-1)t + \frac{1}{2}\, A_\mu(-\partial^2)A^\mu - i\,\overline{C}(-\partial^2)C\right\}$$

BRST 変換 $\widehat{\delta}_{\rm B}$ は、

$$\widehat{\delta}_{\rm B}|\phi\rangle = |0\rangle\,\widehat{\delta}_{\rm B}t + \alpha^{\mu}_{-1}|0\rangle\,\widehat{\delta}_{\rm B}A_\mu(x) + b_{-1}|0\rangle\,\widehat{\delta}_{\rm B}C(x) + i\,c_{-1}|0\rangle\,\widehat{\delta}_{\rm B}\overline{C}(x)$$

$$-i\widetilde{Q}_{\rm B}|\phi\rangle = \sqrt{2}\Big(\alpha^{\mu}_{-1}|0\rangle\partial_\mu C - c_{-1}|0\rangle\partial^\mu A_\mu\Big)$$

$$\Downarrow$$

$$(c_1\alpha^{\mu}_{-1} + c_{-1}\alpha^{\mu}_{1})\,\alpha_{0,\mu}$$

$$\Downarrow$$

$$-\sqrt{2}i\partial_\mu$$

より、

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}_{\rm B}t &= 0 \\ \widehat{\delta}_{\rm B}A_\mu &= \sqrt{2}\,\partial_\mu C \\ \widehat{\delta}_{\rm B}C &= 0 \\ \widehat{\delta}_{\rm B}\overline{C} &= \sqrt{2}\,i\,\partial^\mu A_\mu \end{aligned}$$

これら、$\widehat{S}_{\rm free}$ と $\widehat{\delta}_{\rm B}$ は、Feynman gauge を採った通常のものである ($\widehat{\delta}_{\rm B}$ の $\sqrt{2}$ を除いて)。

Gauge invariant action から gauge-fixed 理論を得る操作は唐突であったが、Batalin-Vilkovisky 形式という一般論に基づいている (相互作用が入っても適用可能)。

4 Open SFT with interactions

4.1 相互作用の入った SFT の定式化の現状

- Light-cone gauge SFT (Kaku-Kikkawa '74)

  Open+Closed SFT, 純 Closed SFT, Super 版あり (Green-Schwarz)

- Covariant Open SFT

  力学変数は open string 場のみであるが、closed string も open string loop から自動的に入る。
  Super 化は問題有。

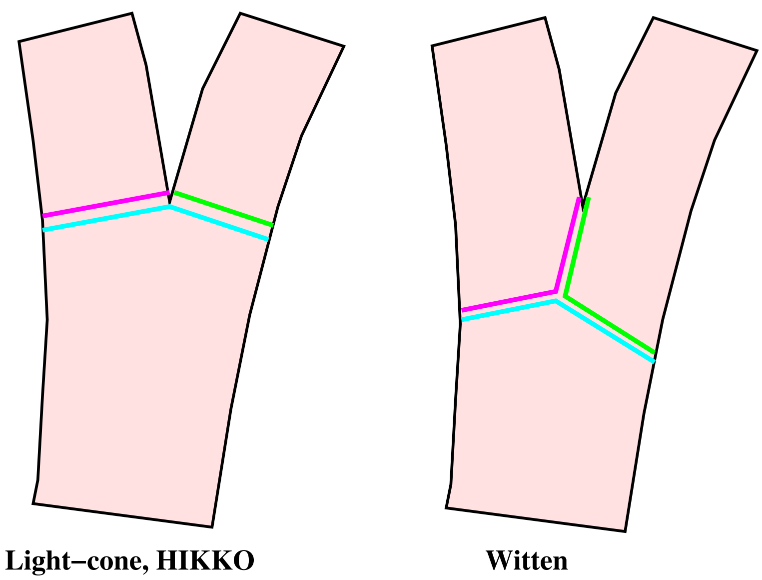
  - CSFT (Witten '86)
  - HIKKO SFT (Hata-Itoh-Kugo-Kunitomo-Ogawa '86)

- Covariant 純 Closed SFT

  - HIKKO SFT (Hata-Itoh-Kugo-Kunitomo-Ogawa '86)
  - Non-Polynomial SFT (Zwiebach '89, Kugo-Kunitomo-Suehiro '89)

  量子化問題 ⇒ 複雑すぎる (Hata '89, Zwiebach '93)

$\boxed{\text{色々な SFT} \Leftrightarrow \text{world-sheet の『propagator+相互作用』への色々な分割法}}$



4.2 Cubic SFT (CSFT) of Witten

CSFT の action は

$$S = -\frac{1}{g_{\mathrm{o}}^2}\left(\frac{1}{2}\,\Phi\cdot Q_{\mathrm{B}}\Phi + \frac{1}{3}\,\Phi\cdot(\Phi*\Phi)\right)$$

で与えられる。ここに g_{o} は open-string coupling constant であり、$*$ は後で説明する。ゲージ変換を次式で定義すると、

$$\begin{aligned}&\delta_\Lambda\Phi = Q_{\mathrm{B}}\Lambda + \Phi*\Lambda - \Lambda*\Phi\\ &\qquad\Rightarrow\ \begin{cases}\delta_\Lambda S = 0 & (\text{ゲージ不変性})\\ [\delta_{\Lambda_1},\delta_{\Lambda_2}] = \delta_{\Lambda_1*\Lambda_2-\Lambda_2*\Lambda_1} & (\text{閉じた代数})\end{cases}\end{aligned}$$

<u>$*$(star)-積</u>

$*$-積は、一般に二つの任意の string fields Φ と Ψ ($N_{\mathrm{gh}} = -1$ に限らない) から第三の string field を作り出す演算

$$\Phi,\ \Psi \to \Phi*\Psi$$

であり、N_{gh} を 2 だけ増やす:

$$N_{\mathrm{gh}}[\Phi*\Psi] = N_{\mathrm{gh}}[\Phi] + N_{\mathrm{gh}}[\Psi] + 2$$

$*$-積は、任意の string fields Φ, Ψ, Σ に対して、次の性質を満たす:

$$\begin{aligned}&Q_{\mathrm{B}}(\Phi*\Psi) = (Q_{\mathrm{B}}\Phi)*\Psi + (-1)^{|\Phi|}\Phi*(Q_{\mathrm{B}}\Psi)\quad(\text{Leibniz 則})\\ &\Phi*(\Psi*\Sigma) = (\Phi*\Psi)*\Sigma\quad(\text{associativity=結合則})\end{aligned}$$

ここに、

$$|\Phi| = \begin{cases}0 & (\Phi\ \text{が Grassmann-even} \Leftrightarrow N_{\mathrm{gh}}[\Phi] = \text{even})\\ 1 & (\Phi\ \text{が Grassmann-odd} \Leftrightarrow N_{\mathrm{gh}}[\Phi] = \text{odd})\end{cases}$$

<u>$\cdot$(dot)-積</u>

$\cdot$-積は

$$\Phi\cdot\Psi \equiv \int_1\int_2 \langle R(1,2)|\Phi(1)\rangle|\Psi(2)\rangle$$

で定義される、二つの string fields から C 数を作り出す演算であり、N_{gh} を 1 だけ上げる:

$$N_{\mathrm{gh}}[\Phi\cdot\Psi] = N_{\mathrm{gh}}[\Phi] + N_{\mathrm{gh}}[\Psi] + 1$$

$\cdot$-積は、任意の string fields Φ と Ψ に対して、次の性質をもつ:

$$\Phi\cdot\Psi = (-1)^{|\Phi||\Psi|}\Psi\cdot\Phi$$

$$\Phi\cdot(Q_{\rm B}\Psi)=-(-1)^{|\Phi|}(Q_{\rm B}\Phi)\cdot\Psi$$

『ゲージ不変性』と『閉じた代数』は、$Q_{\rm B}^2=0$, Libniz 則、結合則、$\cdot$-積の二性質、および、

$$\begin{aligned}\Phi\cdot(\Psi*\Sigma)&=(-1)^{|\Phi|(|\Psi|+|\Sigma|)}\,\Psi\cdot(\Sigma*\Phi)\\(\Phi*\Psi)\cdot\Sigma&=(-1)^{|\Phi|(|\Psi|+|\Sigma|)}\,(\Psi*\Sigma)\cdot\Phi\end{aligned}\qquad\text{(cyclic symmetry)}$$

の帰結である。

[ゲージ不変性の証明]

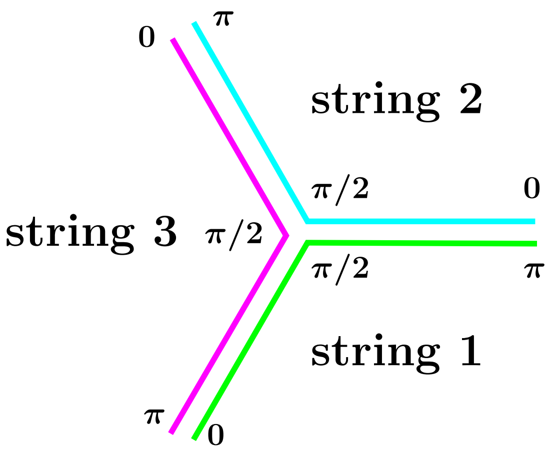
$$\begin{aligned}\delta_\Lambda\bigl(-g_{\rm o}^2\,S\bigr)&=\delta_\Lambda\Phi\cdot(Q_{\rm B}\Phi+\Phi*\Phi)\\&=(Q_{\rm B}\Lambda+\Phi*\Lambda-\Lambda*\Phi)\cdot(Q_{\rm B}\Phi+\Phi*\Phi)\\&=Q_{\rm B}\Lambda\cdot Q_{\rm B}\Phi\quad\Rightarrow\ -\Lambda\cdot(Q_{\rm B})^2\Phi=0\\&\quad+\underbrace{\underbrace{Q_{\rm B}\Lambda\cdot(\Phi*\Phi)}_{-\Lambda\cdot Q_{\rm B}(\Phi*\Phi)}+\underbrace{(\Phi*\Lambda)\cdot Q_{\rm B}\Phi}_{((Q_{\rm B}\Phi)*\Phi)\cdot\Lambda}-\underbrace{(\Lambda*\Phi)\cdot Q_{\rm B}\Phi}_{(\Phi*Q_{\rm B}\Phi)\cdot\Lambda}}_{\Lambda\cdot[-Q_{\rm B}(\Phi*\Phi)+(Q_{\rm B}\Phi)*\Phi-\Phi*Q_{\rm B}\Phi]=0}\\&\quad+\underbrace{(\Phi*\Lambda)\cdot(\Phi*\Phi)-(\Lambda*\Phi)\cdot(\Phi*\Phi)}_{[(\Phi*\Phi)*\Phi-\Phi*(\Phi*\Phi)]\cdot\Lambda=0}=0\end{aligned}$$

4.3 $*$-積の構造

CSFT の $*$-積は、

$$
\begin{aligned}
|(\Phi * \Psi)(3)\rangle &= \int_1\int_2 \langle\Phi(1)|\langle\Psi(2)|V(1,2,3)\rangle \\
&= \int_1\int_2\int_{1'}\int_{2'} \langle R(1,1')|\langle R(2,2')|V(1,2,3)\rangle|\Phi(1')\rangle|\Psi(2')\rangle \quad (\text{正確な表現})
\end{aligned}
$$

で与えられる。ここに、$V(1,2,3)$ は三つの strings 1, 2, 3 の symmetric な接続



を表す 3-string vertex であり、具体的には、次の接続条件を満足する:

$$
\left.\begin{array}{c}
X_\mu^{(r)}(\sigma) - X_\mu^{(r-1)}(\pi-\sigma) \\
c^{(r)}(\sigma) + c^{(r-1)}(\pi-\sigma) \\
b^{(r)}(\sigma) - b^{(r-1)}(\pi-\sigma) \\
\dfrac{\delta}{\delta X_\mu^{(r)}(\sigma)} + \dfrac{\delta}{\delta X_\mu^{(r-1)}(\pi-\sigma)} \\
\dfrac{\delta}{\delta c^{(r)}(\sigma)} - \dfrac{\delta}{\delta c^{(r-1)}(\pi-\sigma)} \\
\dfrac{\delta}{\delta b^{(r)}(\sigma)} + \dfrac{\delta}{\delta b^{(r-1)}(\pi-\sigma)}
\end{array}\right\} |V(1,2,3)\rangle = 0 \quad (0 \le \sigma \le \pi/2) \quad (r = 1,2,3)
$$

荒っぽく書けば、

$$
\begin{aligned}
V(1,2,3) = \prod_{\sigma=0}^{\pi/2} &\delta^{26}\Big(X^{(1)}(\sigma) - X^{(3)}(\pi-\sigma)\Big)\,\delta^{26}\Big(X^{(2)}(\sigma) - X^{(1)}(\pi-\sigma)\Big)\,\delta^{26}\Big(X^{(3)}(\sigma) - X^{(2)}(\pi-\sigma)\Big) \\
&\times (b,\ c\ \text{座標 part})
\end{aligned}
$$

である。

$$
(x-y)\delta(x-y) = 0, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\delta(x-y) = 0
$$

に注意せよ。

Leinbiz 則の理解

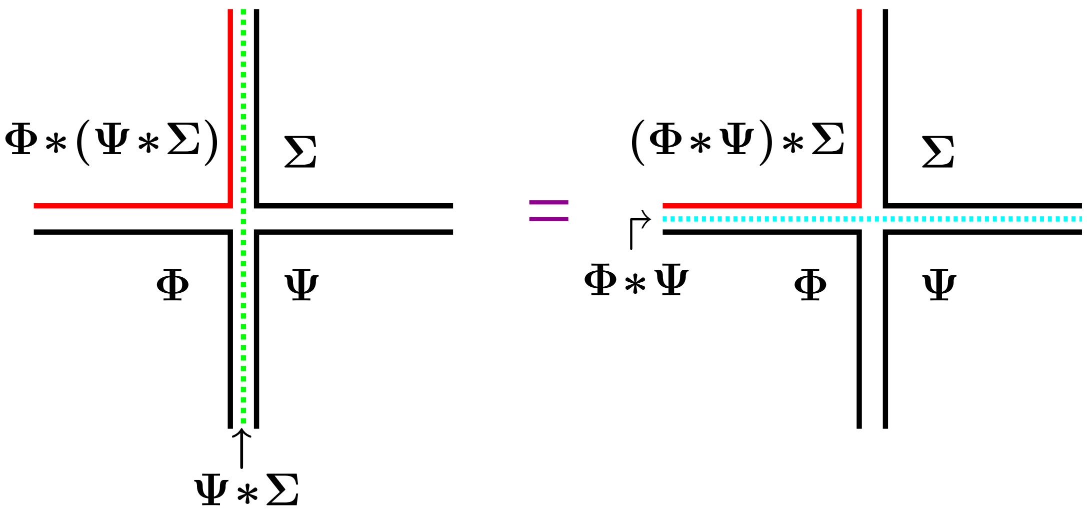
$$\text{Leibniz 則} \quad \Leftrightarrow \quad \left(Q_{\mathrm{B}}^{(1)}+Q_{\mathrm{B}}^{(2)}+Q_{\mathrm{B}}^{(3)}\right)|V(1,2,3)\rangle=0$$

であるが、後者 (BSRT 不変性) は

$$Q_{\mathrm{B}}=\int_0^\pi d\sigma\left\{\frac{\delta}{\delta b}\left[\frac{1}{2}\left(-\left(\frac{\delta}{\delta X}\right)^2+(X')^2\right)+i\left(c'\,b+\frac{\delta}{\delta b}\frac{\delta}{\delta c}\right)\right]+ic\left(X'\frac{\delta}{\delta X}+c'\frac{\delta}{\delta c}+\left(\frac{d}{d\sigma}\frac{\delta}{\delta b}\right)c\right)\right\}$$

と $V(1,2,3)$ の満たす接続条件から naive には理解できる。
(但し、精密な議論を行うと、$\sum_{r=1}^{3}Q_{\mathrm{B}}^{(r)}|V\rangle=0$ も $D=26$ & $a=1$ が必要)

Associativity の理解



式で書けば、

$$\int_a\int_b\langle R(a,b)|V(1,a,4)\rangle|V(b,2,3)\rangle=\int_c\int_d\langle R(c,d)|V(1,2,c)\rangle|V(d,3,4)\rangle$$

4.4 Batalin-Vilkovisky 形式と BRST 量子化

相互作用が入った CSFT に於ける BRST 量子化 (in Siegel gauge) は、δ_{B} を

$$\delta_{\mathrm{B}}\Phi = Q_{\mathrm{B}}\Phi + \Phi * \Phi$$

として、Free SFT と全く同じ手順で OK:

Siegel gauge $b_0|\Phi\rangle = 0$ をとり、

$$\text{Gauge-fixed action: } \widehat{S}[\phi] \equiv S[\Phi = -b_0\phi + \psi]\Big|_{\psi=0}$$

$$\text{BRST 変換: } i\,\widehat{\delta}_{\mathrm{B}}|\phi\rangle \equiv \left(i\delta_{\mathrm{B}}|\phi\rangle\right)_{\psi=0}$$

但し、$|\phi\rangle$ の成分場は、**全ての** N_{gh} のものを許すものとする。

$$\Downarrow$$

$$\text{BRST 不変性: } \widehat{\delta}_{\mathrm{B}}\widehat{S}[\phi] = 0$$

$$\text{(On-shell) nilpotency: } (\widehat{\delta}_{\mathrm{B}})^2|\phi\rangle \propto \frac{\delta\widehat{S}}{\delta\phi}$$

これらは、Batalin-Vilkovisky formalism を用いると簡単に理解できる。

$*$-積、$\cdot$-積の諸性質を用いると、CSFT の action は次の Batalin-Vilkovisky(BV) 方程式を満たすことが分る:

$$\frac{\delta S}{\delta\Phi}\cdot\frac{\delta S}{\delta\Phi} = 0$$

より陽には

$$\int_1\int_2 \langle R(1,2)|\frac{\delta S}{\delta\langle\Phi(1)|}\frac{\delta S}{\delta\langle\Phi(2)|} = 0$$

CSFT action に対しては、

$$-g_{\mathrm{o}}^2\,\frac{\delta S}{\delta\langle\Phi|} = Q_{\mathrm{B}}|\Phi\rangle + |\Phi * \Phi\rangle$$

BV 方程式は “より基本的な方程式” であって、ゲージ不変性やゲージ変換の代数も BV 方程式から一般的に導かれる。

SFT の action は BV 方程式を満たすように構成されるべし

string 座標を index I で表し、BV 方程式を

$$\sum_I \sum_J R^{IJ} \frac{\partial S}{\partial \Phi_I} \frac{\partial S}{\partial \Phi_J} = 0$$

と書く。$\sum_I \sum_J R^{IJ}$ は Grassmann-odd であるが、(符号の精度は犠牲にして、簡単のため) 陽には書かず、また、R^{IJ} も "対角" のふりをして、Einstein の縮約則を使う:

$$\frac{\partial S}{\partial \Phi_I} \frac{\partial S}{\partial \Phi_I} = 0$$

<u>ゲージ不変性</u>

ゲージ変換は

$$\delta_\Lambda \Phi_I = \frac{\partial^2 S}{\partial \Phi_I \partial \Phi_J} \Lambda_J$$

であって、

$$\delta_\Lambda S = \frac{\partial S}{\partial \Phi_I} \frac{\partial^2 S}{\partial \Phi_I \partial \Phi_J} \Lambda_J = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \Phi_J} \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial \Phi_I} \frac{\partial S}{\partial \Phi_I} \right)}_{0} \Lambda_J = 0$$

<u>BRST 量子化</u>

anti-ghost zero-mode b_0 に対する依存性を抜き出し ($I = (b_0, i)$)

$$\Phi_I = -b_0\, \phi_i + \psi_i$$
$$\frac{\partial}{\partial \Phi_I} = \frac{\partial}{\partial \phi_i} + b_0 \frac{\partial}{\partial \psi_i}$$
$$\sum_I = \int db_0 \sum_i$$

を用いると、BV 方程式は

$$\frac{\partial S}{\partial \phi_i} \frac{\partial S}{\partial \psi_i} = 0$$

"Pre-BRST 変換" δ_{B} は

$$\delta_{\mathrm{B}} \Phi_I \equiv \frac{\partial S}{\partial \Phi_I}$$

であって、ϕ_i に対しては

$$\delta_{\mathrm{B}} \phi_i = \frac{\partial S}{\partial \psi_i}$$

"本当の" BRST 変換は

$$\widehat{\delta}_{\mathrm{B}} \phi_i = \left. \frac{\partial S}{\partial \psi_i} \right|_{\psi=0}$$

- BRST 不変性

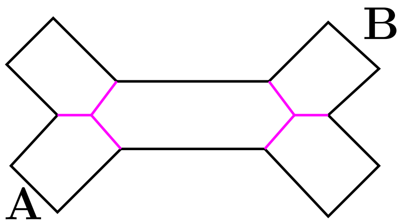
$$\widehat{\delta}_{\mathrm{B}}\widehat{S}[\phi] = \widehat{\delta}_{\mathrm{B}} S[\phi, \psi = 0] = \left.\frac{\partial S}{\partial \psi_i}\right|_{\psi=0} \left.\frac{\partial S}{\partial \phi_i}\right|_{\psi=0} = \left(\frac{\partial S}{\partial \psi_i}\frac{\partial S}{\partial \phi_i}\right)_{\psi=0} = 0$$

- (On-shell) Nipotency

$$(\widehat{\delta}_{\mathrm{B}})^2 \phi_i = \widehat{\delta}_{\mathrm{B}} \left(\left.\frac{\partial S}{\partial \psi_i}\right|_{\psi=0} \right) = \left.\frac{\partial S}{\partial \psi_j}\right|_{\psi=0} \left.\frac{\partial^2 S}{\partial \phi_j \partial \psi_i}\right|_{\psi=0} = \left[\frac{\partial}{\partial \psi_i} \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial \psi_j}\frac{\partial S}{\partial \phi_j}\right)}_{0} - \frac{\partial^2 S}{\partial \psi_i \partial \psi_j}\frac{\partial S}{\partial \phi_j} \right]_{\psi=0}$$

$$= - \left.\frac{\partial^2 S}{\partial \psi_i \partial \psi_j}\right|_{\psi=0} \times \frac{\partial \widehat{S}[\phi]}{\partial \phi_j}$$

4.5 Feynman diagrams in CSFT



Siegel gauge propagator は $1/L$
Strings A と B をつないで loop する ⇒ Closed string

4.6 Oscillator representaion of V

3-string vertex V の oscillator 表現 (p_μ, b_0-対角化) は次式で与えられる:

$$|V(1,2,3)\rangle = \lambda\ \exp\left\{\sum_{r,s=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\sum_{n,m=0}^{\infty} N^{rs}_{nm}\alpha^{(r)}_{-n}\cdot\alpha^{(s)}_{-m} - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} X^{rs}_{nm}c^{(r)}_{-n}b^{(s)}_{-m}\right)\right\}|0\rangle_1\otimes|0\rangle_2\otimes|0\rangle_3$$
$$\times\,(2\pi)^{26}\delta^{26}(p_1+p_2+p_3)$$

ここに、

$$\alpha^{(r)}_0 = \sqrt{2\alpha'}\,p_r$$
$$\lambda = \frac{3^{9/2}}{2^6}$$

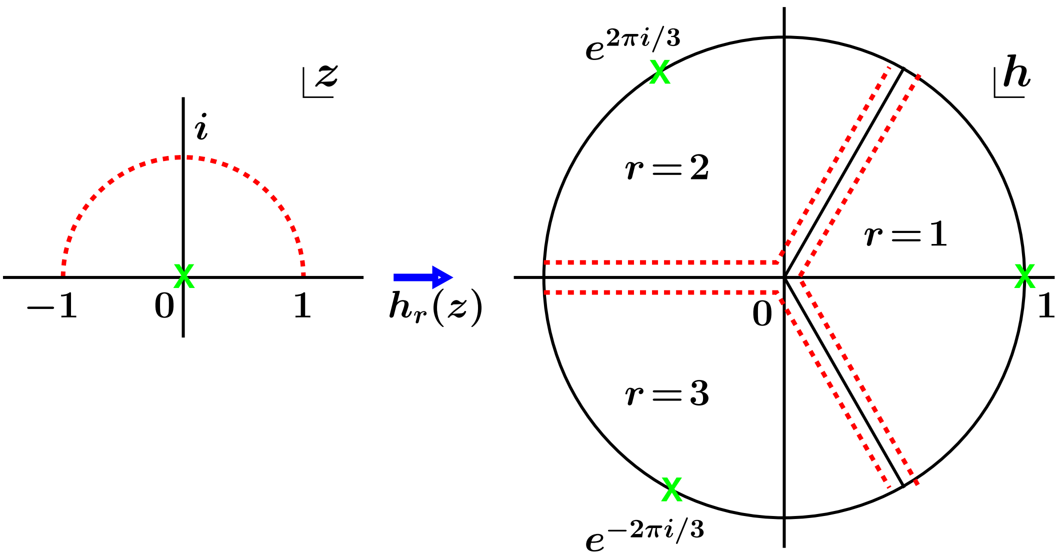
N^{rs}_{nm} および X^{rs}_{nm} は Neumann 係数と呼ばれる “数” であって、N^{rs}_{nm} は以下の積分表示で与えられる:

$$N^{rs}_{nm} = \frac{1}{nm}\oint_{z=0}\frac{dz}{2\pi i}\frac{h'_r(z)}{z^n}\oint_{w=0}\frac{dw}{2\pi i}\frac{h'_s(w)}{w^m}\frac{1}{(h_r(z)-h_s(w))^2} \quad (n,m\geq 1)$$
$$N^{rs}_{0m} = N^{sr}_{m0} = \frac{1}{m}\oint_{w=0}\frac{dw}{2\pi i}\frac{h'_s(w)}{w^m}\frac{-1}{h_r(0)-h_s(w)} \quad (m\geq 1)$$
$$N^{rs}_{00} = \begin{cases}\ln|h'_r(0)| & (r=s)\\ \ln|h_r(0)-h_s(0)| & (r\neq s)\end{cases}$$

ここで、$h_r(z)$ $(r=1,2,3)$ は

$$h_r(z) = \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^{2/3} e^{(2\pi i/3)(r-1)}$$

であり、下図のような写像である。



N_{00}^{rs} は、運動量保存を用いると対角化出来る:

$$\sum_{r,s=1}^{3} N_{00}^{rs}\,\alpha_0^{(r)}\cdot\alpha_0^{(s)} \underset{\Uparrow}{=} N_{00}\sum_{r=1}^{3}\left(\alpha_0^{(r)}\right)^2 \qquad \left(N_{00} \equiv -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3^3}{2^4}\right) = -\frac{1}{3}\ln\lambda\right)$$

$$\sum_{r=1}^{3}\alpha_0^{(r)} = 0$$

<u>N_{nm}^{rs} の諸性質</u>

$$N_{nm}^{rs} = N_{mn}^{rs}, \quad N_{nm}^{r+1,s+1} = N_{nm}^{rs}, \quad N_{nm}^{r+3,s} = N_{nm}^{r,s+3} = N_{nm}^{rs}, \quad (-1)^n N_{nm}^{rs}(-1)^m = N_{nm}^{sr}$$

<u>N_{nm}^{rs} の具体例</u>

$$N_{11}^{11} = -\frac{5}{27}, \quad N_{11}^{12} = \frac{16}{27}, \quad N_{12}^{11} = 0, \quad N_{12}^{12} = \frac{32\sqrt{3}}{243}$$

<u>参考文献</u>

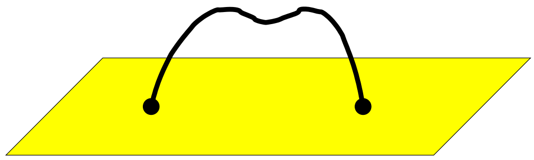
Gross-Jevicki, *Nucl. Phys.* **B283**(1987)1, **B287**(1987)225

Itoh-Ogawa-Suehiro, *Nucl. Phys.* **B289**(1987)127.

Leclair-Peskin-Preitshopf, *Nucl. Phys.* **B317**(1989)411, **B317**(1989)454.

5 Tachyon condensation in CSFT

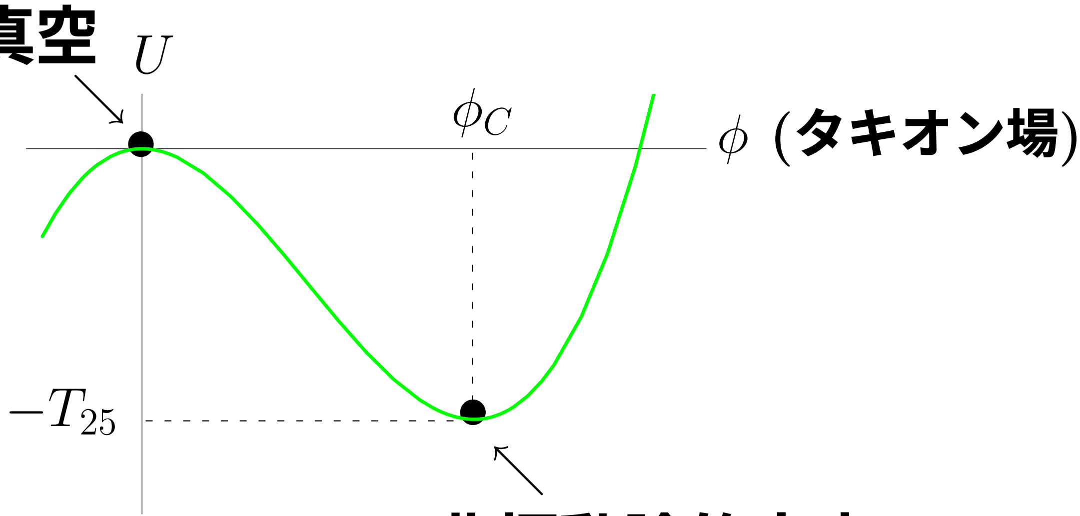
5.1 Sen's conjecture (in bosonic open string theory) ('98 '99)



D25-brane が一枚
不安定タキオン・モード有り

$\Uparrow$

摂動論的真空



非摂動論的真空

D25-brane が消滅

$$U(\phi_C) + T_{25} = 0$$

$$\Downarrow$$

開弦の励起モード無し
純粋な閉弦理論

5.2 Tachyon potential in CSFT

並進不変 ($p_\mu = 0$) な string field $\Phi = -b_0\phi$ (in Siegel gauge) に対して、ポテンシャル $U(\phi)$ は

$$S = -\frac{1}{g_o^2}\underbrace{\left(\int d^{26}x\right)}_{V_{26}}W(\phi), \quad U(\phi) = \frac{1}{g_o^2}W(\phi)$$

with

$$W(\phi) = \frac{1}{2}\langle\phi|\underset{\substack{\Downarrow \\ (\text{mass})^2}}{L}|\phi\rangle + \frac{1}{3}\langle\phi|\langle\phi|\langle\phi|\widehat{V}\rangle$$

$$|\widehat{V}(1,2,3)\rangle = \lambda\ \exp\left\{\sum_{r,s=1}^{3}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}N_{nm}^{rs}\alpha_{-n}^{(r)}\cdot\alpha_{-m}^{(s)} - X_{nm}^{rs}c_{-n}^{(r)}b_{-m}^{(s)}\right)\right\}|0\rangle_1\otimes|0\rangle_2\otimes|0\rangle_3$$

で与えられる。

D25-brane の張力 (単位体積当りのエネルギー) T_{25} は ($\alpha' = 1$, see Polchinski の教科書)

$$T_{25} = \frac{1}{2\pi^2 g_o^2}$$

従って、

$$\text{Sen の予想:} \ -1 \overset{?}{=} \frac{U(\phi_c)}{T_{25}} = 2\pi^2 W(\phi_c)$$

5.3 Level truncation

並進不変な配位に限っても、CSFT の (古典) 運動方程式

$$Q_{\mathrm{B}}\Phi + \Phi * \Phi = 0 \underset{\text{Siegel gauge}}{\Longrightarrow} L|\phi\rangle_3 + {}_1\langle\phi|_2\langle\phi|\widehat{V}\rangle_{1,2,3} = 0$$

を一般的 (解析的) に解くことは難しい (いくつかの解の提案はある)。
そこで、level trancation という “近似法” が用いられる。

ある Fock space state

$$\prod_i \alpha_{-\ell_i}\prod_j c_{-m_j}\prod_k b_{-n_k}|0\rangle$$

の level とは、$\sum_i \ell_i + \sum_j m_j + \sum_k n_k$, つまり、$\alpha'(\text{mass})^2 + 1$ のこと。

level (M, N)-近似とは

- String field を level M までの state の和とする:

$$|\phi\rangle = \sum_{\mathrm{level}(\alpha)\le M} |\alpha\rangle\, \phi_\alpha$$

- W の相互作用項 ϕ^3 において、

$$\phi^3 \Rightarrow \sum_{\mathrm{level}(\alpha)+\mathrm{level}(\beta)+\mathrm{level}(\gamma)\le N} \widehat{V}_{\alpha\beta\gamma}\, \phi_\alpha\phi_\beta\phi_\gamma$$

また、古典解 ϕ_c は並進不変・Lorentz 不変、かつ、twist 不変であるとする。twist 変換とはパラメータ σ の向きの逆転、$\sigma \to \pi - \sigma$、であって、

$$\mathcal{O}_n \to (-1)^n\, \mathcal{O}_n \quad (\mathcal{O} = \alpha^\mu, c, b)$$

である。

<u>$(0,0)$-近似</u>

$$|\phi\rangle = |0\rangle t$$

$$W^{(0,0)}(t) = -\frac{1}{2}\, t^2 + \underbrace{\frac{27\sqrt{3}}{64}}_{\lambda/3}\, t^3$$

$$\frac{d}{dt}W^{(0,0)}(t) = 0 \;\Rightarrow\; t_c = \frac{64}{81\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; 2\pi^2 W^{(0,0)}(t_c) = -\frac{2^{12}\pi^2}{3^{10}} = -0.6846...$$

<u>$(2,6)$-近似</u>

$$|\phi\rangle = |0\rangle\, t + c_{-1}b_{-1}|0\rangle\, u + \frac{1}{\sqrt{52}}\, \alpha^\mu_{-1}\alpha_{-1,\mu}|0\rangle\, v$$

$$\begin{aligned} W^{(2,6)}(t,u,v) = &-\frac{1}{2}\, t^2 + \frac{27\sqrt{3}}{64}\, t^3 - \frac{1}{2}\, u^2 + \frac{1}{2}\, v^2 + \frac{33\sqrt{3}}{64}\, t^2\, u - \frac{15\sqrt{39}}{64}\, t^2\, v \\ &+ \frac{19}{64\sqrt{3}}\, t\, u^2 - \frac{55}{96}\sqrt{\frac{13}{3}}\, t\, u\, v + \frac{581}{192\sqrt{3}}\, t\, v^2 \\ &+ \frac{1}{64\sqrt{3}}\, u^3 - \frac{95}{1728}\sqrt{\frac{13}{3}}\, u^2\, v + \frac{6391}{5184\sqrt{3}}\, u\, v^2 - \frac{20951}{5184\sqrt{39}}\, v^3\ . \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) W^{(2,6)}(t,u,v) = 0 \;\Rightarrow\; (t_c, u_c, v_c) = (0.5442, 0.1902, 0.2018)$$
$$\Rightarrow\; 2\pi^2 W^{(2,6)}(t_c, u_c, v_c) = -0.959...$$

この解以外にも

$$(t_s, u_s, v_s) = (-8.902, 14.31, -6.074) \;\Rightarrow\; 2\pi^2 W^{(2,6)}(t_s, u_s, v_s) = -813 \text{ !!!}$$

という変な解もあるが、BRST 不変性を破っている (Hata-Shinohara `hep-th/0009105`)。

<u>Higher level calculations</u>

(M, N)	$2\pi^2 W(\phi_c)$
$(4, 12)$	-0.9878
$(6, 18)$	-0.9952
$(8, 24)$	-0.9979
$(10, 30)$	-0.99918
$(12, 36)$	-0.999828
$\vdots$	$\vdots$
$(18, 54)$	-1.0004937

D. Gaiotto and L. Rastelli, `hep-th/0211012`