Discrete Transformations and Supersymmetry on a circle with point interactions

長澤智明（神戸大）
坂本眞人（神戸大）
竹永和典（阪大理）

（参考論文）

T.Nagasawa, M.Sakamoto, K.Takenaga
Phys.Lett.B562(2003)358-364
(hep-th/0212192)

1 概要

S^1 上の不連続変換を用いることで、$N = D$ 超電荷（$D = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots$）を構成することができた。ここでは、$N =$(偶数) の超電荷に限って話すことにする。

2　序論

- **1次元量子力学系とエネルギー縮退**

量子力学の教科書 $\Rightarrow$ **「エネルギー縮退はない」**

(仮定)

- $\varphi(x), \varphi'(x)$ **は連続**
- $\varphi(x_0) = 0$ **なる** x_0 **が存在している。**

$$(\varphi(\pm\infty) = 0)$$

$\Downarrow$ **抜け道（エネルギー縮退があるかもしれない）**

$$\left\{\begin{array}{l}\bullet\ \text{コンパクト空間を考える。（例えば } S^1\text{）} \\ \bullet\ \underline{\varphi(x), \varphi'(x)\ \text{が不連続になる点}}\text{が存在}\end{array}\right.$$

$\Downarrow$

点状相互作用（特異点）

$\boxed{\text{エネルギー縮退}} \Longrightarrow$ Supersymmetry?

● <u>点状相互作用（特異点）</u>

ある１点でのみ０でない相互作用ポテンシャル
（例 $\delta(x)$）

$\Downarrow$ 視点を変える

$\varphi(x), \varphi'(x)$ の接続条件で表現

（例１）$x = 0$ で点状相互作用
接続条件は

$$\begin{pmatrix} \varphi(0_+) \\ \varphi'(0_+) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \varphi(0_-) \\ \varphi'(0_-) \end{pmatrix}$$

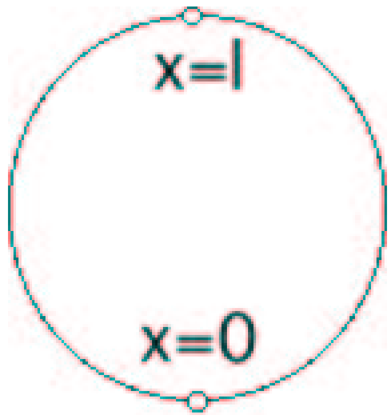
のように書ける。
♣$\delta(x)$ は上の接続条件で表現できる。

（疑問）どんなはちゃめちゃな接続条件でもいいのか ??

$$\Downarrow$$
$$H^\dagger = H$$

だけを課す！これは確率密度の保存を課すことになっている。確率解釈はできる。

（例２）$S^1(-l < x \leq l)$ で $x = 0, x = l$ に点状相互作用がある系。



$$\boxed{\text{要請：}H^\dagger = H}$$

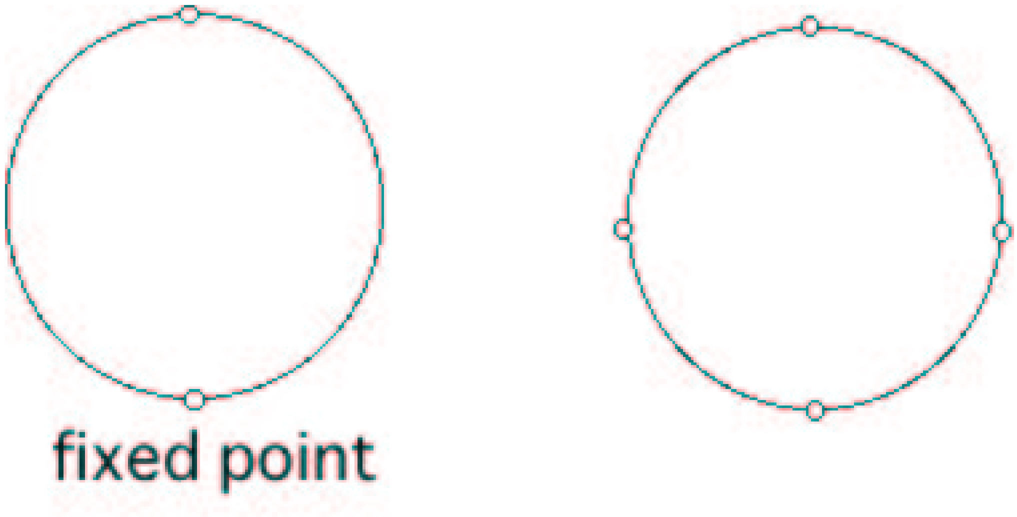
$$\Downarrow$$

$$\int_{S^1} dx\ \varphi^\dagger(x)\,(H\phi(x)) = \int_{S^1} dx\,(H\varphi(x))^\dagger\,\phi(x)$$

♣ $\varphi(x), \varphi'(x)$ が $x = 0, x = l$ で不連続なので、
表面項は自動的に 0 にはならない！
逆に、表面項が 0 になる接続条件を課すと $O.K.$

（注目すべきところ）
$x = 0$ で粒子が消えて $x = l$ で現れるといった事も許されている。系全体での確率の保存を課したことになっている。

● 素粒子論への応用

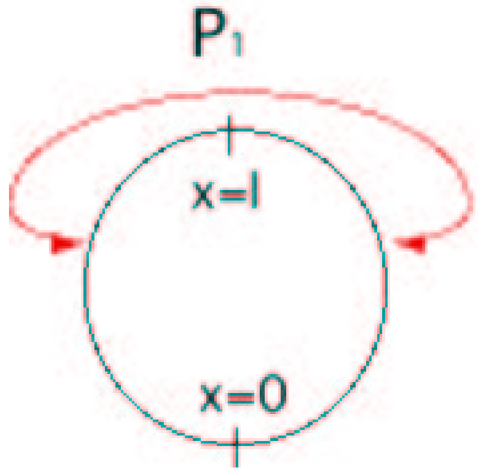


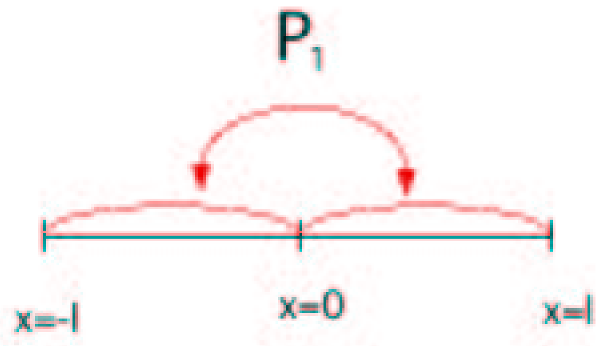
$Orbifold$空間（S^1/Z_2,　$S^1/(Z_2 \times Z_2')$,　etc.)

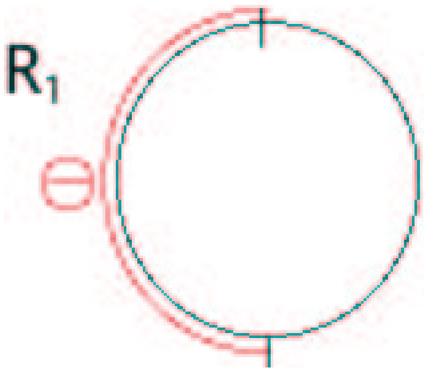
3　S^1 上での不連続変換

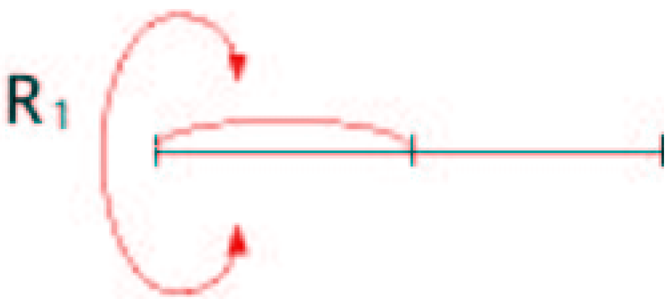
● $\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1, \mathcal{R}_1$ 変換

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 : \varphi(x) \longrightarrow \varphi(-x) \\ \mathcal{R}_1 : \varphi(x) \longrightarrow [\Theta(x) - \Theta(-x)]\, \varphi(x) \\ \mathcal{Q}_1 \equiv -i\mathcal{R}_1\mathcal{P}_1 \end{cases} \tag{1}$$

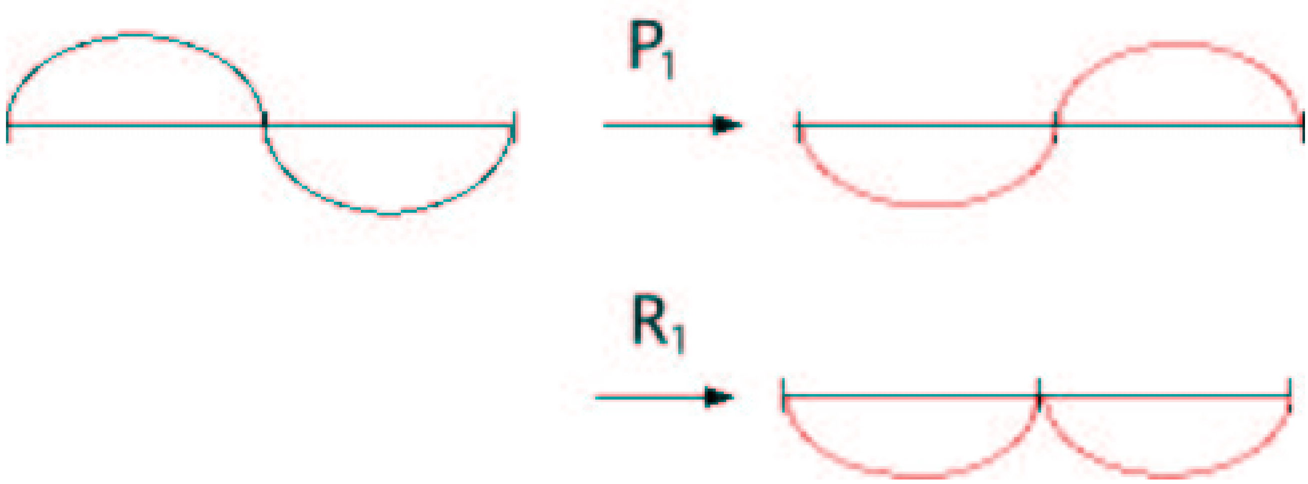








(例)



$\boxed{\mathcal{R}_1\mathcal{Q}_1\text{:}x=0, x=l\text{ で }\varphi(x), \varphi'(x)\text{ に不連続性を引き起こす}}$

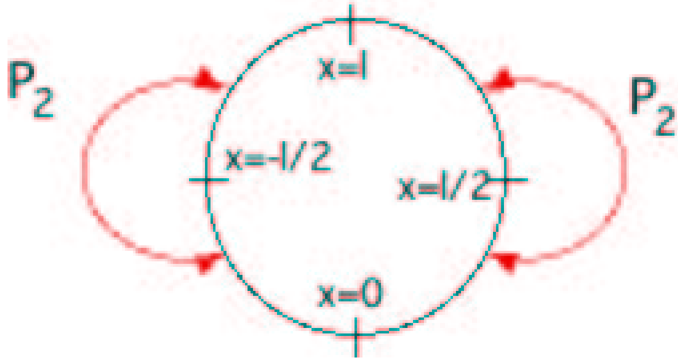
$\Downarrow$

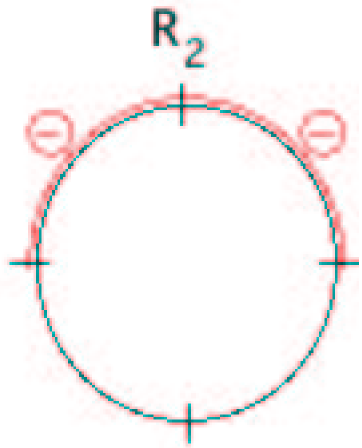
$\boxed{x=0, x=l\text{ に点状相互作用があるときに意味がある}}$

- $(\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1, \mathcal{R}_1)$ はスピン $1/2$ の $su(2)$ 代数を満たす。

$$\begin{cases} [\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1] = 2i\mathcal{R}_1, \ (cyclic) \\ \mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1, \mathcal{R}_1\text{は互いに反可換} \\ \mathcal{P}_1^2 = \mathcal{Q}_1^2 = \mathcal{R}_1^2 = 1 \end{cases}$$

- **$\mathcal{P}_2, \mathcal{Q}_2, \mathcal{R}_2$ 変換**

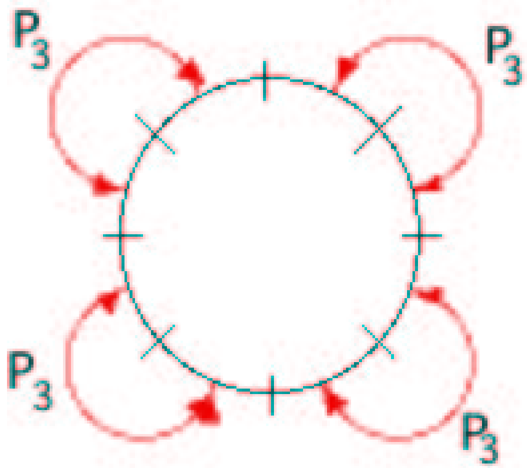


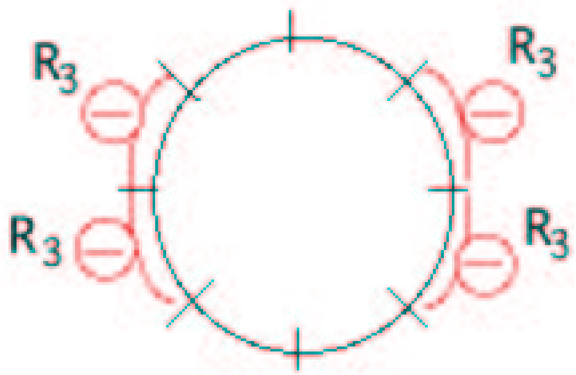


$$\mathcal{Q}_2 \equiv -i\mathcal{R}_2\mathcal{P}_2$$

- $(\mathcal{P}_2, \mathcal{Q}_2, \mathcal{R}_2)$ **はスピン** $1/2$ **の** $su(2)$ **代数を満たしている。**

- **$\mathcal{P}_3, \mathcal{Q}_3, \mathcal{R}_3$ 変換**





$$\mathcal{Q}_3 \equiv -i\mathcal{R}_3\mathcal{P}_3$$

- $(\mathcal{P}_3, \mathcal{Q}_3, \mathcal{R}_3)$ **はスピン** $1/2$ **の** $su(2)$ **代数を満たしている。**

♠ **同様にして** $(\mathcal{P}_4, \mathcal{Q}_4, \mathcal{R}_4), (\mathcal{P}_5, \mathcal{Q}_5, \mathcal{R}_5), \cdots$
を導入することができる。

● 可換な変換

$(\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1, \mathcal{R}_1)$,$(\mathcal{P}_2, \mathcal{Q}_2, \mathcal{R}_2)$,$(\mathcal{P}_3, \mathcal{Q}_3, \mathcal{R}_3)$,$\cdots$ は互いに可換になっている。例えば、

$$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2\mathcal{P}_1$$
$$\mathcal{R}_1\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2\mathcal{R}_1 \quad , etc.$$

これは、次のように表現できる。

$$su(2) \oplus su(2) \oplus su(2) \oplus \cdots \tag{2}$$

4　超対称性代数（量子力学）

- 超電荷 Q_i ，$(i = 1, 2, \cdots, N)$

$$\{Q_i, Q_j\} = \delta_{ij} H, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, N) \tag{3}$$

$$Q_i^\dagger = Q_i \tag{4}$$

$$Q_i H = H Q_i \tag{5}$$

- “fermion ”number operator $(-1)^F$

$$(-1)^F Q_i = -Q_i (-1)^F \tag{6}$$

$$(-1)^F H = H (-1)^F \tag{7}$$

$F = 1$ の状態を “fermionic ” state
$F = 0$ の状態を “bosonic ”state と呼ぶことにする。

● 代数からの帰結

♣$|E\rangle_B, |E\rangle_F$ を次で定義する。

$$H|E\rangle_B = E|E\rangle_B, \quad H|E\rangle_F = E|E\rangle_F$$
$$(-1)^F|E\rangle_B = |E\rangle_B, \quad (-1)^F|E\rangle_F = -|E\rangle_F$$

このとき $Q_i|E\rangle_B$ は

$$\begin{aligned} H\left(Q_i|E\rangle_B\right) = Q_iH|E\rangle_B &= Q_iE|E\rangle_B \\ &= E\left(Q_i|E\rangle_B\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-1)^F\left(Q_i|E\rangle_B\right) = -Q_i(-1)^F|E\rangle_B &= -Q_i|E\rangle_B \\ &= -\left(Q_i|E\rangle_B\right) \end{aligned}$$

となる。すなわち、Q_i が作用した状態はエネルギーは同じだがフェルミオン数が違う状態になっている（エネルギー縮退）。

♠エネルギーは正である

$$\langle E|H|E\rangle = \langle E|Q_iQ_i|E\rangle = ||Q_i|E\rangle||^2 \geq 0$$

5　超電荷の構成

$(\mathcal{P}_1,\mathcal{Q}_1,\mathcal{R}_1),(\mathcal{P}_2,\mathcal{Q}_2,\mathcal{R}_2),\cdots$ を用いると様々な超電荷を構成することができる（代数的に）。ここでは３つ例を挙げる。

（例１　$N=2$ 超電荷、$H=-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}$）

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{i}{2}\mathcal{P}_1\left(\mathcal{R}_1\frac{d}{dx}\right) \\ Q_2 = \frac{i}{2}\mathcal{Q}_1\left(\mathcal{R}_1\frac{d}{dx}\right) \end{cases} \tag{8}$$

（代数のチェック）

$$\begin{aligned} &\{Q_1,Q_2\} = Q_1Q_2+Q_2Q_1 \\ &= -\frac{1}{4}\left\{\mathcal{P}_1\left(\mathcal{R}_1\frac{d}{dx}\right)\mathcal{Q}_1\left(\mathcal{R}_1\frac{d}{dx}\right)+\mathcal{Q}_1\left(\mathcal{R}_1\frac{d}{dx}\right)\mathcal{P}_1\left(\mathcal{R}_1\frac{d}{dx}\right)\right\} \\ &= -\frac{1}{4}\left\{\mathcal{P}_1\mathcal{Q}_1\left(\mathcal{R}_1\frac{d}{dx}\right)\left(\mathcal{R}_1\frac{d}{dx}\right)+\mathcal{Q}_1\mathcal{P}_1\left(\mathcal{R}_1\frac{d}{dx}\right)\left(\mathcal{R}_1\frac{d}{dx}\right)\right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{Q_1,Q_1\} = 2Q_1^2 &= -\frac{1}{2}\mathcal{P}_1\left(\mathcal{R}_1\frac{d}{dx}\right)\mathcal{P}_1\left(\mathcal{R}_1\frac{d}{dx}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\mathcal{P}_1^2\left(\mathcal{R}_1\frac{d}{dx}\right)\left(\mathcal{R}_1\frac{d}{dx}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} = H \end{aligned}$$

（ポイント）　$\frac{d}{dx}$ は $\mathcal{P}_1,\mathcal{Q}_1$ と反可換、$\mathcal{R}_1$ とは可換。
$\rightarrow$ $\left(\mathcal{R}_1\frac{d}{dx}\right)$ は $(\mathcal{P}_1,\mathcal{Q}_1,\mathcal{R}_1)$ と可換

（例２　$N = 4$超電荷）

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{i}{2}\mathcal{P}_1\left(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2\frac{d}{dx}\right)\\
Q_2 &= \frac{i}{2}\mathcal{Q}_1\left(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2\frac{d}{dx}\right)\\
Q_3 &= \frac{i}{2}\mathcal{R}_1\mathcal{P}_2\left(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2\frac{d}{dx}\right)\\
Q_4 &= \frac{i}{2}\mathcal{R}_1\mathcal{Q}_2\left(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2\frac{d}{dx}\right)
\end{aligned}
$$

（注）　$\left(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2\frac{d}{dx}\right)$ **は** $(\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1, \mathcal{R}_1), (\mathcal{P}_2, \mathcal{Q}_2, \mathcal{R}_2)$ **のすべてと可換**

$$\Downarrow$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\{Q_i, Q_j\} = 0, \quad (i \neq j)\\
&H \equiv 2Q_i^2 = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}
\end{aligned}
}
$$

(例３　$N=2$超電荷、$Superpotential$有り)

$$Q_1=\frac{1}{2}\left[i\mathcal{P}_1\left(\mathcal{R}_1\frac{d}{dx}\right)+\mathcal{Q}_1\left(\mathcal{R}_1W'(x)\right)\right]$$
$$Q_2=\frac{1}{2}\left[i\mathcal{Q}_1\left(\mathcal{R}_1\frac{d}{dx}\right)-\mathcal{P}_1\left(\mathcal{R}_1W'(x)\right)\right]$$

ただし、 $W'(-x)=-W'(x)$, $(\mathcal{P}_1,\mathcal{Q}_1$と反可換$)$
(注) $\left(\mathcal{R}_1\frac{d}{dx}\right)$ と $(\mathcal{R}_1W'(x))$ は $(\mathcal{P}_1,\mathcal{Q}_1,\mathcal{R}_1)$ と可換

$$\{Q_1,Q_2\}=0$$
$$H\equiv 2Q_i^2=-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}W'(x)^2-\frac{1}{2}\mathcal{R}_1W''(x)$$

同じようにすると、$N=4,6,8,10,\cdots$ 超電荷が構成できる。

6　接続条件

超電荷を構成しただけでは不十分である。

$$\boxed{\text{代数を満たす超電荷の存在}} \overset{?}{=} \boxed{\text{系に超対称性}}$$

- 超電荷とコンシステントなヒルベルト空間 $\mathcal{H}$：

$$\begin{cases} Q^\dagger = Q \\ Q\varphi(x) \in \mathcal{H}, \quad {}^\forall\varphi(x) \in \mathcal{H} \end{cases} \tag{9}$$

超電荷は不連続変換で構成しているため、一般にはコンシステントにならない !!

$$\Downarrow$$

S^1 上の適当な場所に点状相互作用（特異点）があり、そこでの接続条件をうまく選んだときだけコンシステントになる。

$$\Downarrow$$

超対称性

● 例

$$Q_1 = \frac{i}{2}\mathcal{P}_1\left(\mathcal{R}_1\frac{d}{dx}\right)$$
$$Q_2 = \frac{i}{2}\mathcal{Q}_1\left(\mathcal{R}_1\frac{d}{dx}\right)$$

この超電荷の両方とコンシステントな接続条件は次のものがある。

接続条件１
$$\begin{cases} \varphi(0_-) = \varphi(l_+) = 0 \\ \varphi'(0_+) = \varphi'(l_-) = 0 \end{cases}$$

接続条件２
$$\begin{cases} \varphi(0_+) = \varphi(l_-) = 0 \\ \varphi'(0_-) = \varphi'(l_+) = 0 \end{cases}$$

接続条件３
$$\begin{cases} \varphi(0_+) = c\varphi(0_+) + (a-ib)\varphi(l_-) \\ \varphi(0_-) = -c\varphi(0_-) + (a-ib)\varphi(l_+) \\ \varphi'(0_+) = -c\varphi'(0_+) - (a-ib)\varphi'(l_-) \\ \varphi'(0_-) = c\varphi'(0_-) - (a-ib)\varphi'(l_+) \end{cases}$$

ここで a, b, c は実数であり、さらに $a^2 + b^2 + c^2$ を満たすパラメータである。

- 我々がしたこと
  - 不連続変換$(\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1, \mathcal{R}_1), \cdots (\mathcal{P}_n, \mathcal{Q}_n, \mathcal{R}_n)$を用いて、一般の$N = D$超電荷を構成した。
  - その超電荷それぞれとコンシステントになる接続条件（ヒルベルト空間）を求めることができた。
  - S^1上に2^n個等間隔に点状相互作用があるとき、最大で$(2n+1)$超対称性がある。
  - 接続条件の選び方で任意の$N = D$超対称性に落とすこともできる。
  - 超対称性の自発的破れについても調べることができた。我々のモデルでは接続条件によって超対称性は破れ得る。