

# くり込み群と有効理論

寺尾 治彦 (金沢大学)

1日目 Wilson くり込み群の摂動的様相

2日目 Wilson くり込み群の非摂動的様相

参考：夏の学校講義録

1. 「Wilson流のくり込み群」大川正典
2. 「非摂動論的くり込み群」青木健一(1996)

# 1日目 Wilson くり込み群の摂動的様相

1. 摂動論におけるくり込み（古典的描像）
2. 摂動論におけるくり込み群
3. Wilson くり込み群
4. Wilson くり込み群とくり込み理論
5. 標準理論の階層性問題
6. 1日目のまとめとコメント

## 今日の要点

	古典的描像	Wilson 的描像
理論	局所場の理論	有効理論 (cutoff)
くり込み	無限大の除去	低エネルギー有効理論
くり込み群	有限個の parameter	有効作用 (無限次元)
くり込み可能性	原理	結果 (cutoff 非依存性)

標準理論 (くり込み可能理論) の成功



何を意味するのか？



Good or Bad ?

# 1. 摂動論におけるくり込み（古典的描像）

## (A) スカラー場理論の摂動展開

例： $\phi^4$  理論（Euclid空間）

$$S_E[\phi_0] = \int d^4x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_0)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 + \frac{\lambda_0}{4!} \phi_0^4, \quad Z = \int D\phi e^{-S_E[\phi_0]}$$

$$\langle \phi_0(p_1) \cdots \phi_0(p_n) \rangle = \frac{1}{Z} \int D\phi \phi_0(p_1) \cdots \phi_0(p_n) e^{-S_E[\phi_0]}$$

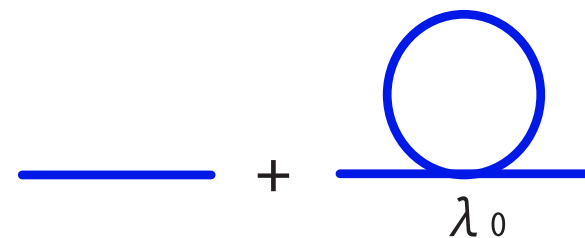
Note: parameter  $m_0^2$ ,  $\lambda_0$  は観測量ではない。

観測量は相関関数（Green関数）

⇒ parameter  $m_0^2$ ,  $\lambda_0$  と相関関数の関係を見る。

## 1. 2点関数

$$G^{(2)}(p) = \langle \phi_0(p) \phi_0(-p) \rangle = \frac{Z}{p^2 + m^2}$$

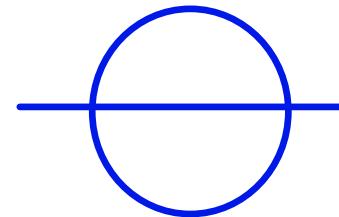


$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{p^2 + m_0^2} - \frac{1}{p^2 + m_0^2} \underbrace{\left( \frac{\lambda_0}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m_0^2} \right)}_{=\lambda_0 A} \frac{1}{p^2 + m_0^2} + O(\lambda_0^2) \\
&= \frac{1}{p^2 + m_0^2} \left( 1 - \lambda_0 A \frac{1}{p^2 + m_0^2} + O(\lambda_0^2) \right) \\
&= \frac{1}{p^2 + m_0^2} \left( \frac{1}{1 + \lambda_0 A \frac{1}{p^2 + m_0^2}} + O(\lambda_0^2) \right) \\
&= \frac{1}{p^2 + (m_0^2 + \lambda_0 A)} + O(\lambda_0^2)
\end{aligned}$$

⇒ mass parameter, wave functionは $O(\lambda_0)$ の量子補正を受ける。

$$m^2 = m_0^2 + \lambda_0 A + O(\lambda_0^2)$$

$$Z = 1 + O(\lambda_0^2)$$



## 2. 4点関数

$$\begin{aligned}
 G^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) & \quad \begin{array}{c} \text{Diagram 1: } \times \\ \text{Diagram 2: } \text{circle with } p_1, p_2, p_3, p_4 \text{ and } k \\ \text{Diagram 3: } \text{circle with } p_1, p_2 \\ \text{Diagram 4: } \text{circle with } p_1, p_2 \text{ and a loop} \end{array} \\
 &= \langle \phi_0(p_1)\phi_0(p_2)\phi_0(p_3)\phi_0(p_4) \rangle \\
 &= \prod_{i=1}^4 \left( \frac{1}{p_i^2 + m_0^2} \right) \underbrace{\left\{ -\lambda_0 + \lambda_0^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_1 + p_3 + k)^2 + m_0^2} \frac{1}{k^2 + m_0^2} + \dots \right\}}_{= \lambda_0^2 B(p_1, p_2, p_3, p_4)} \\
 & \quad + O(\lambda_0^3) \\
 &= - \prod_{i=1}^4 \left( \frac{1}{p_i^2 + m_0^2} \right) \lambda_0 (1 - \lambda_0 B(p_1, p_2, p_3, p_4)) + O(\lambda_0^3)
 \end{aligned}$$

⇒ 4 point coupling も  $O(\lambda_0)$  の量子補正を受ける。

$$\lambda \equiv G^{(4)}(0, 0, 0, 0) = \lambda_0 (1 - \lambda_0 B(0, 0, 0, 0) + O(\lambda_0^2))$$

## (B) 無限大と正則化

原因：無限に短距離の領域（高エネルギー）まで適用

⇒ momentum cutoffで正則化： $|k|^2 < \Lambda_0^2$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m_0^2} = \frac{1}{32\pi^2} \int dk^2 \left( 1 - \frac{m_0^2}{k^2 + m_0^2} \right) \\ &= \frac{1}{32\pi^2} \left[ \underbrace{\Lambda_0^2}_{\text{2次発散}} - m_0^2 \underbrace{\ln(\Lambda_0^2/m_0^2)}_{\text{対数発散}} + O(m_0^2/\Lambda_0^2) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{3}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2} = \frac{3}{32\pi^2} \int dk^2 \left[ \frac{1}{k^2 + m_0^2} - \frac{m_0^2}{(k^2 + m_0^2)^2} \right] \\ &= \frac{3}{32\pi^2} \left[ \underbrace{\ln(\Lambda_0^2/m_0^2)}_{\text{対数発散}} - 1 + O(m_0^2/\Lambda_0^2) \right] \end{aligned}$$

- $m^2, \lambda$  は cutoff scale の影響を大きく受ける。
- 逆に、 $m^2, \lambda$  から Lagrangian の parameter は決められない。

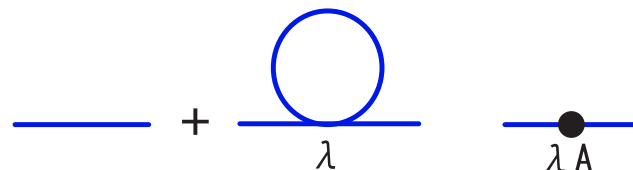
## (C) くり込み

相関関数を Lagrangian の parameter  $m_0^2, \lambda_0$  ではなく、“観測量”  $m^2, \lambda$  を用いて与える。

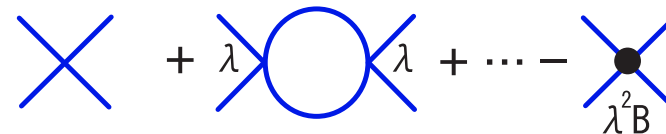
⇒ 摂動展開の各次数で相関関数が有限に決まる。(cutoffに依らない)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ren}} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_0)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 + \frac{\lambda_0}{4!} \phi_0^4 \quad \begin{cases} \phi_0 = \sqrt{Z}, & Z = 1 + O(\lambda^2) \\ m_0^2 = m^2 - \lambda A + O(\lambda^2) \\ \lambda_0 = \lambda (1 + \lambda B + O(\lambda^2)) \end{cases} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 - \underbrace{\lambda \left( A \frac{1}{2} \phi^2 - B \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right)}_{\text{counter term}} + \dots \end{aligned}$$

$$G^{(2)}(p) = \frac{1}{p^2 + m^2}$$



$$G^{(4)}(0, 0, 0, 0) = \prod_{i=1}^4 \frac{1}{p_i^2 + m^2} \Big|_{p_i=0} (-\lambda)$$

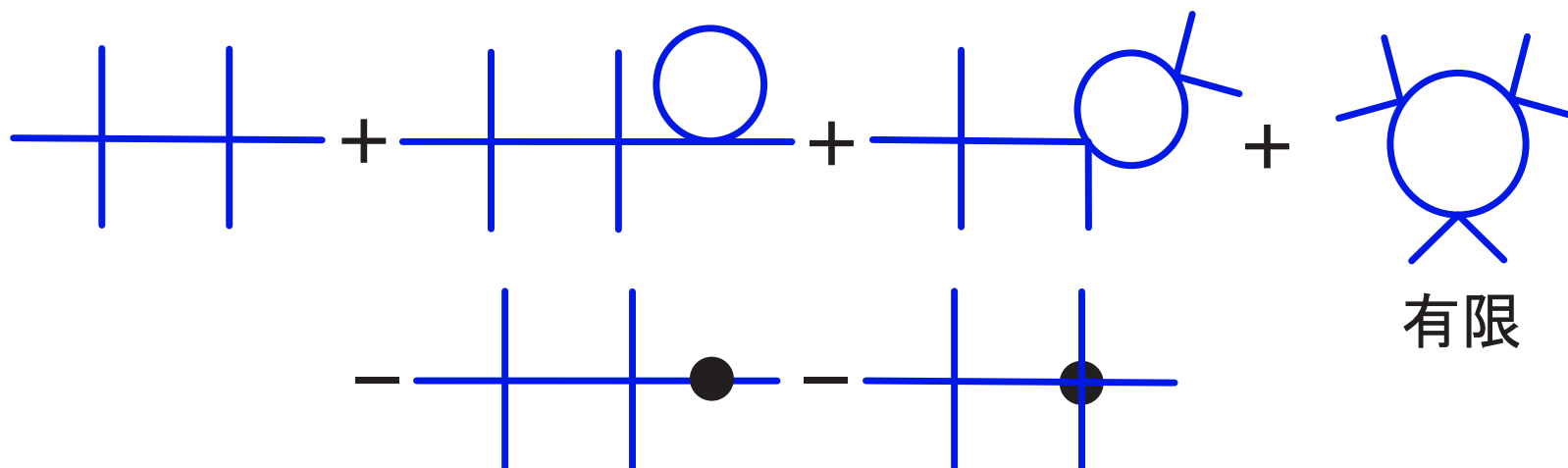




## (D) くり込み可能性

全ての相関関数が  $(m^2, \lambda)$  の有限な関数として計算できる。

例：  $G^{(6)}$  の  $O(\lambda^3)$  までの評価



発散は部分ダイアグラムにのみ現れ、counter term と相殺する。

⇒ 証明は複雑

Note：例えば、一般の運動量に対する相関関数  $G^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)$  などにも有限に決められる。⇒ (有限くり込み)

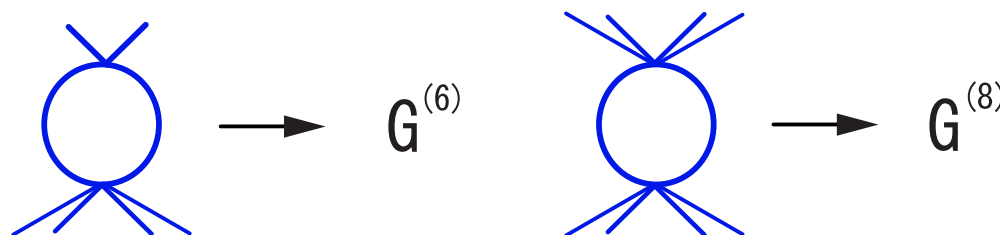
$$G^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) - G^{(4)}(0, 0, 0, 0) = \text{有限}$$

## (E) くり込み不可能な相互作用

例： $\phi^6$  相互作用

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\lambda_6}{6!}\phi^6 \quad \dots \quad \dim[\lambda_6] = -2$$

$\lambda_6$  は  $G^{(6)}$ ,  $G^{(8)}$  に発散を引き起こす。  $\Rightarrow$  これらの counter term が必要



同様に  $\lambda_8$  は  $G^{(8)}$ ,  $G^{(10)}$ ,  $G^{(12)}$  に発散を引き起こす。

$\Rightarrow$  無限個の counter term が必要  $\Rightarrow$  計算不可能

- 一般に負の次元の parameter ( $\dim[\mathcal{O}] > 4$ ) はくり込み不可能  $\dots$  無限個  
例： $\phi^6, \phi^2(\partial\phi)^2$ , etc.
- 0または正の次元の parameter ( $\dim[\mathcal{O}] \leq 4$ ) はくり込み可能  $\dots$  有限個  
例： $\phi^2, \phi^4, (\partial\phi)^2$

くり込み処方  $\dots$  摂動展開に準拠

くり込み可能性  $\dots$  要請 (原理)

## 2. 摂動論におけるくり込み群

### (A) 大きな対数補正

Vertex (1PI Green function)  $\Gamma^{(4)}$

$$G^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \prod_{i=1}^4 \frac{1}{p_i^2 + m^2} \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)$$

High energy での Vertex :  $(p_1 + p_2)^2 = (p_1 + p_3)^2 = (p_1 + p_4)^2 = \mu^2 \gg m^2$

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= -\lambda + \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \left\{ \ln \Lambda_0^2 - \int_0^1 dx \ln[m^2 + x(1-x)\mu^2 - 1] \right\} \\ &\quad - \underbrace{\frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \{ \ln \Lambda_0^2 - \ln m^2 - 1 \}}_{\text{counter term}} + O(\lambda^2) \\ &= -\lambda - \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln[1 + x(1-x)(\mu^2/m^2)] + O(\lambda^2) \end{aligned}$$

$\mu^2 \gg m^2 \Rightarrow$  高次の摂動展開が必要、ついには摂動展開が破綻

## (B) <り込み群

- $\Gamma^{(4)}|_{(p_1+p_2)^2=\mu^2} = \lambda(\mu)$  として counter term を決めれば、摂動展開は  $p^2 \sim \mu^2$  で良くなる。
- $\lambda(\mu)$  は  $0 < \mu_1^2 < \mu_2^2 < \dots < \mu^2$  として逐次的に求める。

$\mu_i^2 \gg m^2$  として補正を評価すると

$$\lambda(\mu_{i+1}) = \lambda(\mu_i) + \frac{3\lambda(\mu_i)^2}{32\pi^2} \ln \frac{\mu_{i+1}^2}{\mu_i^2} = \lambda(\mu_i) + \frac{3\lambda(\mu_i)^2}{32\pi^2} \Delta\mu^2$$

$$\mu \frac{d\lambda(\mu)}{d\mu} = \beta_\lambda = \frac{3}{32\pi^2} \lambda(\mu)^2 \quad : \text{ベータ関数}$$

$\mu^2 = m^2$  で  $\lambda(\mu) = \lambda$  として解くと

$$\lambda(\mu) = \frac{\lambda}{1 - \frac{3\lambda}{32\pi^2} \ln \frac{\mu^2}{m^2}} = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3\lambda}{32\pi^2} \ln \frac{\mu^2}{m^2} \right)^n \quad : \text{leading log}$$

$\rightarrow \infty!$  at  $\mu^2 \sim m^2 \exp(32\pi^2/3\lambda) \gg 1$  : Landau 特異点

<り込み群 … 摂動展開の改善

### 3. Wilson くり込み群

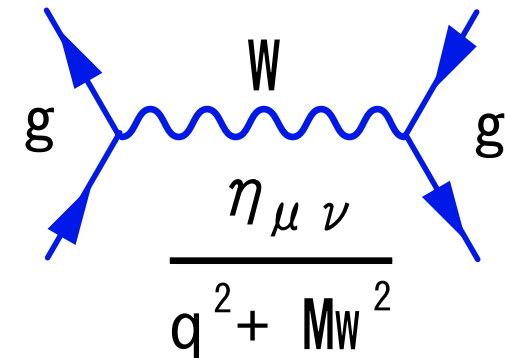
#### (A) Relevant, irrelevant, marginal

低エネルギースケールでの相互作用に着目 ( tree level )

例 : Weak interaction

$$\mathcal{L}_{\text{weak}} \sim \bar{\psi}_i(\not{\partial} + m)\psi_i - G_F \bar{\psi}_4 \gamma_\mu \psi_3 \bar{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_1$$

$$G_F \sim \frac{g_W^2}{M_W^2} \quad \dots \quad \dim[G_F] = -2$$



低エネルギー ( $q^2 \sim \mu^2$ ) での散乱断面積

$$\sigma \propto G_F^2, \quad \dim[\sigma] = -2 \quad \Rightarrow \quad \sigma \sim G_F^2 \mu^2 \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \mu^2 \rightarrow 0$$

くり込み不可能な相互作用は低エネルギーの現象には効かない。

$\dim[\mathcal{O}] > 4$  の operator  $\dots$  irrelevant

## 例 : 3-point interaction

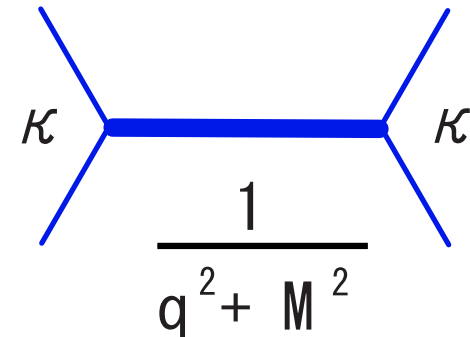
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\kappa}{3!}\phi^3 \quad \dim[\kappa] = 1$$

For  $\mu \gg m, \kappa$

$$\sigma_{2\phi \rightarrow 2\phi} \sim \left(\frac{\kappa}{\mu}\right)^4 \frac{1}{\mu^2} \rightarrow 0 \quad \text{as } \mu^2 \rightarrow \infty$$

For  $\mu \ll m, \kappa$

$$\sigma_{2\phi \rightarrow 2\phi} \sim \left(\frac{\kappa}{m}\right)^4 \frac{1}{\mu^2} \rightarrow \text{large} \quad \text{as } \mu^2 \rightarrow 0$$



$\dim[\mathcal{O}] > 4$  の operator は低エネルギーで支配的  $\cdots$  relevant

$\dim[\mathcal{O}] = 4$  の operator の振る舞いは量子補正で決まる。  $\cdots$  marginal

$\Rightarrow$  低エネルギーの現象はくり込み可能な相互作用で記述できる。

## (B) Wilson 有効作用 ( Wilsonian effective action )

Cutoff理論 ( $|p| < \Lambda_0$ ) の低エネルギー現象を見る。

高エネルギー領域の物理は unknown  $\Rightarrow$  cutoff は不可避。問題はその依存性。

$$\phi(x) = \int_{|p| < \Lambda_0} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \phi(p) e^{ipx}$$

$$Z = \int \prod_{|p| < \Lambda_0} d\phi(p) e^{-S_0[\phi; \Lambda_0]} \Rightarrow \text{有限な相関関数}$$

**Wilson の視点** : 低エネルギーでの現象を記述する “有効理論” を導く。( “micro” から “macro” へ )

### Wilson 有効作用

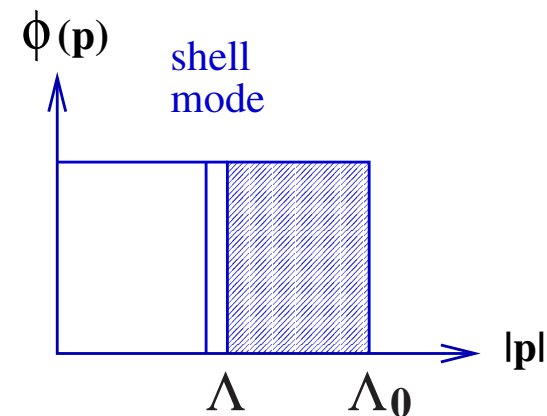
Cutoff  $\Lambda \ll \Lambda_0$  で同じ相関関数を導く作用

$$Z = \int \prod_{|p| < \Lambda_0} d\phi(p) e^{-S_{\text{eff}}[\phi; \Lambda]}, \quad S_{\text{eff}}[\phi; \Lambda] = \int d^d x \sum_i g_i(\Lambda) \Lambda^{-D_i} \mathcal{O}_i[\phi]$$

## (C) Wilson 有効作用に対するくり込み群

$\Lambda \rightarrow \Lambda - \delta\Lambda$  に対する有効作用の無限小変化を見る。

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int_{|p| < \Lambda} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \phi(p) e^{ipx} \\ &= \left( \int_{|p| < \Lambda - \delta\Lambda} + \int_{\Lambda - \delta\Lambda < |p| < \Lambda} \right) \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \phi(p) e^{ipx} \\ &= \phi_{<}(x) + \phi_s(x) \quad : \text{shell mode}\end{aligned}$$



Shell mode 積分:

$$\begin{aligned}Z &= \int \prod_{|p| < \Lambda - \delta\Lambda} d\phi_{<}(p) \underbrace{\prod_{\Lambda - \delta\Lambda < |p| < \Lambda} d\phi_s(p)}_{\text{shell mode}} e^{-S_{\text{eff}}[\phi_{<} + \phi_s; \Lambda]} \\ &= \int \prod_{|p| < \Lambda - \delta\Lambda} d\phi_{<}(p) e^{-S_{\text{eff}}[\phi_{<} ; \Lambda - \delta\Lambda]}\end{aligned}$$

Note: 格子理論 : 格子間隔  $a (\sim 1/\Lambda)$  の変更 (block spin 変換)



## Shell mode 積分の実行

$$\begin{aligned}
 S_{\text{eff}}[\phi_{<} + \phi_s] &= S_{\text{eff}}[\phi_{<}] + \int_p' \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \phi_p} \phi_s(p) + \frac{1}{2} \int_p' \int_q' \frac{\delta^2 S_{\text{eff}}}{\delta \phi_p \delta \phi_q} \phi_s(p) \phi_s(q) \\
 &\quad + \frac{1}{3!} \int_p' \int_q' \int_r' \frac{\delta^3 S_{\text{eff}}}{\delta \phi_p \delta \phi_q \delta \phi_r} \phi_s(p) \phi_s(q) \phi_s(r) + \dots \\
 &= S_{\text{eff}}[\phi_{<}] + \int_p' \left\{ \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \phi_p} \phi_s(p) + \frac{1}{2} \phi_s(p) \frac{\delta^2 S_{\text{eff}}}{\delta \phi_p \delta \phi_{-p}} \phi_s(-p) \right\} + O(\delta \Lambda^2)
 \end{aligned}$$

where  $\int_p' = \int_{\Lambda - \delta \Lambda < |p| < \Lambda} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \sim O(\delta \Lambda)$

有効作用の微小変化：

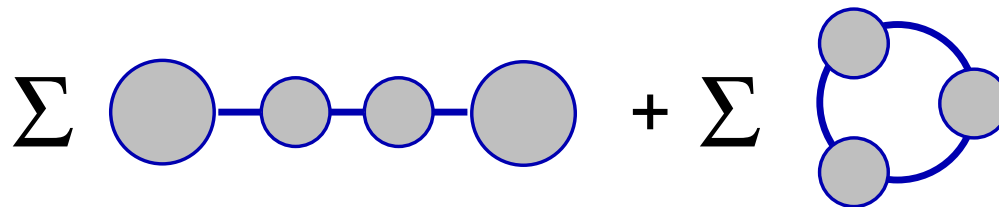
$$\begin{aligned}
 \exp\{S_{\text{eff}}[\phi; \Lambda] - S_{\text{eff}}[\phi; \Lambda - \delta \Lambda]\} &= \exp\{\delta S_{\text{eff}}[\phi; \Lambda]\} \\
 &= \int \mathcal{D}\phi_s \exp \left\{ - \int_p' \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \phi_p} \phi_s(p) - \frac{1}{2} \phi_s(p) \frac{\delta^2 S_{\text{eff}}}{\delta \phi_p \delta \phi_{-p}} \phi_s(-p) + O(\delta \Lambda^2) \right\}
 \end{aligned}$$

Shell mode 積分 = ガウス積分 : 1 loop exact

$$\begin{aligned}
 \int \prod dx_i e^{-x_i J_i - \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j} &= \int \prod dx_i e^{-\frac{1}{2} (x_i + (A^{-1} J)_i) A_{ij} (x_j + (A^{-1} J)_j) + \frac{1}{2} J_i A_{ij}^{-1} J_j} \\
 &= (Det A)^{-1/2} e^{\frac{1}{2} J_i A_{ij}^{-1} J_j} \\
 &= e^{\frac{1}{2} J_i A_{ij}^{-1} J_j - \frac{1}{2} \text{tr} \ln A}
 \end{aligned}$$

Note :  $A^{-1}$  = propagator  $\Rightarrow$  Gauss 積分 = (tree +) 1-loop diagram

$$\delta S_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \int' dp \left\{ \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \phi_p} \left( \frac{\delta^2 S_{\text{eff}}}{\delta \phi_p \delta \phi_{-p}} \right)^{-1} \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \phi_{-p}} - \text{tr} \ln \left( \frac{\delta^2 S_{\text{eff}}}{\delta \phi_p \delta \phi_{-p}} \right) \right\}$$



Note :  $S_{\text{eff}}[\phi]$  は lower momentum mode の汎関数

$$\delta S_{\text{eff}}[\phi] = \sum_n \prod_i \int_{p_i} \phi(p_1) \cdots \phi(p_n) \delta G^{(n)}(p_1, \cdots, p_n)$$

# スケール変換

次元を持つ量 (momentum, parameter) は全て cutoff  $\Lambda$  を単位に測る。

$$S_{\text{eff}}[\phi; \Lambda] = \int d^d x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} \tilde{m}^2 \Lambda^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \tilde{\lambda}_4 \Lambda^{4-d} \phi^4 + \frac{1}{6!} \tilde{\lambda}_6 \Lambda^{6-2d} \phi^6 + \dots$$

Note :  $\dim[\phi] = (d - 2)/2$

カノニカルスケーリング :

スケール変換  $\Lambda \rightarrow \Lambda' = \Lambda - \delta\Lambda$  では “単位” が変化する。

$$S_{\text{eff}}[\phi; \Lambda'] = \int d^d x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} \tilde{m}^2 \left(\frac{\Lambda}{\Lambda'}\right)^2 \Lambda'^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \tilde{\lambda}_4 \left(\frac{\Lambda}{\Lambda'}\right)^{4-d} \Lambda'^{4-d} \phi^4 + \frac{1}{6!} \tilde{\lambda}_6 \left(\frac{\Lambda}{\Lambda'}\right)^{6-2d} \Lambda'^{6-2d} \phi^6 + \dots + \delta S_{\text{eff}}[\phi] \text{ (量子補正)}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} Z' & = 1 & + \text{(量子補正)} & : \text{wave function renormalization} \\ \tilde{m}'^2 & = \tilde{m}^2(1 + 2\delta\Lambda) & + \text{(量子補正)} & : \text{relevant} \\ \tilde{\lambda}'_4 & = \tilde{\lambda}_4(1 + (4 - d)\delta\Lambda) & + \text{(量子補正)} & : \text{marginal} \\ \tilde{\lambda}'_6 & = \tilde{\lambda}_6(1 + (6 - 2d)\delta\Lambda) & + \text{(量子補正)} & : \text{irrelevant} \end{array} \right.$$

# Exact Renormalization Equation (ERG)

F.Wenger, A.Houghton, P.R.A8(1973)

$t = \ln(\Lambda_0/\Lambda)$  をスケールパラメーターとすると ( $\Lambda = 1$ )

$$\frac{dS_{\text{eff}}}{dt} = \underbrace{dS_{\text{eff}} - \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \phi_p \left( D_\phi + \frac{\eta}{2} + p^\mu \frac{\partial'}{\partial p^\mu} \right) \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \phi_p}}_{\text{canonical scaling}} - \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \delta(|p| - 1) \left\{ \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \phi_p} \left( \frac{\delta^2 S_{\text{eff}}}{\delta \phi_p \delta \phi_{-p}} \right)^{-1} \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \phi_{-p}} - \text{tr} \ln \left( \frac{\delta^2 S_{\text{eff}}}{\delta \phi_p \delta \phi_{-p}} \right) \right\}$$

## 異常次元 (anomalous dimension)

$$\dim[\phi] = \frac{d-2}{2} + \frac{1}{2} \frac{\ln Z(\lambda)}{\ln \Lambda} = D_\phi + \frac{1}{2} \eta$$

### Note

- 無限個の coupling に対するくりこみ群
- $S_{\text{eff}}[\phi]$ : 内線運動量 ( $|p| > \Lambda$ ) の連結グリーン関数の和
- ERG の解はグリーン関数を (非摂動的に) 与える。

## 4. Wilson くり込み群とくり込み理論

### (A) 近似的解析(local operator expansion)

簡単のために理論空間 (パラメータ空間) を次の3次元に制限 ( $\rho = \phi^2/2$ )

$$S_{\text{eff}}[\phi] = \int d^d x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + a_1 \rho + \frac{1}{2} a_2 \rho^2 + \frac{1}{3!} a_3 \rho^3$$

ERG方程式に代入して展開すると

$$\dot{a}_1 = 2a_1 + \underbrace{\frac{A_d}{2} \frac{3a_2}{1+a_1}}_{(a)} \quad A_d = 2/(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)$$

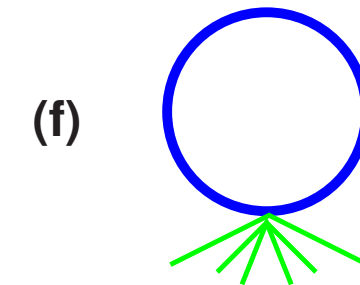
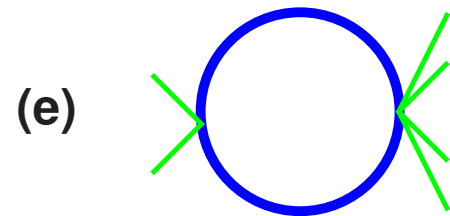
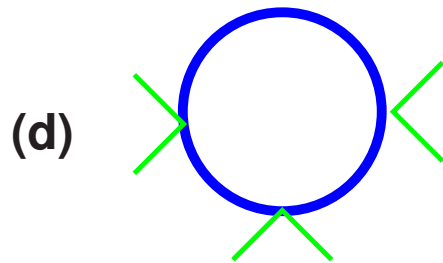
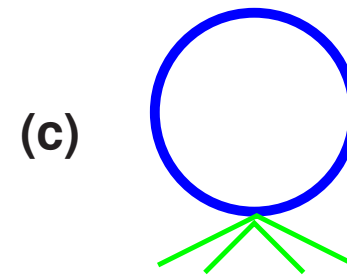
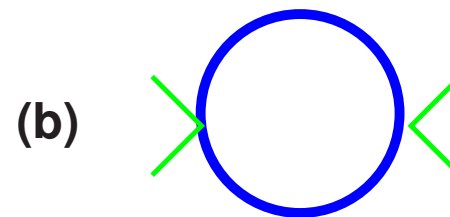
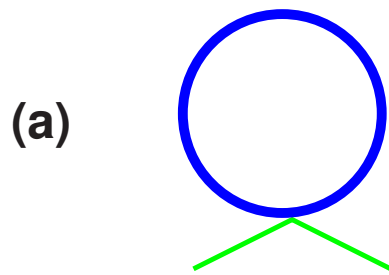
$$\dot{a}_2 = (4-d)a_2 + \frac{A_d}{2} \left[ \underbrace{-\frac{9a_2^2}{(1+a_1)^2}}_{(b)} + \underbrace{\frac{10a_3}{1+a_1}}_{(c)} \right]$$

$$\dot{a}_3 = (6-2d)a_3 + \frac{A_d}{2} \left[ \underbrace{\frac{27a_2^3}{(1+a_1)^3}}_{(d)} - \underbrace{\frac{45a_2 a_3}{(1+a_1)^2}}_{(e)} + \underbrace{\frac{21a_4}{1+a_1}}_{(f)} \right]$$

制限したオペレータ以外への補正は捨てる ((f) の補正はない)

$\Rightarrow \{a_1, a_2, a_3\}$  で閉じた方程式

# 各補正に対応するダイアグラム



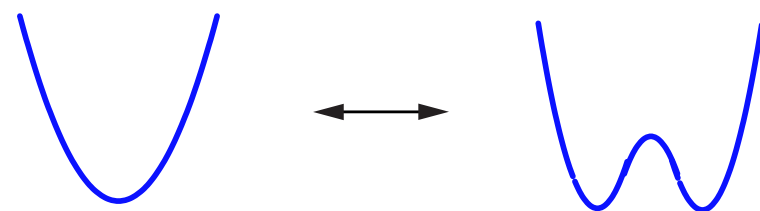
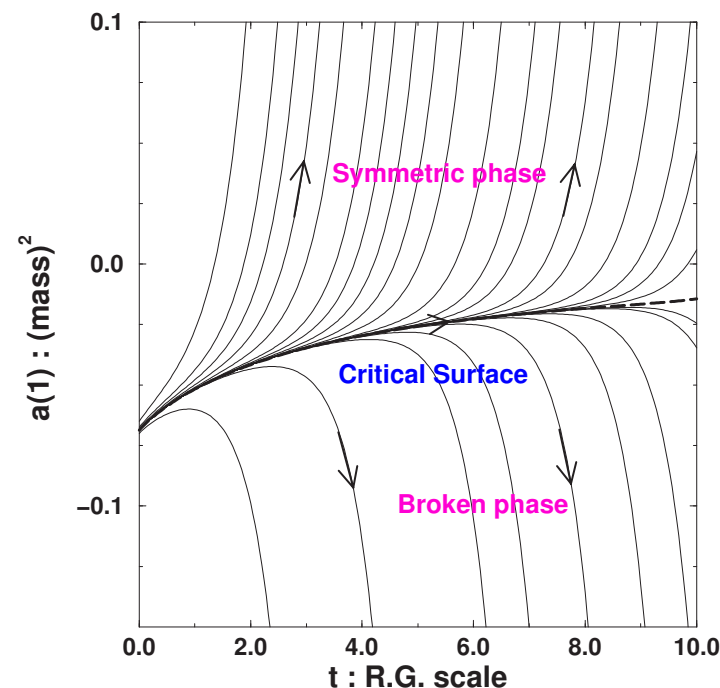
## (B) $a_1 = m^2$ のRG flow

簡単のため、 $a_2(t) = \text{一定}$ 、 $a_1(t) \ll 1$  としてみると

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &\sim 2 \left( a_1 + \frac{3A_d}{4} a_2 \right) \\ a_1(t) &\sim e^{2t} \left( a_1(0) + \frac{3A_d}{4} a_2 \right) \\ &\sim (\Lambda_0/\Lambda)^2 \quad : \text{relevant}\end{aligned}$$

Note :

- 臨界面が存在  $\Leftrightarrow$  対称性の自発的破れ  
 $\langle \phi \rangle \neq 0 \Rightarrow (\phi \rightarrow -\phi)$  が破れる。
- 臨界面上の理論は massless :  
 $m^2 = a_1 \Lambda^2 \rightarrow 0$
- 臨界面上の理論は  $a_1$  が不安定  
Relevant operator  $\Rightarrow$  微調整問題



## (C) $(a_2, a_3)$ の RG flow

臨界面上の RG flow ( $d = 4$ ) をみると

- $a_2(t)$  は低エネルギー側で減少  
... marginal irrelevant
- $a_3(t)$  は renormalized trajectory に急速に近づく: “赤外強収束”
- 低エネルギー有効理論の 6-point vertex は 4-point coupling のみで決まり、cutoff scale で与えた parameter には依らない。

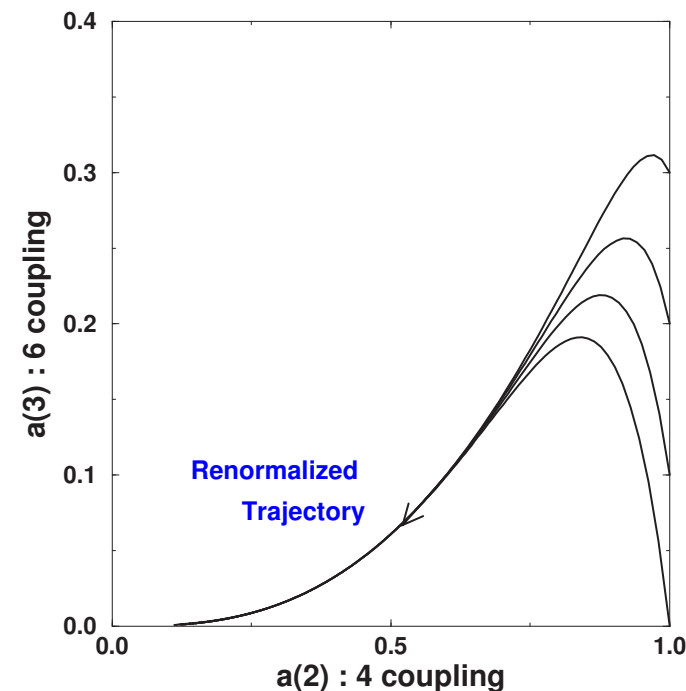
$$a_3(t) \rightarrow a_3^*(a_1(t), a_2(t))$$

### くり込み可能理論

低エネルギー有効理論の全ての irrelevant parameter が renormalized trajectory に赤外強収束する。

⇒

相関関数が  $(a_1, a_2)$  のみで決まる。  
: **くり込み可能理論**





## (D) 2 parameter の toy model

$(a_2 = \lambda_4, a_3 = \lambda_6)$  のみの RGE ( $d = 4$ ) :

$$\Lambda \frac{d\lambda_4}{d\Lambda} = \beta_4(\lambda_4, \lambda_6)$$

$$\Lambda \frac{d\lambda_6}{d\Lambda} = 2\lambda_6 + \beta_6(\lambda_4, \lambda_6)$$

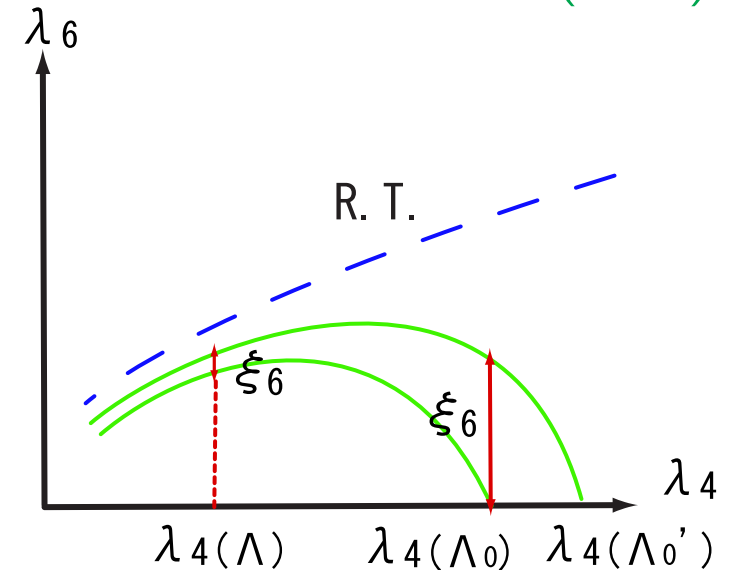
$\xi_6(\Lambda)$ : ある RG flow  $(\lambda_4(\Lambda), \lambda_6(\Lambda))$  から微小に離れた別の RG flow との  $\lambda_6$  方向の差

$$\Lambda \frac{d\xi_6}{d\Lambda} = 2\xi_6 + \underbrace{\left\{ \frac{\partial\beta_4}{\partial\lambda_4} + \frac{\partial\beta_6}{\partial\lambda_6} - \Lambda \frac{d}{d\Lambda} \ln \beta_4 \right\}}_{O(\lambda_4, \lambda_6)} \xi_6$$

$$\xi_6(\Lambda) = \xi_6(\Lambda_0) \left( \frac{\Lambda}{\Lambda_0} \right)^2 \{1 + O(\lambda_4(\Lambda) \ln(\Lambda_0/\Lambda))\} \longrightarrow 0 \quad \text{as } \Lambda \rightarrow 0$$

一般に flow の間の irrelevant parameter 方向のズレは  $\Lambda$  の power で減少。

J. Polchinski, N.P.B231(1984)



## (E) 連続極限

$\lambda_4(\Lambda)$  を固定して、 $\Lambda_0 \rightarrow \infty$  の極限を考える。

- 全ての RG flow は renormalized trajectory に収束する。
- 低エネルギー有効作用は relevant operator  $\lambda_4(\Lambda)$  のみで決まる。  
… くり込み可能な理論が必然的に現れる。
- UV scale における irrelevant operator (くり込み不可能相互作用) の効果は relevant operator (くり込み可能な parameter) に “くり込まれて” しまう。  
… UV scale の物理は分からない。

Note :

- くり込み不可能な理論の連続極限 (非線形シグマ模型、重力理論)  
例 : 4 Fermi 理論

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\not{\partial} + m)\psi + \frac{G}{2\Lambda_0}(\bar{\psi}\psi)^2$$

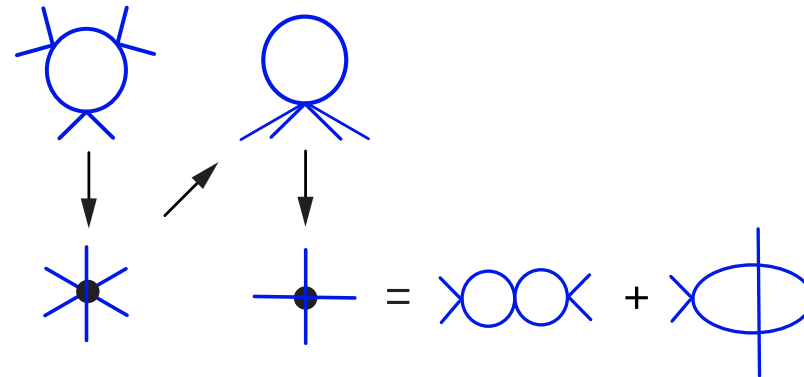
$\Lambda_0 \rightarrow \infty$  の極限は相互作用のない理論 (trivial な理論) に帰着。

- Landau 特異点  $\Rightarrow$  4 次元スカラー場の理論は trivial。
- 格子理論 :  $\Lambda_0 \rightarrow \infty$  は  $a \rightarrow 0$  (連続極限) に対応。

## (F) 近似について

Exact RG は 1 loop exact とは言え、近似計算が必要。

近似の改善 = 理論空間の拡大：より多くの有効相互作用  
 例： $a_3$  と 2-loop 補正



後者は摂動論のくり込み群では2-loopの寄与

局所ポテンシャル近似

A.Hasenfratz, P.Hasenfratz, N.P.B270(1986)

$$S_{\text{eff}} = \int d^d x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + V_{\text{eff}}(\phi)$$

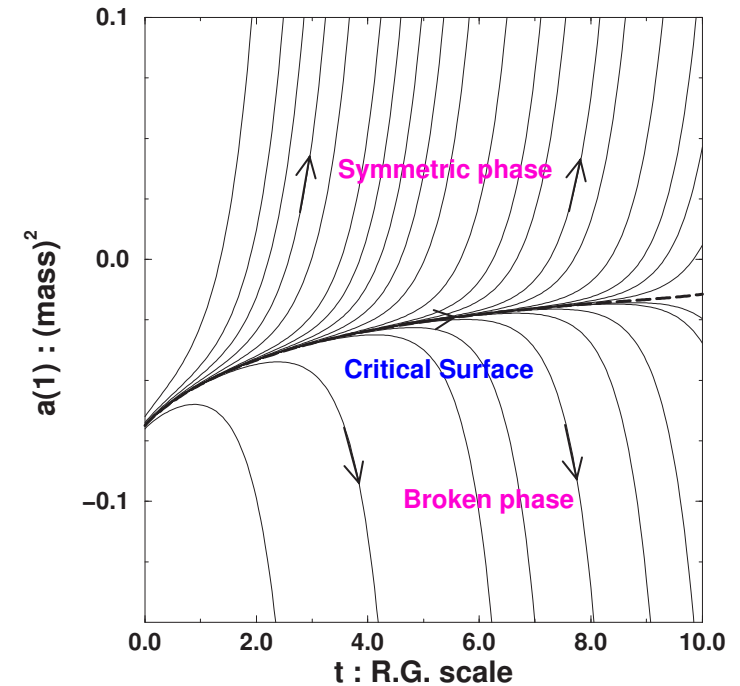
$$\Rightarrow \frac{dV_{\text{eff}}}{dt} = dV_{\text{eff}} - \frac{d-2}{2} \phi V'_{\text{eff}}(\phi) + \frac{A_d}{2} \ln \left[ 1 + V''_{\text{eff}}(\phi) \right]$$

## (G) Mass scale と decoupling

あるスケール  $\mu$  で  $a_1(\mu) = 1$  となる RG flow

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= 2a_1 + \frac{3}{16\pi^2} \frac{a_2}{1+a_1} \\ \dot{a}_2 &= -\frac{9}{16\pi^2} \frac{a_2^2}{(1+a_1)^2} + \dots\end{aligned}$$

$\Rightarrow \Lambda < \mu$  では 量子補正は急速に小さくなり canonical scaling に従う。



$$\begin{aligned}a_1(\Lambda) &\simeq \left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)^2 a_1(\mu) \Rightarrow m^2 = a_1(\Lambda)\Lambda^2 \simeq \mu^2 \\ a_2(\Lambda) &\simeq a_2(\mu) = \lambda_4 = \text{一定}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \Lambda > \mu$  では 殆ど massless 理論の RG flow に一致する。

## 5. 標準理論の階層性問題

### (A) 新しい物理のスケール

標準理論の枠組み = ゲージ対称性 + くり込み可能性



標準理論 = 低エネルギー有効理論 ⇔ “新しい物理”

#### 1. 対称性 (accidental symmetry) の破れ

Baryon 数 : 陽子崩壊  $\Rightarrow M_{\text{GUT}} > 10^{16} \text{ GeV}$

Lepton (flavor) 数 : ニュートリノ質量  $\Rightarrow M_{\text{R}} > 10^{10} \text{ GeV}$

$$\delta\mathcal{L} \sim \frac{Y^2}{M_{\text{R}}^2} \bar{\psi}_\ell \psi_\ell H H \sim Y^2 \frac{v^2}{M_{\text{R}}^2} \bar{\psi}_\nu \psi_\nu \quad : \text{neutrino Majorana mass term}$$

#### 2. ヒッグス粒子の質量の微調整問題

標準理論のカットオフスケールが大きい  $\Rightarrow$  標準理論は殆ど臨界面上 :  $m_H^2$  の微調整

### 3. 標準理論のカットオフスケール（新しい物理のスケール）

例： $\phi = \text{SM fields}$ ,  $\Phi = \text{heavy field}$

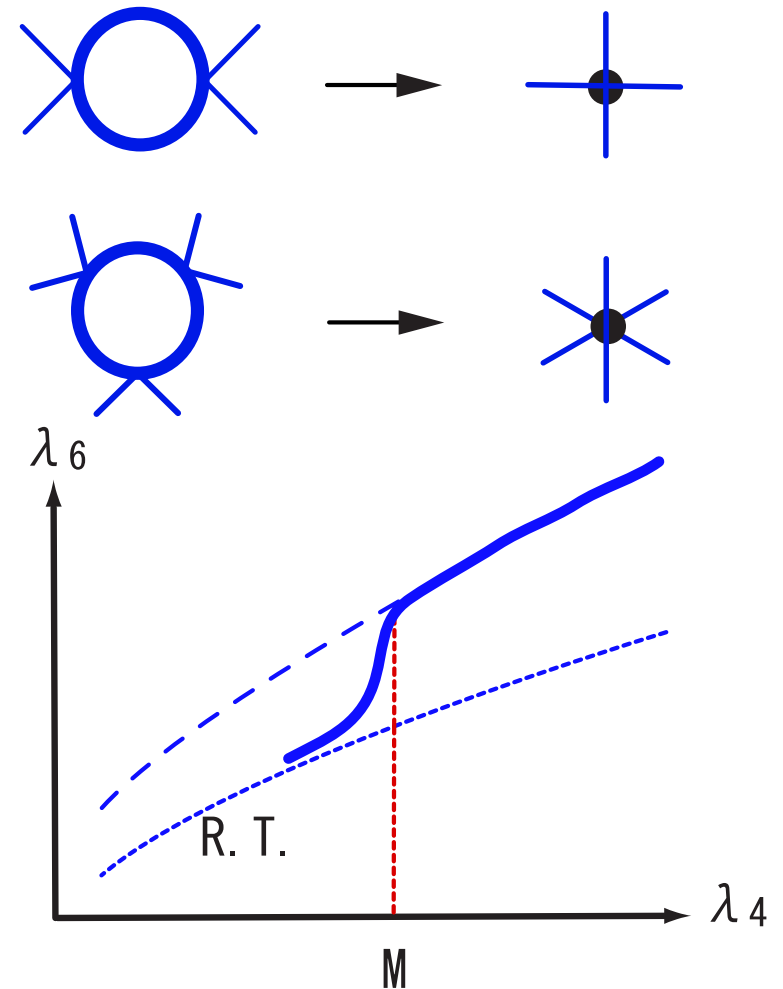
$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[\phi] + \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^2 + \frac{1}{2}M^2\Phi^2 + \kappa\phi^2\Phi^2$$

Heavy particle ( $\Phi$ ) の寄与

- 標準理論の parameter への補正：  
くり込まれてしまう。
- くり込み不可能相互作用への補正：  
SM の renormalized trajectory に  
 $O(1/M^2)$  のズレを与える。

⇒ 新しい物理の情報

$$\Delta\mathcal{L} \sim \frac{c}{M^2}\phi^6 + \dots$$



## (B) Electro-Weak 理論の小さい階層性問題

$SU(2) \times U(1)$  ゲージ対称な次元 6 の operator :

B.Grinstein, M.B.Wise, P.L.B265 (1991)

$$\delta\mathcal{L}_{\text{SM}} = \frac{c_{WB}}{M^2} H^\dagger \tau^a H W_{\mu\nu}^a B_{\mu\nu} + \frac{c_H}{M^2} |H^\dagger D_\mu H|^2$$

対称性の破れ (Higgs の真空期待値 :  $\langle H \rangle = (v/\sqrt{2}, 0)$ )

$$\delta\mathcal{L}_{\text{SM}} \sim c_{WB} \frac{v^2}{4M^2} W_{\mu\nu}^3 B_{\mu\nu} - c_H \frac{v^4}{16M^2} (gW_\mu^3 - g'B_\mu)^2$$

S, T parameter と精密測定 (LEP): ( $m_H = 115$  GeV)

$$\alpha S = 4 \sin 2\theta_W c_{WB} (v^2/M^2) \quad S = 0.03 \pm 0.11$$

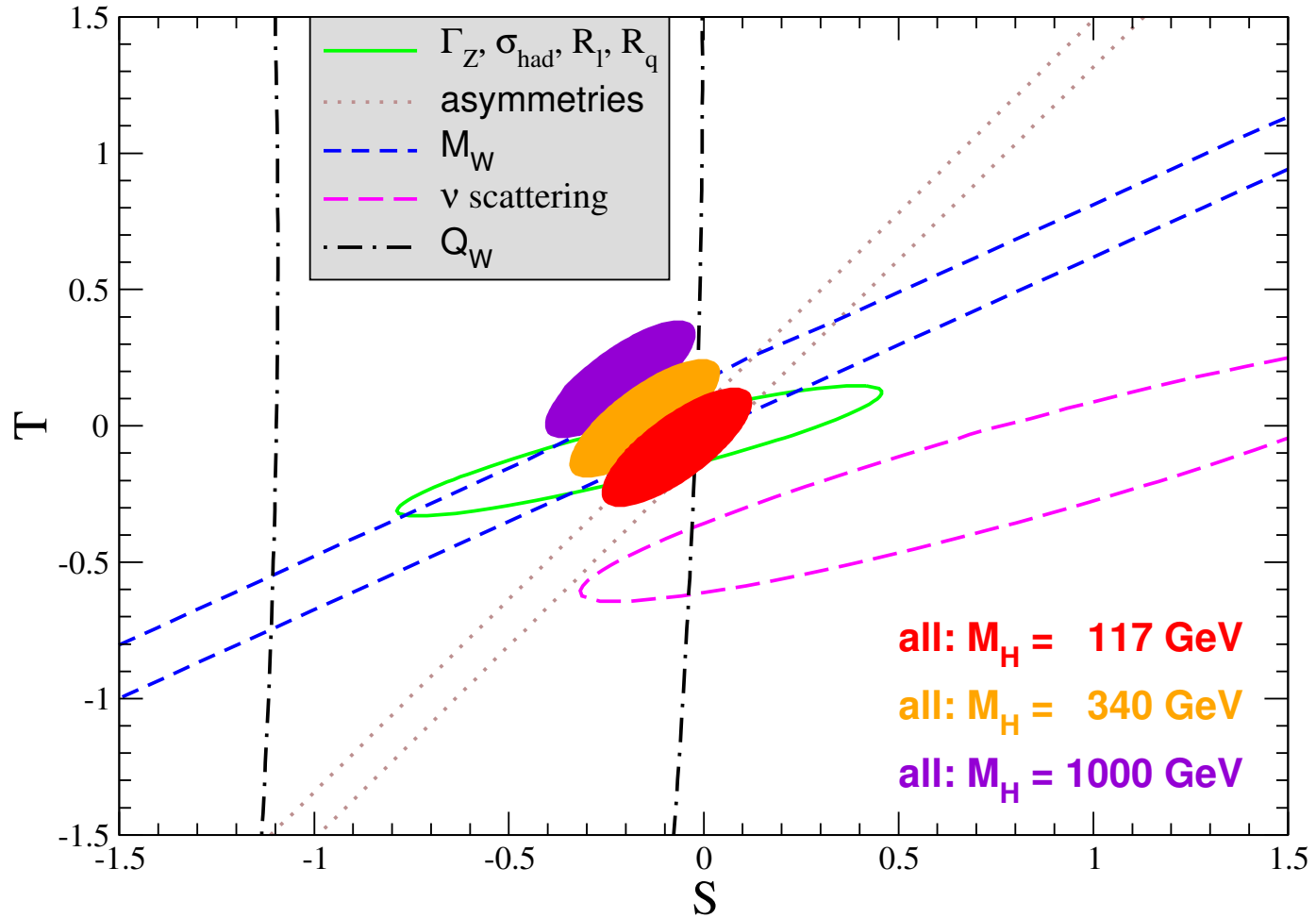
$$\alpha T = -c_H (v^2/M^2) \quad T = -0.02 \pm 0.13$$

小さい階層性問題:

$\Lambda_{\text{SM}}$ への制限 :	relevant operator	$\Rightarrow$	$\Lambda_{\text{SM}} < 1$ TeV
	irrelevant operator	$\Rightarrow$	$\Lambda_{\text{SM}} > \text{数 TeV}$

# Oblique Parameters

constraints on gauge boson self-energies



by P. Langaker



## 6. 1日目のまとめとコメント

### (A) Wilson くり込み群の特性

	古典的描像	Wilson的描像
理論	局所場の理論	有効理論 (cutoff)
くり込み	無限大の除去	低エネルギー有効理論
くり込み群	有限個の parameter 摂動展開の改善	有効作用 (無限次元) 場の理論の解法
くり込み可能性	原理	結果 (R.T.への収束)
relevant op.	free parameter	(不)自然さの問題
irrelevant op.	禁止	“新しい物理”の情報
	摂動論に準拠 実的な計算処方	非摂動的 直感的 解析的計算には不適

## (B) Wilson くり込み群の問題

### ゲージ対称性の破れ

Abelian gauge symmetry と cutoff

$$\begin{aligned} \delta A_\mu(x) = \partial\theta(x) &\longrightarrow \delta A_\mu(p) = ip_\mu\theta(p) \\ \delta\psi(x) = i\theta(x)\psi(x) &\longrightarrow \delta\psi(p) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \theta(k)\psi(p-k) \quad \text{convolution} \end{aligned}$$

運動量積分をカットするとゲージ対称性が壊れる。

⇒

- 明白にゲージ対称性を保つ定式化がない。
- ゲージ理論のくり込み群方程式の扱いは複雑。
- ゲージ理論のくり込み可能性の摂動的な証明

C.Becchi, lecture note (1993)

U.Ellwanger, P.L.B335 (1994)

M.Bonini et. al., N.P.B418 (1994)

## 参考文献

- 夏の学校講義録

- 「Wilson流のくり込み群」大川正典.

- 「非摂動論的くり込み群」青木健一(1996).

- Reviews, Lecture Note

- K. G. Wilson and I. G. Kogut, Phys. Rep. **12** (1974) 75.

- J. Polchinski, hep-th/9210046, TASI Lecture note (1992).

- D. B. Kaplan, Lecture note (1995).

- 参考論文

- F. Wegner and A. Houghton, Phys. Rev. **A8** (1973) 401.

- J. Polchinski, Nucl. Phys. **B231** (1984) 269.

- A. Hazenfratz and P. Hazenfratz, Nucl. Phys. **B270** (1986) 269.

- T.E. Clark, B. Haeri and S.T. Love, Nucl. Phys. **B402** (1993) 628.

- C. Wetterich, Phys. Lett. **B301** (1993) 90.

- T. R. Morris, Phys. Lett, **B334** (1994) 355; Int. J. Mod. Phys, **A9** (1994) 2411.