「位相的弦理論の分配関数と数え上げ」

2006 年度原子核三者若手夏の学校素粒子論パート講義 C 講義録*

講師：菅野浩明先生（名古屋大学多元数理科学研究科）

2006 年 8 月 9 日, 10 日

目次

0 Why topological string? 1

0.1 History and references 3

1 Topological twist of $\mathcal{N}=(2,2)$ SUSY sigma-model 6

2 Topological A-model 13

3 Topological string = coupling to 2D gravity 28

4 Ubiquity of $c=1$ string amplitude 32

0 Why topological string?

（司会）講義の方に移りたいと思います. 講師は名古屋大学の菅野さんで, 「位相的弦理論の分配関数と数え上げ」というタイトルでお話し頂きます. ではよろしくお願いします.

どうもありがとうございます. 名古屋大学の菅野です. 今日と明日, 午前の時間を使って, 位相的弦理論についての入門的講義をします.

最初にこの講義を引き受けたときは, もうちょっと最近の話題をと思ったんですけれども, 夏の学校と言うわけで, 特に M1, M2 の方が多いでしょうから, ある程度入門的なところからやろうかと思います. 最終的にどの辺までいけるのか, ちょっと時間の関係で分かりませんけれども, いけるところまでということでやっていきます.

それから, string theory といってますが, 多分 string がほとんど出てこないんじゃないかと恐れています. だから string theory を知らない人には, これのどこが string theory なんだと言われるかもしれませんが, 場の理論的な計算なども多く出て来るので, string theory を全く知らない人でも, 多少分かっていただけるのではないかと思います.

---

* 講義録作成：東大本郷（木村圭助, 栗山実, 齋藤遼, 柴正太郎, 白井智, 初田泰之, 林博貴, 八木太, 山崎雅人, 横山修一）

最初に, どうして位相的弦理論を考えたいのか, どこが面白いのか, どういうふうに使われているのかということからお伝えしていくことにしたいと思います.

- Toy model

それで, どうして位相的弦理論かって言うことで, まず一つめは, 最近というか, 1990 年代以降に, 様々な string の duality とか, 或いはゲージ理論においても強結合の dynamics などに興味がもたれている訳ですけれども, それらに関する一つの toy model としての役割があります.

例えば string duality として知られているものとしてどういうものがあるかというと, 一番有名なのは例えばミラー対称性. 或いは T-duality. それから, electro-magnetic duality（S-duality）. 或いは, 最近特に注目を集めているのは, gauge/string correspondence (しばしば large N duality). こういう各種の string duality があるわけですけれども, こういうものを解析するための一つの toy model としての役割もあります. toy model といったんですけど, なぜ topological string theory なのか, ここで非常に大切なことは, 基本的に, topological string theory は, 現実に解ける string theory のモデルであるということです. 全て解けるとはいいませんが, 基本的にこういった観点から興味のある topological string theory のモデルというのは厳密に解ける. とにかく現実に解けているという意味で, こういった duality に関するいろいろな知見を得ることができる.

もうちょっと具体的には, 例えば, 知らない人がいるかもしれないけれど, 2 次元の場の理論で sine-Gordon model が厳密に解けるモデルとして知られています. これは例えば場の理論における soliton の話とか, 2 次元における boson-fermion 対応の物理を調べるために非常に重要な役割を果たしています.

それからもう一つ, 統計力学の方から例を挙げるとすると, 有名なのは Ising model ですね. これは例えば自発磁化のような相転移の物理に対して, 厳密に解けるモデルとして重要な役割を果たしてきたわけです. 同じような意味で, string duality, 或いは, ゲージ理論における強結合の dynamics における, duality あるいは correspondence を調べるための厳密に解けるモデルとして, topological string theory というのは重要な役割を果たしてきましたし, 今後も役に立つだろうと期待しています.

- 実用的な観点

次に, 先程の動機はある程度理論的な興味ですけれども, 実際に practical な視点からすると, 言葉だけで申し訳ないですが拡大された超対称性理論では BPS 状態という特殊な状態があり, これの counting を行うことができます.

これは, 例えばブラックホールのエントロピーを, microscopic な立場から状態を数え上げ, その log を取って計算することに使われたりします. それから, 4 次元のゲージ理論における低エネルギー理論 (ふつう使われるのは $\mathcal{N}=2$ なんですけど, 超対称性が 2 つあるような理論ですね) の有効作用の計算（Seiberg-Witten 理論[*1]. 更にもう一つ昨日の末廣さんの講義と直接関わるのは[*2], 例えば低エネルギーの $\mathcal{N}=1$ の effective な superpotential の計算. これは, Dijkgraaf と Vafa によるものです[*3].

これらが, 超対称性を持つ理論における, さまざまな状態の数え上げ, 低エネルギーの有効作用あるいは有効

[*1] 原論文は [1]. review は数多く出ているが, 易しめのものとしては, 例えば [2] が挙げられる.
[*2] この講義の前に北海道大学の末廣先生による超対称性の入門的講義が講義 B として行われた.
[*3] 原論文は [3]. review ととしては, 例えば [4] がある.

ポテンシャル, そういったものを計算するのに実際に topological string が使われた例です.

- Laboratory to test and develop physical intuition against deep mathematical ideas

それから, 最後に, もう一つ, 多少数学的な興味と言われるかもしれませんけれども, 例えば経路積分に基づくとか, duality などに基づく, 或いは D-brane といった考え方に基づく物理的ないろいろな考え方とか直観を, 数学の理論, 例えば, 位相的弦理論を考えるきっかけとなった Donaldson の理論 [9] だとか, 最近でいえば Langlands program[15], こういった, 数学で非常に深い結果だと思われている理論がありますけれども, そういったものに対して使います. このとき物理的な実験室として, topological string が役に立ちます.

このように, まず, 大体三つくらい, なぜ topological string をやるのか, 或いはどこが面白いのかと聞かれた時に答えることができます.

0.1 History and references

次に, イントロの二番目として簡単なこれまでの発展の歴史と, 幾つか今回講義を準備するにあたって参考にした文献を紹介しておきます.

先程ちょっと言いましたけれども, 位相的弦理論というのは, もともとは位相的場の理論というものがあってそれから発展してきたものですが, 位相的場の理論が最初に作られて最初の数年間はほとんど Ed. Witten の独壇場でした. 最初の論文は,

- E.Witten, Proposal of topological quantum field theory (Feb.1988)[9]

今回文献を調べてきましたが, 最初に出たプレプリントが, 1988 年の 2 月という日付でした. これは, 先程言ったように, Donaldson 理論というものを場の理論を用いて記述するということを初めて行った論文です. この当時は arXiv とかネットとかはなくて, 日付は 1988 年の 2 月となってますが, おそらく, 記憶によると僕が初めて聞いたのは夏頃だったと思います. 今だったら 2 月に全世界に知れわたるわけですけれども, 当時は大体 2, 3 ヶ月はタイムラグがあって, 僕が初めて読んだのは, この年の夏ぐらいでしたね.

それでちょっと昔話をすると, 僕は, 夏の学校には 1984 年, 85 年, 86 年の 3 年間多分参加した記憶があって, これは M1, M2 と D1 で参加したんですけれども, 今, この部屋だってエアコンが効いてますからいいですけれども, 僕の時はエアコンが全くなくて, 年によってだいぶ気候に変動があってですね, ある年は非常に暑くて, あ, だから今年も僕が発表するとき暑いですけれども, 講演の先生も, それから学生の方も汗をかきながらという状態のこともありましたし, ある年は, 非常に涼しくて, 半袖半ズボンではまずいられなかった, そういう年もありました. それが 84, 85, 86 年で, 年を考えてもらうと分かりますけれども, 1988 年, この年は僕はちょうど D3 の年で, この年にこの Witten の論文を読んで, 今言ったように夏ぐらいに読んだんですけれども, それから半年間で, これをネタに D 論を書いたという事情があります. 従って, これは僕にとってかなり思い出深い論文です.

この論文で, Witten は topological quantum field theory を提案し, 4 次元のゲージ理論に対して位相的場の理論を作ったわけですけれども, その後, 直接 string theory に関係するような理論を続々と提案しました. これは今回の話と関係するので書いておきますけれども, 同じく Witten の論文で,

- E.Witten, Topological sigma model [10, 11] , 2D topological gravity [12]

出版は 88 年で, 先程の論文（[9]）の多分すぐ後ぐらい. 1 ヶ月か 2 ヶ月後ぐらいに出た論文です.

string theory のことを知らない人にはちょっと分かりにくいかもしれませんが, sigma model と 2 次元の topological 重力理論を組み合わせれば, worldsheet viewpoint での string theory ができるので, それの topological version が, これで基本的にできたと言うことになります. しかし, 現在, 考えられている形の topological string が formulate されるには実はちょっと時間がかかっています.

で, この後, Witten は, 直接 topological string theory に行かなくて, ミラー対称性との関係を議論しました.

- E.Witten, Mirror symmetry and topological field theory (hep-th/9112056[13]) [A model, B model]

sigma model の twist の話に関係するのであげておきますが, これは雑誌には出ていません[*4]. 代わりにここでようやく arXiv の番号を挙げることができて, これは 91 年の 8 月に arXiv ができて, そのすぐあとの論文ですね. この論文で, 今回お話しする話では, いわゆる A-twist, B-twist が扱われています.

そのあと, topological string が定式化されたのが, 通常 BCOV と呼ばれる論文で, Bershadsky, Cecotti, Ooguri, Vafa による論文です.

- BCOV[14], Formulation of topological string

この 93 年秋の論文で, 今回紹介するような形での位相的弦理論が formulate されました. ここまでが topological string theory の第一期という状況ですね.

ここで, 私のこともちょっと話すと, 先程 91 年の 8 月に arXiv ができたと言いましたけれども, 僕がポスドクで海外に出たのが 91 年の 10 月で, トリエステに最初にポスドクとして行ったんですけれども, 91 年の, Witten の論文が出たちょっと前ですね. 日本で職を得たのが, ちょうど 93 年の 9 月 1 日付けで採用になったので, BCOV の論文が出た頃でした. 大体この辺の時期は僕は海外でポスドクとして過ごしていたわけです.

これで大体 string theory が formulate されたわけですけれども, この当時は, これが一体何に使えるのかというのが多分一般的な状況でした. 先程言った, 2 次元の topological gravity で, matrix model とか, それの double scaling limit を取るといったそういった話, また, これも多分明日になると思いますけれども（セクション 4 参照）, $c = 1$ の string theory といった話で, こういった topological な話がからむということが一応指摘はされていたんですけれども, 一応 formulation はできたけれども, topological string は何に使えるのか, というのがその当時の状況だったわけです. だから, 僕も, 先程言ったように学位論文で topological をネタに論文を書いたわけですけれども, この後しばらくの間, こういった発展はあったんですけれども, これをちょっと脇目でみながらという感じで, これでは論文は書けそうにないなあと思っていたというのが正直なところでした.

この後, ご存じのように, この論文（[14]）は 93 年ですけれども, 94 から 96 年にかけて, ものすごい革命が起きたわけですね. これは topological string とは直接関係ないですけれども,

- 1994 年 Seiberg-Witten 理論 [1].

[*4] 但し, 次の論文集に収録されている：”Essays on mirror manifolds” , pages 120-158. Internat. Press, Hong Kong, 1992.

いわゆる 4 次元の $\mathcal{N}=2$ の超対称性を持つ gauge theory において, exact な低エネルギー有効作用を決定したという画期的な論文です. 先程も強調しましたが, $\mathcal{N}=2$ だから実際の世界の物理とはそれほど関係しないのかもしれませんけれども, やはり厳密解があるということはそれ自身非常に重要なことで, 大きなインパクトを与えました.

その後, 次の年ですね,

- 1995 年 String duality: M-theory, D-brane といった画期的アイデアが生まれた.

string duality から例えば M 理論であるとか, D ブレーンと呼ばれる画期的なアイデアが提案されました. これも大体, 今回調べてきましたけれど, Witten の論文 [6] が出たのが 3 月, それから, D ブレーンの Polchinski の論文 [7] が出たのが 10 月です. この年にこういった, 画期的なアイデアが提案されて, これから 95 年から 96 年にかけて, もうネット上を毎週のように論文が飛び交う状態です.

それで, こういった発展があった後に, 先程述べたような形で, topological string theory も, これらに関連する dynamics を調べるということに使えるということが分かり, 更に duality に関する様々な technology が開発されたりして, いろいろな計算ができるようになってきました.

それで, 今回, 特に明日になると思いますけれども, 紹介する原論文は,

- Gopakumar-Vafa, hep-th/9802016, 9809187, 9811131, 9812127[*5]

Gopakumar と Vafa による論文で, 彼らは 1998 年に 4 つ論文を出していますが, これらの論文が今回の話の一番元ネタです.

それからひとつ忘れてました, 彼らがこういうことを考えるもう一つ前の論文で, これも非常に有名な論文ですけど, Maldacena による AdS/CFT 対応 [17]（1997 年）があります. こういった string theory における発展があって, その後 topological string における視点をベースにして, Gopakumar と Vafa は幾つか論文を書いています. 今回の話は, この 4 つの論文に書いてあることが主なベースになった話をしようと思います.

それから, この後 topological string theory の文献は, もう挙げることができないほど増えていくわけですけれども, 幾つか最近の教科書を挙げてこのセクションの最後にしようと思います.

一つめは, 有名な, 堀さん達が 5, 6 人で書いた

- K. Hori et. al., "Mirror Symmetry", American Mathematical Society (2003)[*6]

今回の話にもうちょっと直接関係するのが, Marcos Marino が書いた

- M. Marino, "Chern-Simons theory, matrix models and topological strings", Oxford University Press (2005)

という比較的薄めの教科書です. 本を買うのが嫌だという人は, 大体基本的に二つの論文（[8]）からなっているので arXiv からとってもいいかもしれません. この二つのレビューを読むと, 本の半分以上の部分, あ, そういうと怒られるかな, 半分程度のものと, 大体同じようなことが書いてある.

これが基本的に topological string の発展と歴史, それから今回の講義を準備するにあたって参考した文献です.

[*5] 原論文はすでに挙げた 4 本の論文 [16] である. 日本語で読める解説として例えば [5] がある.

[*6] 実は, http://math.stanford.edu/~vakil/files/mirrorfinal.pdf からダウンロードできる.

それで, これから少しテクニカルな話に入りたいと思いますけれども, ここまで, もし, なぜ topological string theory なのかまだ分からない人とか, あるいは, こういったことはどうなっているのかといった質問があれば.

（質問）mirror symmetry*7は topological string theory ではどんなふうに見えるのですか？
（答）topological string theory における mirror symmetry と, 普通の mirror symmetry は同じものです. けれども, topological string theory っていうのは, mirror symmetry に関わる部分だけをちょうどある程度取り出してみせて, しかも厳密に解けるので, 普通の string theory で mirror symmetry っていうのは, 物理的にさえきちんと証明するって言うか, 納得できるような形で示すって言うのは難しいわけですけれども, topological な理論に持っていくと, それは例えば二つの分配関数が一致しているという形で示すことができるわけです. mirror symmetry は, topological string theory と, 普通の string theory で, 違うということはありません. 同じものと考えてください. ただ, topological string theory にすると, それが非常に分かり易くなる, あるいは厳密な形でいろんな量が計算できるので, 証明とは言わないけれども, かなり物理的な意味でいえば証明に近いところまで迫れるというところがあります.

1 Topological twist of $\mathcal{N} = (2,2)$ SUSY sigma-model

それでまず最初に, topological twist という話をします. 2 次元の超対称な sigma model というものを考えます. 2 次元の理論を考えるというのは, これは, 弦の運動する軌跡はちょうど 2 次元の世界面（worldsheet）をはくので, その上の場の理論を考えるということです. worldsheet の viewpoint から, string theory を formulate しようとすると, 基本的に 2 次元の場の理論を考えることになる.

それから, string は, ある空間, 時空の上を運動しますので, ちょうどそれは, string の世界面から target と呼ばれる多様体への, ある種の数学的には写像を考えることを意味します. それに関する場の理論（sigma model）の作用, それを, topological string theory を formulate する準備として, まず考えたいと思います.

対称性として, $\mathcal{N} = (2,2)$ の超対称な sigma model を考えます. 昨日, 多分末廣さんの講義で, 4 次元の $\mathcal{N} = 1$ の理論が基本で, それから超対称性が拡大すると, $\mathcal{N} = 2$ の理論とか, 4 次元だと最高 $\mathcal{N} = 4$ まであるということを聞いたと思いますけれども, これからお話しする理論というのは, 4 次元の理論を dimensional reduction してつくるというのが一番簡単です. 2 次元の $\mathcal{N} = 2$ の超対称性というのは, 基本的に, 4 次元でいうと $\mathcal{N} = 1$ の超対称性です. 超対称性の生成子がちょうど 4 つあることになります. 2 次元の場合は特に非常にいいことが起こっていて, 2 次元の波動方程式を考えてもらうと分かると思うんですけれども, 右向きと左向きが完全に decouple してしまいます. そういった意味で, 超対称性を右向きと左向きについて独立に考えることができて, 今の場合 4 つの超対称性生成子があるんですけれども, 右向きの charge が 2 つ, 左向き 2 つ（複素座標を使って言うと, 正則な方向と, 反正則な方向について 2 つずつ supercharge があるということ）で, これを $\mathcal{N} = (2,2)$ と呼んでいます.

超対称性が, 4 つあるような理論をこれから考えます. d 個の chiral multiplet と antichiral multiplet を, そ

*7 ミラー対称性（mirror symmetry）とは, ある Calabi-Yau 多様体上の type IIA 弦理論, 或いは topological A-model が, 別の Calabi-Yau 多様体上の type IIB 弦理論, 或いは topological B-model と等価であるという現象を指す.

れぞれ $\Phi^I(I=1,\ldots,d)$, $\Phi^{\bar{I}}(\bar{I}=1,\ldots,d)$ と表すことにします．その作用は,

$$S=\int d^2zd^4\theta\ K(\Phi^I,\Phi^{\bar{I}}) \tag{1}$$

となります.

action は, 4 次元のバージョンで言うと D-term と呼ばれるものですが, 積分で, 4 次元だと d^4x ですが, 今の場合は, 2 次元複素座標を使って書いたので z を座標として d^2z. それから, D-term なので, θ は 4 つ. 昨日はこういう書き方はしなかったそうですが, ここで $K(\Phi^I,\Phi^{\bar{I}})$ と書きましたけれども, これは Kähler potential と呼ばれる関数です.

string theory では, 先程言ったように,

$$\Sigma(\text{world-sheet})\to X(\text{target space}), \tag{2}$$

こういう状況を考えています.

今, $\mathcal{N}=(2,2)$ の超対称性を持たせる一つの十分条件として, X は Kähler 多様体と考える．ただ, 最近は flux compactification との関係で, non-Kähler 多様体でも作れると言うことが議論されていますけれども, 一番基本的な Kähler の場合を考えることにしましょう.

ここで, Kähler 多様体というのは, ある意味で非常に良い性質を持つ複素多様体のことです．ですから, 座標として複素座標を使うことができて, 先程 chiral と antichiral, Φ^I と $\Phi^{\bar{I}}$ と言いましたけれども, これは, string が運動する target の方の複素座標と反複素座標に対応するような場です.

それで, Kähler 多様体の計量は, Kähler potential の微分で書けている．すなわち, X の計量は Kähler potential K を用いて,

$$G_{I\bar{J}}=\frac{\partial^2K}{\partial\Phi^I\partial\Phi^{\bar{J}}} \tag{3}$$

と書くことができます．それから, ちょっとなじみがないと思われる方のために書いておくと, 一番基本的なのは, X が平坦な空間の場合で,

$$K(\Phi^I,\Phi^{\bar{I}})=\Sigma_{I=1}^d\Phi^I\Phi^{\bar{I}}$$

が挙げられます．実際, この場合, 計量を計算すると,

$$G_{I\bar{J}}=\delta_{I\bar{J}}$$

と flat metric になります．この形の Kähler potential で書かれるのが 4 次元の普通の D-term だと思いますが, これは string theory の言葉では, flat な時空を考えていることに相当しています．一般に, string theory で曲がった空間を考えたければ, D-term の部分に, target space の Kähler potential を持ってくれば, 曲がった空間に値を持つような場の作用が書けます.

今度は, もうちょっと具体的に chiral multiplet の中の成分というか, どのような場が入っているのかを考えます.

（質問）複素多様体で考える理由は何かありますか？

（答）複素多様体と言うよりも Kähler 多様体でむしろ考えたいわけですけれども, それは, 先程ちょっと言ったように, $\mathcal{N}=(2,2)$ と呼ばれるような超対称性をもつ理論を考えたいからです．4 次元の場合でも, 一般に, Kähler potential と呼ばれる関数を持ってきて, D-term を書くと, $\mathcal{N}=1$ を持つような一般的な理論が作

れるということが知られています. だから, 今言ったのは, 超対称性の数がむしろポイントで, 例えば超対称性が 4 つあるような理論を作ろうと思うと, 基本的に何か複素の構造がないといけなくて, かつ, 複素であってももうちょっとよい構造をもたせたいので, すなわち代数が閉じるとか可積分性をもつとか, そういった状況が必要なので, Kähler 多様体を取るというのは, 一番まず簡単な方法です. だから, 先程言ったように, 複素でなくてはならないと言うことはないんですけれども, 少なくともこれは, 超対称性が 4 つあるような理論の一つの十分条件で, 非常に扱いやすいようなクラスです.

（質問）すみません, $\bar{I}$ のほうは, I の方の複素共役ということで.

（答）基本的に, chiral と antichiral という意味なので, 幾何学的には, 複素共役だと理解しています.

（質問）複素 d 次元ということは, 実で言うと $2d$ 次元？

（答）そうそう, これから書こうと思いましたが, 複素 d 次元なので, 実で言うと $2d$ 次元ですね. 例えば, 弦理論でいう Calabi-Yau 多様体を考えたいとすると, $d = 3$ と取るのが普通です.

これからちょっと説明しようと思ったんですけれども, chiral と antichiral multiplet の成分をまずみてみると, まず, component field として一番低いところに boson が一つですね. それを今 ϕ と書くことにしましょう. 敢えて添え字は書かないことにして, これは先程から言っているように, genus が g の 2 次元面から Kähler 多様体への写像を定義します.

$$\phi : \Sigma_g \to X \tag{4}$$

genus というのは, 穴の数 g の事ですね. だから, 例えば $g = 0$ というのは球面, $g = 1$ というのはトーラス, $g = 2$ というのは, 2 人乗りの浮き輪ですね. X の複素次元は, d 個の chiral と antichiral があるとすると, d ですね.

（質問）2 次元面は実 2 次元？

（答）あ, そうそう. だからちょっと混乱するかもしれませんが, Σ は, 複素の 1 次元, だから実の 2 次元. これは弦の運動する軌跡を表していると考えます.

string 理論の定式化の一つである world-sheet の観点から見た摂動論的定式化の立場に立って, 今 sigma model を考え, genus g に関して展開しています. 実際には, 最終的にはあらゆる g に関して足し上げを行う（低い方から genus 0 は球面, genus 1 はトーラス, genus 2 は穴が 2 つあいた面といったように）ことによって string theory の摂動展開ができているという風に考えます. genus は固定して (2 次元面の位相的性質は固定して) その上で空間への写像を考えて, それに対する作用を考えるというのが sigma model の立場です.

で, 次の component として, superpartner の fermion がありますが, それは位相的弦理論では, 非常に重要な役割を持ちます. 2 つの Dirac fermion, あるいは成分の数でいうと, $\mathcal{N} = (2, 2)$ なので, 4 つの fermion があることになります. それは, 4 次元の $\mathcal{N} = 1$ でも同じだと思います. それに, $\psi^I_{\pm,+}, \psi^{\bar{I}}_{\pm,-}$ という記号を使います.

$$\text{superpartners of } \phi : \text{two Dirac fermions } \psi^I_{\pm,+}, \psi^{\bar{I}}_{\pm,-} \tag{5}$$

ここで記号の説明ですが最初の $\pm$ というのは 2 次元世界面上のスピンを表す符号で, $\pm$ は, 二次元のローレンツ回転である $\mathrm{U}(1)_E$ についての spin が $\pm\frac{1}{2}$ であることを表します. 後ろの $+, -$ は Kähler 多様体の上で複素座標, $z, \bar{z}$ に対応する添え字です. (すなわち, $+ \to$ holomorphic, $- \to$ antiholomorphic)

（質問）すみません, 添え字の E は何を表している？

（答）後から U(1) がいくつか出てくるので, なんだろ, Lotentz じゃないな, Euclid としておきましょうか, 忘れてしまいました. 後から, R 対称性が出てきますが, 4 次元の $\mathcal{N}=1$ に対応するので, R 対称性も U(1) なんですね. いろんな U(1) が出てきて, twist というのはいろんな U(1) が混じることになるので, いくつかの U(1) を区別する必要があります. ちょっとまあ, E は, ローレンツ回転といってしまいましたが, Euclid の意味というぐらいに思ってください. 余り深い意味はありません. Lorentz だから L を使いたいんですけれども, 後から left, right で L を使うので, 今回は axial と vector で A と V かもしれませんけれども, 敢えて避けて E と書いています. だから, 好きな文字でも構わないですけれども, 何らかの意味で区別するという意味で, ちょっと添え字をつけました.

最初の $\pm$ というのは 2 次元の Lorentz 回転に対する spin, それから, 後ろの添え字ですね, これは $+$ と $-$ と書きましたけれどもこれは上の添え字と対応していて, だから $I, \bar{I}$ の添え字だけでも意味は分かるんですけれども敢えて強調して, $\psi^I_{\pm.+}$ の時には target space の複素の正則な座標に対応する partner という意味で $+$, それから $\psi^{\bar{I}}_{\pm.-}$ は, 反正則という意味で $-$ をつけています. だから, 世界面の方に対する $\pm$ と, target の X に関する $\pm$ ということで, 二つの $\pm$ がある. 合わせて 2 かけ 2 で, 4 つの fermion がある.

それで, ちょっと数学的になりますけれども, もうちょっと数学を知っている人のために書いておくと, fermion は世界面上のある種のバンドル（スピンバンドル）のセクションと書くことができます.

$$\psi^I_{\pm,+} \in \Gamma(\Sigma_g, S^{\pm} \otimes \phi^*(T^{(1,0)})) \tag{6}$$

$$\psi^{\bar{I}}_{\pm,+} \in \Gamma(\Sigma_g, S^{\pm} \otimes \phi^*(T^{(0,1)})) \tag{7}$$

ここで, $S^{\pm}$ は Σ_g 上のスピノル束のことです. また, 複素化された tangent bundle $TX \otimes \mathbb{C}$ を holomorphic 及び anti-holomorphic tangent bundle に分解したものを各々 $T^{(1,0)}X$, $T^{(0,1)}X$ と書き,

$$TX \otimes \mathbb{C} = T^{(1,0)}X \oplus T^{(0,1)}X \tag{8}$$

$\phi^*(T^{(1,0)}X)$ と $\phi^*(T^{(0,1)}X)$ はそれらの ϕ による Σ_g への引き戻しです.

数学的にはこういうことになるんですけれども, 前の $\pm$ というのは, 世界面上の spin を表していて, 後ろの spin というのは, target space は複素で考えていますので, その正則方向と反正則方向によって $\pm$ の添え字がついている. で, 合わせて 4 種類の fermion がある, ということだけ覚えてください.

また, supercharge も fermion に対応して 4 つ存在しています. でそれも, 2 種類の $\pm$ を使うことによって, 4 種類の supercharge が区別できます.

一番最後に $F^{I\bar{I}}$ という補助場がありますけれども, 以下あまり重要な役割を果たしませんので, それについては省略します. そういうものがあるということで. これが chiral multiplet の各 component ですね.

先程 action を Kähler potential を使って書きましたけれども, 対応する fermion に関する kinetic term を具体的に書いてみましょう. 先程の Grassmann 座標に関する $d\theta$ の積分を実行してしまうと, fermion に関して次のような運動項が出ます.

$$S_{f,kin} = \int_{\Sigma_g} d^2z \; G_{I\bar{J}}(\phi)(\psi^{\bar{J}}_{+,-} D_{\bar{z}} \psi^I_{+,+} + \psi^{\bar{J}}_{-,-} D_z \psi^I_{-.+}) \tag{9}$$

世界面上の 2 次元の積分を取って Kähler potential から出てくる計量 $G_{I\bar{J}}$ があります. これが Dirac fermion に関する標準的な kinetic term です. よくお馴染みなのは, 先程言ったようにちょうど flat な計量の

場合で, $G_{I\bar{J}}$ が $\delta_{I\bar{J}}$ になっている場合ですね. 今 target space として曲がった空間を考えると, $G_{I\bar{J}}(\phi)$ というふうに曲がった空間の計量がきて, 注意してほしいのは, 普通は曲がった空間の座標を考えないといけないんですけれども, sigma model の場合には, ϕ という boson の場が入っています. ですから, 一見これ free に見えますけれども, 実際には曲がった空間ですと $G_{I\bar{J}}(\phi)$ に ϕ が入っているので相互作用をしている非常に複雑な action の形とも言えます. で, fermion に関しては 2 次の形, bilinear になっています.

(9) 式の括弧の中は flat な空間では普通の Dirac 作用素ですけれども, 今の場合は, 2 次元面も一般に曲がった空間を考えていて, target space の方も一般には曲がった空間を考えているので, Dirac 作用素は重力による接続を含みます. covariant derivative の定義は

$$D_{\bar{z}}\psi^I_{+,+} = \partial_{\bar{z}}\psi^I_{+,+} + \frac{i}{2}\omega_{\bar{z}}\psi^I_{+,+} + \Gamma^I_{JK}\partial_{\bar{z}}\phi^J\psi^K_{+,+} \tag{10}$$

$$D_z\psi^I_{-,+} = \partial_z\psi^I_{-,+} - \frac{i}{2}\omega_z\psi^I_{-,+} + \Gamma^I_{JK}\partial_z\phi^J\psi^K_{-,+} \tag{11}$$

これが今の場合のディラック作用素の具体的な形です.

で, まず, $\partial_{\bar{z}}$ の部分は普通の微分ですね. $\omega_{\bar{z}}$ が世界面 Σ 上のスピン接続で, これは, 世界面上の Lorentz 変換が U(1) でしたので, 普通の abelian のゲージ場と同じです. それぞれスピン 1/2, $-1/2$ なので, それに伴ってスピン接続の符号が $+$ と $-$ になります. $\frac{i}{2}\omega_{\bar{z}}\psi^I_{+,+}$ の coupling は, これは普通の abelian のゲージ場だったら $\omega_{\bar{z}}$ のところに A が入っていると思いますけれども, それと同じで, 今, 曲がった空間の, Lotentz の U(1) に関するゲージ場として, spin connection というのが入っているので, それがちょうど同じ形で couple しています.

それから, 3 項目は見慣れない形をしていると思いますけれども, これは逆に, target space の X のほうが曲がっている効果です. Γ^I_{JK} というのは Christoffel symbol です. 一般相対論とかそういうのをやってないと分からないかもしれませんけれども, 曲がった空間の上での connection, affine 接続があって, それを ϕ を使って, リーマン面上の接続に引き戻したのが $\Gamma^I_{JK}\partial_{\bar{z}}\phi^J$ の部分です. だからこれは, X 上の接続を ϕ で引き戻したというものです.

世界面が曲がっているということと, それから target space X が曲がっているというのから, Dirac 作用素にこういった 2 種類のおつりがつきます. これで座標変換について共変な action になってます.

それから, 下の (11) 式についても (10) 式と同じで, 上は $\bar{z}$ 方向, 下は z 方向という違いだけです. これが, 先程書いた superfield を用いた action から導かれる fermion の kinetic term です.

この先まで行こうかと思いましたが, ちょっと大体お約束通り 1 時間経過したので, ここで休憩して, これから twist に関する話をしますけれども, 先程ちょっと言ったように, この理論には U(1) の R-symmetry があって, U(1) の R-symmetry と Lorentz の U(1) をうまいこと使ってやると, twist ということが定義できて, それを使うとフェルミオンがいろいろ変わってくると. それが twist なんですけれども, それについてちょっと休憩を挟んだ後にお話ししたいと思います.

–休憩–

それでは続きを始めたいと思います. これから, twist という操作をやりたいと思います.

この理論には R-symmetry は U(1) が 2 個あって, vector と axial vector という形をしています. これは global な symmetry で, superfield でいうと Grassmann 座標をまわすような対称性です. Noether current

は z 成分と $\bar{z}$ 成分があって

$$j_V^z = G_{I\bar{J}}(\phi)\psi_{-,-}^{\bar{J}}\psi_{-,+}^I \tag{12}$$

$$j_V^{\bar{z}} = G_{I\bar{J}}(\phi)\psi_{+,-}^{\bar{J}}\psi_{+,+}^I \tag{13}$$

これが $\mathrm{U}(1)_V$ に関する Noether current で, axial のほうは

$$j_A^{\bar{z}} = +j_V^{\bar{z}} \tag{14}$$

$$j_A^z = -j_V^z \tag{15}$$

と正則のほうの符号をひっくり返します. あるいは, vector と axial vector を足したのと引いたので left と right の R-symmetry と思うこともあります.

ここで twist という操作は R-symmetry をゲージ化して local symmetry にします. local 化すると gauge 場が必要ですが, そのゲージ場を前に出てきた spin connection と同一視します. それが twist という操作のひとつの方法です. twist という操作は, R-symmetry の 2 種類 vector と axial の U(1), $\mathrm{U}(1)_V$ あるいは $\mathrm{U}(1)_A$ をゲージ化します. 今「あるいは」と書きましたが, U(1) の選び方はいくつかあるのですが, 通常は $\mathrm{U}(1)_V$ を取ったものを A-twist, $\mathrm{U}(1)_A$ を取ったものを B-twist といいます. action はこの結果どう変わるかというと, Noether カレントとスピン接続の相互作用項が付け加わります. それが action のレベルで twist するということです.

たとえば A-twist の fermion の action というのは

$$S_{\mathrm{f,kin}} - \frac{i}{2}\int_{\Sigma_g} d^2z\ \omega_\mu j_V^\mu \tag{16}$$

で第 2 項を相互作用の項として付け加えます. ここで $\omega_\mu j_V^\mu$ をちゃんと書くと

$$\omega_\mu j_V^\mu = \omega_z G_{I\bar{J}}\psi_{-,-}^{\bar{J}}\psi_{-,+}^I + \omega_{\bar{z}} G_{I\bar{J}}\psi_{+,-}^{\bar{J}}\psi_{+,+}^I \tag{17}$$

先程 (9) 式で書いた, fermion の kinetic term が

$$G_{I\bar{J}}\psi_{+,-}^{\bar{J}} D_{\bar{z}}\psi_{+,+}^I\ ,\ G_{I\bar{J}}\psi_{-,-}^{\bar{J}} D_z\psi_{-,+}^I \tag{18}$$

で, 共変微分に微分と ω と Christoffel が入っていました. 今 twist して相互作用を付け加えると, fermion の kinetic term からそれと全く同じ項が出ていて, 符号が互いにプラスとマイナスになっているので, $D_{\bar{z}}$ に含まれていた $\omega_{\bar{z}}$ が消えます. z の方向については, kinetic term において符号が逆なので, 結局 twist の結果, 何が起こるかというと D_z に含まれていた $-\frac{i}{2}\omega_z$ が $-i\omega_z$ になる, という変換を受けます. 具体的に書くと

$$\begin{aligned}
&S_{\mathrm{f,kin}} - \frac{i}{2}\int_{\Sigma_g} d^2z\ \omega_\mu\ j_V^\mu \\
&= \int_{\Sigma_g} d^2z\ G_{I\bar{J}}\left[\psi_{+,-}^{\bar{J}}\left(\partial_{\bar{z}} + \frac{i}{2}\omega_{\bar{z}}\right)\psi_{+,+}^I + \psi_{+,-}^{\bar{J}}\Gamma_{KL}^I\partial_{\bar{z}}\phi^K\psi_{+,+}^L\right. \\
&\quad \left. +\psi_{-,-}^{\bar{J}}\left(\partial_z - \frac{i}{2}\omega_z\right)\psi_{-,+}^I + \psi_{-,-}^{\bar{J}}\Gamma_{KL}^I\partial_z\phi^K\psi_{-,+}^L - \frac{i}{2}\left(\omega_z\ \psi_{-,-}^{\bar{J}}\psi_{-,+}^I + \omega_{\bar{z}}\ \psi_{+,-}^{\bar{J}}\psi_{+,+}^I\right)\right] \\
&= \int_{\Sigma_g} d^2z\ G_{I\bar{J}}\left[\psi_{+,-}^{\bar{J}}\partial_{\bar{z}}\psi_{+,+}^I + \psi_{+,-}^{\bar{J}}\Gamma_{KL}^I\partial_{\bar{z}}\phi^K\psi_{+,+}^L + \psi_{-,-}^{\bar{J}}\left(\partial_z - i\omega_z\right)\psi_{-,+}^I + \psi_{-,-}^{\bar{J}}\Gamma_{KL}^I\partial_z\phi^K\psi_{-,+}^L\right]
\end{aligned} \tag{19}$$

ここで spin connection が変わるということは, 物理的に何を意味するかというと, spin connection の係数というのは場の持つ spin によって決まります. つまり, Lorentz 変換したときにこの場がどういうふうに変換するかということを決めます. spin connection が消えるということは, スピンが 0 になっているということです. ψ^I_{++} はもともと spin 1/2 だったのですが, spin 0 になります. 一方, ψ^I_{-+} は spin $-1/2$ だったのが, これが spin -1 に変わったということです. 全体としての spin はバランスしていなければならないので, A-twist による fermion の spin の変化は, 4 つ fermion があったわけですけど

$$\begin{aligned} &\psi^I_{+,+} : +\frac{1}{2} \to 0 \ = \text{scalar} \qquad \psi^I_{-,+} : -\frac{1}{2} \to -1 \ = (0,1) \text{ form} \\ &\psi^{\bar{J}}_{+,-} : +\frac{1}{2} \to +1 \ = (1,0) \text{ form} \qquad \psi^{\bar{J}}_{-,-} : -\frac{1}{2} \to 0 \ = \text{scalar} \end{aligned} \tag{20}$$

となります. action 全体として spin は 0 になっていないといけなくて, $\bar{z}$ は rotation によって逆向きに -1 をもつので, $\psi_{+,-}$ と $\psi_{+,+}$ を合わせて $+1$ を持っていないとつりあっていません. 同様に z 方向は D_z で spin 1 を持っているので, $\psi_{-,-}$ は spin 0 になります. これは部分積分しても分かります.

同じように B-twist をします. 先ほど書いた j_V を j_A にしたのでは合っていなくて, 符号も逆にして

$$S_{\text{f,kin}} + \frac{i}{2}\int_{\Sigma_g} d^2z \ \omega_\mu j^\mu_A \tag{21}$$

という形で相互作用を付け加えます. また同じように Dirac 作用素に含まれる connection ω がずれます. そのずれから fermion の spin の変化を見ると, B-twist による spin の変化は

$$\begin{aligned} &\psi^I_{+,+} : +\frac{1}{2} \to +1 \ = (1,0) \text{ form} \qquad \psi^I_{-,+} : -\frac{1}{2} \to -1 \ = (0,1) \text{ form} \\ &\psi^{\bar{J}}_{+,-} : +\frac{1}{2} \to 0 \ = \text{scalar} \qquad \psi^{\bar{J}}_{-,-} : -\frac{1}{2} \to 0 \ = \text{scalar} \end{aligned} \tag{22}$$

となります. 今の理論は fermion が 4 つあるのですが, もともとは半整数の spin を持ちます. twist の相互作用によって, 整数スピンを持つようになります. spin に関していうと, あたかも boson のように振舞うようになる, これが twist の効果です. 実はもう 1 つの効果があって, supercharge というのは boson と fermion をつなげていて, 必ず半整数スピンをもっているわけですが, twist すると fermion が整数スピンを持つようになりますから, これらの spin 0 の fermion をつくる supercharge のスピンは 0 になります. scalar の supercharge は曲がった空間も global に意味を持ちます. これは座標変換に対して不変だからです. spin 1/2 のままだと supergravity を考えないといけないのですが, scalar の supercharge は曲がった空間でも global にも意味を持つようになります.

ゲージ場の BRST 量子化で, Faddeev-Popov の ghost や anti-ghost が出てきますよね. 経路積分で, ゲージ固定とか, 繰り込みを unitarity を保ったままやろうとすると, どうしても ghost 場が出てくる. spin と統計の関係を破るので表には出てこないけれども, 摂動計算の途中には出てくる. unitary 性を保つために必要です. fermion なんだけど scalar として振舞います. gauge 場を, Faddeev-Popov ghost 場の共変微分に変えるような変換を BRST 変換というのですけど, BRST 変換によって場のスピンは変えないので, fermionic な変換だけれども, BRST 変換の spin は 0 になります.

超対称性理論において, twist の操作をすると, それと同様な, spin 0 を持った超対称 charge が作れます. 位相的な場の理論や string では, scalar になった supercharge を BRST 変換と同じようにみなして, ゲージ

変換で BRST operator の cohomology が意味を持つのと同じように考えるようにします．すなわち, global に意味を持つ超対称チャージを BRST 変換だと思って, それに関する BRST のコホモロジー, あるいはその BRST コホモロジー類の相関関数を考えます．その相関関数が位相的に不変な量を定義しています．

今回は主に A-twist のほうに関して, BRST 変換や cohomology をお話したいと思います．

（質問）スピンの合成とは関係ないんですか．

（答）U(1) なので, スピンの足し算, 引き算しかしていませんね．SU(2) とかなら合成が必要ですが．二次元なら Lorentz 変換は U(1) なので, 大げさなことじゃなくて, 足し算引き算です．相互作用を加えることで spin connection が 1/2 ずれて, もとの半整数が付け加わって整数にかわる．4 次元とか高次元になるともう少し複雑になって, 合成をしてうまくスカラーを作るために twist の方法を工夫したりします．

（質問）今, spin 0 の scalar 場から, spin 0 の fermion にうつす supercharge を BRST charge とよむということでしたが, 一方で, spin 1 とか spin -1 の fermion にうつす supercharge もあるんですか?

（答）もともとこの理論には, 4 つ supercharge があって, twist をした後, 2 つは scalar, 1 つは $+1$, -1 の spin を持ちます．

2 Topological A-model

spin が変わったので, 記号を変えます．

$$\chi^I = \psi^I_{++} \tag{23}$$
$$\chi^{\bar{I}} = \psi^{\bar{I}}_{--} \tag{24}$$

これらはいつでも scalar 場です．spin -1 を持つ

$$\rho^I_{\bar{z}} = \psi^I_{-+} \tag{25}$$

spin $+1$ を持つ

$$\rho^{\bar{I}}_z = \psi^{\bar{I}}_{+-} \tag{26}$$

これで spin が混乱することがなくなります．

supercharge のほうもこれによって記号を変えます．original な supercharge は $Q_{\pm\pm}$ として, fermion と同じようにスピンが変わって

$$Q = Q_{+,+} + Q_{-,-} \tag{27}$$

これは $++$ と $--$ の 2 つが scalar として振る舞うような supercharge です．topological theory では BRST charge となります．

$$G_z = Q_{+,-} \tag{28}$$

これは spin $+1$ の supercharge. spin -1 の supercharge を

$$G_{\bar{z}} = Q_{-,+} \tag{29}$$

とします．もともとあった超対称性代数から Q とか G に関してどういう関係式が導かれるかというと, まず,

$$Q^2 = \frac{1}{2}\{Q, Q\} = 0 \tag{30}$$

この性質があれば Q は立派に BRST と呼ばれる資格があるわけです．Q という operator が scalar として振舞うことと，$Q^2 = 0$ という性質から，この Q を BRST charge とみなします．更に, supercharge の半交換積は, 基本的に空間の並進を生成しますが, それの関係から

$$\{Q, G_{z,\bar{z}}\} = P_{z,\bar{z}} \tag{31}$$

これが超対称性の代数から得られるものです.

（質問）もともと supercharge が 4 つあって, 線形結合を取ったので, 3 個ありますが, 残りの 1 個は？

（答）translation を BRST exact に書くという表示が欲しいので, $Q_{+,+}$ と $Q_{-,-}$ を足しておかないときれいな形にならない．もともと 2 つあった charge を足したものを BRST charge だと思って, それが BRST の変換と思っている．あくまで 2 つは独立な charge であって, topological theory の立場からすると足したものが BRST charge だと思うと便利だということです.

（質問）引いたものも代数が作れるのですか.

（答）もちろんそうです．Q は target space でいうと, 正則な方向の微分 ($Q_{+,+}$) と反正則な方向の微分 ($Q_{-,-}$) を足しているので, 外微分に対応するわけです*8．足したものがきれいな外微分になっているので, 全体としてきれいな性質を持ちます.

（質問） Q が BRST だというのは仮定ですか.

（答）二乗して 0 であって, scalar ならば, BRST 変換と思う資格があります．BRST cohomology を作って, それから相関関数を求めて, それが意味のあるものだと考えます．今の場合は Q は target の外微分にうまく対応します.

（質問）physical state との関係は？

（答）別のものです．string theory ではまた string の BRST があって, 今は Q を BRST だと思ってくださいということ．ただし, 普通の string theory と同じような構造を持っているが, 自由度がかなり落ちているので, 厳密にかなり解ききることができるようになってしまう．これがすごいところだと思います.

場の変換性を書きます．変換前のが定義されていますけれども, i は $(I, \bar{I})$ をまとめた記号だと思ってください．正則と反正則の区別がなくなっているので

$$[Q, \phi^i] = \chi^i \ , \qquad \{Q, \chi^i\} = 0 \tag{32}$$

scalar が BRST で doublet に組んでいます．1-form の変換は

$$\{Q, \rho^I_{\bar{z}}\} = 2\partial_{\bar{z}}\phi^I + (\text{補助場, fermion の bilinear}) \tag{33}$$

$$\{Q, \rho^{\bar{I}}_z\} = 2\partial_z\phi^{\bar{I}} + (\text{同じ}) \tag{34}$$

A-twist すると target space の正則な足と world sheet の反正則な足が残る形になる．これがもともとあった超対称代数から導かれる, twist した後の変換です.

BRST 量子化のことを知っている人は, 解釈として, χ^i が ghost 場に相当するもの, ρ が反 ghost 場に対応するものです．普通のゲージ理論の BRST 量子化ですと, ゲージ場のゲージ変換は変換パラメータ ϵ の共変微分で, ϵ を ghost に置き換えたものがゲージ理論におけるゲージ場の BRST 変換です．式 (32) を同じように考

*8 後の (47) 式を参考のこと.

えると boson を BRST 変換したものが ghost 場になっているんですが, もともと boson の無限小変換がなんだと思っていたかというと, $\delta\phi^i = \epsilon^i$ が無限小のゲージ変換. これを ghost に置き換えたと思っている. target space の座標を場に化かしたものですから, 座標の勝手な変分を取って場を動かしたのが対称性になっているということを意味しています. 勝手な場の変換が許されるということは, 位相的な変換性を持っていると期待できます.

下の 2 つ ((33), (34) 式) はゲージ固定条件を表わします. boson は勝手な変形に対して不変になっているのですが, そのゲージ不変性に対して $\partial\phi$ の項がゲージ固定条件になっていると考えることができます. すなわちもともとは超対称性を twist して変換性を書いたのですが, BRST 量子化の立場から読み換えてしまうと, 勝手な boson の変換がゲージ対称性の変換と見ることができて, さらにゲージ固定条件が課されているということになります.

–休憩–

topological な A-model を今, BRST 対称性を持つという形で見たので, そういった立場から見た時に, topological な A-model がどういう性質を持っているかという事を残りの時間でお話ししたいと思います. まず最初に, action についてお話しします. 先程, もともと出発点として書いた sigma model に, twist をして, 相互作用を付け加えることで A-model の action を書きました. それをもう一度書き直すと, 次のような形に書く事ができます.

$$S_A = \{Q, V\} + \int_{\Sigma_g} \phi^*(J) \tag{35}$$

この action は, ある量を BRST 変換したものとある量を（Riemann 面上で）積分したものとの和で書かれています. 量子化の立場では, この第一項目は, BRST exact 項, あるいは gauge 固定項, そして, 第 2 項は topological term になっています. A-model の action は, このような構造をしています. すなわち, 位相的な項に, BRST exact な項を加えて gauge 固定をした, といった構造をしています.

確かめる事はしませんが, まず, V は,

$$V = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_g} \mathrm{d}^2x\ \sqrt{g} g^{\mu\nu} G_{I\bar{J}} \left[\frac{1}{2}\rho^I_\mu \widetilde{F}^{\bar{J}}_\nu + \frac{1}{2}\rho^{\bar{J}}_\mu \widetilde{F}^I_\nu + (\rho^I_\mu \partial_\nu \phi^{\bar{J}} + \rho^{\bar{J}}_\mu \partial_\nu \phi^I)\right] \tag{36}$$

と書く事ができます. ここで, 前と違って複素座標ではなく, 普通の 2 次元座標を用いています. $g_{\mu\nu}$ は Σ_g 上の計量, $G_{I\bar{J}}$ は target space X 上での計量を表しています. Σ_g 上の計量はこれまできちんと書いていませんでしたけれども, ここでは, あえてあからさまに書いておきます. また, $\widetilde{F}$ は補助場を表しています. $\tilde{}$ は, きちんとは説明しませんが, もともとあった補助場を fermion の bilinear term にちょっと押し込んで再定義したものである事を表しています. そして, ϕ を含む項は, 先程述べた gauge 固定条件のようなもので, boson の微分みたいなものが gauge 固定条件と対応しています.

それから, topological term は,

$$\int_{\Sigma_g} \phi^*(J) = i\int_{\Sigma_g} \mathrm{d}^2z\ G_{I\bar{J}}(\partial_z\phi^I \partial_{\bar{z}}\phi^{\bar{J}} - \partial_{\bar{z}}\phi^I \partial_z \phi^{\bar{J}}) \tag{37}$$

というような形をしています[*9]. ここでは成分を用いて書いてしまいましたが, この項は, 実は, ある種の微分形式の Riemann 面上の積分という形で書く事ができるので, 位相的な項になっています. すなわち, 変分を

[*9] J は, この講義の後で説明されるが, target space である Kähler manifold X の Kähler 2-form と呼ばれるものである.

とったら 0 になり, 運動方程式には効かない項になっています.

この位相的な項に, (36) 式の V を BRST 変換したものを足したものが作用です. したがって, gauge 固定項を忘れてしまうと, 作用は topological な量だけからなるという意味で, topological A-model は本当に位相的な理論になっています. すなわち, もともとの gauge 固定する前の理論の作用は, topological な量, つまり, 微分形式を 2 次元面上で積分したものになっています.

例えば, 2 次元の重力理論もそのような形をしています. 2 次元の重力理論においては, スカラー曲率を 2 次元面上で積分するわけですが, それは 2 次元面の Euler 数を計算しています. 2 次元の重力理論では, それが Einstein-Hilbert action であり, それは, 2 次元面の Euler 数という位相的な不変量なので, 2 次元重力理論は topological になっています. *10

それと同じような意味で, twist した後の action は, BRST exact な項, または gauge 固定項を除いてしまうと, 残りの項はある 2 次微分形式を Riemann 面上で積分したものになっているので, 位相的な量です. そして, この量は, 写像 ϕ によって決まるものなんですが, 写像 ϕ の巻きつき数を計算している位相不変量です. その位相的な不変量に BRST exact な項を付け加えて, あたかも普通の場の理論のようにみせかけている, こういった構造をしています. これが topological な A-model の action の基本的な形です.

（質問）今言った微分形式というのは, 全微分で書けるんですか？

（答）local には書けます. もしも, 完全微分で書けたとすると, 閉曲面で積分すると 0 になってしまいますよね. ですから, local には完全微分で書けますが, global には書けません.

（質問）twist という操作は, BRST exact な項を付け加えているって事なんですか?

（答）そうではなくて, twist によって BRST operator をつくったわけですね. だから, twist しないと BRST operator がないので, action を何かに BRST gauge 固定をした形に見る事はできないんですけれども, twist して BRST operator をつくってやると, もともとの action というのは, BRST exact な項とおつりの項との和と書く事ができて, おつりの項が実は位相不変量になっていたと, こういう事をしています. だから, twist の操作自身と直接は関係ないんですけども, twist をしてやると, もともとの action を (35) 式のように捉え直す事ができるという事です.

（質問）一番最初に書いた出発点は, つまり, twist する前のものは, 2 次元の $\mathcal{N} = (2, 2)$ の SUSY sigma model で, それを twist すると, spin が変わったり, 相互作用項がちょっと変わりますけど, それ以外は大体同じ形で, それを書き換えると, (35) 式のようになるんですか?

（答）そうです. もうちょっと言うと, SUSY の action も, ある superfield で書いたものを superspace で積分してつくります. superspace の積分というのは Grassmann 数の積分なので, 結局微分しているということです. ですから何かを種にして, それを super 変換してつくっている. super 変換を 2 回したら, 完全微分になるから, それを積分して 0 になるので, 結局, それで supersymmetry で不変な action がつくれてますねというのを, 多分末廣さんが説明してくれたと思います. 繰り返すと, superspace での action の作り方というのは, superspace で積分するという事は, あるものを super 変換したものという事になっていて, それをもう 1 回 super 変換すると, 完全微分になっているから, それを普通の空間で積分したものは 0 になっていて, それで

*10 Einstein-Hilbert action は, genus g の 2 次元面 Σ_g では, Gauss-Bonnet の定理より,

$$\int_{\Sigma_g} \sqrt{-g}R = 2\pi\chi(\Sigma_g) = 2\pi(2-2g)$$

と topological な量になる. つまり, 2 次元重力では, 作用は全微分項になっている. これは, Ricci scalar を局所座標で具体的に書き下すことにより確かめることもできる.

supersymmetric な action がつくれます, という事になっていたわけです. 基本的には, それが遺伝してきてこういう形になっています. SUSY の場合は Q がもともとは spin $\frac{1}{2}$ の super 変換だった, というか spin をもっているから $\{Q, V\}$ という様には書けないわけですけれども, それが今の場合は scalar 的な supercharge に書けたので, $\{Q, V\}$ というように, あからさまに BRST exact な項だと思いなす事ができたということです. そして, おつりの項は, 場の配位が trivial ならば, 完全微分として落とせる項です. ただ, 今の場合は, global に ϕ が nontrivial な配位をしていると, このおつりの項は formal には完全微分で書ける surface term なんだけども, global には生き残っていて, それが winding number という位相的な不変量になっているという事です. 以上が基本的な構造です.

相関関数としてどのようなものを考えるか, という事をお話しする前にもう一つ, energy-momentum tensor がどのようになっているか, という事を見てみます. 色々な定義の仕方がありますが, 2 次元面上の background の計量で作用を変分したもの, というのが一つの定義の仕方です.

$$T_{\mu\nu} = \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{38}$$

これまで Riemann 面上の計量をあからさまに書いていませんでしたけれども, このために (36) 式ではあからさまに書きました.

topological term は, topological なので計量を変分しても効きません. したがって, 効くのは, BRST exact な項だけです. それから, charge も計量によっているわけではないので, (energy-momentum tensor は) 次のようになります.

$$T_{\mu\nu} = \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \{Q, \frac{\delta V}{\delta g^{\mu\nu}}\} \tag{39}$$

ここでは, V を $g_{\mu\nu}$ で変分した形はあからさまに書かない事にします.

これは BRST exact になっています. この結果から, さらに Q が Hermite である事が言えていると仮定すれば, 「もし, 物理的状態 $|\mathrm{phys}\rangle$ を $Q|\mathrm{phys}\rangle = 0$ で定義すれば, $\langle \mathrm{phys}'|T_{\mu\nu}|\mathrm{phys}\rangle = 0$」という事が言えます. すなわち, (39) 式の $T_{\mu\nu}$ を代入してみれば, Q がいずれかの物理的状態にかかってしまうので, $\langle \mathrm{phys}'|T_{\mu\nu}|\mathrm{phys}\rangle = 0$ となります. ですから, 特に物理的状態の間の energy-momentum tensor の期待値は 0 になります. これは, 位相的な場の理論, あるいは topological string theory の重要な特徴だと思います.

さらに, BRST 量子化の処方箋に従って, 観測可能量 (observable) を定義します. これを $\mathcal{O}$ と書く事にすれば, 観測可能量は

$$[Q, \mathcal{O}]_{\pm} = 0 \tag{40}$$

と定義されます. ただし, 今, $\mathcal{O}$ が bosonic か fermionic かわからないので, 交換子か反交換子のいずれかをとるという形にしておきます.

それから, ある observable $\mathcal{O}$ ともうひとつの observable $\mathcal{O}'$ が equivalent であるという事を, この 2 つの量の差がある別の量を BRST 変換したもので書けるという事と定義します.

$$\mathcal{O} \sim \mathcal{O}' \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{O} - \mathcal{O}' = [Q, \Lambda]_{\pm} \tag{41}$$

これは, つまり, $\mathcal{O}$ は BRST cohomology class に対応しているという事です. すなわち, (40) 式は, $\mathcal{O}$ が BRST の意味で閉形式である事を意味し, (41) 式は, その閉形式の間に, 差が BRST exact なものは同一視しなさいという同値関係を入れています.

以上が観測可能量の定義です. これは, BRST 量子化の標準的な見方です.

さらに, もうひとつ, 真空 $|0\rangle$ は physical, すなわち, $Q|0\rangle = 0$ である事は仮定しておきます.

この定義から次の事が言えます.

(1) observable の真空期待値は, cohomology class にのみ依存

$$\mathcal{O} \sim \mathcal{O}' \quad \Rightarrow \quad \langle 0|\mathcal{O}\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n|0\rangle = \langle 0|\mathcal{O}'\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n|0\rangle \tag{42}$$

これは,

$$\begin{aligned}
\langle 0|\mathcal{O}\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n|0\rangle - \langle 0|\mathcal{O}'\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n|0\rangle &= \langle 0|[\mathcal{Q}, \Lambda]_\pm \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n|0\rangle \\
&= \langle 0|[\mathcal{Q}, \Lambda\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n]_\pm|0\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる事からわかります. ただし, 1 行目から 2 行目への変形で, $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_n$ が observable, すなわち Q と (反) 可換である事を用いました. 最後の変形は, energy-momentum tensor が BRST exact である事を示した場合と同じ議論です.

さらに, もうひとつ重要な性質があります.

(2) observable の真空期待値は, 次の意味で位相不変

$$\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \langle 0|\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n|0\rangle = 0 \tag{43}$$

これは,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \langle 0|\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n|0\rangle &= \langle 0|T_{\mu\nu}\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n|0\rangle \\
&= \langle 0|\{Q, \frac{\delta V}{\delta g^{\mu\nu}}\}\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n|0\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる事からわかります. 1 行目の左辺から右辺へ変形される事は, 左辺の真空期待値を経路積分表示してみるとわかります. すなわち, 右辺の energy-momentum tensor は, 真空期待値を経路積分表示した時に現れる指数関数 e^{-S} の肩の作用を計量で変分する事によって出てきます. 厳密な事をいえば, observable の部分を変分した項も現れるかもしれませんが, ここではそのような項はないものとします. 1 行目から 2 行目への変形は, (39) 式を用いました. 2 行目から 3 行目への変形は, (1) を示した議論と同様にしてできます.

これで, 位相的な相関関数というものが定義されました. すなわち, observable を BRST cohomology class として定義して, その真空期待値を計算すると, 非常に形式的ですけれども, それは, 2 次元面上の計量によらないという意味で, 位相不変量になっています.

では, 実際に, BRST cohomology class がどのようなものであるかという事を考えてみたいと思います.

（質問）state の方には, BRST cohomology はつくらないんですか？

（答）基本的には, 真空に observable をかけたものは BRST closed な state になっていると思いますけれども, 特に位相的な場の理論においては, state をあまり扱う事はなくて, むしろ, observable としてどのような operator が出てくるかという事を主に考える, そして, その真空期待値を考えるという事が中心になります.

では, 具体的な observable の構成を考えます.

先程の構造を思い出す（(32), (33), (34) 式）と, 次のようになっていました.

$$[Q,\phi^i]=\chi^i,\quad \{Q,\chi^i\}=0$$
$$\{Q,\rho^I_{\bar z}\}=\cdots$$

χ は BRST 変換すると 0 になっているので, χ が observable を構成する鍵になる field です.

具体的には, 次のようにします.

ω を, target space X 上の p 次微分形式

$$\omega(x)=\omega_{i_1\cdots i_p}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p} \tag{44}$$

であるとします. それに対応する operator として,

$$\mathcal{O}_\omega=\omega_{i_1\cdots i_p}(\phi)\chi^{i_1}\cdots\chi^{i_p} \tag{45}$$

を定義する事ができます.

先程書いた式 $[Q,\phi^i]=\chi^i$ では, boson ϕ^i が target space の座標として, Q によって χ^i に移っています. すなわち, χ^i は座標を外微分したもの $\mathrm{d}x^i$ に対応しています ($\phi^i\leftrightarrow x^i$, $\chi^i\leftrightarrow \mathrm{d}x^i$). BRST の変換性をそのように読み替える事ができます. このような置き換えの操作によって, target space 上の微分形式から (45) 式のような operator をつくる事ができます.

この operator に対して, BRST 変換を計算してやる事ができます. χ^i は BRST 変換で不変で, ϕ が χ に変換されるので,

$$[Q,\mathcal{O}_\omega]_\pm=\partial_{i_{p+1}}\omega_{i_1\cdots i_p}(\phi)\chi^{i_{p+1}}\chi^{i_1}\cdots\chi^{i_p} \tag{46}$$

となります. χ^i は fermion なので, χ^i で書かれている部分の添え字は完全反対称化されています. したがって, $\partial_{i_{p+1}}\omega_{i_1\cdots i_p}(\phi)$ の添え字も完全反対称化されています. よって, この表式は, 微分形式の外微分の定義そのものになっています. これより, この量は, ω の外微分に対応する operator として書くことができます.

$$[Q,\mathcal{O}_\omega]_\pm=\partial_{i_{p+1}}\omega_{i_1\cdots i_p}(\phi)\chi^{i_{p+1}}\chi^{i_1}\cdots\chi^{i_p}=\mathcal{O}_{\mathrm{d}\omega} \tag{47}$$

したがって, $[Q,\mathcal{O}_\omega]_\pm=0$ である事と $\mathrm{d}\omega=0$ である事は同値です. また, $\mathcal{O}_\omega\sim\mathcal{O}'_\omega$ である事と $\omega-\omega'=\mathrm{d}\lambda$ である事は同値です. これより, A-model の observable と X 上の de Rham cohomology class が 1 対 1 に対応するという結論が導かれました.

以上が A-model の observable の構成です.

（質問）$\partial_{i_{p+1}}$ というのは Σ_g での微分ですか？

（答）いえ, 違います. target space X での微分です. ϕ というのは Σ_g 上では scalar ですので, ϕ^i の添え字 i は, 行き先 X の座標の成分を表しています.

最後に, 明日への導入としてのお話をします. ここまではまだ string になっていないわけでして, 今, 2 次元面を固定した sigma model を考えます. 例えば, n 点の相関関数 $\langle\mathcal{O}_{\omega_1}\cdots\mathcal{O}_{\omega_n}\rangle$ を考えます. これが 0 にならないためには, ある種の selection rule が必要になります. この rule は世界面上での Dirac operator の fermion zero mode の存在からの帰結です.

例えば, 経路積分の立場から考えると, fermion の Gauss 積分をすると, Dirac operator の固有値の積がで

てきます．もし, 固有値 0 の fermion ψ_0 があったとすれば ($D\psi_0 = 0$), 経路積分の結果は 0 になってしまいます．これは真空期待値を考える operator が 1 の場合に対応しています．

ψ_0 は Grassmann なので,

$$\int \mathrm{d}\psi_0 \ 1 = 0, \quad \int \mathrm{d}\psi_0 \ \psi_0 = 1$$

が成り立ちます．すなわち, 真空期待値をとる operator の中に fermion の zero mode が含まれていれば, 経路積分の値は有限（non-zero）の値をとります．よって, fermion に zero mode があった場合, 相関関数を non-zero にするためには, 真空期待値をとる operator の中に fermion の zero mode が含まれていなければなりません．

どれだけ fermion zero mode ψ_0 が現れるかという事は, Dirac operator のゼロ固有値がどれだけあるかという事なので, 指数定理によって計算する事ができます．この数は*11,

$$2d(1-g) + 2\int_{\Sigma_g} \phi^*(c_1(X)) \tag{48}$$

と計算する事ができます．ここで, d は X の複素次元, g は世界面の genus, そして c_1 は X の 1st Chern class と呼ばれる 2 次微分形式です．したがって, $\langle \mathcal{O}_{\omega_1} \cdots \mathcal{O}_{\omega_l} \rangle$ が 0 にならないためには, operator $\mathcal{O}_{\omega_1} \cdots \mathcal{O}_{\omega_l}$ が (48) で与えられる数と同じだけの数の zero mode を含んでいなければなりません．p-次微分形式 ω を考えますと, p 個の fermion χ を含みます．したがって, 微分形式 ω の次数を $\deg \omega$ と書く事にすると, $\langle \mathcal{O}_{\omega_1} \cdots \mathcal{O}_{\omega_l} \rangle$ が 0 にならないためには,

$$\sum_{i=1}^{l} \deg \omega_i = 2d(1-g) + 2\int_{\Sigma_g} \phi^*(c_1(X)) \tag{49}$$

となる事が必要です．

この式を考えると, ほとんどの相関関数が生き残らない事がわかります．

まず, 簡単のために, X が Calabi-Yau 多様体であると仮定します．この時, $c_1(X) = 0$ になるので*12, (48) 式の 2 項目は消えてしまいます．したがって, selection rule は簡単になって,

$$\sum_{i=1}^{l} \deg \omega_i = 2d(1-g) \tag{50}$$

となります．

微分形式ですから, $\deg \omega_i \geq 0$ です．よって, もし, $g \geq 2$ であるとすると, この式は満たされず, 全ての相関関数が 0 になる事が結論されます．

そして, $g = 1$ の場合には, 全ての i に対して $\deg \omega_i = 0$ でなければならないので, 分配関数のみが生き残ります．この分配関数を, 通常, X の elliptic genus と呼びます．

最後に, $g = 0$ の場合には, $\sum_{i=1}^{l} \deg \omega_i = 2d =$ (X の実次元) となります．すなわち, 微分形式 $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_l$ は, $2d$ 次の微分形式になっているので, だいたい X の体積要素になっています．そして, 相関関数は,

$$\langle \mathcal{O}_{\omega_1} \cdots \mathcal{O}_{\omega_l} \rangle \sim \int_X \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_l + (\text{補正項}) \tag{51}$$

*11 この数は, virtual 次元と呼ばれるもので, 負の値を取ることもある．

*12 Calabi-Yau 多様体の一つの定義は, Kähler 多様体であり, かつ 1st Chern class が消えるというものである．少なくとも compact な Calabi-Yau の場合には, この条件は Kähler でかつ Ricci-flat 計量が存在するという条件と同等であることが知られている（Yau の定理）．

と書く事ができます. 第 1 項目が古典的 cohomology を表し, 補正項は量子補正, 物理的にいえばインスタントン補正に相当するものを表しています. これを使って, X の量子 cohomology が定義できる, という仕組みになっています. 量子補正については, 時間がないので, 明日説明します.

今までは, 固定された 2 次元面で考えてきました. このままでは, 今見たように, higher genus の部分については全く trivial になっています. それに対して, string theory においては, 色々な 2 次元面について足しあげる事になります. つまり, target space での色々な string の軌跡について足しあげる, すなわち, string の写像についても経路積分をして, 2 次元面を動かしてやる事になります. そうすると, 今度は higher genus の部分も non-trivial な寄与を与える事になって, 全ての genus についての足しあげなどの問題を考える事ができるようになります.

（二日目）

質問がある人がいるかどうか聞くことを忘れたので, 昨日の講義全体を通して誰かいますか. 昨日の講義の復習をしますので, そうですか. 何もないところで質問はできない. それでは講義をはじめたいと思います. よろしくお願いします.

それでまず昨日やったことですけれども, まず出発点としたのが, $\mathcal{N} = (2,2)$ supersymmetric な sigma model. このモデルには R-symmetry として, $\mathrm{U}(1)_V$ と $\mathrm{U}(1)_A$ という 2 つの U(1)-symmetry がありました. 昨日説明した方法で, U(1) global symmetry だったのを local symmetry に格上げして, ただしそのゲージ場については世界面上のもの, 2 次元なので, Lorentz symmetry でやはり U(1) なので, U(1) がゲージ場になっているわけですけれども, それと同一視する, そういう twist の操作をします. $\mathrm{U}(1)_V$ を使って A-twist, $\mathrm{U}(1)_A$ を使って B-twist の 2 種類の twist があります. 昨日説明していたのは, A-twist の方を使った topological model です. そのときにこのモデルには, fermion が 4 つあったわけですけれども, この twist によって

$$\chi^I = \psi^I_{+,+}\ , \quad \chi^{\bar{J}} = \psi^{\bar{J}}_{-,-}\ , \text{(scalar)}, \qquad \rho^I_{\bar{z}} = \psi^I_{-,+}\ , \quad \rho^{\bar{J}}_z = \psi^{\bar{J}}_{+,-}\ , \text{(spin } \pm 1, \text{ 1-form)} \tag{52}$$

というふうに fermion なんだけれども, 整数スピンを持つものに化けます. で, 対応する supercharge の方も 4 つありますが, それも $\pm 1/2$ のものが, spin 0 と spin ± 1 になります. そのうち特にスピンが 0 であるようなものをもってきて,

$$Q = Q_{+,+} + Q_{-,-} \tag{53}$$

これを topological model の BRST charge だと思って, observable をこの BRST operator に関する cohomology class として定義します：

observable=BRST cohomogy class

そうすると, 変換則は

$$\begin{aligned} [Q, \phi^i] &= \chi^i\ , \quad \{Q, \chi^i\} = 0\ , \\ \{Q, \rho^I_{\bar{z}}\} &= 2\partial_{\bar{z}}\phi^I - \tilde{F}^I_{\bar{z}} - \Gamma^I_{JK}\chi^J\rho^K_{\bar{z}}\ , \\ \{Q, \rho^{\bar{I}}_z\} &= 2\partial_z\phi^{\bar{I}} - \tilde{F}^{\bar{I}}_z - \Gamma^{\bar{I}}_{\bar{J}\bar{K}}\chi^{\bar{J}}\rho^{\bar{K}}_z \end{aligned} \tag{54}$$

となります. observable というのは target space X の de Rham cohomology 類と呼ばれるものになっています：

observable $\Leftrightarrow$ de Rham cohomogy class in target space X

一般に X を決めた場合, de Rham cohomology class は有限個しかありません. したがってこの topological theory で observable は有限個しかありません. 基本的には ω という X 上の closed p-form に対して, observable $\mathcal{O}_\omega$ が作れます:

$$O_\omega \Leftrightarrow \omega : X \text{ 上の closed } p\text{-form}$$

topological theory で興味の対象, 計算できるものというのは, observable の相関関数で

$$\langle \mathcal{O}_{\omega_1}, \cdots, \mathcal{O}_{\omega_\ell} \rangle \tag{55}$$

が topological A-model の計算すべき相関関数です. しかし前回最後に言ったように, selection rule があって, それは相関関数が nonzero になるためには微分形式の degree が, degree っていうのは ω っていうのが p-form だったら degree は p ですが, $2d(g-1) - 2\int_{\Sigma_g} \phi^*(c_1(X))$ でなければなりません:

$$\langle \mathcal{O}_{\omega_1}, \cdots, \mathcal{O}_{\omega_\ell} \rangle = 0 \ , \quad \text{unless} \quad \sum_{k=1}^{\ell} \deg \omega_k = 2d(1-g) + 2\int_{\Sigma_g} \phi^*(c_1(X)) \tag{56}$$

それで特に, X が Calabi-Yau 多様体であれば, 第 2 項は 0 になるので, まあ, 以下 Calabi-Yau 多様体を考えることにすれば, 第 2 項を忘れてしまいますと, 結局基本的に第 1 項が selection rule です. 昨日最後に言ったように, genus g が, genus っていうのは世界面の穴の数ですが, $g \geq 2$ の場合は, この条件式を満たすことができません. だから, topological A-model では genus が 2 以上の相関関数は自明になってしまう. $g = 1$ の場合は, 第一項は次元によらずゼロになってしまうので, 分配関数を求めるのだけが nontrivial な情報を与えて, それはふつう X の elliptic genus と呼ばれる. 興味があるのは genus が 0 の場合だけということになって, その場合は selection rule は $\sum_{i=1}^{\ell} \deg \omega_i = 2d = \dim X$. 弦理論で使う複素 3 次元の Calabi-Yau 多様体の場合は, 右辺が 6 ということになる. 例えば, ω として典型的なのは degree 2 の場合で, ちょうど 6 になるためには 3 つもってくればいい. これはある意味で topological な湯川相互作用で, 3 点関数が一番興味のある対象になる. この辺までが昨日やったことで, これから例えばここからインスタントン項がどうやってでてくるか話をしようと思いますが, 先程の約束通り, ここまでで質問がある人はいますか.

（質問）ω が operator ということですが, それが p-form になるっていうのは...

（答）ω っていうのは, p-form からそれに対応する場の operator が作れる. 作り方は昨日多分最後に書いた ((45) 式）ものです.

（質問）operator の p-form が observable になるっていうことは, p-form が closed form になるということですか.

（答）closed form という条件から Q と可換になる. 昨日最後に書いたと思いますけど ((47) 式), p-form から一般に observable を作ったとすると, closed form から作れる：$[Q, \mathcal{O}_\omega]_\pm = \mathcal{O}_{\mathrm{d}\omega}$. これは obsevable が, ω が閉形式になるものと同値ということで, それが de Rham cohomogy と対応します.

それからもう一つ注意をするのを忘れました. 相関関数と書きますが, topological theory なので相関「定数」です. boson ϕ とか χ とかは世界面上の場ですから一般には座標によるのですが, 座標依存性は BRST の意味で自明になっているので, 座標を動かしても変わらない, ということが言えます. したがって, 場所に依らない定数です. だから, これらは数を与えています. 昨日 topological model は完全に解けると言いましたが, 解けたと言う状態はなにかというと, すべての X の closed p-form, これは対応する target space X を決めれ

ばどれだけの cohomogy class があるかというのは幾何学で分かりますけれども, そのすべてに対して, この相関関数を selection rule を満たすように決めれば, 完全に解けたことになります.

（質問）昨日その相関関数を求めるときには, 確か metric を固定しているとおっしゃっていましたが...
（答）それは Riemann 面の方の metric です．すなわち string にしていない sigma model で考えているということです．これから Riemann 面の metric を動かすことをします．string theory とするためには, 世界面上の metric の自由度, 2 次元重力の自由度を dynamical にしてこれから動かします.
（質問）spin connection はゲージ化したときに dynamical になっていたと思うのですが...
（答）あ, いえ, dynamical ではなく, 背景ゲージ場です．普通の場の理論の言葉でいえば, Riemann 面の計量は固定しているので, それから spin connection が決まりますが, それは今背景の U(1) ゲージ場であって, まだ dynamical ではない.
（質問）Riemann 面は closed で orientable な場合のみを考えていますが, 向き付けのない場合でも twist は可能か.
（答） ええと, 基本的には可能だと思います．昨日強調したように, scalar にしているので, 向き付け不可能な場合でも, 貼り合わせで定義されていますが, それに対して不変なので, 向き付け可能不可能, あるいは境界のあるなしによって定義できないということはないと思います．ただそういう場合は難しい問題がまた出てくると思うのですが, 理論としては定義できます.

それでは, 相関関数がどういう風に計算されるかと言うことをやります．基本的には経路積分を使って計算しようとすると, まず boson に対するゲージ固定条件が運動方程式となります．BRST 量子化の意味でのゲージ固定条件です ：

運動方程式=(BRST 量子化の意味での) ゲージ固定条件

従って, 今消してしまいましたけど, ρ_z と $\rho_{\bar{z}}$ は antighost 場に相当しますから, その行き先がゲージ固定条件ということです．それが今どういう条件になっていたのかというと, 補助場は省略して書くと, 基本的に運動方程式は $\partial_{\bar{z}}\phi^I = \partial_z\phi^{\bar{I}} = 0$. 複素共役をとれば, 基本的に 1 つの方程式です．ϕ は, 昨日やったように, 2 次元面から X への写像であるといいましたが, これが正則であるということを意味する方程式になっています．ϕ^I の I は X の方の座標ですが, これが世界面の $\bar{z}$ によっていないということは, 正則関数であるということです．一般に行き先が複素多様体である場合, その複素多様体の複素構造に関して, 正則座標が元の空間の $\bar{z}$ によらないときにその写像を正則であるといいます．従って, 今の場合は, boson 場に対する運動方程式は, boson 場が正則写像を定義している, ということになります．この古典解をインスタントンといいます．今わかったことは, A model の古典解あるいはインスタントンと言うのは世界面から target space への正則写像である, ということです．これを経路積分で計算しようとすると, 今の場合ゲージ固定条件が運動方程式そのものなので, ゲージ固定条件を満たすものの上で積分をすればよい．したがって, boson に関しては, 正則写像全体の上で経路積分することによって, この相関関数が計算できるということになる．一般にこの世界面から target space への正則写像がどれだけあるかというのは数学的な問題です．世界面の genus や, X がどういう多様体であるかということでいくつあるか決まりますが, これは有限個のパラメータで parametrize されているようなものです．相関関数というのはインスタントンの解空間, これは数学の方では moduli 空間と呼んでいますが, この解空間上の積分で計算できることになる．一般にこの空間は有限次元の空間であることが知られているので, 経路積分というのは無限次元の空間で積分しているわけですけども, 数学的にきちんと定義できてい

て, 相関関数をきちんとした意味で定式化することができます.

相関関数 $\sim$ インスタントンの解空間 (モジュライ空間) 上の積分 $\to$ 有限次元の空間の積分

一番簡単なインスタントンは, 定数関数です. 行き先が X の 1 点になる, ということです. 明らかに運動方程式を満たしている.

例えば, 自明なインスタントンは定数写像. moduli 空間はどうなりますかというと, 行き先の点によって parametrize されている. だから, この moduli 空間は X 自身ということになります. だから, 自明なインスタントンの上の積分は, target space X 上の積分で書けることになります. 昨日最後にちょっと書いた式ですが, それは

$$\langle \mathcal{O}_{\omega_1}, \cdots, \mathcal{O}_{\omega_\ell} \rangle = \int_X \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_\ell + \text{contribution from instanton sector} \tag{57}$$

第 1 項が自明なインスタントンの寄与で, これに第 2 項の非自明なインスタントンの寄与を加えればよい. ですから, A-model の相関関数は基本的にこういう構造をしていることになります.

（質問）すみません. 今 target space は Kähler 多様体でインスタントンという感じがしないのですが. それは単にアナロジーと言うことですか.

（答） 感じがしないというのはどういう意味ですか.

（質問） Minkowski 空間だと時間方向に走っていくと急に点が現れて急に消えると言う意味でインスタントン.

（答） 今の場合はインスタントンは運動方程式の古典解という意味で捉えています. 時空間でなにか局在した解であるという見方は, 今の場合そういうイメージには合わないかもしれませんが, 古典解をインスタントンと呼んでいて, 今の場合それが正則写像になっていて, 一番簡単なのは定数写像です.

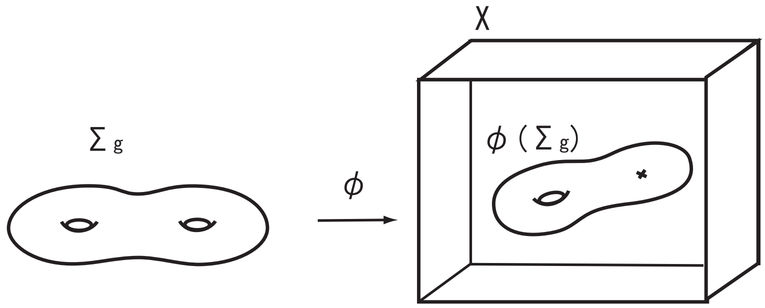

図 1　世界面からターゲット空間への写像

まあ, この例で, (57) 式の第一項は古典的な微分形式を多様体の上で積分している. もし非自明なインスタントンがなければ第 1 項だけできれてしまう. それで, 非自明なインスタントン sector をどう表すかということを考えるために記号を導入します.

$\phi(\Sigma_g)$ は X の中のある 2 次元面を定義するわけです. したがって, これが 1 点につぶれてしまうのが自明なインスタントンですけど, 多少穴はつぶれたりするかもしれませんが, 1 点にはつぶれないのが非自明なインス

タントンになります．このとき, $\phi(\Sigma_g)$ は X 上の非自明な 2-cycle, 2 次元の何か閉曲面を与える．これをホモロジーでとらえることにして, X のホモロジー群の基底を S_1 から S_n とします．ただし n は, X の 2nd Betti number と呼ばれる, 2-cycle のある同値類の数ですね．2 つの 2-cycle の差が何かの 1-cycle の boundary でかけているかどうかによって 2 次のホモロジー類群が定義できるので, n はそれが何次元あるかというのを表しています．つまり, $n = b_2(X) = \dim H_2(X, \mathbb{Z})$．係数は整数 $\mathbb{Z}$ です．$\phi(\Sigma_g)$ は X 上の非自明な 2-cycle を定義しているので, これを基底 S_i を使って展開します．

$$\phi(\Sigma_g) = \sum_{i=1}^{n} K_i \cdot S_i \tag{58}$$

それから **Z** と書きましたが, 係数は整数という意味です．従って, K_i も整数です．この辺は説明している時間がないですが．2-cycle の独立なものが n 個あるわけですけれども, この 2-cycle に何回巻きついているかということをあらわす数が K_i です．K_i は何回巻きついてるかを表している数で, winding number, あるいはインスタントン number と呼んでいます．

（質問）なんか S_i は絵とかで描けないんですか．巻き付いている様子なんかを...

（答）ええと, すいません．高次元ではなかなか難しいですね．だから次元を下げて考えることにすると, X として torus を考えましょう．そうすると torus の上での非自明な 1-cycle, 今次元を下げているので 2-cycle ではなくて 1-cycle になりますが, 1-cycle っていうのと 2 種類あるわけですね, いわゆる α-cycle, β-cycle（図 2 を参照．）．α-cycle, β-cycle に何回巻きつくかということによってその写像が分類できるわけです．高次元にして, X が例えば Calabi-Yau 3-fold だとすると, そのなかに torus の場合の 1-cycle に相当するものとして 2-cycle でその中に非自明なものが何個かあって, その周りに巻きついている様子を想像してください．やっぱり黒板には書けないですね（笑）．

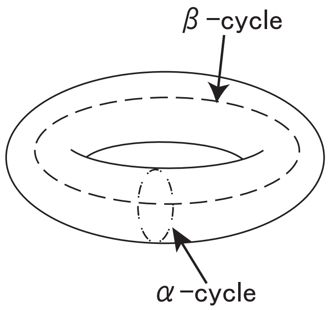

図 2　トーラスの α-cycle と β-cycle

今言ったように, 自明なインスタントンはすべて $K_i = 0$ ですね．非自明なものは, 何か $K_i \neq 0$ となるものが少なくとも一個あればよいです．その数によって, インスタントンは topological に分類できます．先ほどインスタントンのモジュライ空間と言いましたけれども, インスタントン数を固定して, すなわち, topological な type を固定して, そういった写像がどれだけあるかを数えていきます．ですから, 先ほど書いた式を丁寧に書くと次のような構造をしていることが分かります．今簡単のために, 次のような場合を考えます．X は Calab-Yau 3-fold, それから, ω_i は全て 2-form．そうすると, 先ほど言ったように, $g = 0$ の nontrivial な相関

定数というのは 3 点関数のみです.

$$\langle \mathcal{O}_{\omega_i}\mathcal{O}_{\omega_j}\mathcal{O}_{\omega_k}\rangle = \int_X \omega_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k + \sum_{\beta\neq 0}\langle \mathcal{O}_{\omega_i}\mathcal{O}_{\omega_j}\mathcal{O}_{\omega_k}\rangle_{\Sigma_{0,3},\beta}$$

$$= D_i \cap D_j \cap D_k + \sum_{\beta\neq 0} I_{0,3,\beta}(i,j,k)\cdot Q^\beta \ , \quad \beta = \sum_{i=1}^{n} K_i \cdot S_i \tag{59}$$

ここで I の下の添え字の意味は, genus が zero, 3 点, それからインスタントンの topological type が β です. $I_{0,3,\beta}(i,j,k)$ は, topological type が β であるインスタントンのモジュライ空間上の積分です. それに Q^β という weight がかかります. ここで, $Q^\beta = \prod_{i=1}^{b_2(X)} Q_i^{K_i}$ です. この weight の由来は, 作用を書いたときに BRST exact term と topological term の和でしたが（$S = \{Q, V\} + \int_{\Sigma_g} \phi^*(J)$）, 写像の topological type を決めたときに第 2 項の topological term の値を計算すると, 実は, J っていうのはちゃんと説明してませんでしたけれども X の Kähler 2-form と呼ばれるもので, その積分が instanton sector の weight となります. 元をたどると作用の topological term を計算したものです. だからこれは, 4 次元の gauge 理論のインスタントンをご存じの方は, topological term というのは, $*F \wedge F$ を 4 次元空間で積分したものですが, あるインスタントン数 k が出てきて, それがインスタントン展開のパラメータですが, それと同じ意味で, 今の場合は topological term を行き先の 2-cycle にどれだけ巻き付いているかということによって, topological type を指定して計算するとこういう形の weight が出てきます. それで最後に $I_{0,3,\beta}$ の正体を具体的に明らかにしていきたいのですが, 実は, ある整数 $N_{0,\beta}$ が存在して,

$$I_{0,3,\beta} = N_{0,\beta}\int_\beta \omega_i \int_\beta \omega_j \int_\beta \omega_k \tag{60}$$

と書けることが知られています. いま $\omega_{i,j,k}$ の 3 点を計算しているのですが, ω 依存性はこういう形になっていて, $N_{0,\beta}$ は ω によらない構造をしていることがわかります. この $N_{0,\beta}$ のことを Gromov-Witten 不変量と呼び, 数学の方でよく調べられています. 添え字の意味は, genus が 0 で topological type が β. まとめると, topological A-model で相関「定数」を計算するには, 自明なインスタントンの部分は普通の古典的な X 上の積分, 非自明なインスタントンの寄与は, ω 依存性は決まっているので, $N_{0,\beta}$ を決定できれば, 完全に解けたことになります. したがってその数を全部決めればよい.

（質問）Kähler 2-form は Kähler potential の 2 回微分と思っていいんですか.
（答）基本的にはそれでよくて, 微分形式の形に書き換えます.

ここで, $N_{0,\beta}$ の母関数

$$F_0 = \sum_\beta N_{0,\beta} Q^\beta \tag{61}$$

を prepotential といい, topological A-model の genus 0 での free energy に相当するものです. これが決定できれば, 理論が完全に解けたことになります. どういう構造をしているかということをお伝えしたかったので, 最後の部分は言葉だけになってしまったかもしれません. string にする前の A-model に関してはこのくらいにしておいて. string にいく前の B-model についてもお話しようと思って用意していたのですが, 時間がないようなので, 重要な点をいくつか触れておいて, このセクションをおしまいにしたいと思います.

最後に B-model について．前回やっていたのを思い出してもらいながら, B-model はどういう構造になっていたかというと, scalar になる fermion と 1-form になる fermion が A-model と違ってくる．B-model では, もともと 4 つあった fermion のうちの $\psi^{\bar{I}}_{+,-}, \psi^{\bar{I}}_{-,-}$ が scalar になって, それから $\psi^{I}_{+,+}, \psi^{I}_{-,+}$, これが 1-form になる．非常に大きな違いがあって, A-model では scalar になるものと 1-form になるものが, target space, 行き先 X の正則, 反正則に関してそれぞれ scalar の方も 1-form の方もそれぞれ 1 つずつあったんです．B-model にしてしまうと, scalar になるのは, 行き先の反正則の座標です．これは convention によって逆にすることもできますけども, 本質的に scalar になるか 1-form になるかは, target space で見たときに, 正則か反正則かによってこれらが完全に分かれてしまいます．したがって, B-model は X の複素構造に非常に強く依存しています．これが B model の大きな特徴です．カイラリティでいえば, chiral multiplet と antichiral multiplet が完全に分離してしまって, その意味で B-model は chiral な理論になっています．A-model は vector-like な model なんですが．string の type IIA と type IIB と事情は同じです．したがって, anomaly があります．anomaly が消えるためには, X が Calabi-Yau 多様体であることが必要です．すなわち,

$$\text{anomaly-free} \Leftrightarrow c_1(X) = 0 \Leftrightarrow X \text{ が Calabi-Yau}$$

それからもうひとつ最後にやるのが, インスタントンですね．インスタントンの条件は, 先ほど言いましたように B-model の運動方程式の解です．BRST 量子化の意味で, scalar に相当するのが ghost で 1-form に相当するのが antighost です．先ほどの式を思い出してもらうといいんですが, A-model では target space の足が I と $\bar{I}$ の 2 種類あったんですが, B-model のほうは同じ正則の足だけです．だから運動方程式はどうなっているかというと, 実はこういう方程式になります：

$$\partial_z \phi^I = \partial_{\bar{z}} \phi^I = 0$$

したがって, 条件は今の場合は, ϕ^I が z にも $\bar{z}$ にも依らないことです．A-model の場合は, 最左辺が $\partial_z \phi^{\bar{I}}$ になっていて, 条件が二つあったんだけど, それらが互いに複素共役になっていました．あるいはそれから vector-like だということもいえるんですけども, それに対応する解の写像が正則になっていました．B-model の場合は, 運動方程式をみると, ϕ^I は z にも $\bar{z}$ にもよらない, すなわち, 定数写像である．したがって, インスタントンは定数写像しかないので, 相関関数は target space X 上の積分しかないということになります．このように, chiral で anomaly と言う問題はあり得るんですけど, B-model の大きな特徴は古典的な積分で相関関数が決まってしまう, という性質です．これが周期積分の話につながるのですが, でその話もしようと思ったのですが, 時間がないので省略します．B-model に関しては, 相関関数の計算は, 先ほどは ω というものの積分で書けたのですが, 今度はちょっと observable は別なものになっていて, そういったものの X 上の積分で相関関数が書ける．それは最終的には, いわゆる周期積分の理論を使って計算できることが知られている．以上が, string に行く前の話でちょっと休みましょうか．それでは何か質問がある人はいますか.

（質問）定数写像になるというのは X が連結であるということを仮定していますか.
（答）確かに連結であることを仮定していますが, 結論としては連結でなくても成り立ちます.

3 Topological string = coupling to 2D gravity

それではいよいよ string．ここでは 2 次元重力との coupling を考えます．これまでは 2 次元面 Σ_g の計量 $g_{\mu\nu}$ を固定していました．2 次元重力を考えるということはこの計量を dynamical にする，あるいは経路積分の言葉を使っていえば，$g_{\mu\nu}$ に関する経路積分を行なう，ということですが，これによって topological な string theory が出来ます．普通の sigma model だと higher genus の相関関数が全て自明だったんですが，こうすることによって，全ての genus に関し非自明な相関関数を定義できます．

これを実際にはどうするかというと，Σ_g の計量に関する経路積分というのは，通常の Polyakov 流の bosonic string の経路積分，これと全く同じです．すなわち，genus g の Riemann 面 Σ_g の moduli 空間上の積分をする，ということです．それから一つ強調しておきたいのは，topological string だからといって，2 次元重力の部分に関しては何も特別なことをしているわけではなくて，少なくともこの部分に関しては普通の bosonic な string の経路積分と全く同じことをやっています．僕ちょっとよく知らないんだけど，Polyakov 流の superstring の経路積分って言うのは higher genus で，数学的に良く分かってなくて，いわゆる supermoduli 空間とかそういったものを使わなくちゃいけないので恐らく難しい問題があるはずですが，topological string で使う二次元面の積分っていうのは bosonic string の積分なんで，これは数学的にきちんと分かっています．

具体的にどういうふうにするかというと，bosonic string では，energy-momentum tensor が実は，こういう形に書けます．

$$T(z) = \{Q_B, b(z)\} \tag{62}$$

$b(z)$ は，2 次元面の reparametrization に関する anti-ghost で，Polchinski の教科書に書いてあります[*13]．すなわち bosonic string では energy-monentum tensor というのが 2 次元面上の reparametrization の antighost の BRST 変換という形でかけている，という結果が知られています．

昨日やった topological model では，どうだったかというと，昨日やったように，energy momentum tensor，どっかに書いたかもしれません，たぶんこう書いたような（31 式）．

$$P_{z,\bar{z}} = \{Q, G_{z,\bar{z}}\} \tag{63}$$

ですから，全く BRST の構造は同じで，bosonic string の energy-momentum tensor$T(z)$，あるいは共形場理論では Virasoro generator というやつですが，それが，ある量の BRST 変換で書けているということと今の topological model でも全く同じことをしていて，実は，Hamiltonian というのは，ある量 G，これはスピンが ± 1 の supercharge ですが，それと，scalar の BRST operator との交換子を取って得られます．全く同じ構造をしているという点に注目すると，reparametrization ghost b のかわりに今の topological theory では G というものがくる，ということになります．そこで，bosonic string の経路積分，あるいは Riemann 面の moduli 空間の上での経路積分というものがどうなっているかというのは string の教科書の higher loop の計算を見れば載っていて，今はそれを全く踏襲します．

すなわち，bosonic string の higher loop の amplitude の計算，まあ計算というか定義，において b を G に置き換えます．これが，topological string の amplitude を与えます．で具体的にどういう式になるかという

[*13] 手元の Polchinski の教科書 [18]（2000 年版）では，(4.3.1b) 式や (4.3.6) 式がそれに当たる．

と, 例えば g が 1 より大きい時[*14],

$$F_g = \int_{\mathcal{M}_g} \left\langle \prod_{k=1}^{6g-6} (G, \mu_k) \right\rangle ,$$
$$(G, \mu_k) = \int_{\Sigma_g} \left(G_{zz} (\mu_k)_{\bar{z}}^{z} + G_{\bar{z}\bar{z}} (\bar{\mu}_k)_{z}^{\bar{z}} \right) \tag{65}$$

ただし $\mathcal{M}_g$ は genus g の Riemann 面の moduli 空間です. この括弧 $\langle \ \rangle$ がこれまで考えてきた相関関数で, それを, 今, 計量に関して積分するということが Riemann 面上の moduli 空間の積分になっています.

(G, μ_k) は Σ_g の積分で出てきます. 但し, (65) の下の式で, G_{zz} や $G_{\bar{z}\bar{z}}$ とあって, (63) の G_z 及び $G_{\bar{z}}$ とは添え字の数が違いますが, (63) 式の G は charge で, 一方 (65) 式の G は対応するカレントなので添え字が一つ増えています. また, μ_k というのは, これは k が 1 から $6g-6$ まであるんですが, Beltrami differential と呼ばれる量です[*15]. これは Σ_g の複素構造あるいは, 2 次元なんで共形構造と呼んでますが, の変形を記述する量です.

もうちょっときちんと書くといいんですが, 基本的に bosonic string では, (G, μ_k) の内積のところが reparametrization の anti ghost b と, Riemann 面の複素構造の無限小変形を記述する Beltrami differencial と呼ばれる量[*16]の内積で, それを moduli 空間で積分しなさいというのが higher loop の振幅の定義でした. そこにおいて, anti-ghost b の代わりに, topological sigma model で出てきた G を使いなさいというのが topological string の amplitude の定義です. これによって, 一般の amplitude を定義できる, ということになります.

で, Beltrami differential を使って, bosonic string の場合, あるいは string field theory の場合, higher loop の amplitude を計算するときの処方箋というのが知られていて, その anti-ghost b を, G という supercharge に置き換えて計算しなさいというのが topological string の amplitude の計算です.

これによって, 2 次元重力の coupling, あるいは Riemann 面上の経路積分が定義できたというふうに考えられます. ここで F_g というものを計算してみると, 先ほど説明したようにインスタントンの moduli 空間の積分で書ける. で, F_g がどういう構造をしているかというと,

$$F_g = \sum_{\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})} N_{g,\beta} Q^{\beta} \tag{66}$$

こういう構造をしていることが分かって, この $N_{g,\beta}$, これを genus g の Gromov-Witten 不変量と呼ぶことにします.

---

*14 genus が 1 の時は, 次のような式で与えられる：

$$F_1 = \frac{1}{2} \int \frac{d^2\tau}{\tau_2} \mathrm{Tr} \left[(-1)^F F_L F_R q^{H_R} \bar{q}^{H_L} \right] \tag{64}$$

*15 $6g-6$ という数の直観的な導出は, 例えば教科書 [19] の 159-160 ページを見よ. また, （real で数えると）genus 0 の時は 0 個, genus 1 の時は 1 個ある.

*16 ここで述べられているように, Beltrami differencial μ_k は Riemann 面の複素構造の無限小変形を記述する. 実は, 小平-Spencer 理論によって, 複素構造の無限小変形の空間は, $T^{(1,0)}\Sigma_g$ を係数とする Dolbeault コホモロジー $H^1_{\bar{\partial}}(\Sigma_g, T^{(1,0)}\Sigma_g)$ と同一視できることが知られており, Beltrami differential は, その基底になっている.

ただ, gravity と couple させる前は, $g \geq 2$ で全部消えちゃってたわけですが. 今の場合 selection rule はどう変わるかというと,

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \deg\, \omega_i = (1-g)(d-3) + n + \int_{\Sigma_g} \phi^*(c_1(X)) \tag{67}$$

これが, 2D gravity と couple させた後の selection rule です.

ここで, 以前に出てきた l を n に書き換えました. 今 observable が n 個の相関を考えると, Riemann 面上に n 個, 例えば $O_{\omega_1}, O_{\omega_2}, \ldots O_{\omega_n}$, operator が入ります. こういう状況を考えたときに, gravity と couple させたとき, あるいは string として考えたときに selection rule というのはある種の指数定理を使って計算できてこういうかたちになります. ちょっと理由があって, 前の (49) 式では左辺を 2 倍に書いたんですが, 今はちょっと次元を複素数でカウントしたいので左辺に 1/2 をつけてます. 以前との差は,

$$3(g-1) + n$$

この次元の差, これがどっから来てるかというと, genus が g , それから puncture の数が n の, Riemann 面の moduli 空間の, えっと正確に言うと複素次元です. 先ほど Beltrami differential が $6g-6$ 個あると言ったのは, あれは real で考えてたんですが, genus g の Riemann 面に対しては, それだけの変形の自由度があるので, それを 2 で割った $3g-3$ ですね. で n というのは, 点の位置, えっと, n 個の点を決めましたが, この点が Riemann 面のどこにあるかということで, その, 複素一次元の自由度. で, 併せて, genus g, puncture の数 n 個の Riemann 面の moduli 空間の, まぁ現実には virtual な次元ですが, まぁ次元が大体これだけ数がある. で, 重力との coupling をした後には, この次元だけ余分に積分が出てきますので, それに対応して selection rule がそれだけ変更を受けます.

もう一度言うと, 2 次元の計量を dynamical にするために, 余分に経路積分をする必要があります. で今, topological な, あるいは普通の bosonic string でもそうなんですが, 経路積分というのは, 実では $6g-6$ 次元の, 複素次元で言うと $3g-3$ 次元の, 有限次元の積分に置き換えることができます. これは, string theory では共形性があるから, topological string では topological な不変性があるから. で, それにともなって, それだけの積分が余計にあるので, selection rule がこれだけの変更を受けます.

これをみると, ものすごくいいことがあります. まず, 前と同じように X が Calabi-Yau 多様体とすると, $\int_{\Sigma_g} \phi^*(c_1(X))$ は忘れていい. それから, 特に, string theory で興味がある, 複素 3 次元の Calabi-Yau 多様体とすると, $d=3$ を入れることになるので, $(1-g)(d-3)$ の部分もばっさり落とすことができる. ま, これ, 非常に面白いというか, ある意味多分不思議な現象なんですけれども. Riemann 面の moduli 空間の次元が, まぁ複素で言うと, $3(g-1)$. 一方, topological な sigma model から来る counting というのは, d が 3 の場合はちょうどそれと逆でマイナスを付けたのが selection rule, あるいは anomaly として出てくる. 従って, selection rule は非常に簡単になってしまって, X がもし Calabi-Yau の複素三次元ならば, selection rule は

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \deg \omega_i = n \tag{68}$$

さらに, ω_i をさらに 2-form とすれば, $\deg \omega$ は常に 2 です. n 個ありますから, selection rule は常に満たされる.

すなわち, これはすごいことが起こったわけで, gravity とカップルさせる前は非常に限られた相関関数だけだった. まぁそれだけでも十分面白かったんですけど, 古典的な cohomology の変形を追っていくと. ところが, gravity とカップルさせた後に selection rule を見てやると, 物理的に興味がある Calabi-Yau の 3-fold

の場合, それから ω を典型的な 2-form の observable にしてやると, それは selection rule を常に満たします. 従って先ほど, Gromov-Witten 不変量として, $N_{g,\beta}$ があったんですけど, これが a priori には selection rule からは常に許されます. 従って, 全ての $N_{g,\beta}$ が non-trivial, 興味のある量. で, だから, この $N_{g,\beta}$ を全て決定するということが, 今度は, topological な A-model の string を解くということになります. だから, Gromov-Witten 不変量は topological string においては, 全ての g と全ての β に関して, 少なくとも, あらかじめゼロになることは, もちろん計算結果がゼロになることはありますけれども, selection rule からだけではゼロにはならないで, 全て考える必要があります. これを全て決定出来れば, これは topological な A-model の string theory を解いたということになります.

あ, それから, あの, 今言い忘れましたけど, $g=0$ の場合はもう, すでに定義されているというか, まぁ以前の, topological な A-model の場合の $N_{0,\beta}$ を使うことにして, higher loop に関してはさっきの定義に従って, この Gromov-Witten 不変量を計算します.

それで, この $N_{g,\beta}$ を全て決定すればよいので, 先程書いた F_g

$$F_g = \sum_{\beta \in H_2(X,\mathbb{Z})} N_{g,\beta} Q^\beta \tag{69}$$

を使うと, topological string の分配関数は, 全ての genus について F_g を足し上げて,

$$Z_{topstr} = \exp\left(\sum_{g=0}^{\infty} (g_s)^{2g-2} F_g\right) \tag{70}$$

となります.

今説明したのがこれは A-model の場合ですけれども, B-model の場合も gravity の coupling の方法は全く同じで, energy-momentum tensor あるいは Hamiltonian が, BRST の Q の commutator として書かれていましたから, F_g は全く同じにして定義できて, 同様に amplitude が, まぁ selection rule はさっき言いましたけどやはり同じように, 適当な observable を持ってくればその observable に関する selection rule が常に満たされる, ということが示されて, 全く同じようにして, B-model のほうも, 同じ形で分配関数を求めることが出来ます.

それでちょっと, もう時間があまりないので, あと残りの時間に $c=1$ の話をしようと思います. その前に, 一番最初に, topological string は完全に解けるということを言いましたけれども, 最近の発展で, toric とよばれるある種の特別な Calabi-Yau 多様体に関しては, その分配関数を, large N duality と呼ばれる, Chern-Simons theory との duality を使って完全に決定することが出来るようになりました. その意味で, この Z を完全に求めることが出来る*17ので, あとはそれを genus の展開, あるいはこの Q に関する展開をしてやれば, その展開係数として $N_{g,\beta}$ は全て読み取れます. したがって, ある種の topological string, もうちょっと言うと, toric Calabi-Yau 3-fold に対する topological string, A-model に関しては完全に解けたということができると思います.

ここまでが, topological string をどうやって定義するかという, 非常に形式的ですけどよくある話です.

ちょっと切れ目なので, もしここまでのことで質問などあれば.

*17 このあたりの話題については, 菅野先生の講義録 [20] が非常に分かりやすい文献である.

（質問）topological string の分配関数の定義は何ですか？

（答）えっ, 定義は (70) 式です．これが定義です．

（質問）はぁ．

（答）だから, F_g は (65) が定義で, 先程, これがある種の Calabi-Yau 3-fold に対しては, ある種の duality を使って (66) と書き表すことが出来る．その意味でまぁ一応, 解けたと．

（質問）分配関数はどういう意味を持つのですか？場の理論の...

（答）場の理論の分配関数？今, だから, string theory としての分配関数と思ってもらった方が．bosonic string の分配関数は, 先程言ったように genus g の amplitude F_g を定義して, 多分, 摂動論的な弦理論の分配関数はこれで定義するはずです．これは分かります？ string theory やったことあれば．それはあくまで, 摂動論的に genus 展開をして, 各 genus ごとの amplitude F_g を計算してやって, で, 分配関数は, (70) 式のように, それに string coupling を入れて $(g_s)^{2g-2}$ という weight をかけて足し上げてから exponential の肩に乗せるだとか, あるいは, $N_{g,\beta}$ というのは, この分配関数の log が free energy で, free energy は genus に関して (69) 式のようにして展開されるというのが普通の string theory の, 分配関数の定義だと思います．これが一応, 摂動論的な string theory の formulation だと考えます．

topological string の場合は, 普通の string theory にならって分配関数を定義したわけですが, それを (69) の形で展開した係数を見ると, その展開係数に, 幾何学的な不変量である Gromov-Witten 不変量が出てきます．ここで, 非常に面白いことは, Gromov-Witten 不変量 $N_{g,\beta}$ 自身を直接求めることは出来ないんですけども, 分配関数 Z 自身を直接求めることがある種の duality を使って出来て, 逆にそれを展開することによって, 全ての Gromov-Witten 不変量というのが計算できる, という仕組みになっています．まあ, それは duality の議論でよくある話で, 何か足し上げた結果に関してはいろんな情報が分かって, duality みたいなのを使っていろんな性質が分かって, その性質から足し上げた結果, あるいは分配関数が直接求められて, それを展開することによっていろんな情報が引き出せる, というような構造が topological string とか, あるいは duality を使った理論ではよく出てきます．

4 Ubiquity of $c = 1$ string amplitude

分配関数を定義しただけでなく, それを求める求め方っていうのもちょっとやろうかと思ったんだけどもうちょっとその余裕は無いので, 最後に, "Ubiquity of $c = 1$ string amplitude" というタイトルでお話します．最近は, ubiquitous という言葉が良く聞かれます．ubiquity という言葉ですが, 遍在, どこにでもあるという意味の英語．ちょっと高級な, ラテン語かなんかに由来する英語です．以下では, $c = 1$ の string の amplitude というのはいろんなところに出てくるという話をしたいと思います．いろんなところっていうのは, もちろん topological string では出てくるんですが, 例えば non-critical string で普通の $c = 1$ string をやるとこれが出てきますし, あるいはいろんな matrix model をやっていると大体これが常に基本的な要素として出てきます．Chern-Simons 理論をやってもそうですし, 最後に Seiberg-Witten 理論をやってもこれが出ます．だから恐らくいろんなところに顔を出す最も基本的な amplitude です．string theory でないとそれを genus 展開であると解釈することがいいことがどうかは良くわからないんですが, あたかも string の genus 展開をやっているように見えます．

じゃ, まずどこから出すかですが, やっぱり topological string から出します．今, A-model の topological string で, 但し簡単のため $b_2(X) = 1$ の場合を考えます．そうすると, インスタントンの巻き付き数を決める

パラメーターは1個だけなので, 例えば genus 0 の prepotential は

$$F_0(t) = \frac{C}{6}t^3 + \sum_{k=1}^{\infty} N_{0,k} e^{-tk} \ . \tag{71}$$

但し前の言葉を使って書くと $Q = e^{-t}$ です. 先程は β についての和にしましたけれど今1個しかないのでインスタントン数 k が 1 から ∞ までであります. それから厳密に言うと k は整数を走るんですが, 正則だとある種の向き付けが決まってしまうので, k は正か負かどちらかの方向でしか生き残りません. だからそのためにいまは k は正の方向を走ります. $N_{0,k}$ が Gromov-Witten 不変量で, $\frac{C}{6}t^3$ は古典的な X 上の積分, トリビアルなインスタントンの寄与です. 和の部分はインスタントン展開してるわけですが, 収束するかどうかが気になります. $t \gg 1$ のとき, これは普通 large radius 極限と呼ばれています.

t が 1 よりも大きくなるというのは, Q でいうと, Q がほぼ 0. ですから $F_0(t)$ のインスタントン展開は $t = \infty$, あるいは $Q = 0$ の周りでの級数展開と見ることができます.

（質問）radius というのはどういう意味があるんですか？

（答）t というのは, 大体 2-cycle の体積をあらわす概念です. t が大きいときは 2-cycle, 一番典型的には球面が一番簡単な場合ですから, 球面の体積ということで, あたかもその球面の半径が無限大になるという意味で, 通常 large radius limit と呼ばれます. $1 \ll t$ は, string scale より非常に大きな体積を考えているので古典的な描像が信頼できる, あるいは, 逆の言い方で言うと, string theory を sigma model で記述できる. 古典的な target space があって, その target space の上で運動方程式の解を考えることが string theory だということは, 時空のスケールに比べて string が十分小さいスケールであって, それは体積と考えている幾何学のスケールが非常に大きく, 古典的な描像が信頼しても良いということを言っています.

インスタントン展開というのは, そういう古典的な描像のまわりで級数展開しているわけです.

今度は逆に, $t \to 0$ とします. これは, string が巻きついているような 2-cycle の体積が zero になってきているということです. だから Q でいうとこれは, $Q \to 1$. この時は, 古典的な描像が, 正しいのかもしれないけれどいけるかどうか問題になってくる. すなわち, 空間のスケールに対して string のスケールがある程度 competitive になってきます.

だから, 問題は, 級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_{0,k} e^{-kt} \tag{72}$$

の収束半径はどうなるか？ということになります. で, そのためには何を調べればいいかというと, 展開係数 $N_{0,k}$ の $k \to \infty$ での漸近挙動が問題になります. その展開係数が典型的にどういう挙動を持つかというと,

$$N_{0,k} \sim k^{\gamma-3} \log^{\sigma} k \ e^{kt_c} \tag{73}$$

これが典型的な漸近形です. 収束半径を決めるのは e^{kt_c} の部分で, $t = t_c$ が収束半径. すなわち, $t = t_c$ が critical point. 典型的には例えば, これは有名な Candelas の論文 [21] の quintic[*18]の場合です. Candelas 達

[*18] quintic とは, $\mathbb{CP}^4$ の斉次座標を $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ としたときに,

$$\sum_{a=1}^{5} (z_a)^5 = 0 \tag{74}$$

の論文に書いてあります[*19]. この場合の exponent は, $\gamma = 0, \sigma = -2$.

この時, critical point 近傍での free energy の振る舞いというのは, 漸近挙動がわかっているので, 和を積分に置き換えると, Laplace 変換で評価できます.

で, それを使うと, 臨界点 $t = t_c$ の近傍での free energy の振る舞いが分かります.

Free energy near critical point $t = t_c$

収束半径が $t = t_c$ にあるということは, $t < t_c$ では最早これまで使ってきた sigma model の描像が破綻している. 例えば他のモデルでも, ある有限のところに t_c があります.

t_c 近傍での free energy の振る舞いというのは, 先程も言ったように和を積分で近似して, Laplace 変換を計算して, 大体

$$F_0(t) \sim (e^{-t_c} - e^{-t})^2 \log(e^{-t_c} - e^{-t}), \tag{75}$$

critical point との距離をはかる parameter を

$$\mu = e^{-t_c} - e^{-t} \tag{76}$$

とすると,

$$F_0(t) \sim \mu^2 \log \mu \tag{77}$$

higher genus に関しても, 同様で一般の genus で, g が 1 以上の場合, どういう結果が知られているかというと, log 補正は恐らくなくて,

$$N_{g,k} \sim k^{(\gamma-2)(1-g)-1} e^{t_c k} \ , \quad (k \to \infty) \ . \tag{78}$$

t_c は g によらずに同じところに出ます. それから, critical exponent の genus 依存性は $(\gamma-2)(1-g)-1$ の形になる. これから, $t = t_c$ での free energy がどうなるかというと,

$$F_1(t) \sim \log \mu, \ F_g(t) \sim \mu^{(1-g)(2-\gamma)} \ (g \geq 2) \tag{79}$$

先ほどいったように, 普通に出てくる場合は $\gamma = 0$ です.

これが臨界点近傍での free energy. そうすると, 大体見えてきたと思うんですが, $t = t_c$ 近傍で次のような double scaling limit を考えます：

$$t \to t_c, \quad g_s \to 0, \quad \text{with } \kappa = g_s \cdot \mu^{(\frac{\gamma}{2}-1)}\text{: fixed} \tag{80}$$

γ が復活していますけれど, 一般式を今書いています.

その結果得られる free energy は, 次のような形をします：

$$F(\kappa) = \frac{1}{2}\kappa^2 \log \kappa - c_1 \log \kappa + \sum_{g=2}^{\infty} \kappa^{2g-2} c_g \tag{81}$$

で, これは実は $c = 1$ のストリングの free energy として知られているものと, 細かい点を除いてほぼ一致します. この式 (81) を, 次の $c = 1$ string の amplitude と比べてみてください. これは標準的なもので,

$$F_{c=1}(\mu; \Lambda) = g_s^{-2}\left(\frac{1}{2}\mu^2 \log \frac{\mu}{\Lambda} - \frac{3}{4}\mu^2\right) - \frac{1}{12}\log\frac{\mu}{\Lambda} + \sum_{g=2}^{\infty} g_s^{2g-2} \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} \mu^{2-2g} \tag{82}$$

という 5 次の多項式, 或いはより一般に 5 次の同次多項式の零点として表される. 多項式の変数を変えることは複素構造の変形に相当する.

*19 [21] の (5.15) のすぐ下の式が, この講義ノートにおける (73) 式に対応するものである. 記号は多少違っており, 原論文での n_k はここでの $N_{0,k}$ であり, また ρ, σ はそれぞれここでの γ, σ である.

(80) で γ を 0 にして, (81) 式の κ に g_s と μ を戻すと大体 (82) のような感じになります.

これが普通 $c=1$ の string amplitude として知られているものです.

（質問）$\gamma=0$ じゃないと合わなくなるんですか？

（答）これは, パラメータの置き方を変えなきゃいけないのかな, 深く考えていませんでした. γ が 0 からずれるというのは, genus 0 の部分が, ちょっと理論からずれているので普通はあんまり起こっていないと思うんですけど. ちょっとわかりません. 一応標準的な, これまで解かれている string theory だと γ は 0 なので. 収束半径の臨界点周りの double scaling limit を取ると基本的にこのような構造をしていて, それは, $c=1$ の amplitude と呼ばれている.

厳密に言うと (81) 式で今 c_1 とか c_2 というのを今書きませんでしたけれど, 実際に計算するとまさしく c_g の値は (82) のようになります. つまり,

$$c_1=-\frac{1}{12},\ c_g=\frac{B_{2g}}{2g(2g-2)}(g\geq 2) \tag{83}$$

だから, 本当に $c=1$ の string amplitude に一致します.

$t=t_c$ は topological string theory でいうと conifold 特異点と呼ばれています.

$\mu\to 0$, これがゼロに行くというのは, 3-cycle S^3 がつぶれる特異点です. conifold 特異点の近傍で topological string の amplitude の double scaling limit を取ると, 少なくともこれまで計算されている例ではユニバーサルに $c=1$ の string amplitude が出てきます.

これは Vafa 達による昔の議論 [22] がありますけれども, それがどのくらい信用されているのかは知りませんが, , すくなくともこれまで具体的に解けている topological string の double scaling limit は係数まで込めて全てこの形になっています.

ここで, B_{2g} というのはベルヌーイ数と呼ばれる数で, 次の母関数で定義されます.

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n \tag{84}$$

これは実はいろいろ流儀があって, 僕の流儀は多分岩波数学辞典とは違う流儀*20. こうすると

$$B_0=1,\quad B_1=-\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_{2k+1}=0\ (k\geq 1) \tag{85}$$

ほかの文献と比べるときはこれで合ってるかどうかをみる. 文献によっては奇数の部分が全部ゼロになるのでここでいう $2n$ を n にしたり, 符号が交代に現れるわけですが, それまで込めて符号 $\pm$ はずしちゃって定義する文献もある.

実は (83) 式の形の展開係数になるには理由があって, $F_{c=1}$ の g_s 展開の係数は genus が g の Riemann 面のモジュライ空間の Euler 数を与える*21. genus 0 と 1 は微妙な問題がありますが*22. その意味で topological string からこの amplitude が出てくるというのは不自然ではありません.

*20 ちなみに, 岩波数学辞典では B_n の定義はここと同じであるが, その絶対値を Bernoulli 数と呼ぶことにしている. 手元の第 3 版では項目 386 及び数 4 にあり.

*21 数学的詳細については [23] を見よ.

*22 genus 0 の部分, つまり g_s^{-2} の係数に $\frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial\mu^3}$ を作用させて得られる $\frac{1}{6}$ という数字と, genus 1 の部分, つまり g_s^0 の係数に $\frac{\partial}{\partial\mu}$ を作用させて得られる $-\frac{1}{12}$ という数は, 各々 n 点の puncture を持つ genus g の Riemann 面の moduli 空間 $\mathcal{M}_{g,n}$ の Euler

最初に言ったとおり, この amplitude はいろんなところで出てくる. 特に doctor のひとは一度はお目にかかったはずだと思うんですけれど. 非常に基本的だと思います.

$c = 1$ string amplitude はいろいろな場面に登場する!! 不思議です. 恐らく背後にあるのは free fermion の理論だと思うんですけれども. いくつか思いつくままに.

- topological string amplitude の conifold 特異点周りでの漸近形 [22]
- one matrix model (Riemann 面の random triangulation) の double scaling limit
- 数学のほうで知られているのは, これは Riemann 面のモジュライ空間の Euler 数が出てくることの数学的な理由ですけれども, いわゆる Penner matrix model[24]. これはもともと, Riemann 面のモジュライ空間のセル分割を数え上げするために考えられた matrix model で, このやはり double scaling limit.
- Chern-Simons theory の規格化定数 Vol(U(N)). Ooguri さんと Vafa の論文 [25] に書いてありますけれども, 例えば U(N) の Chern-Simons を考えるときに, 体積で規格化する必要がありますけど, ある種の regularization をして計算すると, やはりこんなようなものが.
- ある種の BPS particle の有効作用への寄与を計算することによってもあの形が出ます. これは, 例えば最初にあげた文献 [16] の Gopakumar-Vafa の計算です. Seiberg-Witten 理論でこれが出てくるというのも同じようなことなんですが, それをちょっと最後に残った時間にお話ししたい.

何か, 質問があれば.

（質問）4 章に入ったときに, 3 章で Gromov-Witten で $N_{g,\beta}$ と書いていた β の部分が k に変わって？

（答）1 個しかパラメータがないので, β に関する和は k に関する和になりました.

（質問）サイクルは 1 個？

（答）はい, non-trivial なサイクルは 1 個しかない.

（質問）1 個の場合はそうなると. そこで書いてあるやつは, そうじゃない, non-trivial なサイクルがたくさんある場合については？

（答）1 個の場合, あるいは 1 個のほかは全部忘れた場合についてだと言った方がいいかな. 2-cycle の数がたくさんある場合に関しては真面目に考えていないし, 良く調べられていないと思います. 解かれているいわゆる 1 パラメーターモデルというモデルに関しては, これまで知られているものは, 適当な t_c に関して全てこの形.

だれか他の例を思いつく人がいれば僕も知りたいですが, まあ準備するために僕が調べたのは, まあこのぐらいは一応出てくる. ほかにも多分もっと出てくる. ここでは一番有名な例を挙げましたけれども, 多分他の matrix model でも, 基本的に free fermion を使って書けるようなものであれば, 何らかの limit を取れば, この形になります.

これからは, Seiberg-Witten 理論との関係というわけで, その辺から攻めていく. 何か BPS particle があって, そういうものに対して足し上げを行うと, 大抵この形が出てくる. 最後に残った時間で, 有効作用の計算をすると, この形になるということの計算をしておしまいにします.

---

characteristic に対応している：

$$\frac{1}{6} = \chi(\mathcal{M}_{0,3}), \quad -\frac{1}{12} = \chi(\mathcal{M}_{1,1}). \tag{86}$$

$c = 1$ amplitude from "BPS particle"

どういう設定を考えるかというと, 4 次元で constant で self-dual な U(1) flux background を考えます. ただし符号は Euclidean で, 厳密には 5 次元で考えた方が自然な議論です.

$$F_{12} = F_{34} = \hbar \quad (\neq 0) \tag{87}$$

このとき, charge e, mass m の charged particle の有効作用を計算します.

microscopic な action は

$$S = |(\partial_i - eA_i)\phi|^2 + m^2|\phi|^2 \tag{88}$$

ϕ は complex な boson.

今ゲージ場を background として考えているので, dynamical な場は ϕ だけで, ϕ に関して二次なので ϕ 積分は Gaussian で, 有効作用は exact に計算できます. よく知っていると思いますが, 1-loop の計算で,

$$S_{\text{eff}} = \log\det\,(\Delta_{12} + \Delta_{34} + m^2)\ , \tag{89}$$

ただし, Δ_{ij} と書いたのは, $D_i^2 + D_j^2$. D_i は共変微分で, $\partial_i - eA_i$.

これが Gaussian で積分したもの, ただし, 今 flux が入っているので D_1 と D_2 の交換関係は共変微分の項の交換で curvature を含みます. curvature が今 constant ですから,

$$[D_1, D_2] = [D_3, D_4] = e\hbar \tag{90}$$

これを今度は proper time expansion して $\log\det$ を書き換えます.

$$\log\det\,(\Delta_{12} + \Delta_{34} + m^2) = \operatorname{Tr}\log(\Delta_{12} + \Delta_{34} + m^2) \tag{91}$$

これを展開すると

$$\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dt}{t} \operatorname{Tr}\ e^{-t(\Delta_{12}+\Delta_{34}+m^2)} \tag{92}$$

ただし ϵ は, (92) が原点で singular なので, cut off parameter.

それで, トレースの計算ですが.

$$\operatorname{Tr} e^{-t(\Delta_{12}+\Delta_{34}+m^2)} \tag{93}$$

これは, うまいこと constant の $U(1)$ flux を入れたおかげで次のようなことが起こっていて,

$$\Delta_{12} = D_1^2 + D_2^2, \quad [D_1, D_2] = e\hbar \tag{94}$$

Wick rotation みたいなことをしないといけないんですが, 基本的に D_1 を座標, D_2 を運動量として, 基本的に交換子が定数になっているので, 普通は i がついているけどそれは目をつぶることにすれば, Δ_{12} は座標の 2 乗と運動量の 2 乗ですから, Δ（基本的に Laplacian です）は, i 倍とか mass とか適当にスケールしてしまうと調和振動子の Hamiltonian です.

さすがに $\operatorname{Tr} e^{-t\Delta_{12}}$ は M1 の皆さんでも計算できると思うのですが, Δ_{12} が Hamiltonian ですから, 調和振動子の分配関数を求めなさいという問題. Δ_{12} は, $n + \frac{1}{2}$ という固有値を持っている. n は 0 以上の整数.

ちょっと notation のせいで i 倍とか違うかもしれませんが, 基本的には Laplacian の固有値は, 調和振動子の固有値と対応しています.

従って, これを使うと, (93) 式は, 基本的に, 調和振動子と一致します．$e\hbar$ が量子化の単位で, 今調和振動子が二つあるので, (93) 式は

$$e^{-tm^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-ite\hbar(n+\frac{1}{2})}\right)^2 \tag{95}$$

となる．これは等比級数の和になって, それを書き換えると, 三角関数を使って表すことができて,

$$\frac{e^{-tm^2}}{\left(2\sin\frac{te\hbar}{2}\right)^2} \tag{96}$$

最終的にこれを積分したものが有効作用でしたから, 今の結果を代入すると有効作用は, ちょっと変数変換してますが

$$S_{\mathrm{eff}} = \int_{\epsilon}^{\infty}\frac{d\tilde{t}}{\tilde{t}}\frac{e^{-\frac{m}{\hbar}\tilde{t}}}{\left(2\sin\frac{\tilde{t}}{2}\right)^2} \tag{97}$$

何をやったかというと, 式を簡単にするために $\tilde{t} := te\hbar$ という変数変換をしてそれからこれまで使ってこなかったんですけれども, charge と mass が等しいという BPS 条件 $e = m$ を代入しました.

実はこれを展開すると先程の $c = 1$ の amplitude が出てきます．これが不思議だと思うんですけど, どこにも string も matrix も無いのに $c = 1$ の amplitude が再現されます.

今微妙な問題があって, cutoff ϵ が入ってますから, これをどう処理するのが技術的に難しい問題なんですが, ここに書いてきた cutoff の処理は, Nekrasov が採用した regularization の方法です．それから, 申し訳ないですけれども, 彼の文献を参照してきた都合上 sin 関数が多分 sinh として計算しています．だから $\tilde{t}$ を i 倍の x にするみたいな, この辺微妙で, 物理的にまずいことをやっているのかもしれません．もう時間がないのでちゃんとやりませんが, 適当に変数変換すると次のようになります.

$$S_{\mathrm{eff}}(x;\Lambda) := \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\frac{\Lambda^s}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^{1-s}}\frac{e^{-tx}}{(e^{\hbar t}-1)(e^{-\hbar t}-1)} \tag{98}$$

cutoff parameter ϵ のかわりに Λ を使っています．ここで, 積分は s を 0 にすると原点で発散して無効なので, $\frac{dt}{t^{1-s}}$ とずらしておいて, そこで $\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\frac{\Lambda^s}{\Gamma(s)}$ の部分が cutoff を処理する方法になる.

ここで, 先ほどの Bernoulli 数の定義を使うと, 次のような式がかけます．先ほどの t とはスケールがずれてますが,

$$\frac{1}{(e^t-1)(e^{-t}-1)} = \frac{d}{dt}\frac{1}{e^t-1} = -t^{-2} + \sum_{g=1}^{\infty}\frac{B_{2g}}{2g(2g-2)!}t^{2g-2} \tag{99}$$

これを出したい人は先ほどの Bernoulli 数の定義式 (84) の両辺を微分してください.

で, (98) 式の $\frac{1}{(e^{\hbar t}-1)(e^{-\hbar t}-1)}$ の部分に $\hbar$ を t に置き換えた式を代入します．後はもう演習問題としていいんですけど, ちょっとまだ途中経過ぐらい．計算すると次のような形が出ます.

$$S_{\mathrm{eff}}(x,\Lambda) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\left(\frac{\Lambda}{x}\right)^s\left[-\left(\frac{x}{\hbar}\right)^2\frac{\Gamma(s-2)}{\Gamma(s)} + \frac{1}{12} + \sum_{g=2}^{\infty}\frac{B_{2g}}{2g(2g-2)!}\left(\frac{\hbar}{x}\right)^{2g-2}\frac{\Gamma(s+2g-2)}{\Gamma(s)}\right] \tag{100}$$

やったことは, (84) を (98) に入れてやって, 適当に変数変換すると, スケールして x が出てきますけれども, 全部 Γ 関数で書けるようになる．t の依存性は, t のべきになって, 更に exponential があるので t 積分は Γ 関数になります.

あとは, これを s に関して微分して $s=0$ とおけばいいですね.

ここで Γ 関数の等式を使うと

$$\frac{\Gamma(s-2)}{\Gamma(s)} = \frac{1}{(s-1)(s-2)}, \quad \frac{\Gamma(s+2g-2)}{\Gamma(s)} = s(s+1)\ldots(s+2g-3) \tag{101}$$

higher genus の方が簡単で, 微分してゼロにならないためには s をたたかなきゃいけなくて, 残りの部分を $s=0$ にして,

$$g \geq 2; \quad \sum_{g=2}^{\infty} \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)!} \left(\frac{\hbar}{x}\right)^{2g-2} (2g-3)! \tag{102}$$

そうすると, 階乗を消して,

$$\sum_{g=2}^{\infty} \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} \left(\frac{\hbar}{x}\right)^{2g-2} \tag{103}$$

ここで $\hbar$ を string coupling g_s, x を μ とおくと, 先ほど書いた $c=1$ の higher genus が完全に再現できます. それから $g=0,1$ が微妙で,

$g=1$ をやりましょうか.

$$g=1; \quad \frac{1}{12}\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \left(\frac{\Lambda}{x}\right)^{s} \tag{104}$$

これは簡単な微積の問題で,

$$+\frac{1}{12}\log\frac{\Lambda}{x} \tag{105}$$

ひっくり返して

$$-\frac{1}{12}\log\frac{x}{\Lambda} \tag{106}$$

さらに x を cosmological constant あるいは mass term μ とおけば, これは $c=1$ の amplitude.

最後に genus 0 は (101) を代入しますので,

$$g=0, \quad \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \left(\frac{\Lambda}{x}\right)^{s} \left(\frac{x}{\hbar}\right)^{2} \left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}\right) \tag{107}$$

これで, 同じように計算すると, この結果が

$$\hbar^{-2}\left(\frac{1}{2}x^2\log\frac{x}{\Lambda} - \frac{3}{4}\Lambda^2\right) \tag{108}$$

これで完全に $c=1$ の amplitude が再現できています. ここで $\hbar \to g_s$, $x \to \mu$ と置くと, $c=1$ の amplitude です. genus 0 の部分, (108) 式のカッコ内が Seiberg-Witten の prepotential の one-loop 項になる. その場合は, $SU(2)$ だとして, x は Higgs の真空期待値, Λ としては, dynamical な scale. $c=1$ の amplitude を計算しましたが, その genus 0 の part は, Seiberg-Wittten 理論の prepotential の 1-loop term. その意味でこれは, Seiberg-Witten の prepotential の perturbative part を string 的に拡張した amplitude ということもできます.

すいません, ちょっとオーバーしましたけれども, これでとりあえず, $c=1$ というのが, いろいろなところで, 例えば BPS particle の数え上げからも出てくるということを紹介しました.

（司会）どうもお疲れ様でした.（拍手）時間は迫っていますが, もし, 全体を通して質問があれば.

（質問）どうしてそんな風に一致すると考えるんですが？

（答）なぜ, というのは僕も知りません. 恐らくそれは, 少なくとも技術的には, 基本的には全て背後に free fermion があって, それが理由であろうかとは思いますけれども, それは逆に言うと, なぜ free fermion がたくさん出てくるのか, と今度は逆に聞かなきゃいけなくなって. というか, 解けるモデルは全部 free fermion だっていう言い方もできるかもしれませんけれども, その意味で解けるモデルはほとんどないから, 解けるモデルは全部同じになってしまうという言い方もできるかもしれません.

（司会）それでは, 講義を終わりたいと思います. 菅野さんに盛大な拍手をお願いします. (終)

講義録作成校からの謝辞

よく準備された分かりやすい講義をして下さったうえに, 講義録の原稿を詳細にチェックしてくださった菅野先生に感謝します. また、夏の学校の企画・運営に関与された方々にも感謝します.

参考文献

[1] N. Seiberg and E. Witten, “Electric - magnetic duality, monopole condensation, and confinement in N=2 supersymmetric Yang-Mills theory,” Nucl. Phys. B **426**, 19 (1994) [Erratum-ibid. B **430**, 485 (1994)] [arXiv:hep-th/9407087]; “Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in N=2 supersymmetric QCD,” Nucl. Phys. B **431**, 484 (1994) [arXiv:hep-th/9408099].

[2] L. Alvarez-Gaume and S. F. Hassan, “Introduction to S-duality in N = 2 supersymmetric gauge theories: A pedagogical review of the work of Seiberg and Witten,” Fortsch. Phys. **45**, 159 (1997) [arXiv:hep-th/9701069].

[3] R. Dijkgraaf and C. Vafa, “A perturbative window into non-perturbative physics,” arXiv:hep-th/0208048; “On geometry and matrix models,” Nucl. Phys. B **644**, 21 (2002) [arXiv:hep-th/0207106]; “Matrix models, topological strings, and supersymmetric gauge theories,” Nucl. Phys. B **644**, 3 (2002) [arXiv:hep-th/0206255].

[4] R. Argurio, G. Ferretti and R. Heise, “An introduction to supersymmetric gauge theories and matrix models,” Int. J. Mod. Phys. A **19**, 2015 (2004) [arXiv:hep-th/0311066].

[5] R. Gopakumar, “M-theory, Topological Strings and Large N Gauge Theory,” http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/etc/1999/komaba99/gopakumar.ps.gz から入手可能.

[6] E. Witten, “String theory dynamics in various dimensions,” Nucl. Phys. B **443**, 85 (1995) [arXiv:hep-th/9503124].

[7] J. Polchinski, “Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges,” Phys. Rev. Lett. **75**, 4724 (1995) [arXiv:hep-th/9510017].

[8] M. Marino, “Les Houches lectures on matrix models and topological strings,” arXiv:hep-th/0410165; “Chern-Simons theory and topological strings,” Rev. Mod. Phys. **77**, 675 (2005) [arXiv:hep-th/0406005].

[9] E. Witten, “Topological Quantum Field Theory,” Commun. Math. Phys. **117**, 353 (1988).

[10] E. Witten, “Topological Sigma Models,” Commun. Math. Phys. **118**, 411 (1988).

[11] E. Witten, "Topological Gravity," Phys. Lett. B **206**, 601 (1988).

[12] E. Witten, "On The Structure Of The Topological Phase Of Two-Dimensional Gravity," Nucl. Phys. B **340**, 281 (1990).

[13] E. Witten, "Mirror manifolds and topological field theory," arXiv:hep-th/9112056.

[14] M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri and C. Vafa, "Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes," Commun. Math. Phys. **165**, 311 (1994) [arXiv:hep-th/9309140].

[15] A. Kapustin and E. Witten, "Electric-magnetic duality and the geometric Langlands program," arXiv:hep-th/0604151; S. Gukov and E. Witten, "Gauge theory, ramification, and the geometric langlands program," arXiv:hep-th/0612073.

[16] R. Gopakumar and C. Vafa, "M-theory and topological strings. II," arXiv:hep-th/9812127; "On the gauge theory/geometry correspondence," Adv. Theor. Math. Phys. **3**, 1415 (1999) [arXiv:hep-th/9811131]; "M-theory and topological strings. I," arXiv:hep-th/9809187; "Topological gravity as large N topological gauge theory," Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 413 (1998) [arXiv:hep-th/9802016].

[17] J. M. Maldacena, "The large N limit of superconformal field theories and supergravity," Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998) [Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999)] [arXiv:hep-th/9711200].

[18] J. Polchinski, "String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string," *Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) 402 p*

[19] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, "SUPERSTRING THEORY. VOL. 1: INTRODUCTION," *Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1987) 469 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics)*

[20] 菅野浩明, 位相的弦理論と重力・ゲージ対応, Seminar on Mathematical Sciences, no. 32, 慶応大学, 2005.

[21] P. Candelas, X. C. De La Ossa, P. S. Green and L. Parkes, "A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory," Nucl. Phys. B **359**, 21 (1991).

[22] D. Ghoshal and C. Vafa, "C = 1 String As The Topological Theory Of The Conifold," Nucl. Phys. B **453**, 121 (1995) [arXiv:hep-th/9506122].

[23] J. Harer and D. Zagier, "The Euler characteristic of the moduli space of curves, " Invent. Math. **85**, 457 (1986)

[24] R.C. Penner, "Perturbative series and the moduli space of Riemann surfaces," J. Diff. Geom **27**, 35 (1988).

[25] H. Ooguri and C. Vafa, "Worldsheet derivation of a large N duality," Nucl. Phys. B **641**, 3 (2002) [arXiv:hep-th/0205297].