弦理論の D ブレーン

―超弦理論の描く新しい高次元物理学―

2009 年度原子核三者若手夏の学校素粒子論パート講義 A 講義録[*1]

講師：橋本幸士先生 (理化学研究所)

*1 講義録作成：総合研究大学院大学 (今里晴敦、太田昌宏、岡澤晋、折笠雄太、北本浩之、本多正純、本間良則、真鍋夏樹)

目次

0 はじめに

諸注意

この講義の内容はですね、僕が書いた本がありまして、「D ブレーン」ちゅうタイトルの東大出版から出ている本があります。で、その本のダイジェストを今からやります。というのはですね、その本は主に大学３年生から４年生、M1 向けに書かれた超弦理論の入門書で、しかも式はほとんど書いてないというものです。従って教科書ではなくて「本」です。つまり手を動かさなくても読める。

このね、6 時間頂いた講義でタイトルは「D ブレーン」となっていますけど、D ブレーンのところまで計算が追えるようになるというのははっきりいって無理です。それは何でかっていうと普通超弦理論を勉強しようと思ったら、M1 の一年、M2 の半分くらい使わないと、計算はできないです。それははっきりここで言っておきます。けれども、D ブレーンちゅうのは素粒子論・超弦理論の最先端のところで、ものすごい面白いわけです。なので、勉強したいんやけどもそんな１年半も使ってね、これがホンマに自分で面白いと思えるようになるんやろかと、いうところはすごい不安になるとこやと思います。僕が大学院に入ったのは１９９５年で、そのときに D ブレーンちゅうのはものすごい重要性があるということが判明したわけですね。で、僕らがいた時

はすごい幸運で、それから D ブレーンの物理が発展していきましたから、そのとき一緒に勉強できたんです。ところがそれから、１５年ぐらいたってですね、D ブレーンの物理っちゅうのは数学的に非常に完成度の高いものになってきました。それを一生懸命追ってそれで修士論文を書くというのは、ものすごい難しい事なわけです、はっきりいって。ですから、この 6 時間の講義でですね、一生懸命ノートをとるちゅうのはやめて下さい。それはあんまり意味が無いと思います。というのは、式をほとんど説明しないので、イメージを掴んでもらうというのが目標です。ですので、僕は、ちょっと式はありますけど、その式が間違っていても気にしないでください。あのね、1/2 とか π とか間違っていると思いますけど、気にしないでください。目標は D ブレーンの物理がどんなふうになっているか、D ブレーンとは何か、ということを興味のある人は 6 時間後ぐらいには把握できるんではないか、いうふうなのが目標です。これで分かってもらえましたか…。

ほんであの、質問が沢山あると思います。M1 の人が多いでしょうし、これ M1 向けに考えたやつなので、ちらほら D2 という人とかも見受けられますが、そういう人でもうすでに D ブレーンで論文を出しているとかいう人はすぐに帰ってくれて構いません。それと、僕は M1 から D3 まで毎年夏の学校に参加しましたが、ほとんど講義のことは僕は覚えてないです。で、それは何でかっていうと、その講義が始まる直前までずーっと飲んでたりですね、講義がつまんないからその場で寝てたりですね、まあそういう事が多々あって覚えてないわけです。で、１個だけ覚えているのがあって、それは九後さんの string field theory の講義なんですけど、それは何で覚えているかっていうと、それは僕らが講義録作成校だったからです。で、必死にノートをとってですね、あとで録音も全部起こして、そしたら覚えているんです。けどね、こんな所で 6 時間も人の話聞いてね、覚えているわけがないんです。ですから、これを将来の自分の研究に役立てようとか、そういう事を思わずにね、D ブレーンっちゅうのはこんなもんかと、これはおもんないなと、もしくは面白いと、そういう判断を最後にはできるようになってほしいです。計算できるようになって欲しいとは、僕は一切思ってません。その辺のことをちょっと覚えておいてください。途中で面白くないなと思ったらですね、後ろのドアが開いてますから、いつでも帰ってもらって構いません。僕は全然気にしないですから。あぁこの人はよく分かっているんだな、もしくは、全然興味がないんだなというふうに思います。特に今、原子核の方では原田さんが chiral perturbation の非常に入門的な講義をやっていて、僕はその講義を受けたことがあります。それは非常に面白かったです。ですので、D ブレーンは面白くないけど、ハドロン物理は面白いと思う人はですね、すぐそっち行った方がいいと思います。これはあの、本気で言ってます。ここ人数も多いですし、後ろの方の人も見えないと思いますから、なるべくね、興味のある人は前のほうに残ってね、興味のない人は部屋を出るとかして欲しいと思います。

それとね、こういう大きな会場だと、質問がすごいしにくいと思います、後ろの方の人とか特にね。でも質問はどんどんやって下さい。この講義は最後までいくということは目標にしてません。途中の半分くらいちょっと超えたところで D ブレーンの話が出てきて、それまではイントロになっています。なので、その D ブレーンのとこまで入れれば僕はそれでいいと思っていますので、僕の本読んでもらってもいいですし、後で質問に来てくれてもいいですし、なんでもできると思うんで、それよりも質問を沢山して下さい。質問をするっちゅうのは自分の利益になるだけで講義の邪魔をしてるだけなんじゃないか、とみんな思っちゃうわけです。でもね、それは間違いなんです。自分が分からないって思っていることは、ほとんど 90 %の人も分かってないんです。自分が不思議だと思っていることは、必ず他の人も不思議だと思っているものなんです。ですから、質問することは、全くためらう必要はないです。どんなつまらない質問だと思っても質問した方がいいです。聞けるのはそん時だけですから。

ほんでね、僕が分からない事も沢山あると思います。というのは、物理というのはですね、だんだん研究するにつれて細くなっていってですね、だんだんまわりの分野が見えなくなっていきますから、M1 の時に持っていた疑問っていうのは、ほとんどの場合、定年するまで持っていると思います。なので、それに答えが出る

とは全然限らないわけです。でね、そういう問題が実は一番重要だったりするわけです。実際僕は 95 年に D ブレーンの話を初めて聞いて、これは全然分からないから研究してやろうって思って研究を始めたわけです。で、かれこれ 15 年この研究をやっているわけです。で、全然まだ分からない。何者かも分からない。みんなの前で偉そうにこうやってしゃべってますけど、分かってないです。ですから、分かってないところを、みんなにもわかるように、ぜひ言って欲しいと思います。

参考文献の紹介

それでは講義を始めます。この講義の目標はさっき言いましたように、式あんまり使わずにですね、D ブレーンとは何かというのを説明するというのが目標です。

D ブレーンとは一言で言うと、仮想的な高次元の中にある膜です。膜。これがなぜ重要かと言いますとね、まず第一に、我々はブレーンの上に住んでいるという可能性がある、これはおとぎ話を言っているんでなくて、実際に最先端の素粒子論が示唆している事実です。可能性があるということですね。そうでないということを否定できない。で、そうなるということを考えたら実は現在考えられている物理の矛盾を解決できる可能性があるっちゅうことです。いいですか？これはおとぎ話ではないわけです。非常に突飛なアイディアだと思います。即ち、我々の空間が 3 次元ではなくてもっと高次元で、その中に膜が浮いていて、我々は膜の上に住んでいると。で、残りの方向は感知できない、というわけです。これはおとぎ話に聞こえます。実際ですね、100 年前にそういうおとぎ話が書かれました。

参考文献

- D ブレーン, 橋本幸士著 (東大出版会, 2006)
- フラットランド, エドウィン・アボット・アボット著 (日経 BP 社, 2009)
- ワープする宇宙―5 次元宇宙の謎を解く, リサ・ランドール著 (日本放送出版協会, 2007)
- 別冊数理科学　スーパーストリング, 松田哲 他著 (サイエンス社, 2005)

教科書

- ”A First Course in String Theory”, Barton Zwiebach (Cambridge University Press, 2004)
- ストリング理論 第 1 巻, 第 2 巻, Joseph Polchinski 著, 伊藤克司ら訳 (シュプリンガー・フェアラーク東京, 2005, 2006)

今日の参考文献をちょっと書いたんですけども、まず第一に僕の本が文献としてありまして、東大出版から 2006 年に出ている本があります。今日の話はこれのダイジェストなので、興味があったらそれを図書館で借りて読んでみて下さい。参考文献の二つ目に書いたのは、アボットという人の書いた「平面国」という本です。これはブルーバックスから出てたんですけど絶版になったかもしれないんですけど、最近復刻したといわれています。このブルーバックスの「平面国」という本は何かと言うとですね、アボットという人はイギリスのどっかの校長先生だったらしいんですけども、ファンタジーを読むのが好きで自分でファンタジーを書いたと。数学の先生だったから、平面国っていう面白い本を書いたんです。これはどんな本かと言うと、我々はもちろん空間が 3 次元だというのは知っているんですが、その中に 2 次元の膜を考えると。その膜の上に society があったらどうなるんだと。どういう人が住んでいて、どういう社会を形成していて、それがどういう政治で生物はどういうふうになっているのか、ということに想像をめぐらして書いた話です。ある日その平面に住んでいる人達のところに、3 次元空間に住んでいる人達が降りてくるわけです。で、そうすると 2 次元の人達はものすごいびっくりするわけです。何でかって言うとその 2 次元面を 3 次元の人が通過すると、形が変わったりするわけです、ふにゃ〜っとね。こう、スライスですから。で、いきなり消えたりするわけです。どっか行っ

てしまったと。エネルギーが保存してない、と。どういうことだこれ？そういうファンタジーです。で、そのファンタジーはある意味批判を込めていて、我々の空間は 3 次元だけども、本当はもっと高次元があってもいいじゃないかというメッセージなんです。それを知るには、どういう事があったら分かるだろうかと。で、先程言いましたね。エネルギーが保存しないんです。そういう事がもし見つかれば、高次元の方にエネルギーが逃げているわけだから、実際高次元の宇宙があるということが分かるのです。この 100 年以上前にかかれた本はものすごくいい本です。ですので、あっ、この「平面国」っていう本読んだことある人。ほぉっ、一人、一人？マイナーですねぇ。あれ、何でやろ。何でこんなマイナーなの？あの、このパロディというか、パスティスは沢山の人が書いていて、例えば「多次元平面国」とか「多次元球面国」とかそういうパロディは沢山あります。これは昔の人も面白いと思ったんでしょうね。で、何よりも面白いのは実際こういう物を扱う数学が D ブレーンとして現在出てきていて、世界中の物理学者が非常に大真面目にこの可能性を計算し、研究しているということです。そのモチベーションはこの本にあると思います、僕は。他には「ワープする宇宙—5 次元宇宙の謎を解く—」（ランドール著）とかですね。それからもうちょっと専門的なことを知りたい人は、サイエンス社から「別冊　スーパーストリング」というのが出ています。これは 10 人以上の素粒子、ストリングの研究者が歴史的な観点とか最新の情報とか、そういうのを踏まえて書いた本です。一人の意見を聞いているのは全く意味が無いので。ですからこういう本を読んでですね、他の人がどういうところに問題があると思って研究をやっているのかというのを見るのは良いと思います。

教科書としては Zwiebach という人の書いた、「A first course in string theory」というのがあります。これは非常に面白い。というのは、弦理論の散乱振幅とか一切計算せずに D ブレーンの物理が分かるという、そういう代物です。大学の 3 年生向きぐらいに書かれているので、もし、ほんとの超弦理論の研究者にはなりたくないけれども、D ブレーンの計算はできるようになりたいという人がいたら、例えば現象論的な応用とかですね、もしくはハドロン物理での応用、そういうのが最近多々なされています。そういうのがやりたい人はこの「A first course in string theory」というのを読んでみたらいいと思います。これは半分に分かれていて、前半は重力理論のレヴューであるとか場の理論のレヴューになっていて、後半が D ブレーンの話になっています。ほんとに弦理論を勉強したい人は Polchinski の「String theory」を第一巻の 1 ページ目から読むことをお勧めします。これは難しい本ですが、一回勉強するとやっぱり弦理論の計算ができるし、完全に理解ができるだろうと思います。最近は Becker-Becker-Schwarz とかそういうのもありまして、僕はそれは読んだことがないんで知らないけども、よく全国の大学院で使われているらしいですね。これが参考文献です。

目次の説明

まず、素粒子物理学とその課題、現在の素粒子理論はどんな問題を抱えているか。

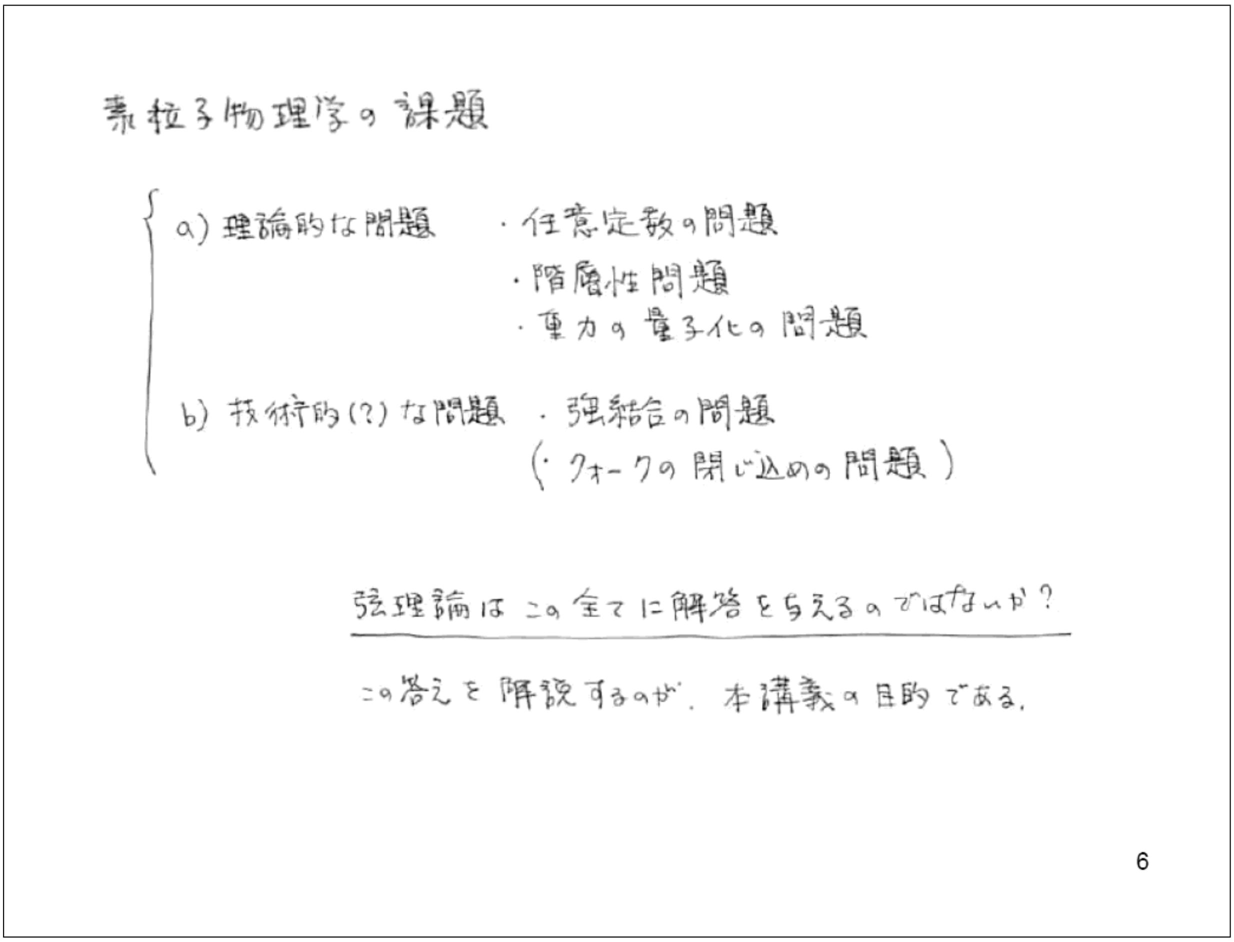
次に弦理論とそのアイディア、素粒子と弦の関係、そして、セクション1で述べる課題の解消の方法、発散の解消、結合定数の一意性、そういう話をします。そして次に、時空次元とコンパクト化という話をします。ここで初めて高次元の話が出てきます。

セクション3でちょっと毛色を変えまして、素粒子物理学における次元とソリトンという話をします。というのは、D ブレーンというのは実は弦理論のソリトンなので、弦理論を理解して次にソリトンを理解しないと、弦理論のソリトンが理解出来ないんですね。順番としては初めに弦理論の話をして、次にソリトンの話をします。ソリトンを勉強すると、次にブレーンワールドという、我々が膜の上に住んでいるという、そういう話に到達します。そしてソリトンには渦ソリトンとかモノポールとかいろいろ種類があるんですけど、時間があればそういう話をします。

つぎに、弦理論の D ブレーンの話をします。D ブレーンは実はブラックホールと同定できまして、ブラックホールは重力理論のソリトンなんですけども、そういう話をします。そして D ブレーンを定義して、D ブレーンの上には非可換ゲージ理論、即ち我々の知っている素粒子物理であるところの素粒子標準模型のようなものを持っているということを話します。

最後に、このようにちょっと数学的に定義した D ブレーンから素粒子論にどういうふうにつながっているのか、ということを初めの課題の一部の解決と組み合わせて話します。1つ目は D ブレーンによるブレーンワールド、膜の上に住んでいるという話、2つ目はホログラフィーという D ブレーンを使った数学の新しい公式がありまして、その公式を使うと実はクォークの物理が分かってしまうという話をします。

最後に1ページでまとめます。じゃあ質問ありますか？いいですか？はい。



1　素粒子物理学とその課題

それでは始めます。まず素粒子物理学とその課題。

僕の理解ですが、素粒子物理学には上記のような課題があります。これは聞く人によって、聞く先生によって全然答えが違うので、これは僕が考えている問題だと思って下さい。他の教科書見たら違う問題書いてると思います。いろんな問題が散乱していてですね、興味ある問題にアタックしてもらえたらともちろん思いますが、まず第一に、理論的な問題。そして第二に技術的な問題。この二つがあります。

素粒子物理学というのは、素粒子標準模型のラグランジアンで書かれています。このラグランジアンは非常に精巧に出来ていて、今のところそのラグランジアンから計算される量に矛盾するものというのはほとんどありません。その意味で、このラグランジアンは、かれこれ30年ほど前に書かれたものですが、その問題点がないために、はっきりいえば素粒子物理学はいろんな憤懣が鬱積しているわけです。ね、こんな素晴らしいラグランジアン書かれたら、もうやることがないじゃないの、そう思ってしまうわけです。それは、そのとおりです。正しい。しかし、実は問題がある。それがこの問題です。ラグランジアンには問題がない。即ちラグランジアンが与えられればそこからいろんな量が計算出来る。場の理論を今勉強しているところだと思いますが、そっから散乱振幅とかいろいろ計算できるわけです。しかし、ラグランジアンをどうやって与えたのか？という疑問が残るわけです。それに答えるのが現在の素粒子物理学です。

素粒子の標準模型のラグランジアンが書かれる前は、僕は知りませんけども、聞いた話によると、そのラグランジアンを書くのが問題だったわけです。どんなラグランジアンを書けば現象を記述できるんだろう？それが 30 年前の問題なわけです。ところが今は、そのラグランジアンが与えられているために、ラグランジアンを求めるというのは問題では無くなっているわけです。むしろそのラグランジアンにあるパラメータとか場とか、それはどっから出てきているんだろう？それをもう少し自然に理解するためにはどうすればいいのか？それが問題になっているのです。その問題をここに書いてあります。第一に任意定数の問題。第二に階層性の問題。最後に重力の量子化の問題。この三つが理論的な問題です。で、この説明はこれからします。

次に技術的な問題。技術的な問題ということは、これを問題と思っていない人も多いということですが、第一に強結合の問題。クォークは非常に強い結合をしている、その為に計算できないという問題。それともう一つこれに関連しているんですが、クォークの閉じ込めの問題というのがあります。

ここでわざわざこういう問題をぶっちゃけて話しているのは、弦理論はこの全てに解答を与えるんではないかと期待されているからです。これは期待されているだけで、何も示されていません。しかしこれらの問題に答えることのできる、数学的なフレームワークは弦理論しか知られていないということです。今のところですよ。将来もっと素晴らしい天才が現れて、ぜんぜん違う理論を持ってくるという可能性はもちろんあります。今のところ、弦理論はこれらの問題に対して、解答を与える可能性がある。可能性があると言っているのは、通常の場の量子論を考えているだけでは、これらに解答を与える可能性は少ないだろうというふうに考えられているからです。いいですか？

任意定数の問題

結合定数（e や λ など），質量 m は，標準模型の中には任意パラメータとして入っており，その大きさを決める原理がない。

例）　様々な素粒子の質量

e 0.000511	u 0.002~4	s 0.08~0.2	t 169~174
μ 0.1056	d 0.005~9	c 1.0~1.4	b 4.0~4.5
τ 1.777			

単位：GeV ジェブ ギガ（10^9）電子ボルト
電子を1ボルトの電位差の間で加速した時に得るエネルギーのこと。
$1[\mathrm{eV}] = 1.73 \times 10^{-36}[\mathrm{kg}]$

⇝ 何故このような様々な質量があるのか？

7

任意定数の問題

それではそれぞれの問題について、簡単に話をしましょう。まず任意定数の問題です。結合定数や質量 m、結合定数というのは例えば電荷とか、もしくはヒッグス場みたいなのがあればヒッグス同士の結合、ヒッグスと電子の結合、そういう結合定数です。それとよく似ていますが素粒子の質量 m は、標準模型の中には任意のパラメータとして入っていて、その大きさを決める原理はありません。ラグランジアンを書くときに、この数は何を与えるか、もしこれが違う値になっていたら、我々の観測している実験結果に合わなくなるわけです。ところがある値に選んでおけば、それは実験結果を非常に良く再現する。そういう事です。

ここに例として様々な素粒子の質量を GeV という単位で書きました。なぜこのように様々な質量があるのか？この問に答える理論は今のところありません。

任意定数の問題を更に一般化すると、…

なぜそもそもこれらたくさんの種類の素粒子が存在するのか？

例) e, μ, τ はほとんど同じ性質を持つ（電荷.）

$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$ も同様.

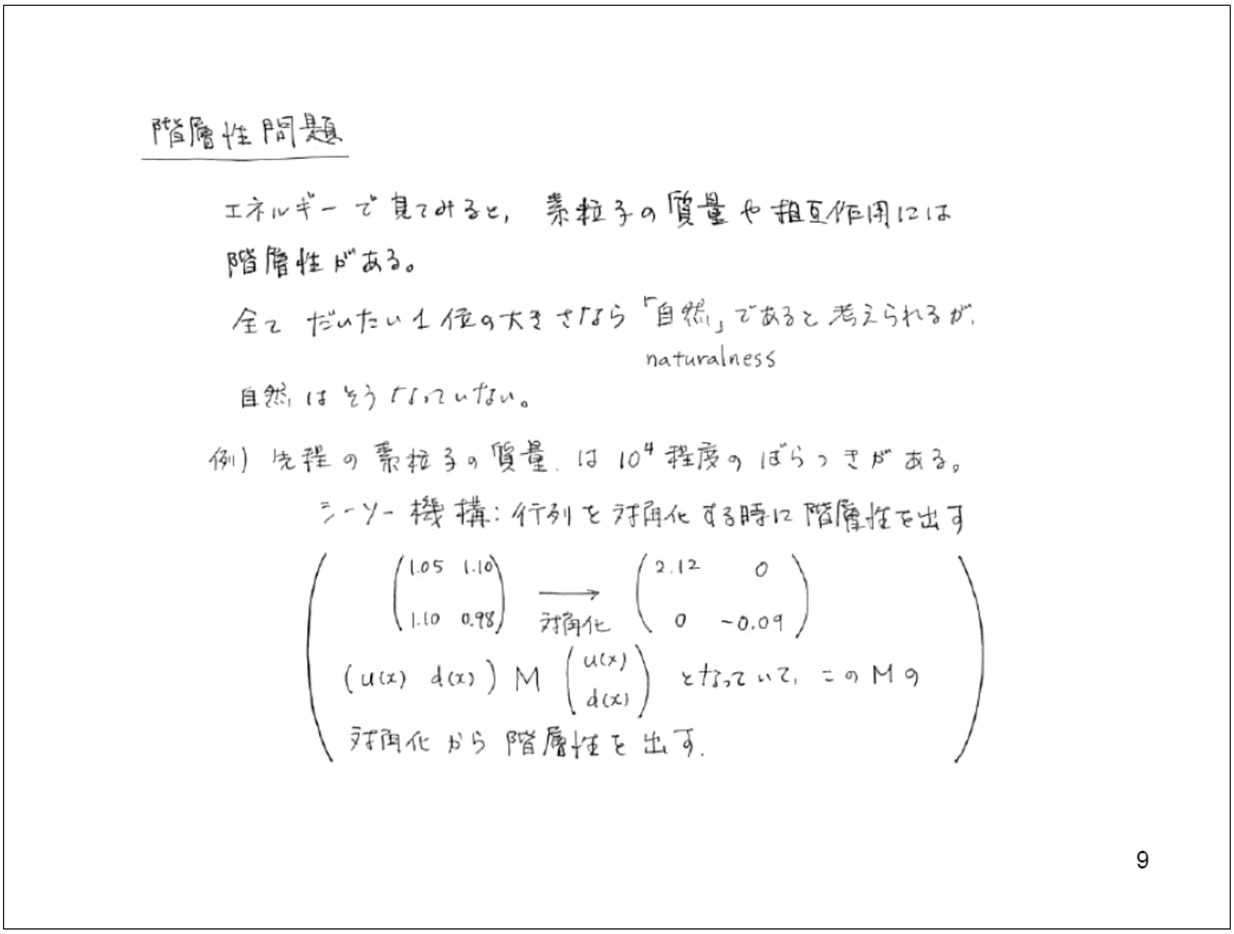
これを3世代構造と呼ぶ。⇒何故自然はくり返すのか？

8

任意定数の問題をさらに一般化しますと、何でそもそもこんな沢山の種類の素粒子が存在しているのか？これ以上ないのか？なぜこれ以上少なくなかったのか？という問題があります。これも任意定数の問題の一部と思っていいでしょう。例えば、ある coupling e というのをゼロにすると、その sector というのはラグランジアンが完全に別々になりますから、切り離されます。そしたらその場がないのと同じですね。我々が実験してもそれが見えないわけですから。ですからその意味で、これは任意定数の問題と思ってもいいということです。特に、e, μ, τ というのはほとんど同じ性質を持ち、このように世代構造と呼ばれるものがあります。

第 1 世代	第 2 世代	第 3 世代
e	μ	τ
u	c	t
d	s	b

素粒子標準模型を勉強した人は知っていると思いますが、なぜこんな世代構造があるのかということは全然わかっていません。これらの場を何らかの形で統一する、統一的に記述する機構が必要なわけです。



階層性問題

次に階層性問題についてみてみましょう。エネルギーで見てみると、素粒子の質量や相互作用には階層性があります。先程エレクトロンとトップクォークの質量を見ましたが、ぜんぜん違うわけです。少なくとも 10 の 4 乗ぐらいのばらつきがあるわけです、世代間でみると。

すべて、パラメータがだいたい 1 の order ならば自然であると考えられています。これが naturalness という思想です。ここで思想と言いましたのは、これは計算上の問題ではないからです。はじめに言いましたように、パラメータは手で決めることができて、そのラグランジアンは consistent に全部計算できます。ですからその意味で、問題ではないんだけども、パラメータがものすごい小さいものと大きいものがあったら、そのラグランジアンはあんまり自然なものではないだろうと。それがこの naturalness という考え方です。

Naturalness は様々なところに顔を出していまして、先程の質量、湯川 coupling の階層性に対する naturalness とか、これからお話する他の階層性に対する naturalness とか、いろいろあります。この naturalness が本当に問題になるかどうか、というのはよく分かりません。ただ、人間の感覚として、ものすごく大きい数と小さい数があったらですね、これは自然ではないなという、そういう感覚です。

これに対するひとつの答としてシーソー機構 [1, 2, 3] というのがありまして、例えばこういうふうな行列があったとしましょう。

$$\begin{pmatrix} 1.05 & 1.10 \\ 1.10 & 0.98 \end{pmatrix} \tag{1}$$

これを対角化しますと、固有値は次のようになります。

$$\begin{pmatrix} 2.12 & 0 \\ 0 & -0.09 \end{pmatrix} \tag{2}$$

桁が一桁ずれるわけですね。もともとほとんど同じ量から出発しているけれども、対角化するとこのように階層性が出てくる、というのをざっくばらんに言ってシーソー機構と言います。で、これは naturalness の解答になっているかどうか？ある意味なっていると思います。ただ、もちろん最後の小さい数字を出すためにははじめにこういう種を仕込んでおかないといけないわけです。つまり、はじめのこの種をどういうふうに出してくるかということにこの問題が移されるわけです。いいですか？

・重大な階層性問題

先の素粒子標準模型には、重力が含まれていない。

(重力を含めることの量子論的問題点は後述)

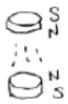
実は重力相互作用は非常に小さいので、ほとんど

無視できて、素粒子実験には関係ないはずである。

… 逆に、何故そんなに小さいのか??

= 階層性の問題

この大きさの違いは次の例でよく分かる:



← 磁石が浮いている。

電磁力 (2つの磁石の間の力)

॥

重力 (磁石と地球の間の力)

さらに重大な階層性の問題があります。先程の素粒子標準模型には重力が含まれていません。それはなぜかと言うと、重力の相互作用は様々な高エネルギー実験が行われているその高エネルギー実験に対しては、非常に小さいのでいつでも無視できる、なので、素粒子の標準模型を書きましょうというときには、普通は重力との結合は書きません。それは書いてないだけでほんとはあるわけです。ほんとは重力が結合しています。

重力を結合しないで書くのはなぜかと言いますと、実はテクニカルな問題、理由がありまして、それについては後で述べることにします。ここで重力を書かなかったのはその相互作用が非常に小さく無視できるからだったわけですが、だけどこれは問題で、なぜそんなに小さいかというのが問題なわけです。これがもう一つの階層性問題です。

この大きさの違いは次の例でよく分かって、ここに例が書いてありますけど、この例は何を隠そう先程のRandall の本から取ってきたやつです。

ここに磁石があるとします。そして N 極と N 極が向かい合うとうまくやるとこう浮くわけです。まあ実はうまくやっても浮かないんですけど、横を支えてやると浮くわけです。磁石が浮いているということはみんな常識で知っているわけですけど、これは何を隠そうこれは電磁気力と重力が釣り合っているということです。電磁気力はもちろんこの磁石とこの磁石の相互作用なわけですが、重力というのはこの磁石と地球との相互作用なんですね。これでどれぐらい大きさが違うかということがわかったと思います。ある物質を持ってきて、それが持っている電磁気力と重力的な強さはどれぐらい違うんだろうかというのは、この例が端的に表しています。10 の 10 乗以上違うということがすぐ分かりますね、地球に含まれている物質の量を考えると。いいですか?興味がある人はこれを計算してみて下さい。

大きさを評価してみよう.

ニュートンの法則では

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

m_1, m_2 : 物体の質量
r : 物体間のキョリ
G : 重力定数 $6.672\times10^{-11}\ \mathrm{m^3\cdot s^{-2}\cdot kg^{-1}}$

重力定数を, $c=1$, $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1$ の単位で書き直すと.

エネルギーの (-2) 乗の量となる. プランク質量

$$M_{Pl} \equiv \frac{1}{\sqrt{G}}$$

を定義すると. $M_{Pl} = 10^{19}$ [GeV]

これは. $\left.\begin{array}{l}\text{最も重いクォークの質量}\\ \text{ヒッグスの質量}\end{array}\right\} \sim 10^2$ [GeV] と比較して

とてつもなく大きい。

・もう少し簡単には, 2つの離れた電子の間に働く電磁気力と重力のを比較してもよい.

・ゲージ階層性については触れない.

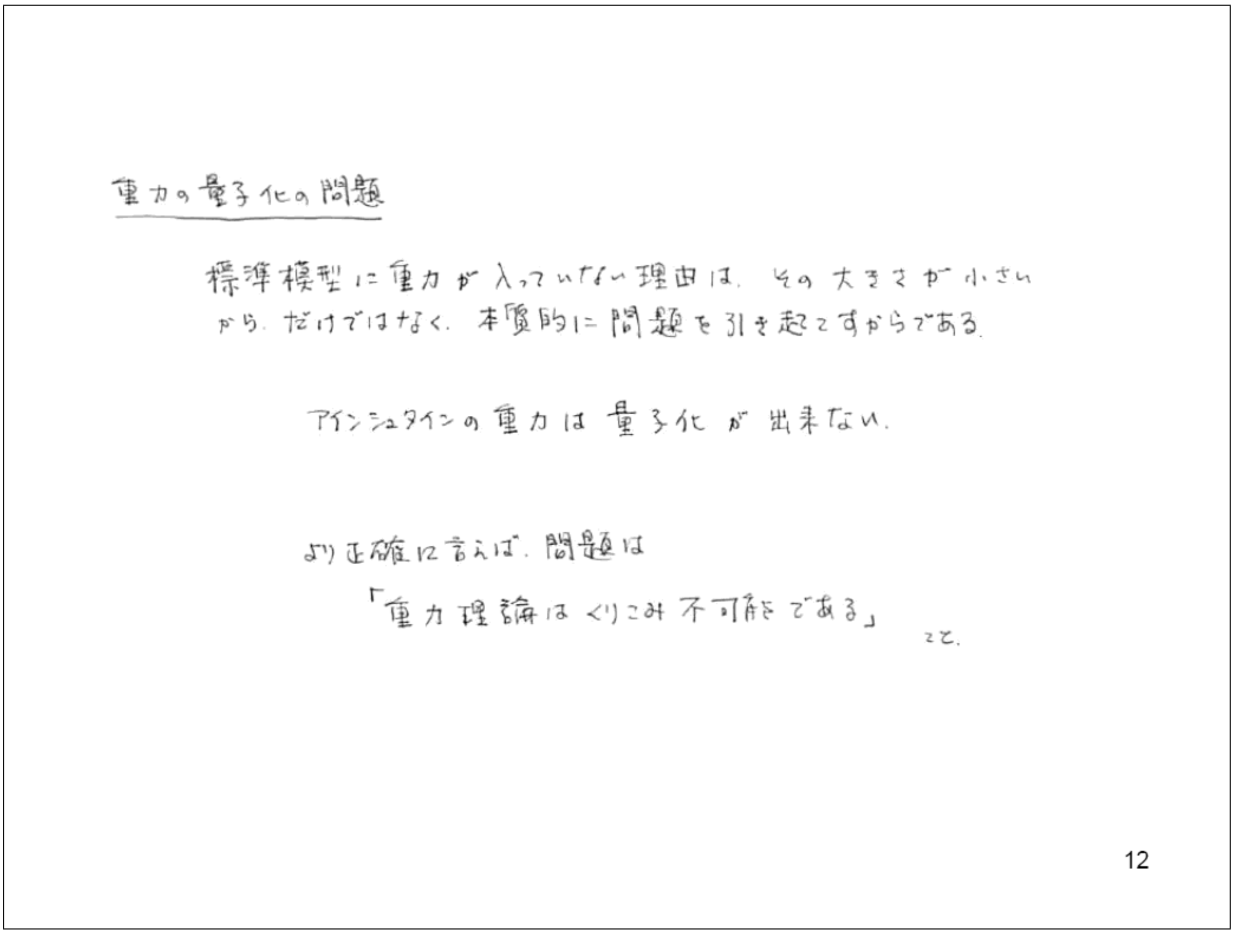
もう少し違う観点で大きさを評価してみましょう。さっき質量が出てきましたがそれをちょっと計算してみましょう。Newton の法則では、古典の教科書を見ると

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

であり、m_1, m_2 は物体の質量、r は物体間の距離、G は重力定数。重力定数を我々がよく使う $c = 1$,$\hbar = 1$ の単位で書くと、エネルギーのマイナス 2 乗の量となるので、プランク質量というのを

$$M_{pl} = \frac{1}{\sqrt{G}}$$

で定義するとこれは質量の次元を持ちます。その大きさはだいたい 10^{19}[GeV] ということが知られています。一方最も重いクォークの質量を計算すると、10^2[GeV] ぐらいしかない。最も重いクォークでですよ。このクォークがこの強さの、即ちプランク質量分の 1 の大きさの結合をしているということは、ものすごい結合が小さいという事になるわけです。ですね。これがもう一つの階層性問題です。重力が非常に小さい。これを解決することは、素粒子標準模型と重力理論の仲違いをなくすということで重要な点です。

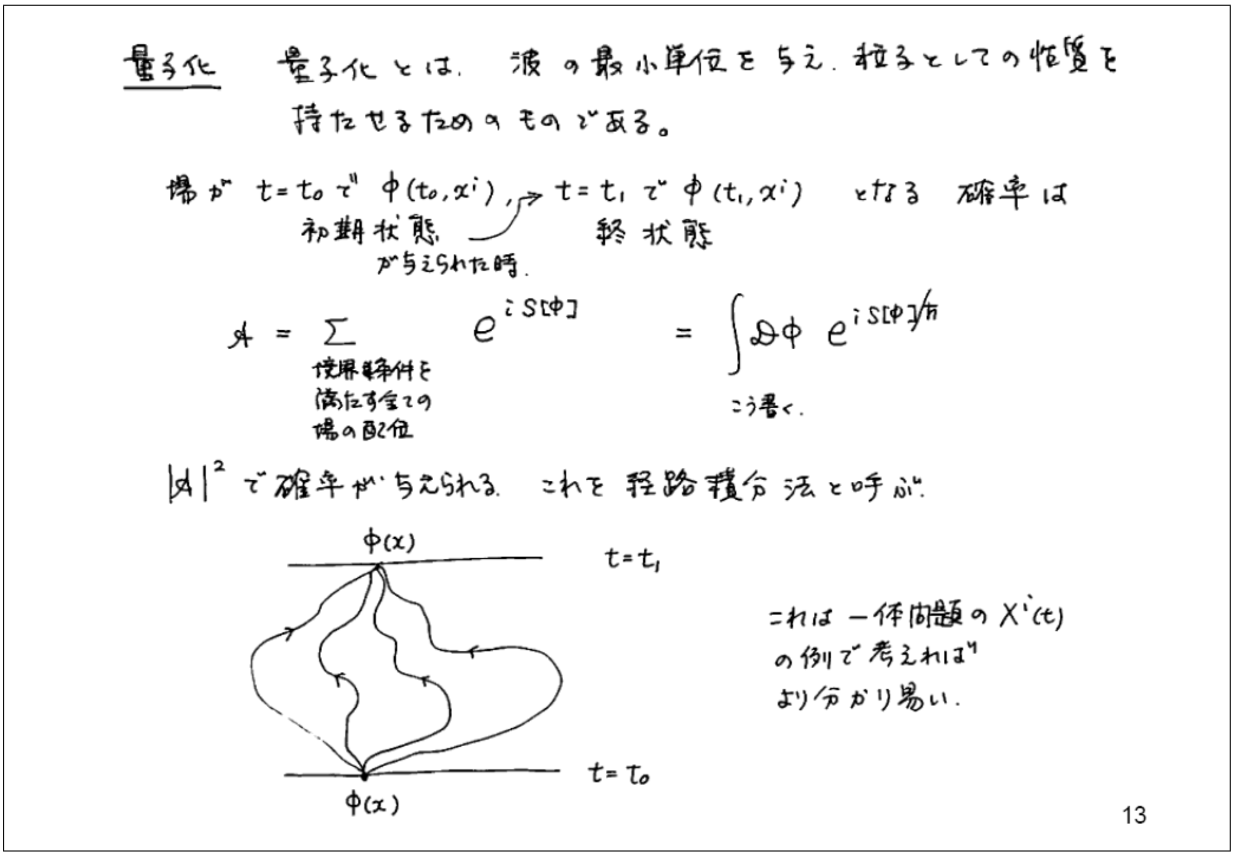


重力の量子化の問題

重力が仲違いしているのにはもう一つ重要な点がありまして、重力の量子化の問題というものがあります。標準模型に普通重力が書かれない理由は、その大きさが小さいからだけではなく、実は重力が入っていると計算ができなくなるからです。

普通の場の理論の教科書には ϕ^4 模型とかを書いてあって、真空の話があって、ループ計算があって、1-loop だとこんな繰り込みをしますとか、そんな風に進みますね。そのはじめのラグランジアンを重力も含めて書いたとしますね。そうすると、途中で問題が起こるわけです。なので教科書はそれを書かないんです。教科書は分かったことしか書かない。Einstein の重力理論は量子化ができません。より正確に言えば、重力理論は繰り込み不可能だということです。テクニカルな脚注を言いますと、Einstein の重力理論は 1-loop では繰り込みが可能だと思います。やったことある人は分かると思うんですけど。でも、matter がカップルしている場合 [4] [*2]、もしくは高次の loop を計算した場合 [8]、その時は繰り込みがだめになってしまいます。

[*2] これは Einstein 重力にスカラー場がカップルした理論の 1-loop 計算であるため計算が非常に煩雑であるが、Veltman による Les Houches のレクチャーノート [5] に詳細な計算過程が記されている。また、Einstein-Maxwell 系 [6] や Einstein-Yang-Mills 系 [7] においても 1-loop の繰り込みが不可能であることが示されている。



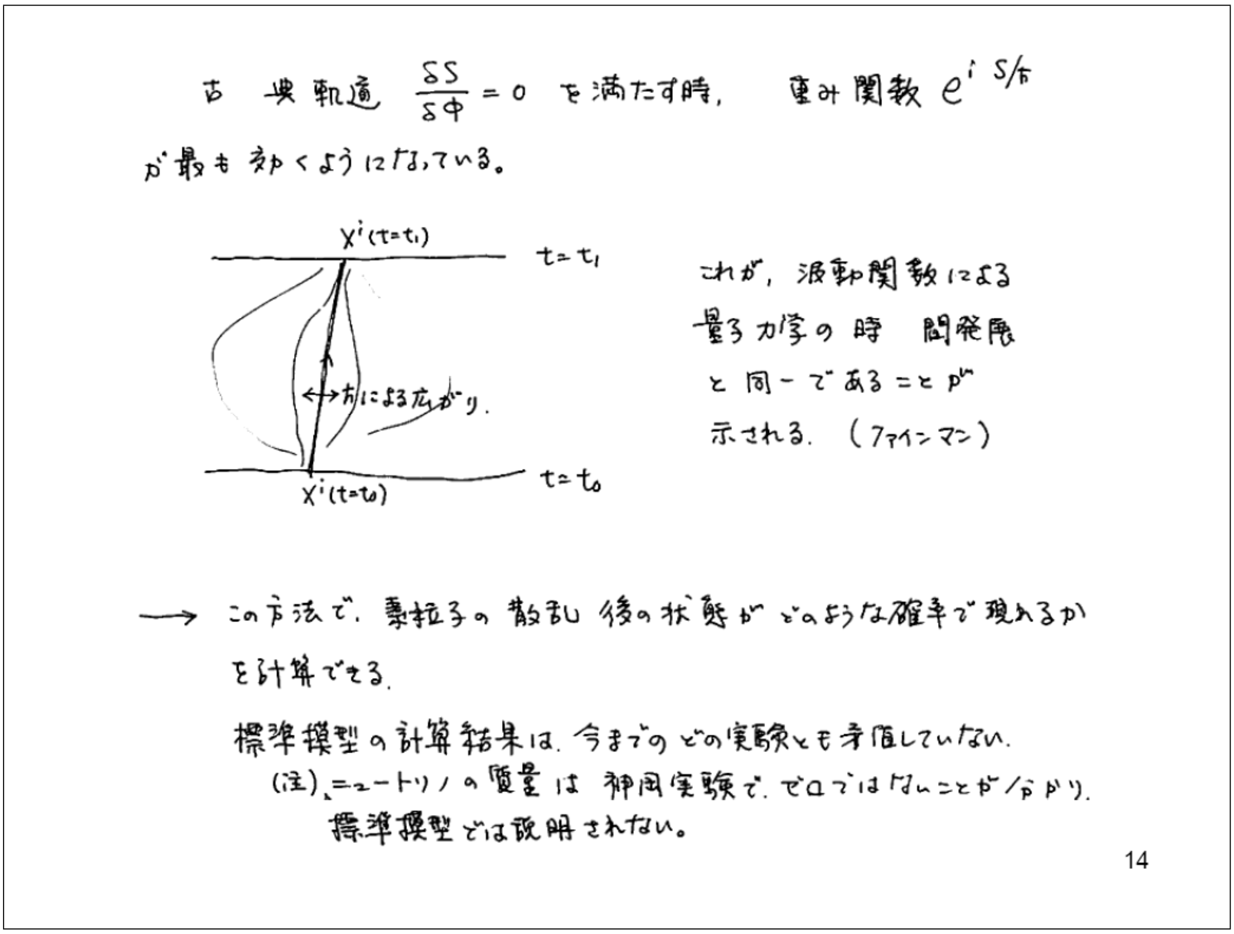
量子化

それでは、量子化とは何だったかというと、量子化とは波の最小単位を与え、粒子としての性質を持たせるものである。この波とはなにかと言いますと、場の理論は場で書かれています。で、場の運動方程式を見てみます。相互作用を全部忘れたとすると、その方程式は波動方程式になります。即ち、その解は必ず波の形をしています。こう平面波が伝搬していると、ね。そしてそれが場の理論のスターティングポイントです。量子化はその波に最小単位を与え、粒子としての性質を持たせるものである。

Feynman の言い方で言うと一番 graphical で分かりやすいので、それでいいますと、場が $t = t_0$ で $\phi(t_0, x^i)$ と与えられた時、$t = t_1$ で $\phi(t_1, x^i)$ という終状態となる確率は、このように与えられると。

$$\mathcal{A} = \sum_{\text{境界条件を満たす全ての場の配位}} e^{iS[\phi]} = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]/\hbar} \tag{3}$$

ここで指数の肩にのっているのは、作用を始状態から終状態にいく配位を考えそれを代入したものですが、その場の配位を先程の境界条件を満たす上での配位について考え足し上げなさい、ということを最右辺のように書きます。これを $\mathcal{A}$ と書いた時に、振幅、amplitude と言いますが、これを 2 乗すると確率が得られます。これを経路積分法と言うてるわけです。で、絵で描くと、初期状態は $t = t_0$ で、終状態は $t = t_1$ で、こっからここに場の配位があらゆる経路をとる。そういう時にこの場の配位を全部足し上げなさい、その時にウェイトを $e^{iS[\phi]}$ にしなさい、そして $|\mathcal{A}|^2$ を計算しなさい。そうすると $\phi(t_0, x^i)$ が $\phi(t_1, x^i)$ になる確率が得られます。これがひとことで言うところの場の量子化です。

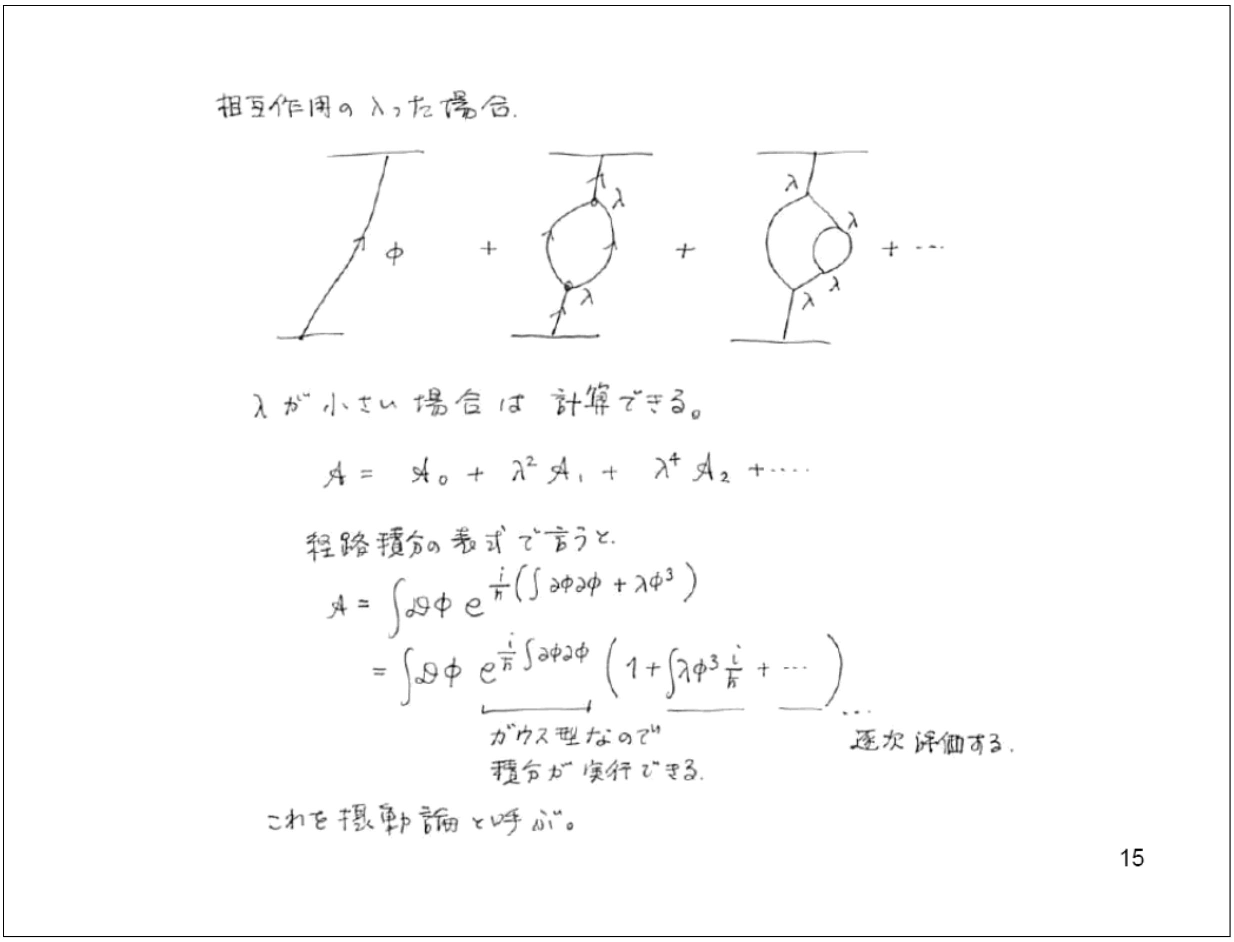


$\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0$ という古典的な方程式を満たす時が、重み関数 $e^{iS[\phi]}$ が一番効くようになっています。これが作用原理ですね。即ち $X^i(t = t_0)$ から $X^i(t = t_1)$ までまっすぐ飛ぶ、まっすぐというのは $\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0$ が満たされているという意味ですが、それが一番効くようになっていると。で、この重み関数の中の $\hbar$ というのをゼロにしますと、そういうところしか効かなくなります。これは古典極限です。で、$\hbar$ をノンゼロにすると、そこから揺らぐところも足し上がってくるようになる。そういうのが量子論です。

この方法で素粒子の散乱後、どういう状態をとるかっていう確率が分かると。で、標準模型、素粒子の標準模型のラグランジアンを出発点として、この計算を行いますと、今までのどの実験とも矛盾しない結果が得られます。この意味で標準模型というのは確立しているわけです。

もちろんこれで分からない、計算できないような結果も出ています。それがあの、ニュートリノの質量が分かったという実験ですね。戸塚さんはこの間亡くなられましたが、この実験結果でノーベル賞をとるんじゃないかと、みんなに言われていたんです。関係ないですが戸塚さんはブログをまとめた本がありますね[*3]。それは非常に感動的なので、読んでみて下さい。僕の「D ブレーン」ていう本よりよっぽど勉強になると思います。

[*3] 『戸塚教授の「科学入門」』, 戸塚洋二 著 (講談社, 2008)

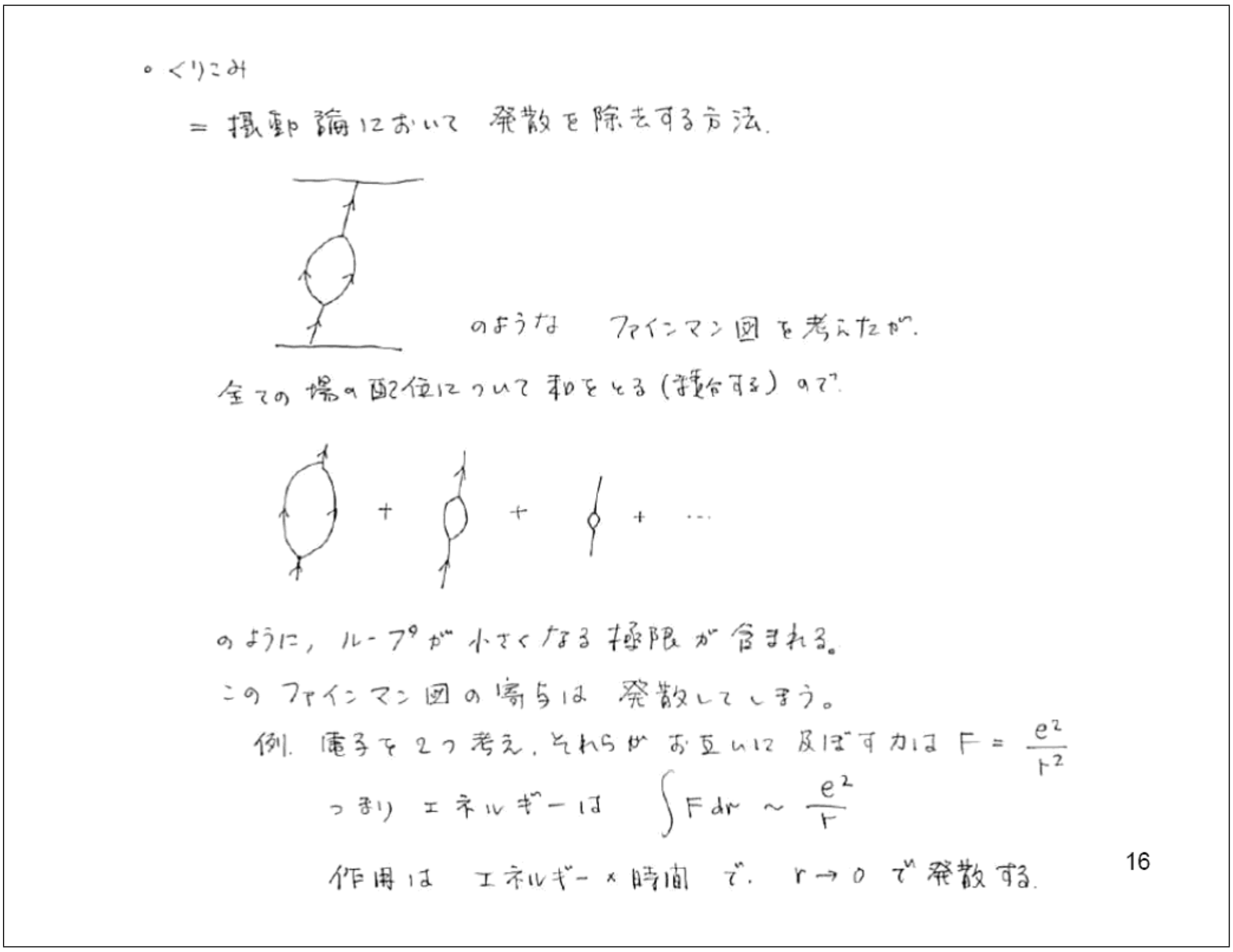


相互作用が入った場合はどうなるのかということですが、例えば ϕ^3 という相互作用が入ったときに、その前の係数を λ と書いたとしますと、上の図にようにループがあるような軌道も足し上げなさいということになるわけです。ここで ϕ という粒子は、バーテックスで枝分かれして、これは ϕ^3 の相互作用ですね、で、枝分かれしたのがくっつくようにまた戻っていくと。初期状態と終状態は固定しているわけですが、真ん中で何が起こってもいいと仮定すると、相互作用項が入るとこんなふうになるわけです。で、λ が小さいときにこれは計算できる、即ち λ のべきでずーっと展開できますから、それぞれの λ の order でこの graph を計算すれば、振幅が計算できるわけです。これを Feynman graph と言います。経路積分の言葉で言うと、このように運動項と ϕ^3 項があったときに、相互作用項を λ で展開します。

$$\mathcal{A} = \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar}(\int \partial\phi\partial\phi + \lambda\phi^3)} \tag{4}$$

$$= \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar}\int \partial\phi\partial\phi} \left(1 + \frac{i}{\hbar}\int \lambda\phi^3 + \cdots\right) \tag{5}$$

こういうふうに逐次評価していくというのが、こういう graph を足し上げていくっていうことに対応しているわけです。これが摂動論です。



ではくりこみとは何だったかということを話しましょう。それは摂動論において発散を除去する方法です。こういう Feynman 図を計算するときに、もちろんこのループの大きさについても足し上げないといけません。

ところがこのループがものすごい小さくなると、このダイアグラムの計算は発散してしまうわけです。何でかって言うと、例えばこの粒子が電荷を持っていたとしますね。で、このループが小さくなっている部分というのは電荷と電荷がものすごい近くなる。で、電荷というのはものすごい近くにあると、すんごい力が働きます。エネルギーが発散します。そういう発散があるわけです。

この発散は、「くりこみ」という操作で取り除くことができる。

$$\begin{cases} \phi(x) \xrightarrow{\text{おきかえ}} Z\phi(x) & Z = 1 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \cdots \\ \lambda \longrightarrow \tilde{Z}\lambda & \tilde{Z} = 1 + \tilde{c}_1\lambda + \tilde{c}_2\lambda^2 + \cdots \end{cases}$$

$c_i, \tilde{c}_i$ は無限大！

具体的には、r の最小距離 r_0 を決めておいて、
$\tilde{c}_i, c_i$ を、λ で逐次的な計算をすることにより、r_0^{-n} の形で
つくってゆく。

このような手法で発散を取り除ける理論をくりこみ可能と呼ぶ。

（朝永振一郎は、シュウィンガー、ファインマンと共に、くりこみ理論
で水素原子のスペクトルのラムシフトを計算し ノーベル賞。）

重力理論は、くりこみ可能ではない。

標準模型は、くりこみ可能。（トフーフト）

17

ラグランジアンに出てきている場とか λ、coupling、これをちょっとシフトしてみましょう。で、シフトするんだけども、シフトは λ について逐次的にやって、しかも λ の係数は実は無限大になるようにシフトする、というふうなことをやると、この発散は見かけ上なくすることができます。

$$\begin{cases} \phi(x) \to Z\phi(x) & Z = 1 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \cdots \\ \lambda \to \tilde{Z}\lambda & \tilde{Z} = 1 + \tilde{c_1}\lambda + \tilde{c_2}\lambda^2 + \cdots \end{cases} \tag{6}$$

これが、朝永さんがやったくりこみ理論ですね。こういう手法で発散を取り除ける理論をくりこみ可能と言っています。即ちラグランジアンに出てくるパラメータを、少し変更することで発散を除去できる理論をくりこみ可能な理論と呼んでいるわけです。

で、重力理論で同じことをやろうとすると、実はくりこみ可能ではないということが分かります。ここまでくればくりこみ可能ではないという意味がわかると思いますが、重力理論にはパラメータが入っていますね。重力定数。その重力定数をこのようにシフトして、しかも重力場を先程と同じようにシフトすると発散が取り除けるか？ Einstein の重力理論から出発すると、実はそれでは取り除けないということが分かります。

で、もし Einstein の重力理論を変更したとしますね。何かその、ちょっと違う項を加えると。重力の自己相互作用項を加えてみたと。そうすると、その相互作用項の前には、定数がありますから新しい定数を自分で導入したことになります。そういう項を無限個加えると、これでくりこみができるということは知られています。でも無限個くわえるということは、はじめからラグランジアンを書かないということと一緒ですね。それは計算できないわけです。それを無限個与えるやり方を自分で開発すればいいんですね。でもそれは、あまり

現実的な方法ではないですね。なので重力理論はくりこみができず、残念ながら素粒子の標準模型の横に並べて書いたとしても、それはこのような計算ができないので、意味が無いというわけです。

一方標準模型は何度も言っているように、くりこみが可能であるということが知られています。ですので、高次の項までどんどん計算していってですね、その結果を精密な実験と合わせることができるわけです。例えば量子電磁気学なんていうのはものすごい数のループまで計算されています。それが様々な、例えば磁気モーメントとかですね、そういうものとものすごい精度で合うと。10 桁とかそういう精度で合うわけですね。ところが重力理論をそれに結合させると、それがそもそも計算可能ではなくなってしまうというわけです。

(重力理論についてのレヴューは省略されました)

・重力理論（アインシュタイン）

等価原理. 重力質量 = 慣性質量.

（もしくは. 重力は. 加速度運動による力と区別がつかない

地面上に立っている時に感じる力　電車が動き出す時に感じる力）

によると、重力は重力場 $g_{\mu\nu}(x)$ $\mu,\nu=0,1,2,3$ で記述される.

固有長 $ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu$. は観測者に不変の量.

特殊相対性理論は $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$ とおいたものである.

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

↑ ローレンツ変換で不変な長さ.

18

アインシュタイン－ヒルベルトの作用

$$S = -\frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x \sqrt{-\det g} \quad R[g_{\mu\nu}(x)]$$

R : リッチ曲率.　$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$,　$R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma}R_{\rho\mu\sigma\nu}$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu \partial x^\rho} + \frac{\partial^2 g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\rho} - \frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\rho}\right)$$
$$+ g_{pq}\left(\Gamma^p_{\nu\rho}\Gamma^q_{\mu\sigma} - \Gamma^p_{\nu\sigma}\Gamma^q_{\mu\rho}\right)$$

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\sigma}\right)$$

… これは. 一般座標変換　$x'^\mu = x'^\mu(x)$　で不変.

$$\left(g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x) \quad \text{である (固有長.)} \right)$$

19

$g_{\mu\nu}(x)$ が大きく変化すると，時空の曲がりが強くなる。

弱い場合．　$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$　と出来，この時 運動方程式は

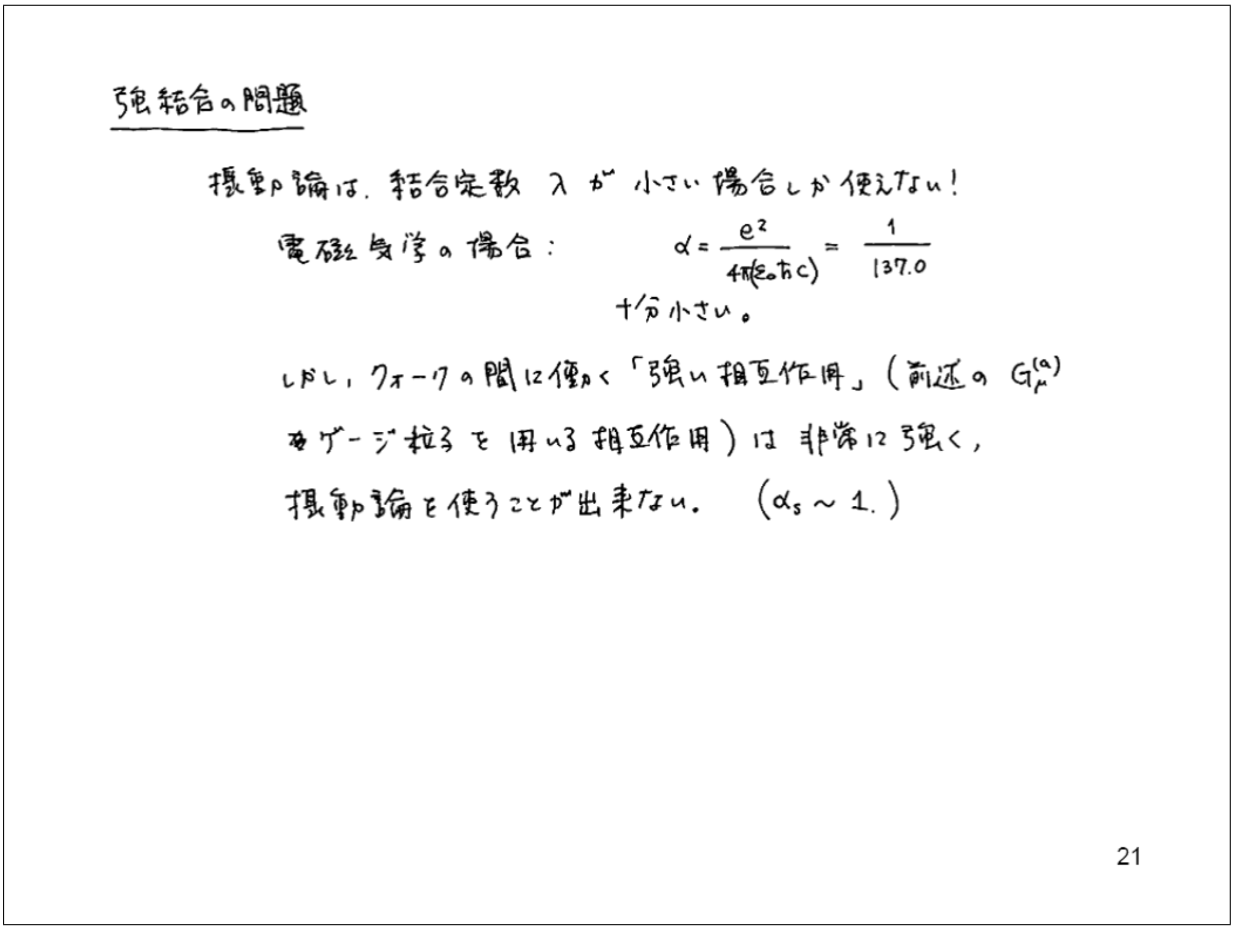
$$\left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\right) h_\rho{}^\sigma(x) = 0$$

無質量 粒子．＝ 重力子

$\left(\text{作用は}\quad S \propto \int d^4x \;\; \partial_\mu h_{\rho\sigma}\,\partial_\nu h_{\rho\tau}\;\eta^{\mu\nu}\,\eta^{\rho\rho}\,\eta^{\sigma\tau} \quad \text{となる}\right)$

ニュートンの法則を導くことが出来る．$\left(\delta^{\overbrace{ij}^{1\sim3}}\partial_i\partial_j h = 0 \;\text{ から }\; h \sim \dfrac{c}{r}\right)$

20



強結合の問題

次に、テクニカルな問題について述べましょう。今までのところで質問はありますでしょうか？いいですか？質問が全然ないとあの、こっちがかなり不安になるんですけども、それでも質問がないですか？ないですか？ちょっと簡単すぎる？簡単すぎるかな？まあ簡単すぎる方がいいと思うんですけどね。はい、じゃあ次強結合の問題にいきましょう。

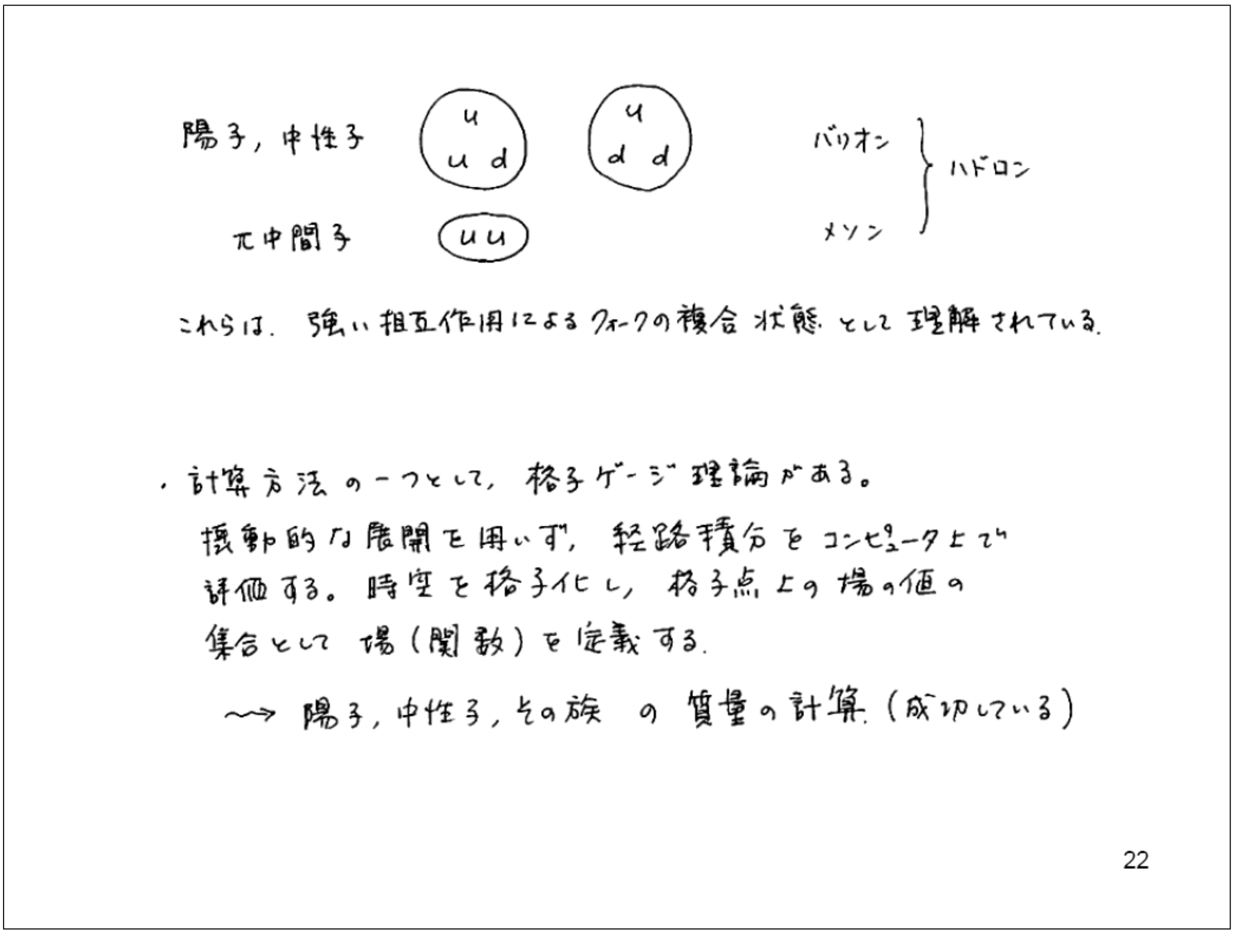
摂動論は先程見たように、結合定数 λ が小さい場合しか使えません。λ の展開をしていますから。べきで展開していますから。で、電磁気学の場合はその定数は

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137.0}$$

という式があって、十分小さい。もちろんそれを全部足し上げたらほんとに収束するかどうかということは、謎なわけです。ただ、小さければ、初めの方は収束しているように見えるわけですね。小さければ、問題はないと思うわけです。

しかし、標準模型に現れる場の一部であるクォーク、その間に働く強い相互作用、ここでちょっと説明を省きましたが、グルーオンの交換でクォークの間に力が働きますが、それは非常に強い。だいたい order 1です ($\alpha_s \sim 1$)。摂動論を使うことはできない。これが２０世紀の問題です。で、摂動論以外に方法があるか？例えば先程の、指数の肩に乗ってた作用を、展開せずにそのまま評価すればいいんじゃないか？ね。そのまま評価

できれば僕はこんな問題言わないんです。そのまま展開せずにですね、それを評価できるかと、そういう方法が無いということです。なぜかと言うとそもそも量子化というのは、まずその相互作用のところを無視して、自由場のところだけを持ってきて、その平面波から量子化しているわけです。ですよね。ですから、はじめから、α が小さいですよ、ということを仮定していると思うんです。α が大きくなると、そもそもそういう場が現れるのかということすら怪しくなる。直感的にはですよ、ね、そこが問題なんです。

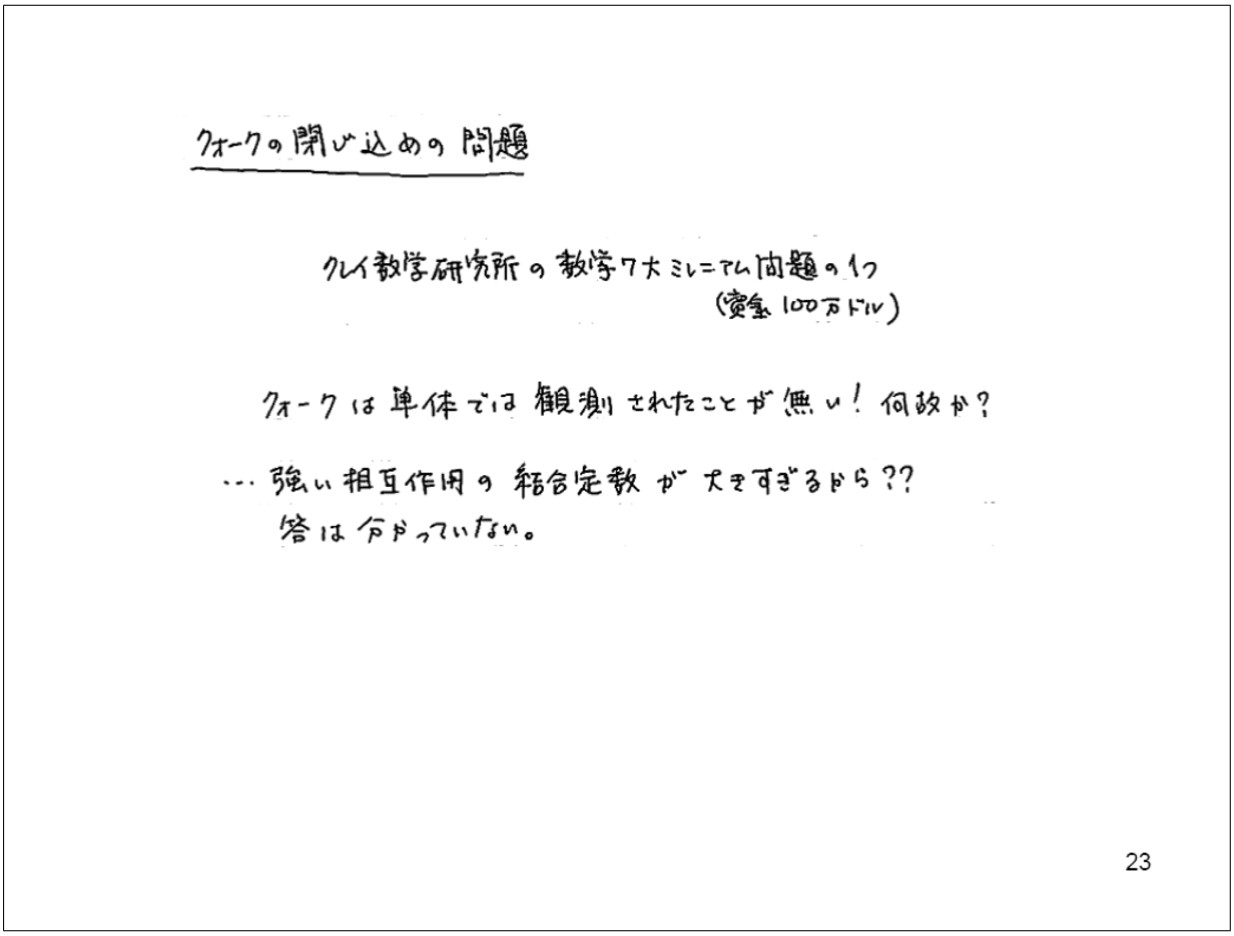


我々が良く知っている、陽子、中性子、そして中間子。これらは u,d のコンビネーションで与えられています。これらハドロンは、強い相互作用によるクォークの複合状態として理解されています。ところが、例えばこのハドロンの質量を、標準模型のラグランジアンから計算できるか？と言われると、計算できないわけです。先程の摂動論が使えないというのは明らかですね。ですから、その作用に対して何らかの近似をしている、もしくは大きな仮定をして、違うかたちに持っていかないと計算ができないわけです。それが問題です。

計算方法の一つとして、格子ゲージ理論というのがあります。これは先程の λ の摂動的な展開を使わずに、指数の肩の作用そのものをコンピュータにぼーんとのせてやる、そして ϕ をあらゆる配位についてコンピュータで足し上げます。そうすると、摂動論を使わなくても先程の amplitude を計算できますね。もちろん終状態と始状態はある程度仮定しなければいけません。そういうところがありますが、この方法で計算できるわけです。その結果、最近はコンピュータの能力が非常に高いですから、陽子、中性子の質量の計算が割と成功している、というわけです。残念ながら標準模型のパラメータ即ち coupling とか質量とかそういうものを厳密に再現できるところまでは現在のところ行っていません。しかし、おそらく数年のうちにそこに到達するだろうと言われています。もちろんコンピュータにのせる時には空間をメッシュに切りますんで、そのメッシュの数は無限にはできないということは明らかですけれども、メッシュの数はなるべく大きくしておいて、クォークやその他の素粒子の質量を現実的な知られている質量にもっていくということは、数年以内にできるんじゃないかと言われています。

もしそれができれば、この技術的な問題はあんまり技術的な問題ではないかもしれない。即ちこのハドロン

の質量とか相互作用がそれで計算できるんであれば、この技術的な問題はないと考える向きもあります。僕の立場は、数値計算で計算できても、何でハドロンがそんな風に質量を持っているのか、それはあんまり分からないと思うんです。そういうところが技術的な問題として残ります。即ち、計算はコンピュータでできるけれども、何でそうなるのかを理解したいというわけです。

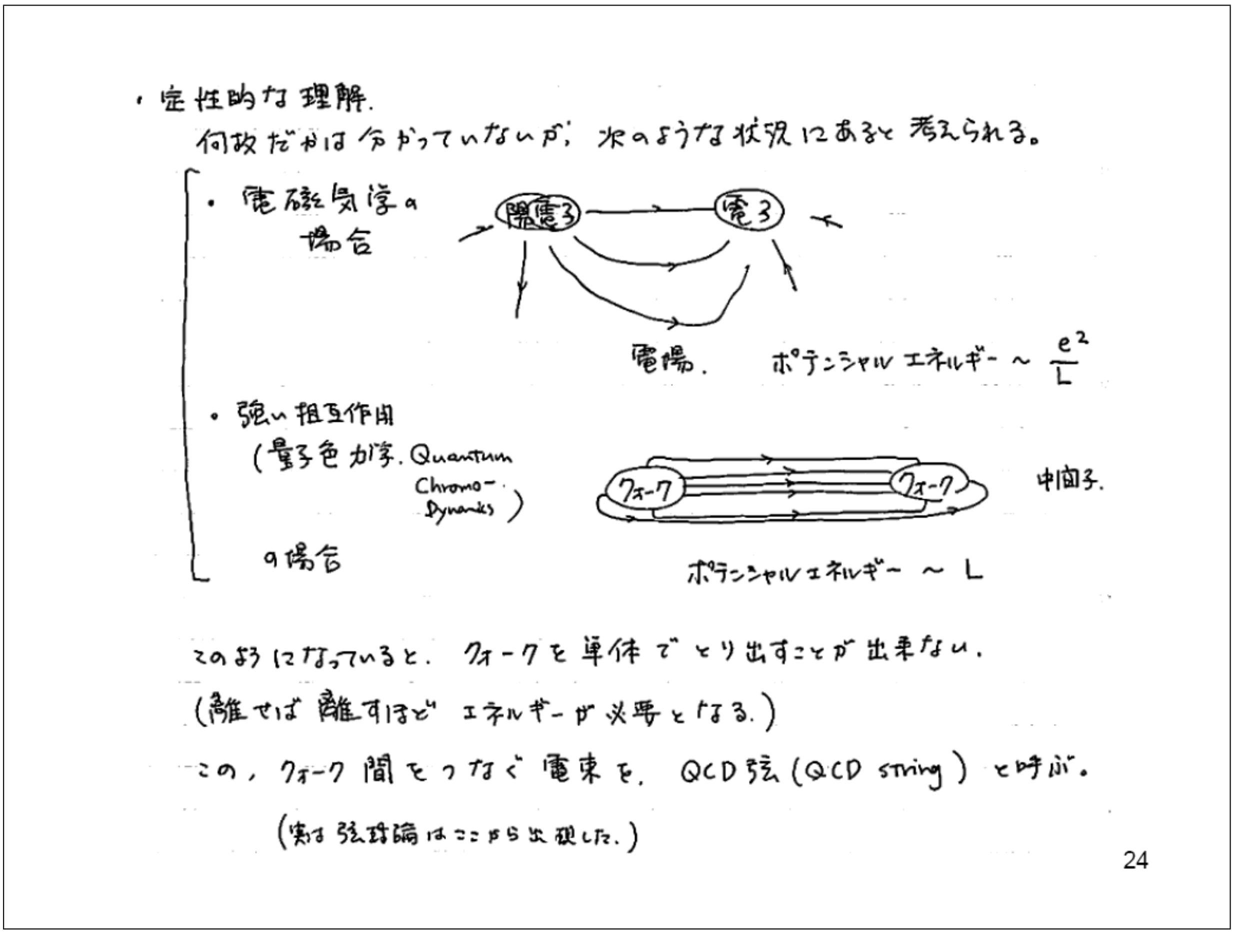


クォークの閉じ込めの問題

最後の問題は、クォークの閉じ込めの問題です。この問題は一番これらの問題の中で重要です。重要というのは、君たちの懐に直結する問題だからです。この問題を解くと、賞金一億円が貰えると、いう意味で、ここの中で一番重要な問題かもしれない。クレイ数学研究所というのがボストンにありまして、そこの数学７大ミレニアム問題の一つということです。この問題を解けば、ほんとに１億円がもらえます。

クォークは単体では観測されたことがない！それはなぜであるか？直感的にはクォークは強い相互作用をしていて、結合定数がもちろん大きいと。だから、見えないんだと。そういう風な直感的な答えがあります。しかし、結合定数が大きかったらほんとに見えないのか？それは分からないですね。

ちゃんと数学的にラグランジアンから出発して、示さないといけない。もちろん１億円を稼ぐためには数学的に厳密に定義された問題の証明を与える必要があります。それは、その問題は２つに分かれていて、一つ目の方はちょっと難しいんで二つ目の方を言いますと、二つ目の方は、「pure Yang-Mills 理論に mass gap があることを示せ」。そういう問題です。一つ目の方はと言いますと、「量子 Yang-Mills 理論が存在することを示せ」。存在証明。これ数学の人がお得意なとこですね。我々物理学者は存在証明なんてあまり気にしないですね。無限大が存在するかとかそんなん気にしないですけれども、この１億円をもらうためにはその存在証明も必要です。僕らはそこまで数学的に厳密である必要はないと思っているわけですが、クォークが観測されないということはちゃんと知る必要がある。



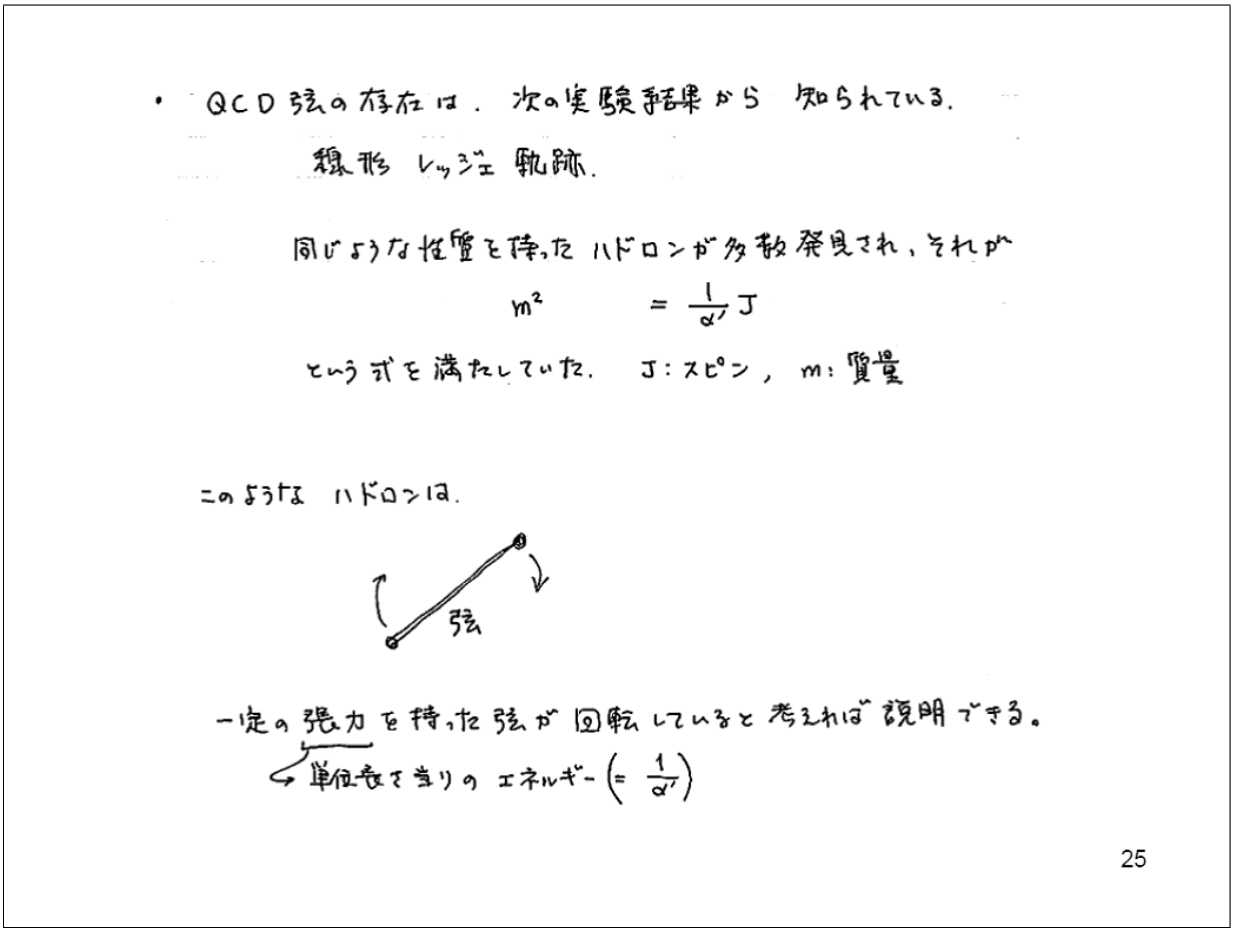
定性的な理解は以下のとおりで、これはもう数十年にわたって知られています。ところがそれをラグランジアンから示した人はいないというわけです。なぜだかは分かっていないが、次のような状況にあると考えられています。電磁気学の場合は、例えばエレクトロンとポジトロンがあれば、図のように電場が張られるわけです。ポテンシャルエネルギーはこの距離を L とすると、

$$\text{ポテンシャルエネルギー} \sim \frac{1}{L}$$

に比例している。一方強い相互作用、QCD の場合は、クォークとクォークの間のポテンシャルエネルギーが距離に比例している。

$$\text{ポテンシャルエネルギー} \sim L$$

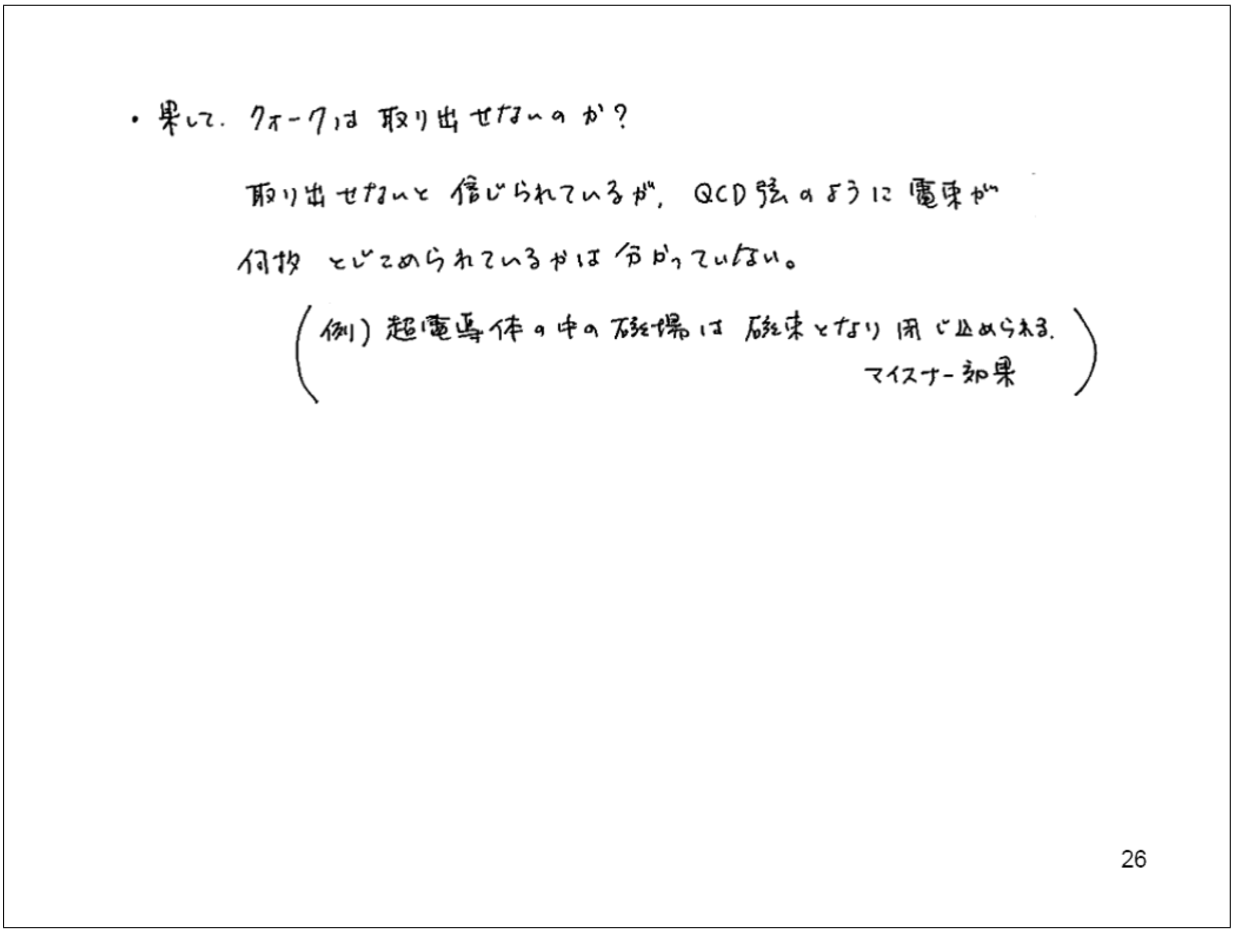
このようになっているとクォークを単体で取り出すことはできません。なぜならば、離せば離すほどエネルギーが必要になるからです。電磁気学の場合には離せば離すほどエネルギーが減りますね。QCD では増えるわけです。しまいにはクォーク間がプチっと切れてこの端っこにクォークと反クォークができて、クォークのペアができると。で、ペアができたらクォークは単体では見えないですね。そんな風になっていると思われているわけです。この間の紐のようになっているものを、クォーク間をつなぐ電束ですが、QCD ストリングと呼んでいます。これからお話する弦理論は実は、物理的にはこんなところから出発しました。QCD ストリングをちゃんと定式化するにはどうすればいいか？それが弦理論だったわけです。それがいつの間にか重力の理論になって、現在に至るというわけです。



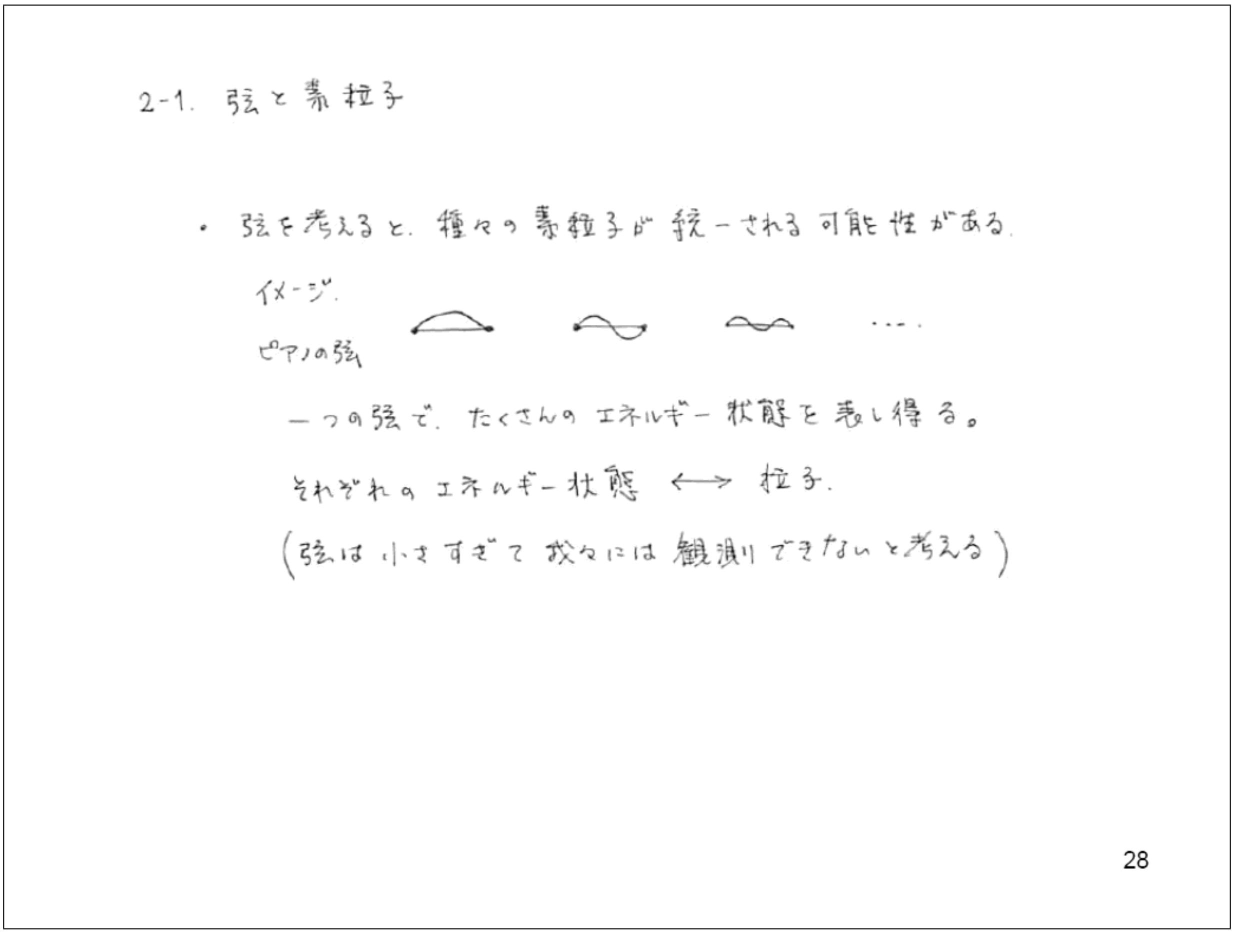
QCD ストリングの存在は実験結果からそうであるはずだということが知られています。その実験結果というのは線形レッジェ軌跡と呼ばれるものです。ハドロンというのはものすごい沢山の種類が発見されているわけですが、それを質量の 2 乗とハドロンの持っているスピンでプロットしてやると、実は非常に美しい直線にのるということが知られています。

$$m^2 = \frac{1}{\alpha'} J$$

それを線形レッジェ軌跡といいます。このようなハドロンは、先程見たようなクォーク、反クォークとその間をつなぐストリングがぐるぐる回転していると思うと、この式が即座に出てきます。相対論的にやれば。ですから、このことから、こういうストリングがあるはずだということが示唆されるわけです。この時この比例係数 $1/\alpha'$ と書かれたものは、この弦の張力に対応します。で、南部-後藤型の弦というのを考えると実はこの張力は単位長さあたりのエネルギーと等しくて、それを $1/\alpha'$ と書いているわけです。超弦理論を勉強するとはじめになぜか α にプライムがついたものがいっぱい出てくるんですが、それはこういう origin があるわけです。



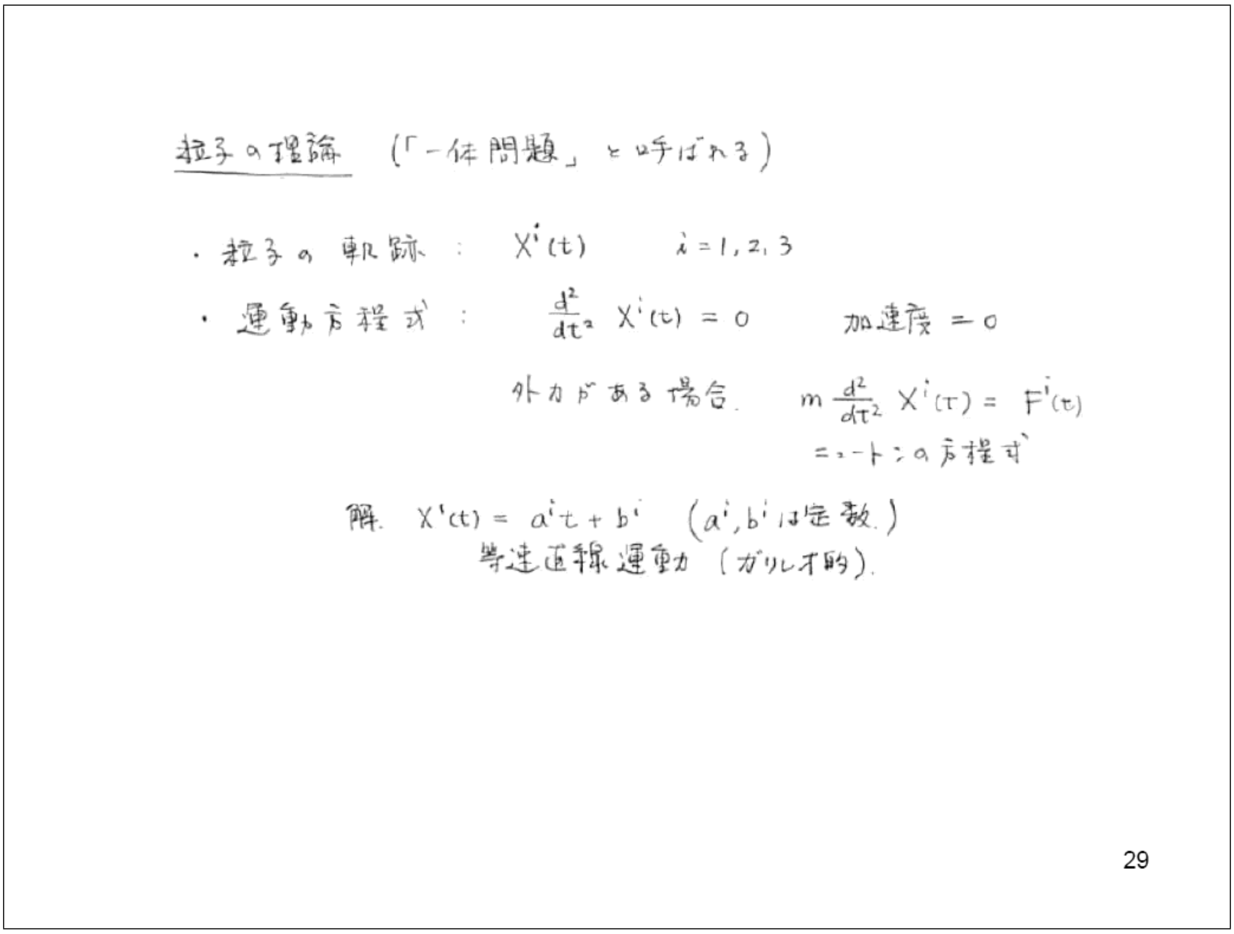
果たしてクォークは取り出せないのか？取り出せないと信じられているが、QCD で電束がなぜ閉じ込められているかということは分かっていないというわけです。これが問題。えーそれではこれで休憩にしたいと思いますが、はじめの問題 5 つをまとめておきますと、第一の問題は任意定数の問題。次に階層性の問題。そして重力の量子化の問題。これが理論的な問題でした、三つ。そして技術的な問題は、強結合の問題と、クォークの閉じ込めの問題です。これら五つの問題、他にも問題は実はあるんですけど、これら五つの問題に僕は興味を持っているので限りましたが、これらに対して弦理論は答えを与える可能性がある。それをこれから説明していきます。



2　弦理論とそのアイディア

2.1　弦と素粒子

弦理論とそのアイディアについて話します。弦と素粒子。弦理論のそもそものモチベーションは、弦を考えるとたくさんの素粒子が統一的に理解できる、という事でした。これは歴史的な事を言っていまして、かれこれ 40 年ほど前に遡りますが、当時クォークとかそういうものが分かっていなかった頃、様々なハドロンが発見された。ハドロンというのは、もちろん湯川の中間子。それ、始めは実は違う物が中間子と思われてたとか色々歴史がありますが、そういうものから始まる。現在ではクォークの bound state だとわかっているものですね。それがもの凄いたくさんの量発見された。それらは素粒子だと考えられていて、その素粒子をどう統一的に理解すればいいか、ということに頭をみんな悩ませていた訳です。そこで弦模型というものは生まれました。そのイメージはどんなんだったかと言いますと、ピアノの弦みたいな物を考えて端っこで固定してやる。そうするとピアノの弦は、単音、倍音、三倍音というふうに振動するんです。一つの弦を考えるとたくさんのエネルギー状態を表す事ができる。もしこの弦がもの凄く小さくて見えなかったとすると、それは粒子のように見えるはずだから、様々な内部エネルギー状態というのは一個一個違う粒子にみえるであろう。でも、その違う粒子というのは荷電とかそういうものは共通しているであろう。それが弦理論のエッセンスです。こんな風に様々な素粒子を統一できるんじゃないか？それがエッセンスです。



粒子の理論

それではまず弦理論のラグランジアンの運動方程式を書く為に、素粒子の理論、（点）粒子の理論だったらどうだったかを思い出してみましょう。これは一体問題と言われます。すなわち場の理論とかそういうのをするのではなくて、粒子一個が有った場合の理論。粒子の軌跡は $X^i(t)$ $(i=1,2,3)$ という関数で与えられます。これは時間 t が与えられればそれがどんな所にあるか、という座標です。運動方程式は

$$\frac{d^2}{dt^2}X^i(t)=0 \tag{7}$$

すなわち加速度が 0 という条件です。もし外力があれば、もちろん運動方程式の右辺がニュートン方程式の力、前の係数は質量になる訳です。外力が無いときの解は t の一次関数

$$X^i(t)=a^i t+b^i\ ,\quad (a^i, b^i\text{は定数}) \tag{8}$$

になります。これは等速直線運動である。当たり前の話ですね。

・最小作用の原理（変分原理）

$$作用\quad S = \int dt \left(\frac{1}{2} m \frac{d}{dt} X^i \frac{d}{dt} X^i + X^i(t) F^i(t) \right)$$

同じ足 i は足し上げる.（アインシュタインの規約）

$$\frac{\delta S}{\delta X^i(t)} = 0 \Leftrightarrow 運動方程式.$$

注）微分が入っている部分は部分積分をしてから変分する.

注）$\dfrac{\delta}{\delta X^i(t)} X^j(t') = \delta^{ij} \delta(t'-t)$ で関数による微分を定義

・外力の例.

$$S = \int dt \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{d}{dt} X^i \right)^2 + e \frac{dX^i}{dt} A_i(X^j(t)) \right)$$

ここで $A_i(X^j)$ は場所 X^j に依存した. ある決まった関数である。 e は定数.

30

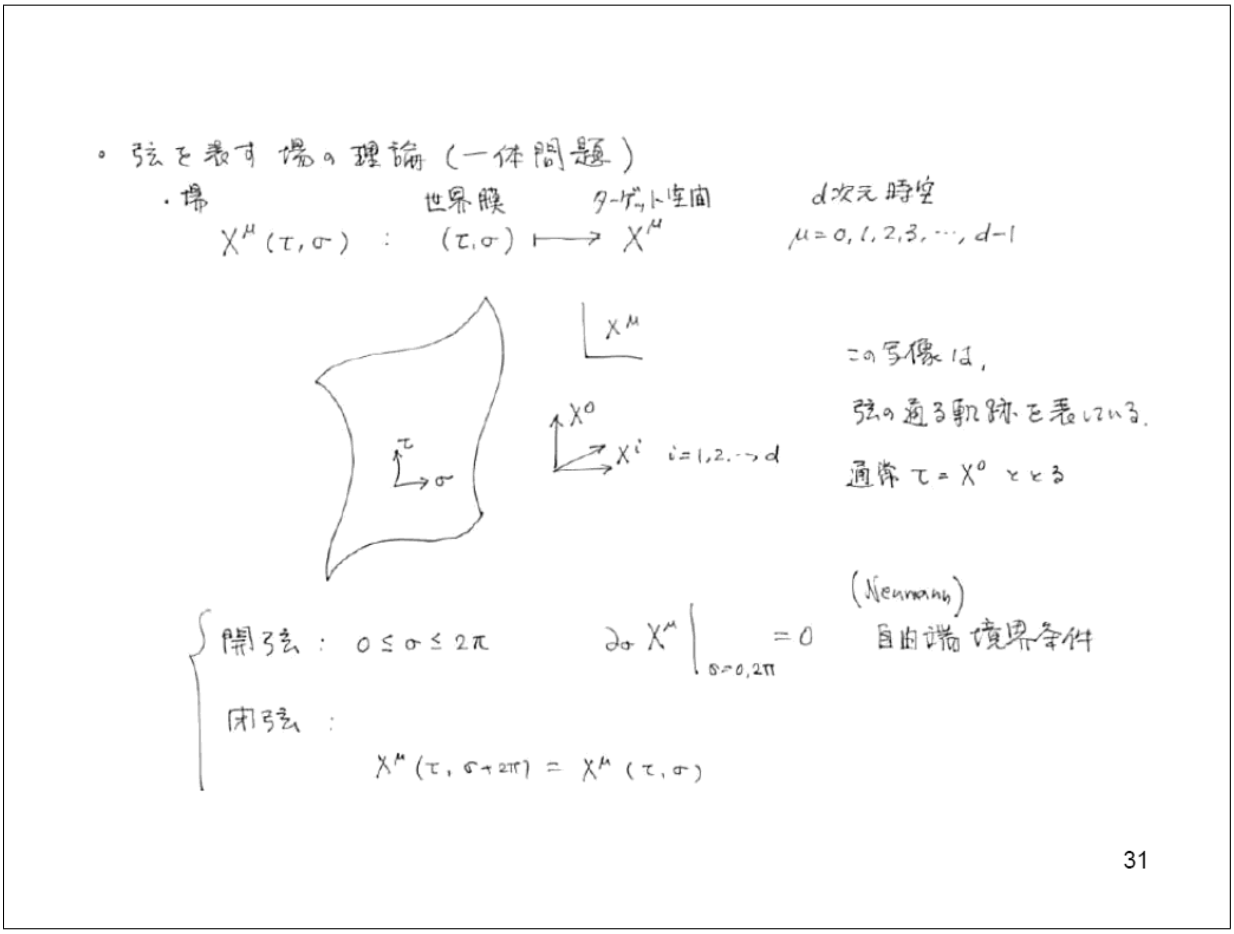
これを作用の原理で書いてみましょう。作用は

$$S = \int dt \left(\frac{1}{2} m \frac{d}{dt} X^i \frac{d}{dt} X^i + X^i(t) F^i(t) \right) \tag{9}$$

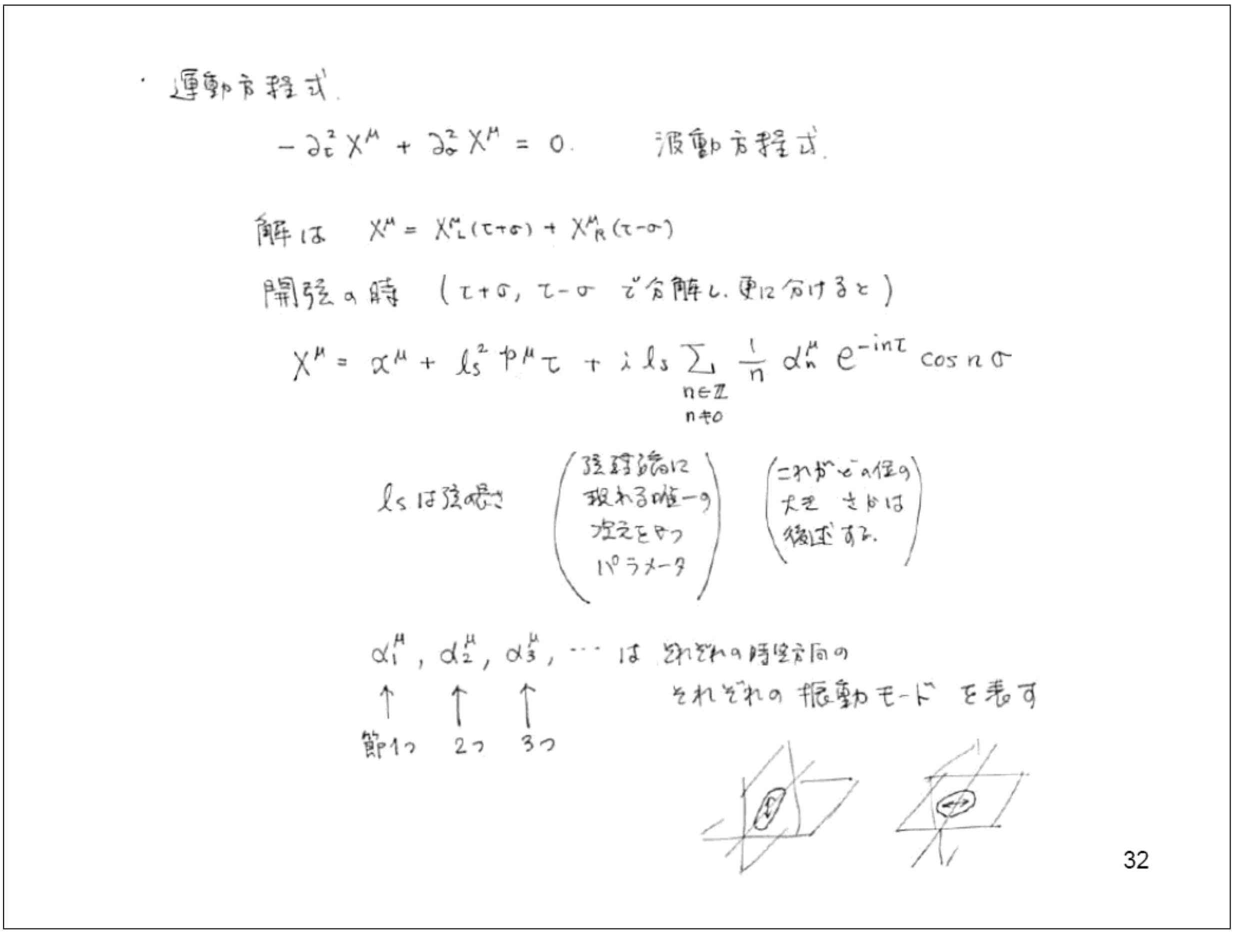
のようになります。すなわち、運動方程式の d^2X^i/dt^2 を出す為に $(dX^i/dt)^2$ という項があります。その前に m という質量があります。外力がもし在るのであれば X^iF^i という、F^i はある手で置いた関数ですが、こういう項があるんです。i が二回出てきたら足し上げるというアインシュタインの規約を使い、$X^i(t)$ で変分したものを 0 とおくと、運動方程式が出るというわけです。外力の例として下に書いたものは一番代表的な例です。

$$S = \int dt \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{d}{dt} X^i \right)^2 + e \frac{dX^i}{dt} A_i(X^i(t)) \right) \tag{10}$$

第一項は運動項で第二項は外力の項ですが、外力のところに時間微分が入ってます。そして外力は $A^i(X^i(t))$ という、$X^i(t)$ の関数として与えられてます。これは汎関数ですね。$A^i(X^i)$ は場所 X^i に依存した、ある決まった関数である。そして係数は e である。これは実は粒子が e という荷電をもっている場合の外場、ゲージポテンシャルの中での運動を表しています。こんなラグランジアンはあんまり場の理論の教科書に出てきませんが、弦理論ではこっちの方が重要です。なんでかと言うと、この粒子を弦に格上げするというところから弦理論が出発するからです。



では先ほどの粒子の一体問題を弦の一体問題に格上げしてみましょう。場として登場するのはこれは t の関数ではなくて、（t の代わりに τ と書いて）τ と σ の二変数になります。で、(τ,σ) を一つ与えますと、その一つの点に対応する、弦の時空の中の場所が決まると。(τ,σ) から X^μ への写像がこの場 $X^\mu(\tau,\sigma)$ です。この (τ,σ) を world sheet (世界膜) と呼んで、X^μ をターゲット空間と言います。ターゲット空間というのはこの写像の先、値域が X^μ である事からそう言っている訳ですが、この写像が弦理論の基本的な場です。この場は、素粒子理論では普通場の理論と言っているその場を第二量子化して粒子が出てきますが、それそのものではないです。これは一体問題で、弦が一個あったとする。一個あったときにその一個の場所を表すものを X^μ と書くというのです。ここから分かる通り、μ というものは我々が住んでいる時空の方向を表します。すなわち、d 次元時空であれば μ は 0 から $d-1$ まで走る。真ん中にあるのはこの写像の絵です。(τ,σ) というのは、膜の parametrization になっていて、膜は X^μ で張られる時空の、あるストリングの trajectory になっている。縦方向が時間のつもりで、ある時間には膜の下端の形をした弦が、ある時間には膜の上端の形をしている。時空間の中を sweep している弦の trajectory を描いたものが world sheet です。τ は縦方向に描いてますが、通常この τ は X^0 と一緒に取ってもいいと思います。まぁ、parametrization ですからね。自由にできます。



弦を考える時に２つの σ に対する新しい自由度の boundary condition が指定できます。一つは開いた弦で σ は 0 から 2π まで走ると思って、$\sigma = 0, 2\pi$ の所では X^μ の σ 微分が 0 である、これを自由端境界条件と言います。

$$\partial_\sigma X^\mu|_{\sigma=0,2\pi} = 0 \tag{11}$$

弦の端っこを自由にブラブラさせている、それがこの境界条件です。もしくは固定端境界条件として fix してもいいですから、fix ということは弦が時空のある場所にくっついているということです。くっついちゃったら、それはなんというか、時空の並進対称性とかそういうのを壊しちゃうんですけども、それを導入してもいいんですよ。むしろそれを導入した方が弦理論では重要な事が見えてきます、というのが D ブレーンなんです。これは後でお話しします。今のところ時空は全くそういう並進対称性を破る事がなくて自由端境界条件があるとしましょう。一方、閉じたループになった弦というのも考える事ができます。これは $X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi)$ が $X^\mu(\tau, \sigma)$ に戻ってきた、そういう状況です。これで輪っかの弦ができたわけです。この２種類の弦が弦理論には存在します。

運動方程式は何でしょうか？先ほどの（点）粒子の場合は、

$$\partial_t^2 X^\mu = 0 \tag{12}$$

というものでした。今はこれをナイーブに world sheet 上の Lorentz 対称性を持つように拡張すると、もちろん $\partial_\sigma^2 X^\mu$ という項が付くはずです。そういうものが 0、それが波動方程式です。

$$-\partial_t^2 X^\mu + \partial_\sigma^2 X^\mu = 0 \tag{13}$$

こんなふうに弦理論は出発します。この方程式の一般解を書くと、

$$X^\mu = X_L^\mu(\tau+\sigma) + X_R^\mu(\tau-\sigma) \tag{14}$$

と分解できます。今は開弦と閉弦それぞれの場合に先ほどの boundary condition がついていますから、それを尊重しながら解を書くと、この解は振動解しか持たない事が分かります。

$$X^\mu = x^\mu + l_s^2 p^\mu \tau + i l_s \sum_{n\in\mathbb{Z}, n\neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma \tag{15}$$

こんなふうに分かれます。そりゃそうですよね。ここで l_s という量が出てますが、l_s はいわゆる " 弦の長さ " といわれるパラメータです。弦理論に現れる唯一の次元を持つパラメータで、これがどのくらいの大きさかというのは後でお話します。$\cos n\sigma$ という展開された前の係数の α_n^μ は、μ という足を持つものですが、これはそれぞれの時空方向、すなわち μ で指定されるそれぞれの振動モードを表します。$n=1$、$\cos(1\times\sigma)$ のときは節が一つですし、$n=2$ のときは節が 2 つ、$n=3$ のときは節が 3 つ、というふうに弦の振動の種類を分けているのがこの部分です。この前の部分は何であったかというと、等速直線運動の項ですね、弦の重心が等速直線運動している。この振動に μ という足がついていますが、μ はそれぞれの振動が時空のどっち方向の振動であるかということを指定するパラメーターですね。時空を縦と横に分けた時に縦方向で振動しているか横方向で振動しているか、それが μ の足が 1 なのか 2 なのか 3 なのか 4 なのかということで分かるわけです。

この簡単な 2 次元の理論を量子化する事ができます。その量子化についてはここでは述べません[*4]。結果は次のページのようになります。

[*4] 例えば Polchinski の教科書などを参照。

・開弦の状態のエネルギーは、量子化の結果

$$m^2 (= p_\mu p_\nu \eta^{\mu\nu}) = \frac{1}{l_s^2}\left(-1 + \sum_{n>0} n N_n\right)$$

N_n：節 n 個の振動がいくつ乗っているか.
(量子化されている)

・$N_n = 0$ はタキオン (無視する)

・無質量状態 $m^2 = 0$ ： $N_1 = 1$, 他ゼロ.
α_1^μ で規定される。

状態が μ でラベルされる 無質量状態 ＝ ゲージ場 $A_\mu(x)$ の粒子.

33

先ほどの等速直線運動の τ の前の係数は $l_s^2 \times$ (運動量) に相当するものですが、この運動量の二乗と α_n^μ の数について実は関係がつきます。その関係式がこのようなものです。

$$m^2(= p_\mu p_\nu \eta^{\mu\nu}) = \frac{1}{l_s^2}\left(-1 + \sum_{n>0} nN_n\right) \tag{16}$$

$p_\mu p_\nu$ を $\eta^{\mu\nu}$ と呼ばれる flat な metric で contract した粒子の不変質量ですね。その不変質量がちょうど $\frac{1}{l_s^2} \times (-1 +$ ある整数) である。この整数は summation になりますが、nN_n になっていて、N_n は節が n の振動がいくつ乗っているか。量子化されているので、これを一個二個と数えるんですけれども、いくつ乗っているかということです。これが弦の振動からくる、それを素粒子だと思ったときの質量公式です。

この公式の右側の整数がどのような整数を取り得るかということを見ていきますと、N_n が 0 だった場合、この項はマイナスになりますから、質量の二乗はマイナスということでタキオン、超光速通信になります。超光速通信は禁止されておりますので、これはあってはならないとなります。なので今のところこれは無視する事にします。しかし実はタキオンというのはあってはならないというわけではなくて、あってもいいんです。その事について弦の場の理論というのは非常に大きな分野がありまして、そこで面白い発展があります [11]。この講義ではそれは述べないことにします。取り敢えずこのタキオンは無視したとします。

次に N_1 が 1 で他がゼロである、そういう場合を考えるとこの公式に放り込むと質量の二乗は 0、すなわち無質量状態（massless state）になります。この massless state は N_1 が 1 ですから α_1^μ で指定されるものですけれども、μ の振動方向として我々は時空のあらゆる方向を選ぶ事ができますね。その自由度をみると、ちょうど状態 μ でラベルされている無質量状態なので、我々のよく知っているゲージ場 $A_\mu(x)$ の粒子と非常によ

く似ているように見えます。これはよく似ていると言っているだけで、本当はこうではないかもしれません。自由度はとても似ているけど、しかも massless だと似ているけど違うかもしれない。本当はどうやったら分かるかというと、このゲージ場の粒子の散乱振幅を考えて、こういうふうに特定される弦の状態の散乱振幅が計算できたとして、その散乱振幅が実際の電磁気学から計算できる散乱振幅だと思うと、それらが一緒であればゲージ場の粒子だと identify できる訳ですね。ここではこれはやりません。弦理論の教科書をみると始めにそれが詳しく書いてあります。それらは全部 consistent になるように係数が決まっていたりするんですけども、それはここでは述べません。覚えていて欲しいのは、振動の一部としてゲージ場の粒子の自由度が出てくるということです。

・閉弦の場合. 無質量状態は $\underbrace{N_1^{(L)}}_{\alpha_1^\mu} = \underbrace{N_1^{(R)}}_{\tilde{\alpha}_1^\nu} = 1$, 他ゼロ

状態が (μ,ν) 〃 ＝ 重力場 $g_{\mu\nu}(x)$ の粒子.

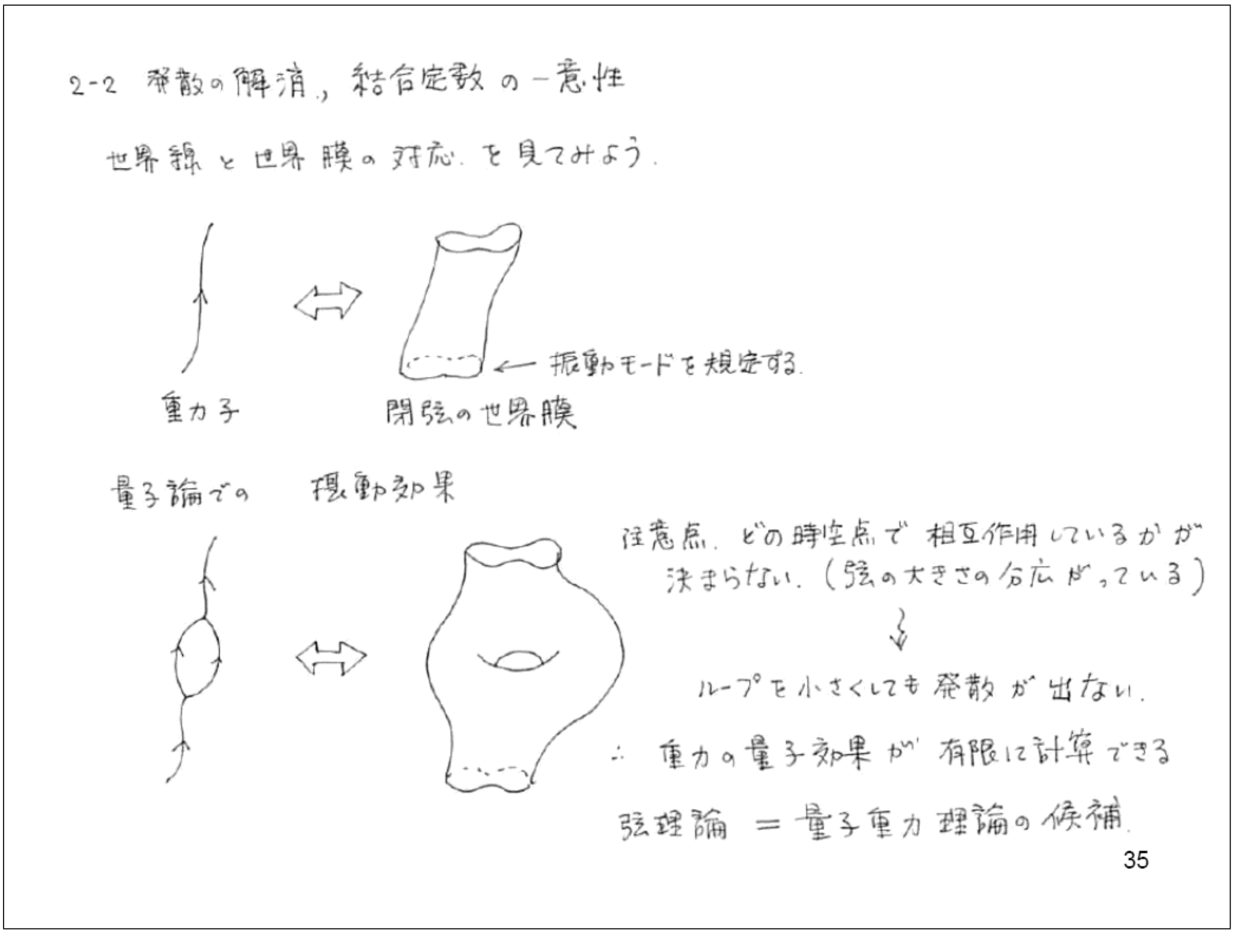
・質量のある状態は更に無限種類.

⇨ 電磁場, 重力場 が統一される

更に 質量の重い場が無限個.

(他の素粒子がどのように出るかは後述)

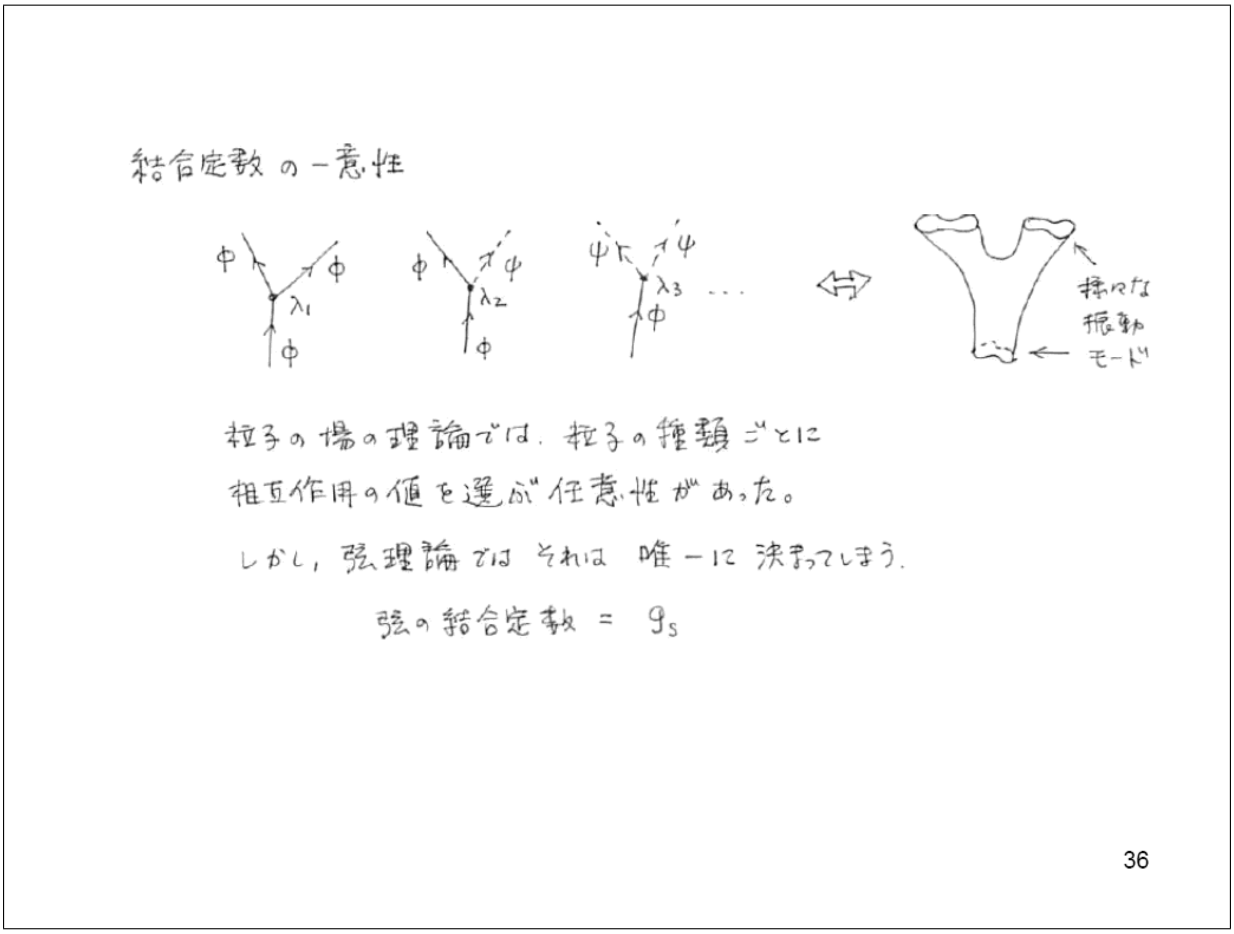
次に閉じた弦の場合を考えてみましょう。無質量状態は質量公式から、N_1^L と N_1^R が 1 で、他は 0。この L と R というのはさっきのこの $\tau+\sigma$ と $\tau-\sigma$ のコンビネーションを言っている訳です。そのように展開できますから、これは左と右、左巻き、右巻きというんですが、振動がループになった弦の上を左巻きに回っているか、右巻きに回っているか、その 2 つの種類です。その 2 つの種類についてそれぞれの振動が定義できますので、無質量状態は α_1^μ の left mover、α_1^μ の right mover、そのそれぞれが 1 で他が 0 だと。これが無質量状態になります。するとさっきと全く同じ事ですが、状態が (μ,ν) でラベルされているので、ちょうど重力場 $g_{\mu\nu}$ の粒子と同じ自由度を持っている事がわかります。質量がある状態はさらに無限種類あります。今は massless の状態しか見てませんが、その他に質量がある状態が無限個、たくさんです。これが弦の振動から得られるいわゆるスペクトルというやつです。このスペクトルは粒子の、例えば 1 粒子状態の粒子のスペクトルではなくて、どんな粒子が出てくるかという意味でのスペクトルです。それぞれの粒子は、例えば止まるので、止まっているというかこう massless だと止まらないですけれども、不変質量 m を持っているとして、m がどんなふうにばらけているかというのを見ているのがスペクトル。特に massless の状態としてゲージ場と重力場が開いた弦と閉じた弦からできると、ここからわかることは電磁場と重力場が統一されるということです。我々は一つの弦から出発しました。そしてその弦にある boundary condition を課しました。するとそこから自動的に電磁場と重力場がでてきます。というわけです。これは画期的な事です。重力場がこのようにして出てくるということは米谷さんによって発見されました。それまでは弦はむしろ hadron の effective な模型だと考えられてきました。それよりもっと前ですけれども。そこでこのような考察から重力場も含まれているんだよということが分かると、弦理論はそこから重力理論としての歩みを始めた訳です、歴史的には。ここで重要だったのは、素粒子の模型では全く別物だと思ってきたものが、一つの弦で表されているということです。



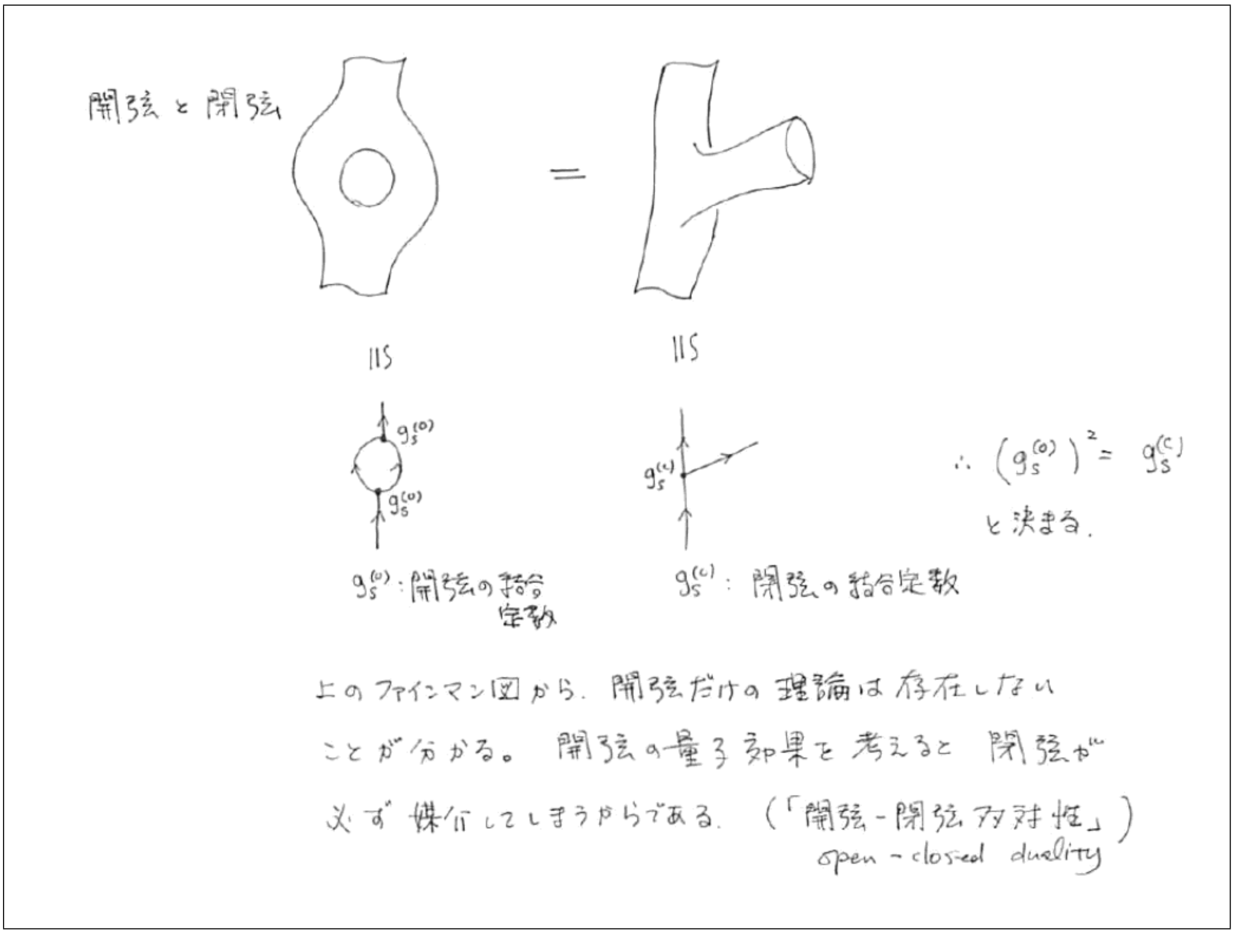
2.2 発散の解消、結合定数の一意性

次に発散の解消、そして結合定数の一意性についてその問題がどのように解決される可能性があるか、見てみましょう。world sheet とはどういうものだったかということを考えてみましょう。例えば一つの粒子が上の方向が時間だったとして、上図左のように伝搬していきます。この重力子に対応するものは閉じた弦です。上図右は振動モードが指定された輪っかが縦方向に伝搬していく様子で、その軌跡をみたのが世界膜、world sheet です。重力理論の量子論をやったときに摂動の繰り込みができないというのは何だったかという事を思い出してみましょう。これは先ほどの絵です (下図左)。これはここから出て重力の相互作用が二つに分かれてまた戻るという。これに対応する弦のバージョンを考えてみましょう。それはこの絵です (下図右)。閉じた弦が伝搬するのだけど、途中で二つに分かれてそしてまた一つになる。こんな絵を描きます。ここで注意点としては弦に格上げした時に、どの時空点で相互作用しているかが決まらない。なぜならば弦のその大きさの分広がっているから 。さっき発散が出るから困るなぁと言っていたのは、ここのところでループがものすごい小さくなって 2 つのバーテックスの点どうしがものすごく近づいて、もしくはここの点とここの点が近づいて、そうゆう問題だったわけです。しかし弦理論に格上げすると、それはどこで相互作用しているか分からなくなりますね。なのでそもそもこの弦理論には発散が出ないだろうということが言える訳です。繰り込みをする必要がない、すなわち重力の量子効果は有限に計算できるだろうと考えられます。実際に超弦理論では重力の量子効果は有限に計算できます。それは示されています。この事から弦理論は量子重力理論の候補である。重力を

どうやって consistent に量子化すればよいかということについては答えは出ていませんが、少なくとも弦理論はある種のループ振幅については有限に計算できる事が示されています。これはループの数をもの凄く多くしていったらどうなるかということは、ちょっと別の問題。一般的にはこんな考え方がおそらく発散が出ないから期待されてます。が、弦理論ですべてのループ振幅で発散が出ない事を示した人は今のところいません。ただいくつかの種類の振幅に関しては、例えば外線の場はこれとこれにしましょう、中のところはこうゆうループのものを考えましょう、という場合にちょうどループの数を実は無限にしても発散しませんよ、ということは示されてます [12, 13]。すべてのループ振幅については知られてませんが、一部については知られている。そもそも 1-loop の部分がちゃんと計算できるという事が非常に重要だと思います。これが発散の解消です。繰り込みをするのでなくて、そもそも元々発散の無い理論を考えましょう、というわけです。



次に結合定数の一意性についてみてみましょう。左側は先ほどと同様に、粒子の場の理論の Feynman 図です。ϕ という場と ψ という場があったとして、ϕ は実線、ψ は点線で書いたとしましょう。そうすると三点相互作用があるとすれば、図のようにたくさんあります。そのそれぞれについて $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ というように結合定数を assign することができる。そのそれぞれについて実験結果と合うように決めていくわけです。これは任意定数の問題でしたね。一方それを弦理論に格上げすると、これらの ϕ とか ψ とかの粒子が単に一つの弦の振動モードにしか対応しないので、これらの Feynman 図が一つの図に纏め上げられてしまうわけです。そうすると coupling も一つしか無い事は明らかですね。元々たくさん与えられる必要があった coupling は一つになる。この結合定数を g_s と書きます。g_s というか g_{string}。g_s は実は弦理論のなかで自発的に決まってきてしまうであろう、と期待されています。つまり弦理論には coupling constant は手で与える物ではなく、実は勝手に決まってきてしまうんじゃないか、という期待があります。これを期待する根拠はいろいろあるわけなんですけれども、その根拠については今回述べません。ただ弦理論には実はパラメータが無くて、その唯一のパラメータでさえ 弦理論の枠組みで決まってきてしまうであろう、という期待があります。



始めに、２つの boundary condition があると言いました。開いた弦と閉じた弦、それは２つあってもいいんでしょうか？２つじゃなくて１つの方がいいじゃないかと思われるかもしれません。閉弦と開弦についての考え方、関係を見てみましょう。左に書きましたのは、これは開いた弦が二つに分かれてまた一つになるという経路です。この真ん中に穴が開いた所をこう、ぐっと引き延ばしてですね、右側に伸びるようにしたとします。すると右の絵のようになりますね。つまり任意の Feynman 図の deformation を考えてもいいように、弦理論の Feynman 図を書いたら、それをグニャグニャ曲げてみてもいいはずですね。ある parameter region では左の絵になってもいいし、ある parameter region では右の絵になっている。この右の絵は開いた弦から閉じた弦が放出されているという絵です。すなわち左の絵と右の絵が対応しているわけで、左側があれば右側がないといけない。それぞれの coupling constant を読み取る為に、粒子の Feynman 図に落としてみます。そうすると左側はまず開いた弦が二つあって、そして一つの開いた弦に戻る。これを $g_s^{(o)}$ と書きます。o というのは open string のことです。一方右側では、$g_s^{(c)}$ という coupling constant がここにあって、その coupling を経由すると閉じた弦が一個放出される。これを $g_s^{(c)}$、c は closed string、と書きます。左側と右側が coupling constant の関係で関係していないといけないので、

$$(g_s^{(o)})^2 = g_s^{(c)} \tag{17}$$

でないといけない、ということが決まります。すなわち coupling constant をはじめは開弦と閉弦と二つ用意しないといけないと思ってましたが、実は一つでいいわけです。さらにもう一つ重要なところはこの Feynman 図をみると、開いた弦だけの理論は存在しない事がわかります。すなわちどんな開いた弦で話をすまそうとお

もっても、この開いた弦のループ図をちょっと変形するとこういったふうに閉じた弦が出てきてしまうので、閉じた弦を導入しておかないと consistent にはならないだろうな、ということが分かります。このことを開弦と閉弦の双対性 (duality) といいます。開いた弦がループを出している事は実は閉じた弦が tree diagram でくっついていることと同じである、ということです。面白い事は元々開いた弦はゲージ場を出していました。で、閉じた弦は重力場を出していました。ゲージ場のみの理論は我々は consistent だと思っています、場の量子論では。しかし超弦理論に行くと必ずそれは重力を含んでないといけないということがわかるんです。なぜ我々の世界に重力があるか？それについてもこの超弦理論は答えるかもしれないのです。はい、以上の事で始めに載っていた問題の様々な部分が解決されそうになっている事がお分かりでしょうか？

（質問） すいません、ちょっと戻るんですけど。任意定数がまとめられて、そのまとめられたものが理論の中から出てくるみたいな話がありましたけど、それがどうやって出てくるのかということが詳しく言われなかったんですが、難しい話になるから言わなかったのでしょうか？

（答） はい、その通りです。ここまででお話ししたかった事は結合定数を統一的に理解できる枠組みがあるというだけで、そっから先ほどの様々な任意定数が出てくるか、どうしてそういう種類の任意定数があるのか、というのはまだ分かっていない問題です。そこが重要なポイントです。弦理論は可能性ばかり言っているけど、本当はなんの数字も出していないんじゃないか？というのは非常によく聞かれる批判で、それはその通りです。このようにして標準模型が構築できると言った時に、じゃああなたは先ほどの electron の coupling, 湯川 coupling と top quark の coupling、それぞれ出せるんですか？それは分かっていないと思います。はい。ただ弦理論の枠組みでそういうような物が表されるようなものが持ってこられたとしますね、そうすると元々一つの coupling constant から出発しているので、標準模型のラグランジアンを書く以上の constraint がちょっと入ってくるわけです。その入ってくるところを狙うという研究はたくさんあります。すなわちある種の coupling が関係してくる訳ですね。そして我々が観測していない粒子の存在が予言されます。そういうものを実験で観測して弦理論の模型が合っているかどうかということを確認する事ができるわけです。

（質問） 前のスライドなんですけど、その一番上のイコールをもう一度説明してほしいなと。

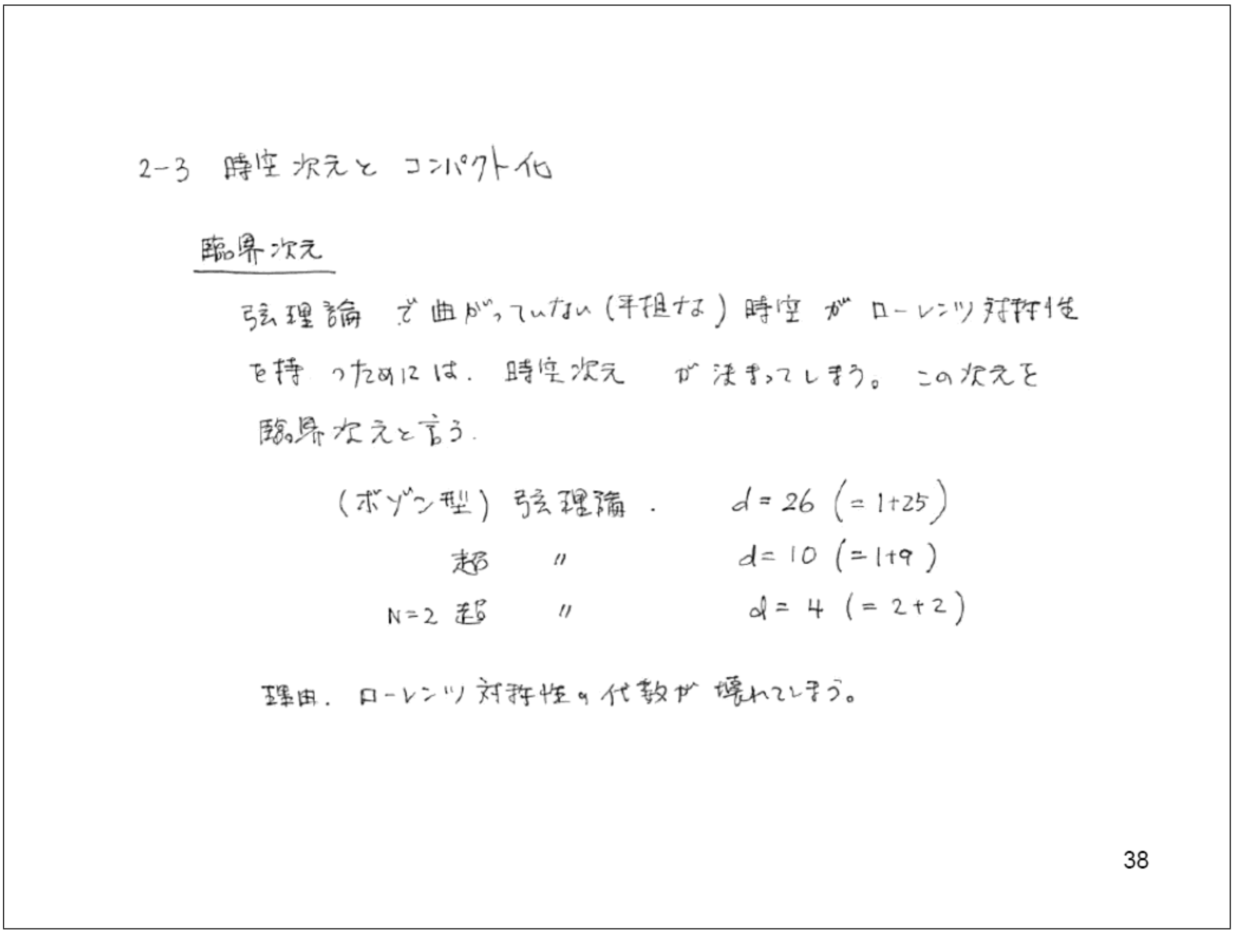
（答） はい、このイコールはこれとこれが本当に等しいと言っているイコールではなくて、このような開いた弦が loop をなしている絵があったとすると、ここの部分をぐっと引っ張れば右の絵になりますねという、それだけです。これで説明になったかな？なりました？はい。本来はもうちょっと正確に言うことができるんですけれども。あとでもし個人的に聞きたかったら聞いてください。実はこの振幅とこの振幅が同じものであることが示すことができます。ここではぐっと引っ張ったので、もともとそんなふうに引っ張って大丈夫なんだろうか？という疑問がわきますよね。右側の方は確かに外線になっているけれども、左側は内線である。この外線の momentum はどうなっているんだろうか？そんな疑問がわきますよね。それはおっしゃる通りで、左側と右側がイコールであるという意味をいうときに、この Feynman 図がイコールであるということではなくて、もうちょっと違う絵を描かないといけません。ここで言いたかった事は左側の絵があれば、それを deform していくと右側の絵になるので、左側の振幅を考える時に右側の振幅のようなものも一緒に考えておかないと、同じ class の worldsheet の形について足し上げができないということになります。Feynman 図を計算する時にその Feynman 図で描かれたもの全ての経路を足し上げますよね。足し上げる時は loop の大きさがどうであれ、もしくは言い換えると loop の momentum がどうであるかについて足し上げますよね。これも同じ事でこの worldsheet の形について足し上げないといけない。足し上げる時に真ん中の穴を引っ張った部分も足し上げないといけない。その引っ張った部分は実は閉弦の放出と見ることができる、ということです。

（質問） それは二つが一緒だったわけですが、足し上げる時には一つになるということですか？

（答） 正確には両方足し上げないといけないということです。いいですか？これ平面でそうなっている時はそんな理解ができて、左側も考えないといけないし、真ん中がのびている時は右側を足さないといけないですね。一個穴があいている物を全部足し上げなさいといったら、左側も右側も入るわけです。そういう意味で両方足さないといけない訳です。そうゆうことです。足さないといけない。他に質問はありますか？どないです？いい？

（質問） 先ほど QCD ストリングというものが出てきましたけれど、QCD ストリングの loop をやるとしたらこんなものが必要なんですか？

（答） はい、それは本当にちゃんとやろうと思ったら必要です。ただ QCD ストリングが生まれた頃の理論いうはこんな loop をする以前の話で、例えば QCD ストリングが振動していると思って様々なハドロンの質量が再現できるか、そして QCD ストリングが途中で切れたとすると、切れたところにハドロンの相互作用は consistent に理解できるだろうか？そういう場合分けみたいな話でした。ここではもうちょっと正確な話で、こういう loop 振幅を具体的に計算してやろうとするとですね、loop 振幅を計算する段階になればやっぱりこれは必要な訳ですね。すなわち QCD ストリングをちゃんと量子化すればそれはこういうものが入ってこないといけないことが期待されます。はい。この話は最後のところのゲージ重力対応という所でお話しします。



2.3 時空次元とコンパクト化

臨界次元

次に時空次元とコンパクト化という話をしましょう。これまで超弦理論のいいところばかり説明してきましたが、先ほど質問があったように実はそれで全部説明できる訳ではない。様々な他の種類の粒子ももっとあります。そんな粒子どうしてくれるんだ、それについての質問があります。それについて述べましょう。超弦理論のものすごい大事な性質の一つとして、臨界次元というものがあります。critical dimension。臨界次元とは何か？弦理論で曲がってない、すなわち平坦な時空が Lorentz 対称性を持つためには、時空次元、時空の方向の数が決まってしまう。この次元を臨界次元と言います。通常の粒子の場の理論を考えている場合は、次元という物は Lagrangian を書く時に手で決めるものです。例えば次元は 3 にしよう、もしくは 2 にしよう、そうして Lagrangian を書きますね。Lagrangian の前の積分のところに次元が入る訳です。そしてそこから摂動論をするなり、古典的な場の方程式を解くなり、様々な粒子性を含めて応用がある訳です。ところが弦理論では、例えばさっきのゲージ場と重力場が出てきましたけれども、その Lagrangian を書きなさい、弦理論から書きなさいと言われたら、その次元が決まってしまうという、著しい性質があります。この性質は通常の場の理論では出てこない物なので、例えば我々のこの宇宙が何故 $3+1$ 次元になっているか？そういう事に対しても答える可能性が弦理論にはあるわけです。可能性があるという話ですよ。本当にこんなことができるかはもちろんこれからの研究次第です。実際この答えはまだ分かっていませんが、その可能性があると

いうフレームワークであるということです。臨界次元はどんな値をしているかというと、今まで話してきたボゾン型の、すなわち X^μ という bosonic な場から出てくる弦理論では、その臨界次元は 26 です。26 とは $1+25$、1 が時間で 25 は空間。その 26 次元でないとボゾン型の弦理論は consistent ではありません。超弦理論を考えると、超弦理論というのは先ほどの X^μ に加えてフェルミオン ψ^μ という物を導入して、その二つで Lagrangian を書くという、その場合は critical dimension は 10 になります。空間が 9 次元。フェルミオンを 2 つ導入して、$N=2$ の超弦理論というものを考えると、critical dimension は 4 になります。4 というのは我々の時空次元です。あぁそれはすばらしい！ $N=2$ の超弦理論を考えておけば我々の次元とぴったりではないか！そう見えますね、でもそうは問屋が卸さない。この $d=4$ というのは空間と時間に分けますと、$2+2$ ということが分かります。これではダメですね。我々の時空は $1+3$ です。ですので残念ながら、これらの考察から我々の時空次元にはぴったりの物はでてこないということが分かります。この解決方法については次に述べますが、その前にどうしてこのように臨界次元が決まってしまうのか、について述べていきましょう。

$$M^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} - \frac{i}{2}\left(\epsilon^{\rho\sigma}\ \tilde{M}_{\rho\sigma}\right)^{\mu}{}_{\nu}$$

$\tilde{M}_{\rho\sigma} = -\tilde{M}_{\sigma\rho}$ は 6個の 4×4 行列で. $(\tilde{M}_{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu} = i(\delta^{\mu}_{\rho}\eta_{\sigma\nu} - \delta^{\mu}_{\sigma}\eta_{\rho\nu})$

この時 $[\tilde{M}_{\mu\nu}, \tilde{M}_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho}\tilde{M}_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\rho}\tilde{M}_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\tilde{M}_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma}\tilde{M}_{\mu\rho})$.

これが代数である。演算子としては $\tilde{M} \sim x\frac{\partial}{\partial x}$ のようなものである.

これを量子化すると、演算子順序から、定数部が出てしまう。

それをキャンセルするために x の個数が決まってしまう.

弦理論の歴史.

19 60年代に、ハドロンの理論として弦理論は出発したが.

1970年代にこの臨界次元が発見され，非現実的な理論として

捨てられてしまった。

通常の粒子の場の理論では，時空次元を決めることはできないので.

弦理論はその意味で重要である.

39

その理由は Lorentz 対称性の代数が壊れてしまうからです。ちょっとごちゃごちゃ書いてしまったんですけども、$M^{\mu}{}_{\nu}$ というのは Lorentz 変換の回転演算子で、$\tilde{M}_{\rho\sigma}$ というのが generator です。$M^{\mu}{}_{\nu}$ は、generator を exp の肩に乗せた形で書いたものを展開したやつです。ここで、Lorentz 対称性の generator $\tilde{M}_{\mu\nu}$ というものは、μ, ν という時空の足を持ってます。$\epsilon^{\rho\sigma}$ は Lorentz 変換のパラメータです。$\tilde{M}_{\mu\nu}$ は反対称行列なので例えば 4 次元の時空だと 6 個の 4×4 の行列で与えられる。Lorentz の generator の代数はこんなんです。

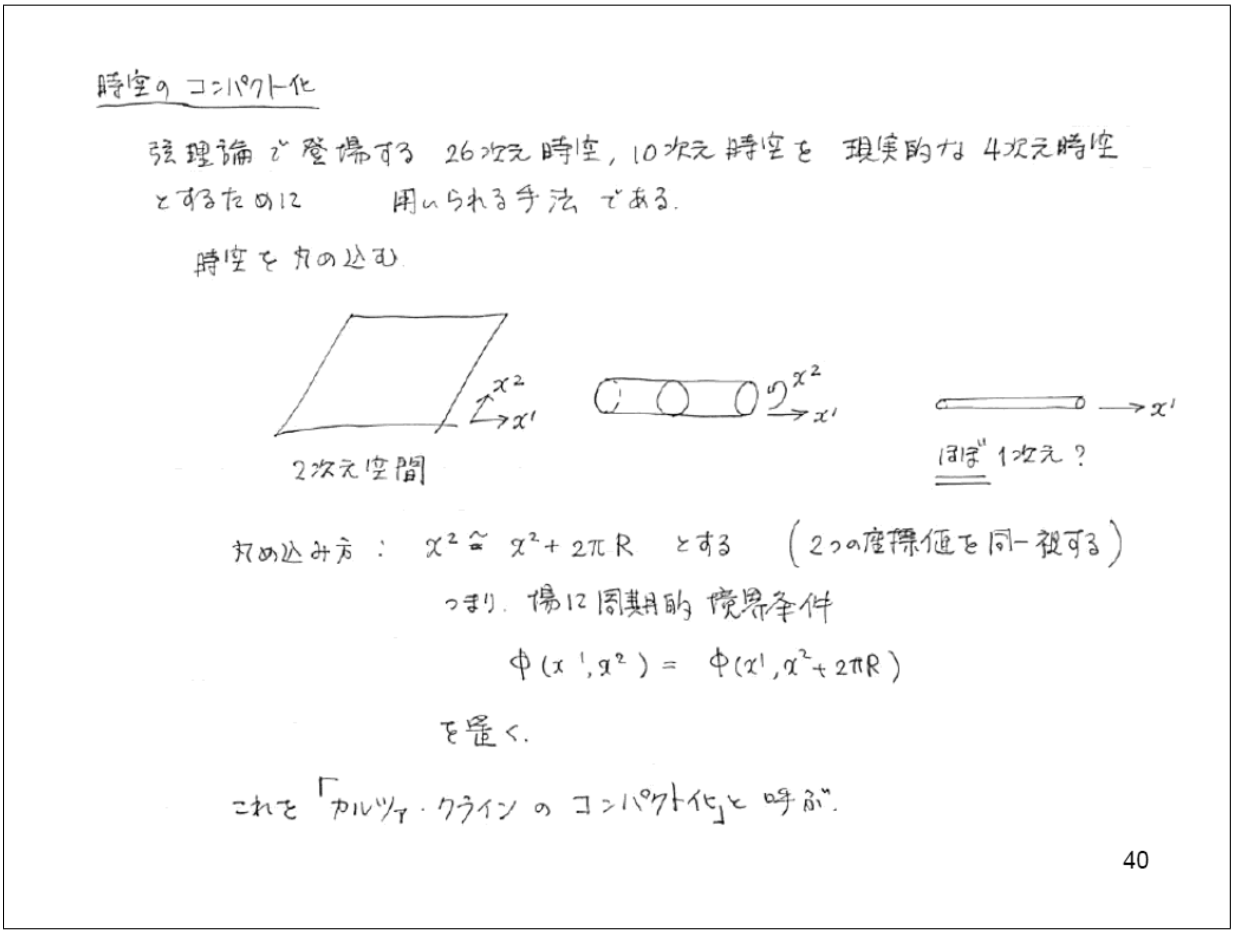
$$[\tilde{M}_{\mu\nu}, \tilde{M}_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho}\tilde{M}_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\rho}\tilde{M}_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\tilde{M}_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma}\tilde{M}_{\mu\rho}) \tag{18}$$

$\tilde{M}^{\mu}_{\nu}$ と $\tilde{M}^{\rho}_{\sigma}$ の交換関係が $\tilde{M}$ でかかれています。これが成り立っている時に Lorentz 対称性があるということです。古典的にはいつでも Lorentz 対称性がありますね。先ほど X^{μ} で書かれていたもの、μ が Lorentz 不変的に組まれていましたので、Lorentz 対称性があります。ところが量子化すると $\tilde{M}$ はもちろん x でこう書かれるわけですね。

$$\tilde{M} \sim x\frac{\partial}{\partial x} \tag{19}$$

これを代入すると古典的には代数が満たされていても、量子的に、つまり X が α^{μ}_{n} の展開で書かれてしまっても、その α^{μ}_{n} の交換関係を使って本当に代数が示せるかというと、大抵の場合おつりがでるわけです、定数のおつりが。おつりが出てしまったら Lorentz 対称性はないということになります。そのおつりが消える条件が課されている。おつりのことを anomaly と言います。Lorentz 対称性の anomaly が消えていないと、Lorentz 対称性が量子論的に保存しているとは言えないわけですね。その条件が critical dimension の条件で

す。なんでこれが critical dimension と関係しているかというと、この条件式にでてくる唯一の parameter みたいなものは $M_{\mu\nu}$ が 0 からどこまで走っているか、それだけですね。それについてある種足した物がこの端っこに出てくるわけです。その端っこに出てくるものが消えなさいという条件を書くと X^μ という場の数が決まります。すなわち次元が決まります。そういうふうにして超弦理論では時空次元が決まってしまう。だいたい感じは掴めましたかね。



時空のコンパクト化

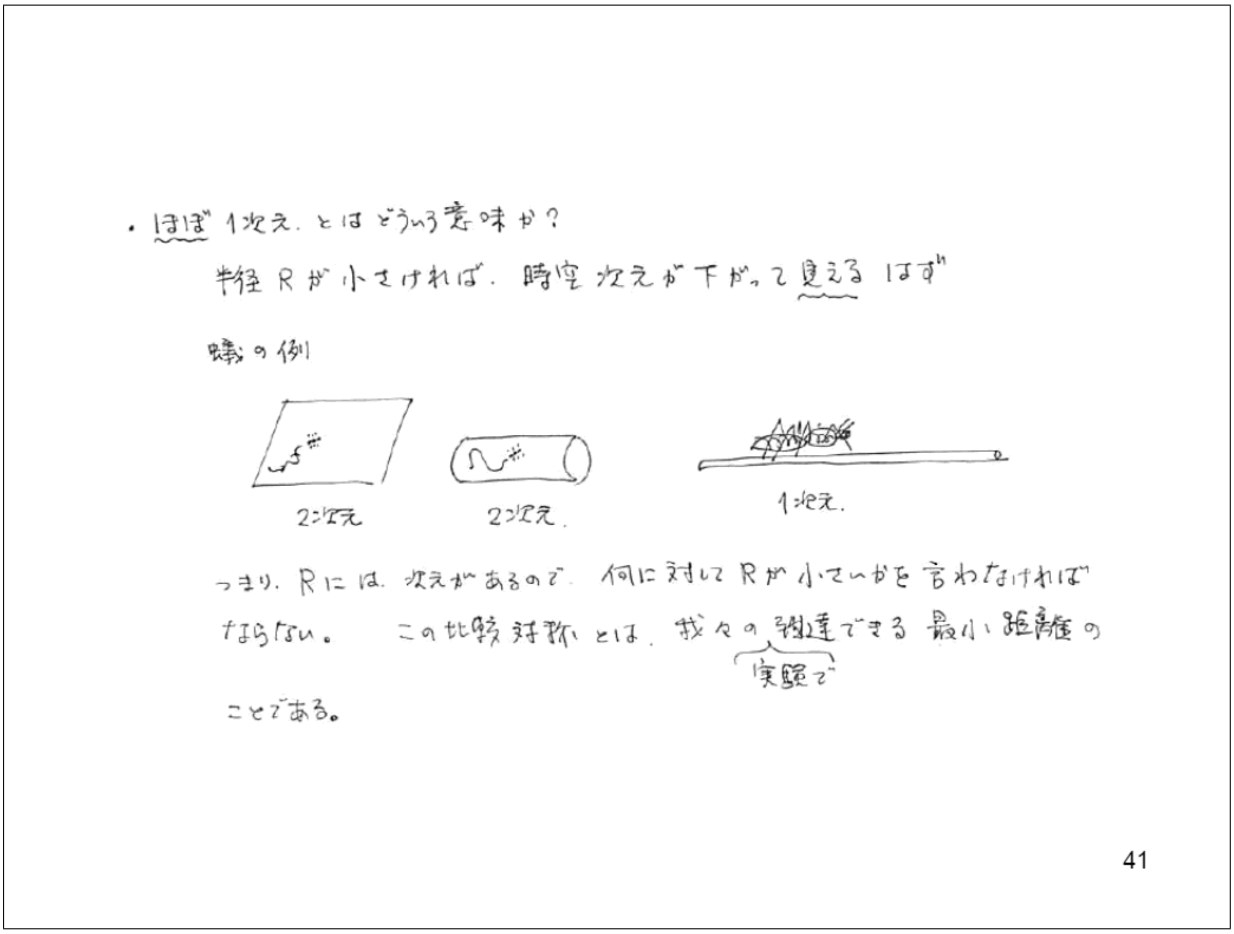
それでは例えば超弦理論を考えると、10 次元時空になってしまう。ボゾン型弦理論だけ考えると 26 次元時空になってしまう。我々の住む 4 次元時空に直すには、どうすればよいか？それをちょっと考えてみましょう。弦理論に登場する 10 次元、26 次元時空を 4 次元にするために用いられる手法はコンパクト化という手法です。コンパクト化というのは時空を丸め込むという手作業です。簡単のため図のように 2 次元空間を用意してみました。x^1, x^2 で張られます。この x^2 の方向について丸めたとします。この丸まった半径がすごく小さくなったとしましょう。そうするとほとんどこれは 1 次元になってしまうんです。はじめ 2 次元だったものが 1 次元になってしまう。こんなふうにすれば始め 10 次元だったものを 6 次元丸め込んでしまえば 4 次元になりますね。これが弦理論で使われている手法です。超弦理論の様々なものを計算して、それが標準模型のものと合うか合わないかをチェックするために、そもそも次元が合わないと困るわけです。ですので、このコンパクト化というのを手でやります。どうしてコンパクト化が起こるのか、コンパクト化のメカニズムは何か？については現在のところ分かっていません。ですのでこれは完全に手作業です。すなわちこれはこんなふうにやってみましょうという、やってみたらどうなるかやってみてから考えましょう、という程度の物です。もう少し具体的に丸め込み方を見ますと、粒子の種類とこのコンパクト化がどう関係しているのかがわかりますのでちょっと見ていきましょう。丸め込み方は明らかで、この円周に丸め込む方法だと x^2 と $x^2 + 2\pi R$ というものを同一視しなさい、つまり x^2 方向については, 勝手に場に周期境界条件を課しなさいと要請したとします。

例えばスカラー場 ϕ という物がこの 2 次元空間に乗っていたとすると x^1 と x^2 の関数ですが、

$$\phi(x^1, x^2) = \phi(x^1, x^2 + 2\pi R) \tag{20}$$

であることを要請します、これを Kaluza-Klein のコンパクト化と呼びます。よく KK と言いますが、KK というのは Kaluza-Klein の略です。

こんなこと勝手にやってきたんだけども、ほぼ 1 次元とはどういう意味ですか？はじめ 10 次元だったものが 4 次元になる、ほぼ 4 次元とはどういう意味ですか？例えばそれは 4.1 なのか、4.001 なのか？そのことについて答えてみましょう。



半径 R が小さければ時空次元が下がって見えるはずです。「見える」というのはどんな意味なのかを考えてみましょう。蟻がこの 2 次元の面を歩いていたとします。それを丸め込んだら、もの凄く丸め込んだら、この蟻の大きさよりも小さくなるのです。そしたらこの蟻は「自分はこの 1 次元の棒の上を歩いているんだな」と思うわけです。ところがその半径が大きいとまだこの蟻はまだ 2 次元だと思っているわけです。この蟻の絵をわざわざ出した意味は、R には元々次元があるので、何に対して R が何に対して小さいのか考えなければ物理ではそれは小さいとは言えないわけです。時空次元とか質量次元が無い場合には、例えばそれが 1 に対して非常に小さい、0.01 ならそれは小さいとは言えますが、今考えるのは長さの次元がありますが、この比較対象は我々が実験で到達できる最小距離の事です。現在までの実験でという意味ですよ。これから実験が進めば最小距離が小さくなっていきます。最小距離が小さくなれば、実はこの R が見えてくる可能性がある訳です。それを問題にしたいのです。このことをもう少し詳しく見るためにもうちょっと実験の方を考えて見ましょう。コンパクト化の場への影響を考えます。どういう事が見えれば実験的にこれはコンパクト化がされたと見えたと言えるのでしょうか。

・コンパクト化の場への影響を考える。

10次元時空上の $\underbrace{\text{場}}_{\text{無質量}}$ $\phi(x^\mu)$ $(\mu=0,1,\cdots,9)$ の運動方程式は

$$\left(-\partial_0^2+\partial_1^2+\partial_2^2+\cdots+\partial_9^2\right)\phi(x^\mu)=0$$

ここで、x^4 から x^9 をコンパクト化し、 $x^i \sim x^i+2\pi R_i$ $(i=4,\cdots,9)$

とすると、周期的境界条件からフーリエ展開できる:

$$\phi(x^\mu)=\sum_{\substack{s_4,\cdots,s_9>0\\ \in\mathbb{Z}}}\left[\phi_{s_4\cdots s_9}(x^0,x^1,x^2,x^3)\prod_{i=4}^{9}\cos\left(\frac{s_ix^i}{R_i}+c_i\right)\right]$$

定数位相.

超弦理論を考えたとして、その超弦理論は 10 次元の critical dimension ですから、10 次元時空上の無質量の場、これは本来はゲージ場で書くべきですが、簡単のためスカラー場 $\phi(x^\mu)$ だと思って書いてみましょう。この運動方程式は、次のようになっています。

$$\left(-\partial_0^2+\partial_1^2+\partial_2^2+\cdots+\partial_9^2\right)\phi(x^\mu)=0\ , \qquad (\mu=0,\cdots,9) \tag{21}$$

ここで 4 次元が残って、残りがコンパクト化されていると仮定しますと、x^4 から x^9 までコンパクト化されて、そのコンパクト化の条件は $x^i \sim x^i+2\pi R_i \ \ (i=4,\ldots,9)$。そういう条件になります。これはさっき言いましたようにこれは周期境界条件を置く事と一緒ですから、フーリエ展開できる訳です。

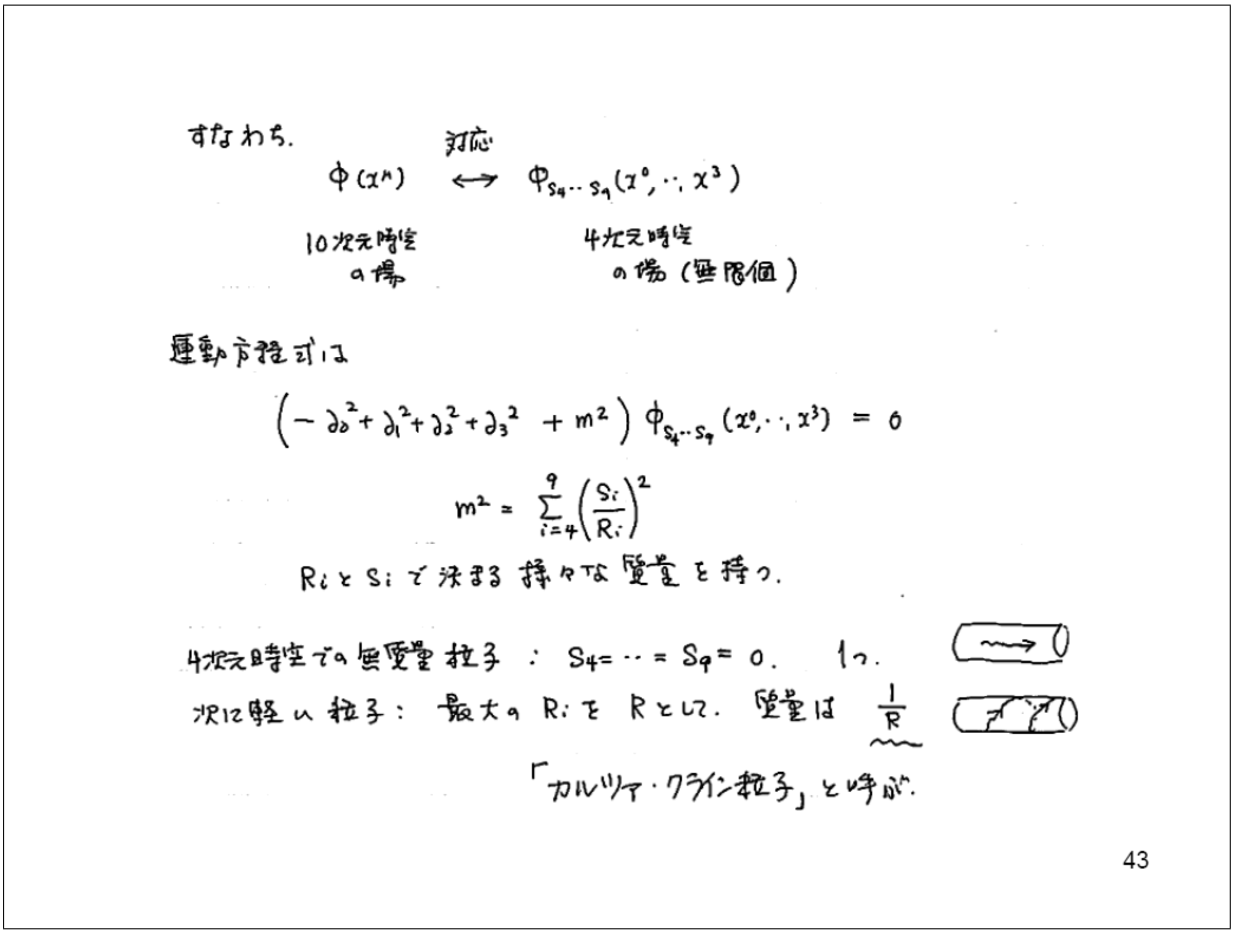
$$\phi(x^\mu)=\sum_{s_4,\ldots,s_9\in\mathbb{Z},s_4,\ldots,s_9\geq 0}\left[\phi_{s_4\cdots s_9}(x^0,x^1,x^2,x^3)\prod_{i=4}^{9}\cos\left(\frac{s_ix^i}{R_i}+c_i\right)\right] \tag{22}$$

$\phi(x^\mu)$ という場をこのように変数分離ができると仮定して、フーリエ展開する。フーリエ展開の基底はサイン、コサインの三角関数。$x^i \sim x^i+2\pi R_i$ という周期境界条件を満たすような三角関数はこんなものですね。

$$\cos\left(\frac{s_ix^i}{R_i}+c_i\right) \tag{23}$$

c_i は定数位相。三角関数の、これは節の数と一緒ですが、s_i という整数がつくわけですね。整数 s_i が $1,2,3,\ldots$ となっていくとサイン、コサインが早く振動していく。この係数 $\phi_{s_4\ldots s_9}$ は残りの $x^0,\ldots,x^3$ の関数で、変数分離しました。この係数場は整数 s_i のそれぞれの三角関数の前にそれぞれの関数がでるので、s_i でラベルされています。この s_i は例えば 0 以上の整数というふうにしましょう。こんなふうに展開したとしましょう。

これを元々の運動方程式に再代入していきます。すると運動方程式は、次のような形になります。



4 次元方向の微分はそのままですが、μ が 4 から 9 までの部分は定数になってしまいます。サイン、コサインにかかる分ですから、その定数は $\sum_{i=4}^{9}\frac{s_i}{R_i}$ になっています。つまりコンパクト化の半径とそれぞれの振動の s_i で決まる様々な質量を持つスカラー場が無限個出てくるわけです。ここで無限個と言っているのは、もともと係数場は s_4 から s_9 まででラベルされていましたから、もともとの 10 次元時空の場 $\phi(x^\mu)$ の場は無限個の 4 次元時空の場 $\phi_{s_4\ldots s_9}$ に分解されたということです。こういう対応がある訳です。4 次元時空の無限個の場を一つセットとして与えれば、その一つのセットが一個の 10 次元時空の場に対応するということになっているわけです。この質量スペクトルをもうちょっと正確に見ていきますと、4 次元時空での無質量粒子、massless particle はすべての s_i が 0 の場合です。1 個だけ。次に軽い粒子は、R_4 から R_9 まであるそれぞれの R_i の中で最大の物を R と書くと、その質量がちょうど $\frac{1}{R}$ のとき。これは漫画のような絵で描くと、右下図のような場合に対応します。無質量粒子はコンパクト化された方向の関数が定数関数になっていますので、そっち方向には依存性は全くありません。すなわちそっち方向の運動量は運んでいない訳です。コンパクト化された方向には巻き付かずまっすぐ進んでる。一方サイン、コサインの節が存在するという事なので、この Kaluza-Klein の粒子というのは図のように巻き付いた螺旋の方向に進んでいるようなそういう物です。質量は $\frac{1}{R}$ になっています。ここが重要なポイントです。

・我々の世界が4次元ではなく高次元のコンパクト化だったとする。

高次元が何故見えないのか？

……$\frac{1}{R}$ の質量を持つ粒子が居ないから、分からない。

どうやれば高次元を見ることが出来るのか？

…粒子加速器で、KK粒子を生成すればよい。

これらが生成されるためには、十分なエネルギーで衝突させる必要がある。

そのエネルギーの大きさは、今までの最大値 10^{12} eV よりも

大きくないといけない。これは、Rでは R ～ 10^{-19} [m] である。

参考：原子の大きさ： 10^{-10}[m] 東京－大阪

原子核 〃 10^{-15}[m] 人間

10^{-19}[m] 0.1 mm（毛髪?）

44

我々の世界が4次元じゃなく高次元のコンパクト化だったとします。高次元が何故見えないのか？先ほどの答えに対する問いは $\frac{1}{R}$ の質量を持つ粒子がいないから分からない。もし 居たらそれは高次元の粒子であるのが分かる訳です。つまり今例えば電子とか知っていますけども、それと全く同じ性質を持って $\frac{1}{R}$ だけ質量が離れているやつ、もしそういう物が見つかればですね、これは高次元からきている粒子ではないか、と考えられるわけです。どうしたらこういう高次元を見る事ができるのか？もちろん $\frac{1}{R}$ のエネルギーに到達できる粒子加速器で、その粒子を生成すればいいわけです。高次元があると仮定した時の絵が真ん中の絵ですが、質量が0のものを左側と右側で衝突させた。これが十分高いエネルギーを持っていれば、絵のようにKaluza-Klein粒子を生成することができるわけです。このエネルギーの大きさはもちろん今までの粒子加速器の最大値よりも大きく無いといけません。この大きさは例えば今LHCが動いたり止まったりですけれども、もうすぐ本格的に動くと言われています。その大きさはだいたい1[TeV]、Tera electron Voltとかですけれども、それを長さの次元で換算しますとだいたい $10^{-19}[m]$ くらいになります。これはもの凄い小さい大きさですね。ですけれどももしそのくらいのエネルギーに到達して人類未踏の領域に行けばKaluza-Klein粒子がもっと出てくるかもしれません。出てきたら初めて我々はこの時空が高次元でこのくらいの非常に小さい大きさに丸まっているようなものであるということが分かるわけです。これやってみないと分からない。こんな事をわざわざ考える理由はもちろん超弦理論が例えば10次元で矛盾がない、ということを知っている。そうしたら高次元が必然的にないといけないわけです。超弦理論がもし本当だったら、本当だったらというのはこのようなひもで満たされているんだったら、そうじゃないといけない。そしたらコンパクト化の半径がこれくらい大きくないと、つまり実験で見えるくらいじゃないと、超弦理論は検証できないという事になる訳です。今のところで質問は

ありますか？

(質問) スカラー場の場合に関しては余剰次元を入れてからみえる Kaluza-Klein 粒子の質量は $\frac{1}{R}$ でしたが、これは別の場合についても同じような $\frac{1}{R}$ になるんでしょうか？重力場についても。

(答) はい、$\frac{1}{R}$ になります。それはコレから重力場の場合を説明します。さっきの変数分離の形を仮定するとだいたいわかりますよね。もし波動方程式になっていれば、いつでもコンパクト化されている方向の座標 x に関して、二回微分がいつでもかかりますから波動方程式になりますね、そうするといつでも $\frac{1}{R^2}$ が波動方程式に出てきますね、そうするとだいたい $\frac{1}{R}$ になりますね。重力場だとどう変わるかというのを少し見てみまして、これでまた休憩にしたいと思います。

・コンパクト化と粒子の種類.

素粒子標準模型はたくさんの種類の素粒子を含んでいる.

この問題とコンパクト化との関係？

カルツァ・クラインのアイデア

10次元時空上の重力場 $g_{MN}(x)$　$M,N=0,1,\cdots,9$

→ 4次元時空の無質量場

重力場 $g_{\mu\nu}(x)$　$\mu,\nu=0,1,2,3$

ゲージ場 $g_{\mu i}(x)=A_\mu^{(i)}(x)$　$i=4,\cdots,9$

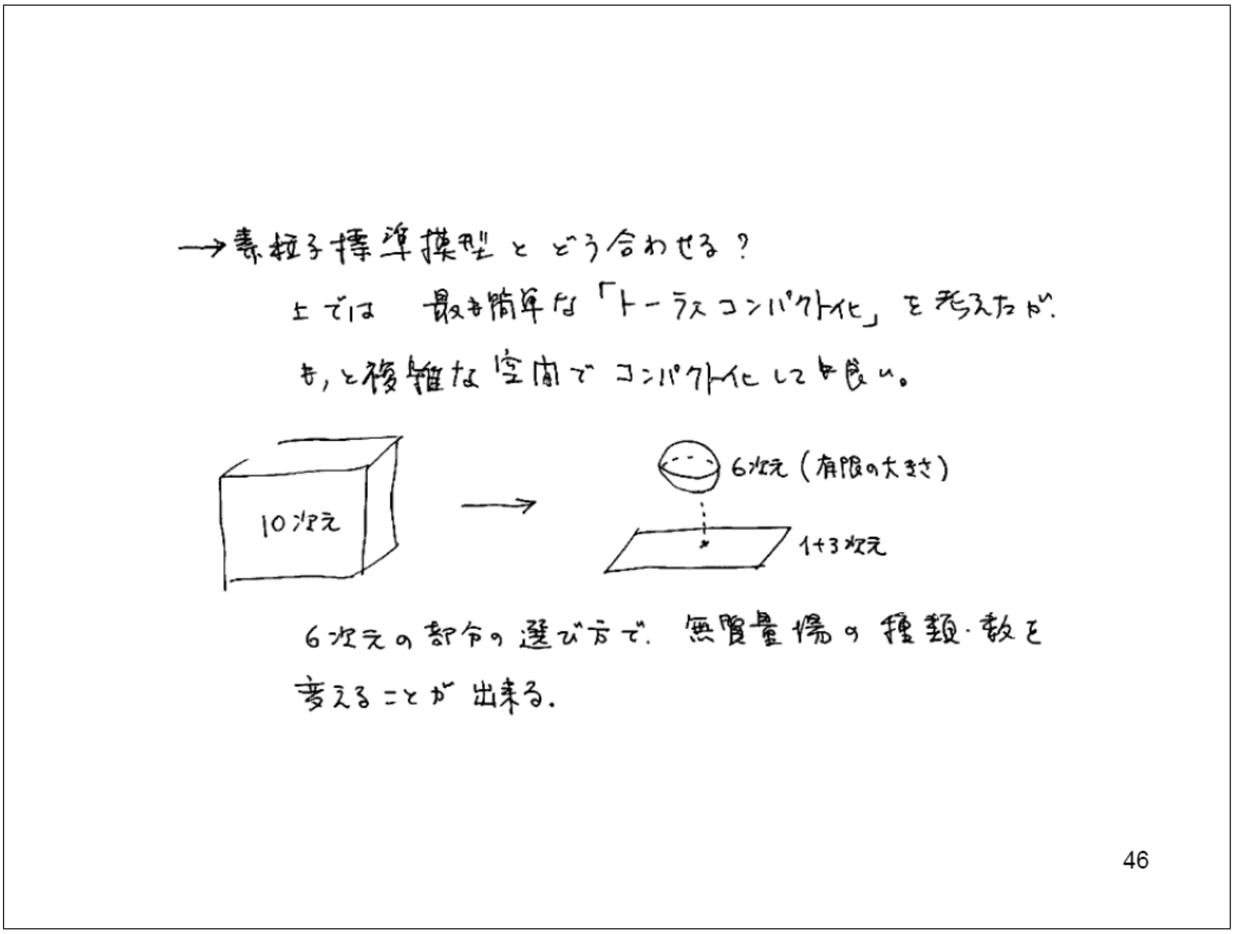
スカラー場 $g_{ij}(x)=\phi^{(i,j)}(x)$

[コンパクト化された方向の添字 i,j は.場のラベルに過ぎない.]

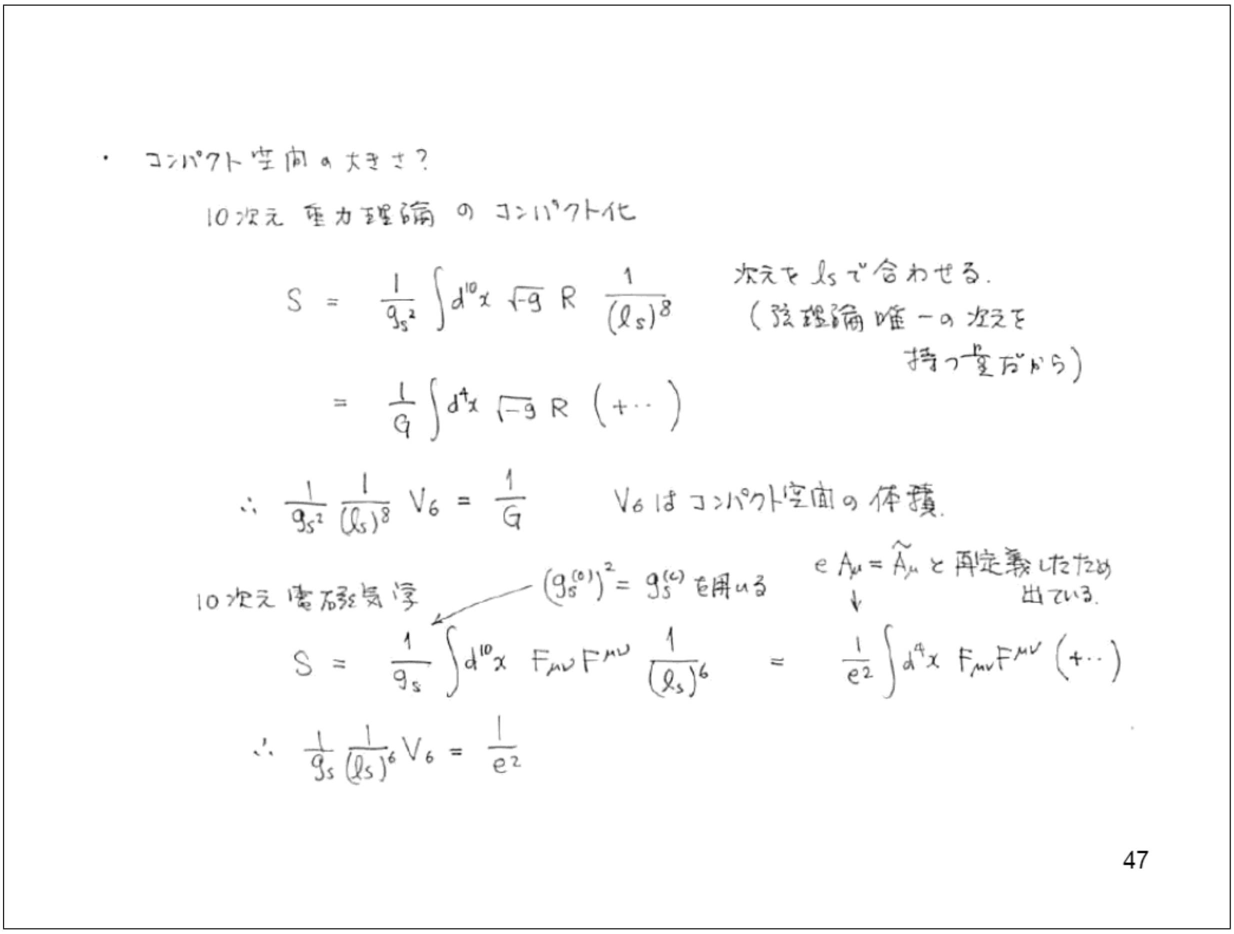
高次元で.重力場，ゲージ場，スカラー場が統一される.

(4次元では.上で書いた無質量場以外に.質量のある場も無限個ある)

素粒子標準模型には様々な種類の素粒子がある。この問題とコンパクト化の問題の関係はどうなっているか？という事を考えてみましょう。元々 Kaluza-Klein のアイディアというのは、実は先程の $\frac{1}{R}$ が出てきますよ、ということはちょっとおいといてですね、もう少し他のアイディアでした。そのアイディアは何かというと、いま超弦理論を考えているので、10 次元時空上の重力場を考えているとします。これは g_{MN} で $M,N=0,1,\dots,9$。これがコンパクト化されたとすると、4 次元時空の無質量場は実は重力場だけでなくて、他の種類の場が出てきます。もちろん質量がある場もでてきますが、ここでは質量が無い場だけを考えてみましょう。変数分離のときに余剰次元部分は定数であったと仮定しましょう。M,N が μ,ν の時 $g_{\mu\nu}$ は重力場になりますが、M,N が i,j の時、g_{ij} はこれはスカラー場に見える。この足が μ,i の時、$g_{\mu i}$ はゲージ場に見える事が言えます。これは何故かというと、コンパクト化された方向の添字 i,j は、これはもう時空の足ではなくなってしまうので場のラベルに過ぎない訳です。i,j は 4 から 9 までありますが、重力場は 1 個だけ。ところがゲージ場とスカラー場はいっぱい出てくるというわけです。重力場がいっぱい出てきたらちょっと困りますね。われわれの時空では重力場は 1 個しか無いと思っているわけです。勿論 bi-gravity とか 2 つ 3 つある場合もあります。ありますが、基本的には重力場が 1 個だと思っている。一方ゲージ場はたくさんあります。標準模型のゲージ場はたくさんありますね。スカラー場もたくさんあると思っている。これはまだ観測されていませんが Higgs 場、LHC で見つかると思っている Higgs 場。これも 1 つかもしれませんが、たくさんあるかもしれないです。そういうふうな状況があって、これは歓迎されるわけです。高次元を考えると 1 個の重力場を考えるだけで、ゲージ場、スカラー場、重力場が統一される、というわけです。これが重力にした場合の先程のとの違いです。$\frac{1}{R}$ の質量を持つ重力に似た性質を持った物が出てくれば、これは間違いなくこれは高次元ですね。これを Kaluza-Klein グラビトンと言っています。LHC で観測される可能性があるものです。



素粒子標準模型と組み合わせるとどうなるのであろうか？これまでの議論では最も簡単なトーラスコンパクト化を考えました。すなわち周期境界条件です。周期境界条件を考えなくてもいいです。10 次元の箱があったとして、これを 1 + 3 次元と 6 次元に分けなさい。この 6 次元が有限の大きさであれば、さきほどの議論は全部通用します。ただ周期的境界条件を置かなければ、サイン、コサインで展開しないので、他の基底で展開しないと行けませんね。これが球面であれば spherical harmonics で展開しないと行けないですね。どんな粒子がどんだけ出てくるのかというのが違ってくる訳です。6 次元部分の選び方で様々な粒子の場の種類や数を変更することができるのです。こういう風にして素粒子の標準模型を 10 次元の立場から考えるという研究分野が発達しているわけです。



最後にコンパクト空間の大きさを 10 次元の立場から見積もってみましょう。10 次元重力理論をコンパクト化したとします。10 次元理論のラグランジアンはこんなラグランジアンです。

$$S = \frac{1}{g_s^2}\int d^{10}x\sqrt{-g}R\frac{1}{(l_s)^8} \tag{24}$$

この次元を合わせる為に、$1/(l_s)^8$ というものを掛けておきます。$d^{10}x$ は長さの次元で 10、$\sqrt{-g}R$ は -2 ですから $1/(l_s)^8$ を掛けていないと作用が dimensionless になりません。なんで $1/(l_s)^8$ を掛けておくかというと、弦理論では次元を持つ唯一の量が l_s だからです。これを掛けておきましょう。コンパクト化したら 4 次元のよく知っている Einstein-Hilbert action になるはずです。

$$S = \frac{1}{G}\int d^4x\sqrt{-g}R\left(+\ldots\right) \tag{25}$$

前についているのは 4 次元の重力定数 G。この G はもともとのラグランジアンを単にコンパクト化しただけなので、このような関係式が付きます。

$$\frac{1}{g_s^2}\frac{1}{(l_s)^8}V_6 = \frac{1}{G} \tag{26}$$

V_6 はコンパクト化空間の体積。一方 10 次元の電磁気学を同様にコンパクト化して我々の電磁気学が出たとしましょう。その式がこれです。

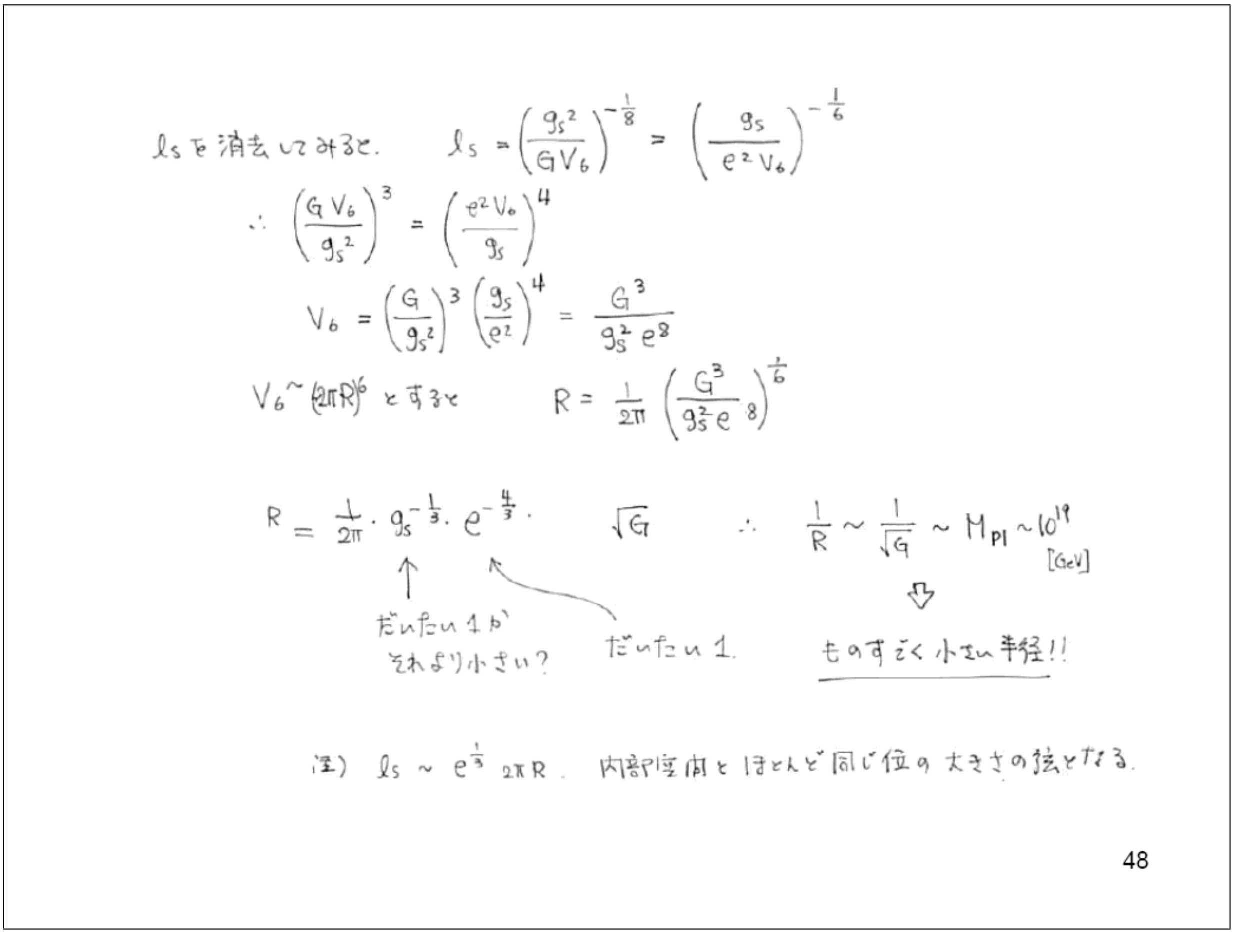
$$S = \frac{1}{g_s}\int d^{10}sF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\frac{1}{(l_s)^6} \tag{27}$$

ここも全く同じ計算をしていますが、今は次元が違いますね。前の方は実は $\frac{1}{g_s}$ になります。前は $\frac{1}{g_s^2}$ でしたが、ここは $\frac{1}{g_s}$。何故かというと完全に開いた弦から出てきますので、open string の coupling の 2 乗が closed string のものであることを使うと、この場合は前が $\frac{1}{g_s}$ になります。次に $F_{\mu\nu}$ が mass dimension が 2 だということを使うと、先程 $\frac{1}{l_s^8}$ だったものが $\frac{1}{l_s^6}$ になります。

こんなふうにラグランジアンを書きました。そしてこれがコンパクト化されているとして、4 次元の、我々がよく知っている電磁気学のラグランジアンになるとしましょう。そうすると coupling $\frac{1}{e^2}$ と元々のパラメータの関係が

$$\frac{1}{g_s}\frac{1}{l_s^6}V_6 = \frac{1}{e^2} \tag{28}$$

のようになります。以上の 2 つの関係式を使って l_s という分からない量を消去すると、V_6 の大きさがだいたい分かる訳ですね。それではやってみましょう。



l_s を消去しますと、

$$\left(\frac{GV_6}{g_s^2}\right)^3 = \left(\frac{e^2 V_6}{g_s}\right)^4 \tag{29}$$

が出ます。この式から V_6 を出すと、

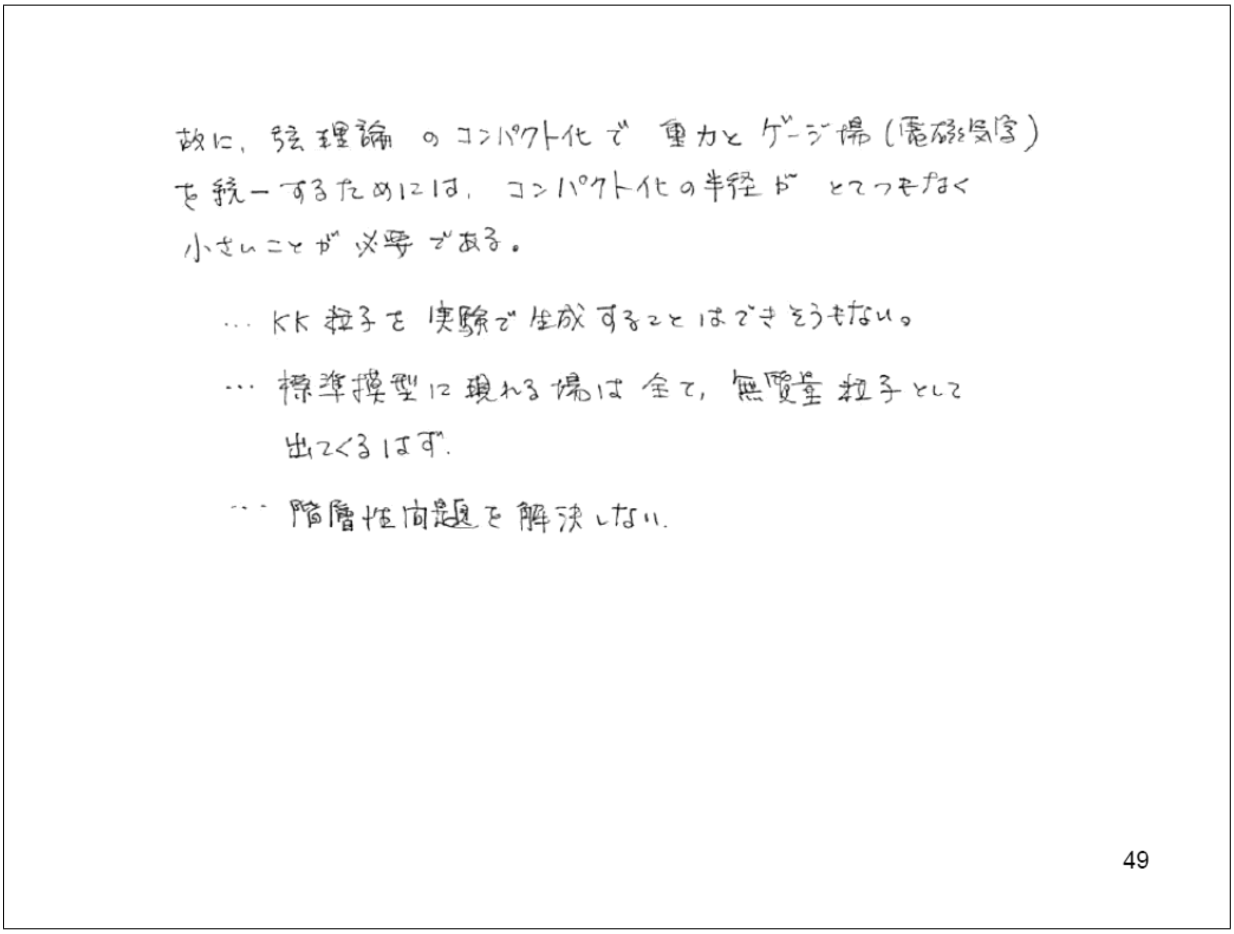
$$V_6 = \frac{G^3}{g_s^2 e^2} \tag{30}$$

になります。V_6 の半径 R で 6 方向をコンパクト化されていたとすると $V_6 \sim (2\pi R)^6$ くらいですから, 代入すると、R が次のようなパラメーターで表されます。

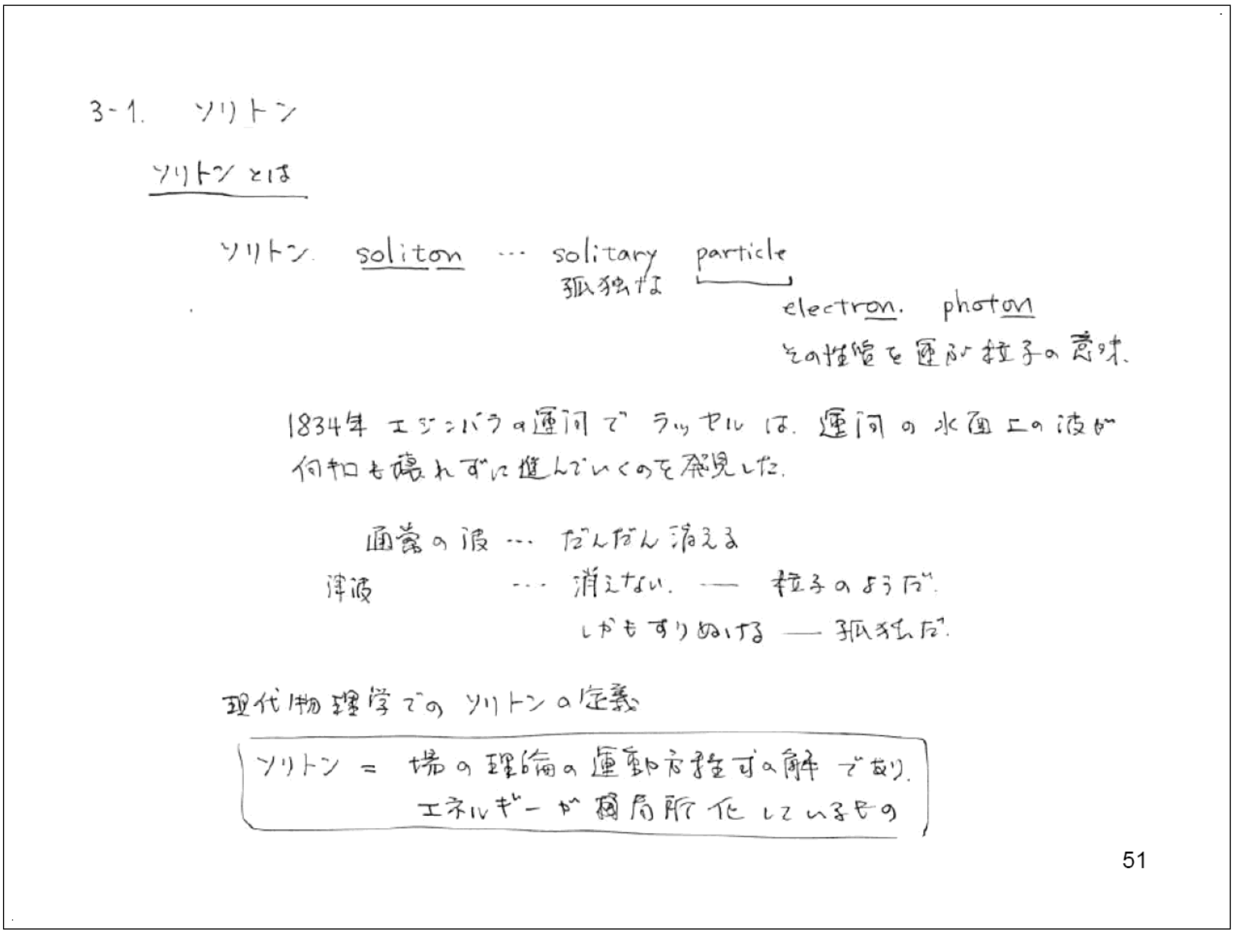
$$R = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{G^3}{g_s^2 e^8}\right)^{\frac{1}{6}} \tag{31}$$

重力定数 G と g_s と電磁気学の coupling constant、これらで表される訳です。この大きさを評価しましょう。g_s は、そもそも知らない量ですが、もしこれが 1 より大きかったとすると結合が非常に大きい弦理論なので計算ができません。ですので今の話がうまくいっているのであれば、g_s はそんなに大きくないはずです。なのでこれは 1 よりも小さいと仮定しましょう。電磁気学の coupling constant e も 1 より小さいわけですが、g_s と order estimate するときにこれをだいたい 1 だと仮定しましょう。これも仮定です。で、$\sqrt{G}$ に比例するとしましょう。これは Plank 質量を定義するときに、$\frac{1}{\sqrt{G}}$ が Plank 質量、10^{19}[GeV] ということを計算しました。これを使いますと比例係数はだいたい order 0、もしくはせいぜい order 0.1 か 0.01 とかそういうくらいですかね。もしくは 10 とか 100 とかそのくらい fluctuation があってもいいですけれども、せいぜいそういう量

である。$\frac{1}{R}$ はだいたいそうすると $\frac{1}{\sqrt{G}}$ になります。$\frac{1}{\sqrt{G}}$ は Plank 質量と同じなので 10^{19}[GeV] になってしまう訳です。すなわちコレはもの凄い小さい半径になる。LHC でも到底到達できません。これくらいのエネルギーを円形の加速器で作ろうと思うと現在のテクノロジーで太陽系以上の大きさの加速器になってしまうと言われたりしますが、それくらいのエネルギースケールになってしまいます。もの凄い小さい訳です。なので残念ながらもし 10 次元がそのまま電磁気学と重力をそのままコンパクト化させて Kaluza-Klein みたいなものが出る、と思ったならば Kaluza-Klein 粒子は現在のパラメーターから推測すると絶対に観測できないくらい重い、絶対に生成できないくらいの重さになってしまします。これは残念ですね。弦理論のコンパクト化で重力場とゲージ場を統一する為にはコンパクト化の半径がとてつもなく小さいことが必要になってしまう。Kaluza-Klein 粒子を実験で生成することができません。標準模型に出てくる粒子は無質量粒子で出てくるので階層性問題も解決しません。これは非常に残念です。



今までの話は非常にナイーブな仮定を置いてました。すなわち重力場の方もゲージ場も全部 10 次元でそっからコンパクト化して出てくるのが我々の次元であるとして計算したものです。もしその仮定の 1 つが破れると、それは違う仮定を導入すればこの非常に残念な結果は回避されるはずです。ではどこに今までのなかで仮定を変えるところがあったか？その問題を解決したのが実は D ブレーンです。



3　素粒子物理学における次元とソリトン

3.1　ソリトン

ソリトンとは

それでは、お昼ごはんまであと 45 分位ですからソリトンの話に入ります。突然ソリトンの話になるのは今までの話と全く脈略がないので違う話だと思ってください。これはあとでやると一緒になります。弦理論のソリトンを考える段階で一緒になりますので、それは明日になりますが、ちょっと我慢してください。素粒子物理学における次元とソリトン。超弦理論を考えると高次元が出てきました。その高次元を我々の世界と仲直りさせるためにコンパクト化を導入したわけです。本来はコンパクト化なんてすると、ものすごい問題がおこりますね。その問題を粒子の種類を統一する絶好の機会と捉えるか、もしくはこの問題は余計な問題であって、そもそも４次元の場の理論でもっとやることがあるんじゃないかと思うかは君たちの自由です。ここでは超弦理論が非常に重要になる、すなわち、重力の量子論として知られているものはこれしか無いので、それを考えざるをえないから高次元を扱ってみようという立場です。このソリトンを考えるというのは実はその次元と非常に密接な関わりがあります。そのことについて見ていきましょう。ソリトンという言葉を聞いたことがある人。あっ。全員ですね。じゃあここはやらなくていいかな。やらなくてよくない。じゃあ、ちょっと早めに行きましょうかね。

ソリトンとは何か、ということですが、これは例えばいろいろなソリトンの教科書があるけれども、そのはじめのところをみると、ソリトンは１８３４年に発見されたと書いてあります。ラッセルという人が、エジンバラの運河で運河の水面上の波が何キロも壊れずに進んでいることを発見した。イギリスなんで何キロじゃなくて何マイルですけども、それを発見した。通常の波はすぐ消えますが、津波は消えないんです。消えないからこれは粒子数が保存している粒子のようである。しかも津波はすり抜ける。2 つの波がこうボーンとぶつかるとそれは消えてしまうわけではなくてすり抜けるんです。で、孤独なんです。ソリトンというのは孤独な粒子という意味です。“solitary particle.” これがソリトンのはじめの定義でした。

現代物理学でのソリトンの定義はこれではなくて次のようなものです。「場の理論の運動方程式の古典解でありエネルギーが局所化しているもの。」これをソリトンと呼びます。このソリトンの定義によると、残念ながら、ソリトンは孤独ではありません。ふたつぶつかるともちろんすぐ散乱します。ですのでこれをソリトンというのは非常に不適切なのですが、歴史的な理由によりこれはソリトンと呼ばれています。数学の人とソリトンの話をするときは気をつけてください。ここに数学の人がいたら困りますけど、数学の人にソリトンと言ったら、まずこのすり抜けるという条件が非常に重要であるというふうに考えます。で、素粒子の人にソリトンと言うと、そりゃ全然違います。ぶつかったら跳ね返ります。話がそこでかみ合わなくなるんですね。ですから初めに何の話しをしているかを明確にするためにこう書きました。定義は簡単で、運動方程式の古典解でエネルギーが局在化しているもの。これが定義です。

水面波の例

水面の高さ h は t, x, y の関数である

$h(t,x,y)$ ：場（時空座標の関数）

運動方程式

$$\left(\frac{-1}{v^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\right) h + (h\text{の高次べき項}) = 0$$

h の大きさが小さい時 $(|h|^2 \ll |h|)$，第2項を無視出来るので．自由場となる．

$$h(t,x,y) = A\cos\left((\cos\alpha)x + (\sin\alpha)y - vt + \underset{\uparrow\\ \text{定数}}{c}\right)$$

$(A \ll 1.)$ α は波の進む向き．

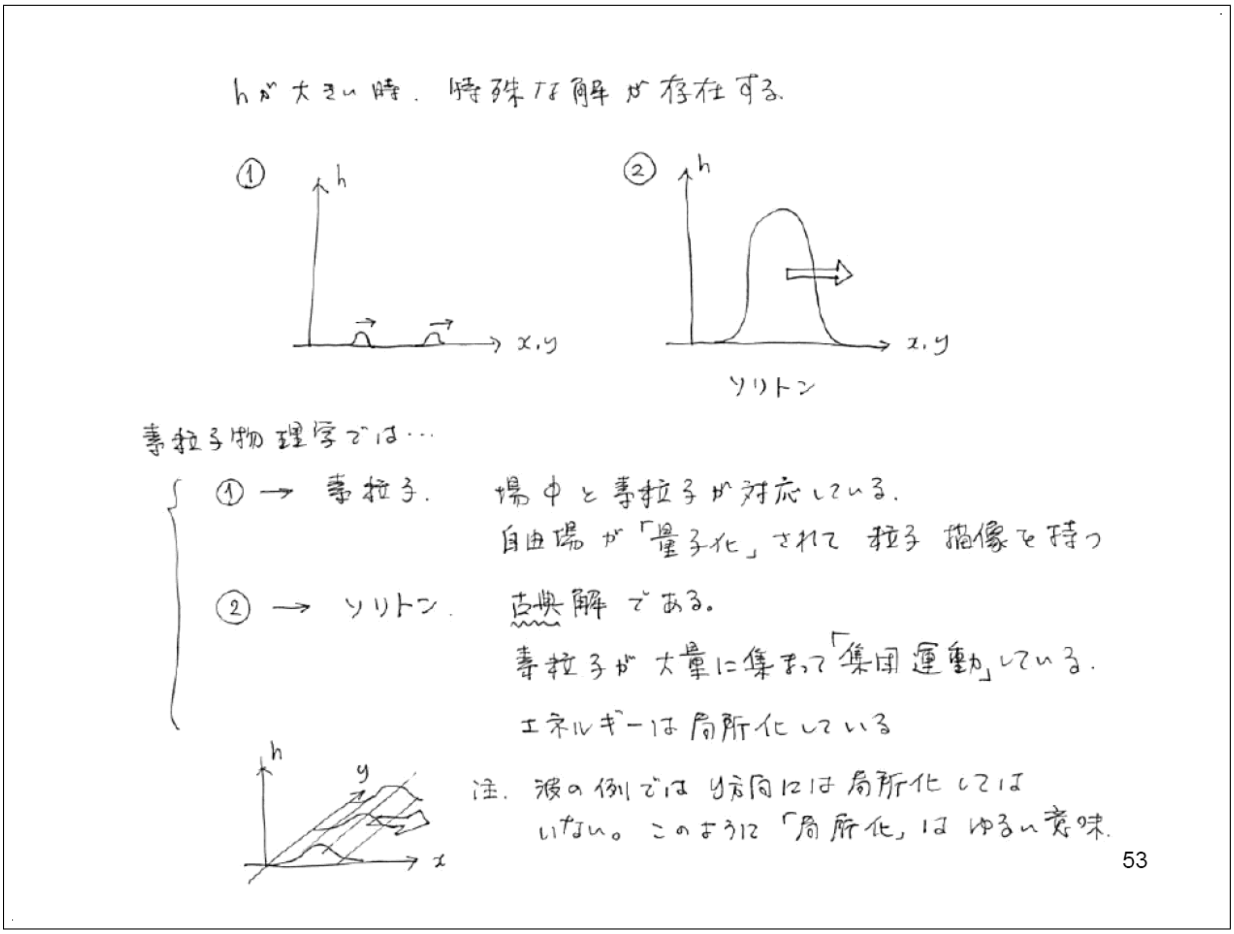
の重ね合わせが解となる

52

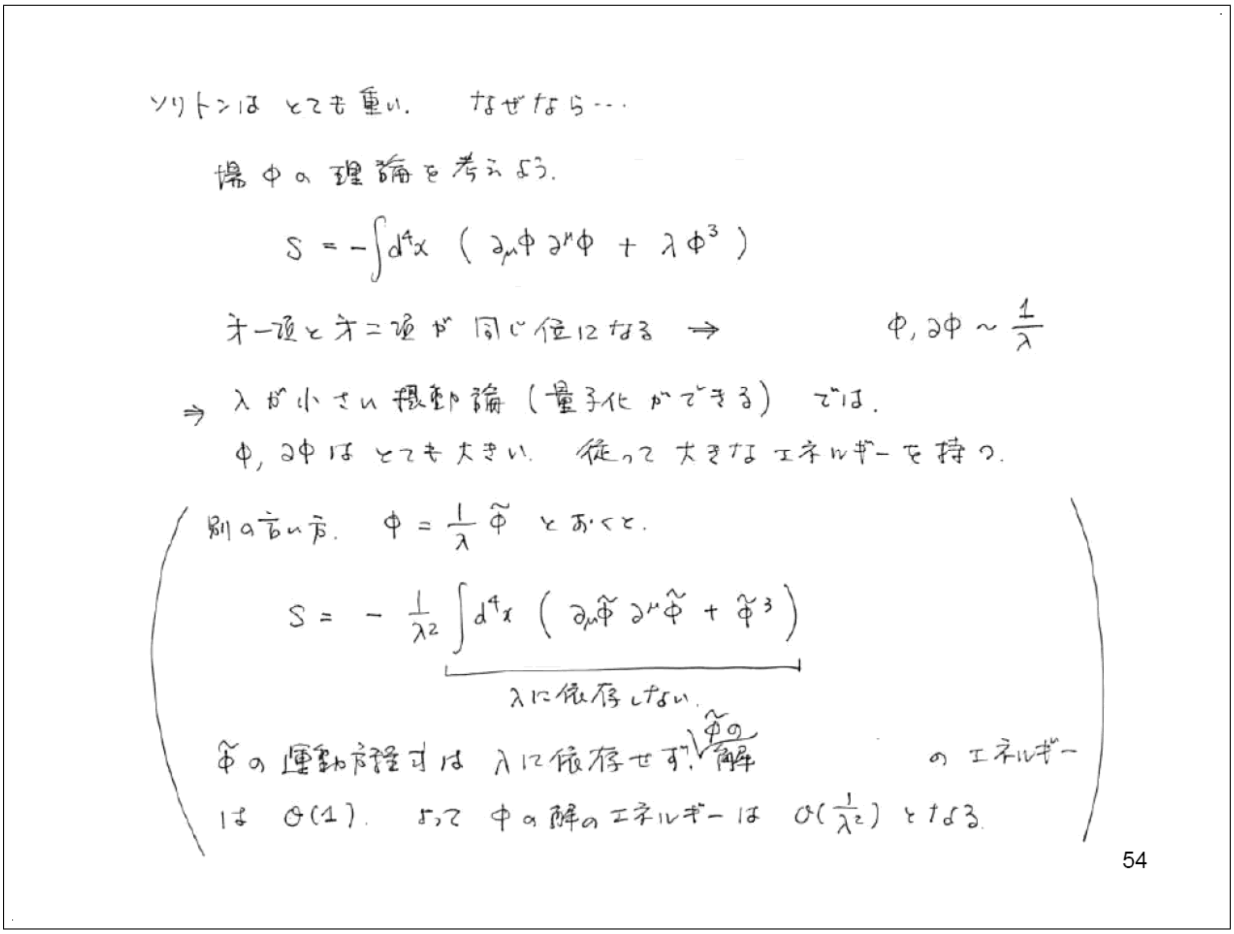
水面波の例を考えてみましょう。これが素粒子とソリトンとの違いについて明確な理解を与えてくれると思います。水面の高さ h は時間と x, y という 2 次元面の座標の関数です。$h = h(t,x,y)$ これは場です。すなわち、時空座標の関数です。h の運動方程式はこれも簡単で、

$$\left[-\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\right] h + (h\ \text{高次べき項}) \equiv 0 \tag{32}$$

微分の 2 乗から来た部分プラス、h の 2 次以上の項がイコールゼロ。これは我々になじみのある ϕ^4 理論とかそのようなもののラグランジアンと一緒です。h 自身の大きさが十分小さい時、すなわち、h の高次べき項が無視できるときは、この kinetic term だけになりますので自由場になります。で、自由場の解は先程見た通り非常に簡単で、このような x, y, t の線形関数を argument に持つようなサイン、コサインで表されます。この重ね合わせが解である。これは明らかですね。



一方、h が大きい時は先程の運動方程式に特解が存在します。右上図が特解です。h が小さい時はたくさんの小さな波があって、それらを重ねあわせることができる。一方、h が大きい時はこのように非常におおきな値をとってこれが運動している。素粒子物理学で、この h が知っている様々な場だとしましょう。スカラー場だとしましょう。そうすると、この１番に対応するものが素粒子である。すなわち、場 ϕ と素粒子が対応していて、自由場が量子化されて粒子描像を持つ。先程は波動解を見ましたが、波動解を第二量子化して粒子描像が出ます。一方、２番目はこれはソリトンで、運動方程式のポテンシャル項の方を重要視していたものです。すなわち、波動解、先程のように簡単な線形結合ができる波動解ではありません。１番は素粒子であったことを考えると、これは素粒子が大量に集まって、集団運動している状態です。小さい波がものすごいたくさん集まって集団運動している。しかも、エネルギーは局所化しているとしましょう。注意としましては、この波の例では実はエネルギーは局所化していません。すなわち、こんなふうな例を考えたりします (左下図)。$h(x, y, t)$ が高さ場で x 方向に波が運動しているとします。そうすると、y 方向にもちろん波が広がっているので、y 方向にはエネルギーは局在化していません。ですから、波の例では局所化は非常にゆるい意味で起こっていると思ってください。様々なソリトンがあって、こういうものもソリトンという。局所化というのは、これは x 方向に局所化して、y 方向に局所化していないんですけど、こういうものだと思ってください。

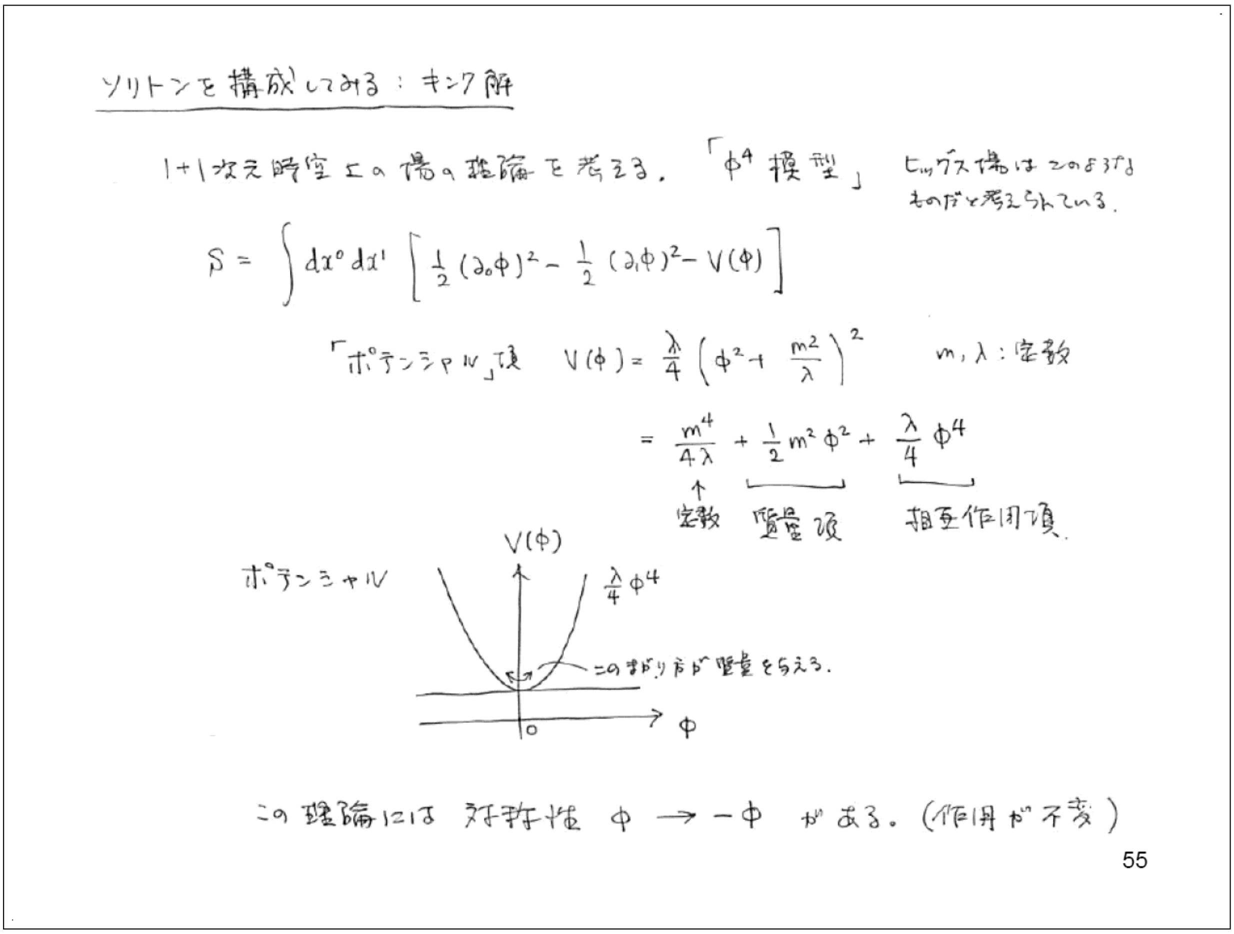


このソリトンは集団運動をしていることから殆ど明らかですが、非常に重いです。その理由を見てみましょう。場 ϕ の理論を考えてみますと、例えばこれは ϕ^3 模型ですが、このラグランジアンを考えるとします。この運動方程式を解くときに、ポテンシャル項が重要になるということは、運動方程式の二つの項でこちらからの寄与、kinetic term の寄与とポテンシャル term の寄与がキャンセルするからイコールゼロなんですね。ですから、第一項と第二項の寄与が同じくらいになるということです。ここで、第二項の前には λ というのが付いてます。摂動論ができるためにはこの λ が十分小さい必要があります。その条件のもとで、第一項と第二項が等しいと思いますと、第二項の方は ϕ のベキが上がっていますから、ϕ と例えば ϕ の微分は $1/\lambda$ のオーダーでないといけないわけです。すなわち、摂動論ができるような場の理論では ϕ は非常に大きい、ソリトンの場合は非常に大きくなって、従って、非常に大きなエネルギーを持つということは明らかですね。別の言い方をしますと、このラグランジアンで $\phi = \frac{1}{\lambda}\tilde{\phi}$ とおくと、これよくやることですが、これを代入しますと、全ての λ 依存性が前にくくり出せて、こんなふうになります。

$$S = -\frac{1}{\lambda^2}\int d^4x(\partial_\mu\tilde{\phi}\partial^\mu\tilde{\phi} + \tilde{\phi}^3) \tag{33}$$

$1/\lambda^2$ が前に出ます。後ろの方に出てくるのは、λ に依存しないものですから、運動方程式を書いたとき、action の overall のファクターは古典的にいつでも落ちますから、λ に全く関係しない運動方程式が出てきます。で、それを解きます、で、代入します。そうすると、前に $1/\lambda^2$ がかかっていますので、action の大きさがものすごく大きいわけです。解のエネルギーがだいたい $1/\lambda^2$ のオーダーになるわけです。いいですか？同じことを

違う言葉で言っただけ。このことからわかるように摂動論ができるようなカップリングが小さい理論ではソリトンはものすごく重いものになるわけです。



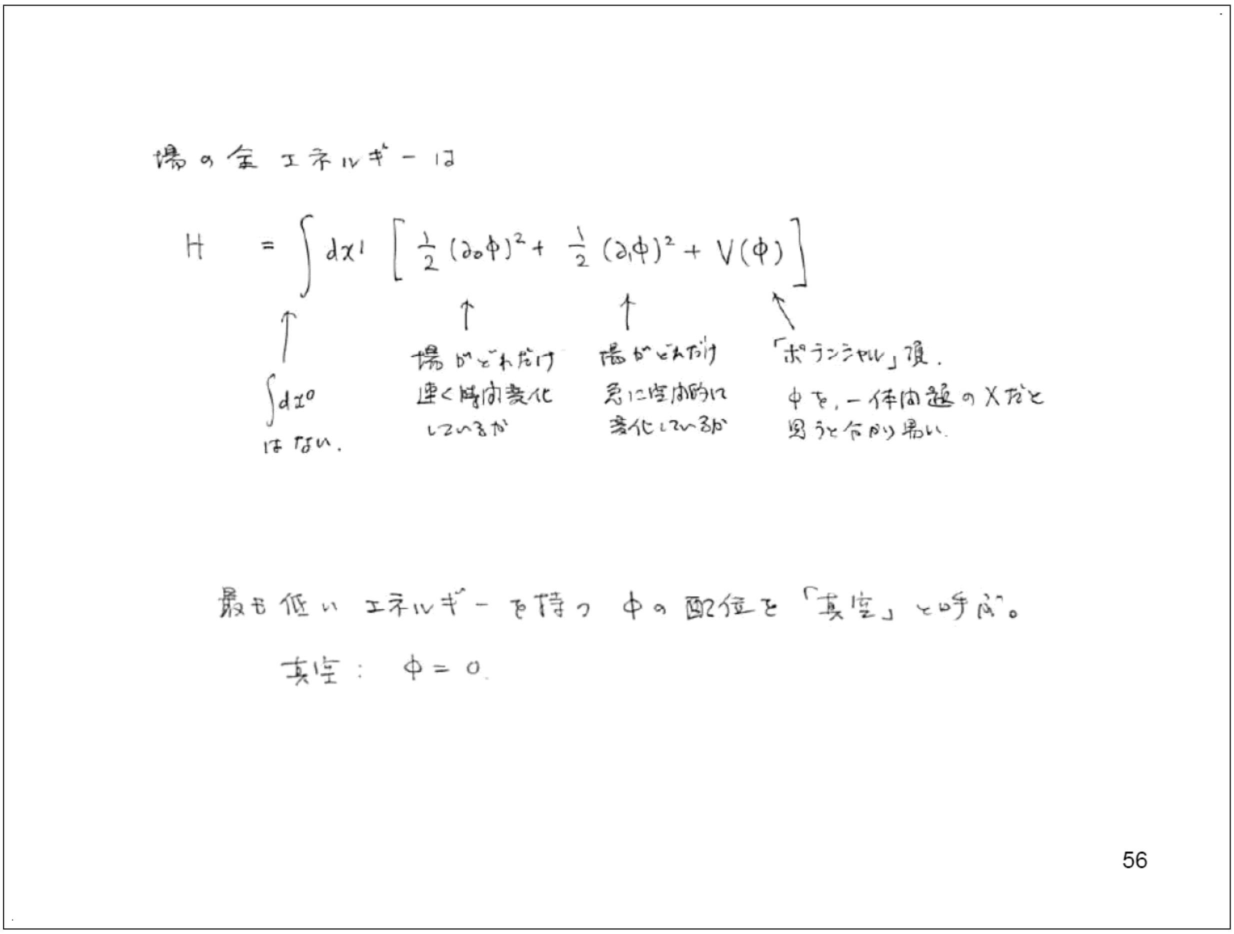
ソリトンを構成してみる：キンク解

では、具体的にソリトン解を構成してみましょう。この講義ではキンク解・渦解・モノポール解、その三つの解を勉強したいと思います。それぞれは素粒子物理学でそれぞれの重要な役割を果たしています。超弦理論に応用するときもその三つのものを考えることは、重要なのでここでそれを見ていくことにしましょう。最も簡単なものはキンク解です。$(1+1)$ 次元時空上の場の理論を考えます。最も簡単なもとのして ϕ^4 模型を考えるとしましょう。ここで、∂_0 と ∂_1 を explicit に書いてみました。2 次元の ϕ^4 模型。これから話すことは全部古典的な話です。ポテンシャル項としてこのようなものを持ってきましょう。

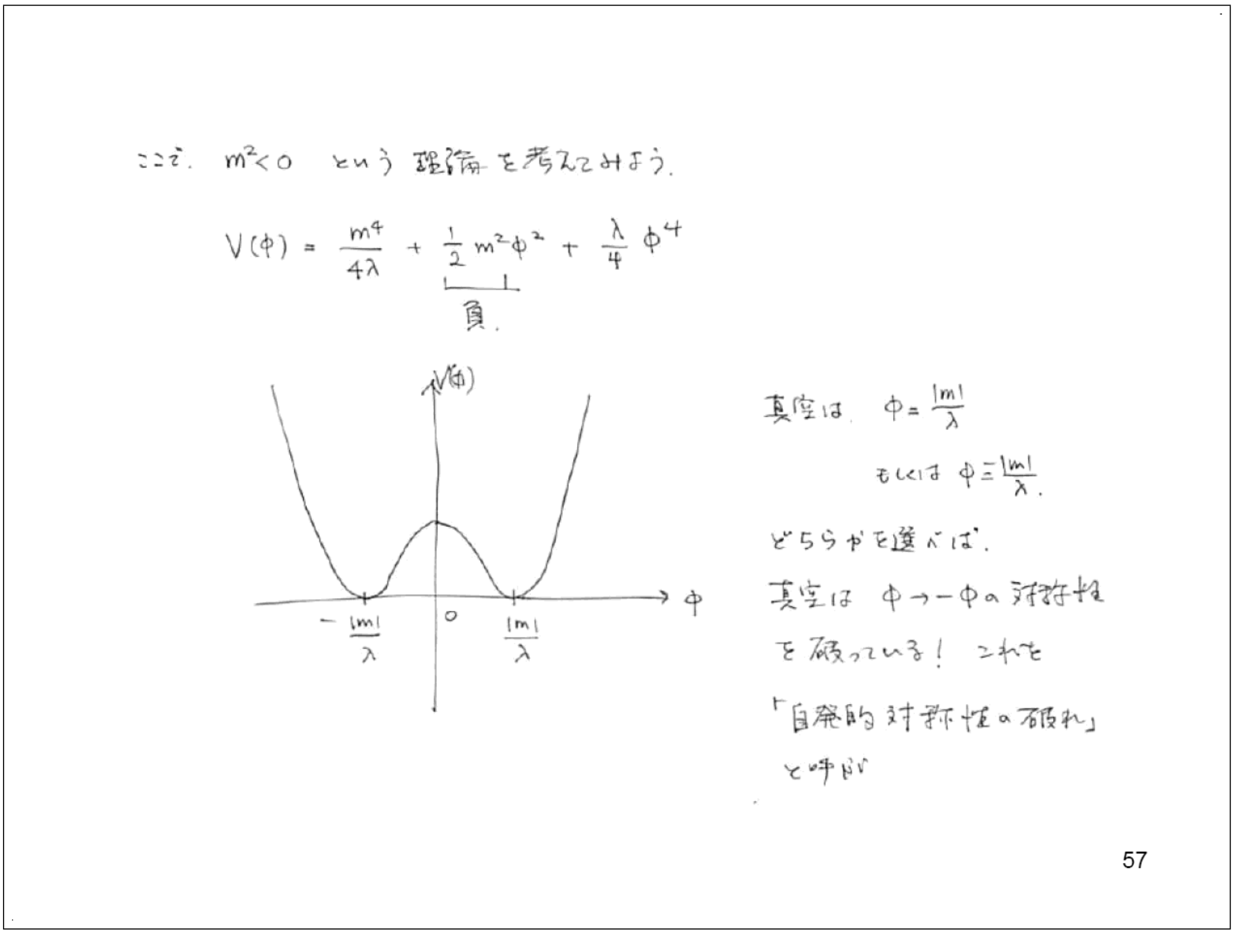
$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\left(\phi^2 + \frac{m^2}{\lambda}\right)^2 \tag{34}$$

これは ϕ^4 模型の典型的なポテンシャル項です。そうしますと、展開すれば定数項と ϕ^2 の項と ϕ^4 の項が出てきます。ϕ^2 の項は前の係数を m^2 になるようにとってみたんですけども、それはもちろん質量項です。定数はラグランジアンには関係ありません。相互作用項は ϕ^4 になっていますから、前の係数を λ になるようにとりました。これがポテンシャルです。ポテンシャルの絵を書いてみますとこんなふうに (真ん中の図) なっていまして、これは $\phi = 0$ のところが一番ポテンシャルの底になっています。この $\phi = 0$ のまわりの曲がり方、それは ϕ が小さい時、ϕ^4 より ϕ^2 の方が大きいですから、ここのところになっていますが、曲がり方が、質量を与えるというわけです。ちなみに、この理論には $\phi \to -\phi$ という対称性があります。$\phi \to -\phi$ としてもラグ

ランジアンが変わらない。すなわち、理論はこの対称性をうまく尊重しているはずだと。どんなものを計算してもこの対称性は何らかの形で重要な意味を持つはずだということがわかります。



場の全エネルギーは次のような意味付けができます。ハミルトニアンを書いてみますと、もちろん時間方向の積分はなくなりますが、いくつかの項の前の符号が変わるだけですね。場がどれだけ早く時間変化しているかという時間微分項、場がどれだけ急に空間的に変化しているかという項、そして、ポテンシャル。最も低いエネルギーを持つ ϕ の配位を通常、真空と呼んでいます。今の理論では $\phi = 0$ が真空。



ここで、m^2 が負であるという理論を考えてみましょう。m^2 が負であるということは m は虚数であるということですが、それはあまり気にせずに、m^2 というパラメータが負であったとしましょう。そうすると、このポテンシャルはこんなふうな絵 (p57 左図) になります。すなわち、真空は $\phi = \frac{|m|}{\lambda}$ もしくは $\phi = \frac{-|m|}{\lambda}$ になります。これは 4 次関数を一般的にプロットすると、$\phi \to -\phi$ とする対称性をもつようなものはこうなってしまうわけです。さっきと違うのは真空が 2 つに分かれてしまったということです。真空を考えなさいというときは 2 つの真空のどちらかをえらんで、そのまわりで、ϕ を展開しなさいということですね。量子論ではそうです。ですからこの理論の真空が 2 箇所に分かれているということは、真空は $\phi \to -\phi$ とする対称性を破っているということです。これが自発的対称性の破れですね。この前のノーベル賞です。

$m^2<0$ だと タキオンが出るのでは?

$m^2 = E^2 - |\vec{p}|^2$ (相対論的な 粒子の従う式)

$m^2<0$ なら. 粒子は 静止 ($|\vec{p}|=0$) できない.

速度 $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E}$ は 光速を超えてしまう!

適当な慣性系をとれば 過去に情報を 発信でき. 因果律が破れる

ヒッグスは タキオン? 発見されたら 困る?

→ 実はタキオンは出ない!

真の真空 のまわりで 場を展開すれば.

$$\phi = \frac{|m|}{\lambda} + \tilde{\phi}$$

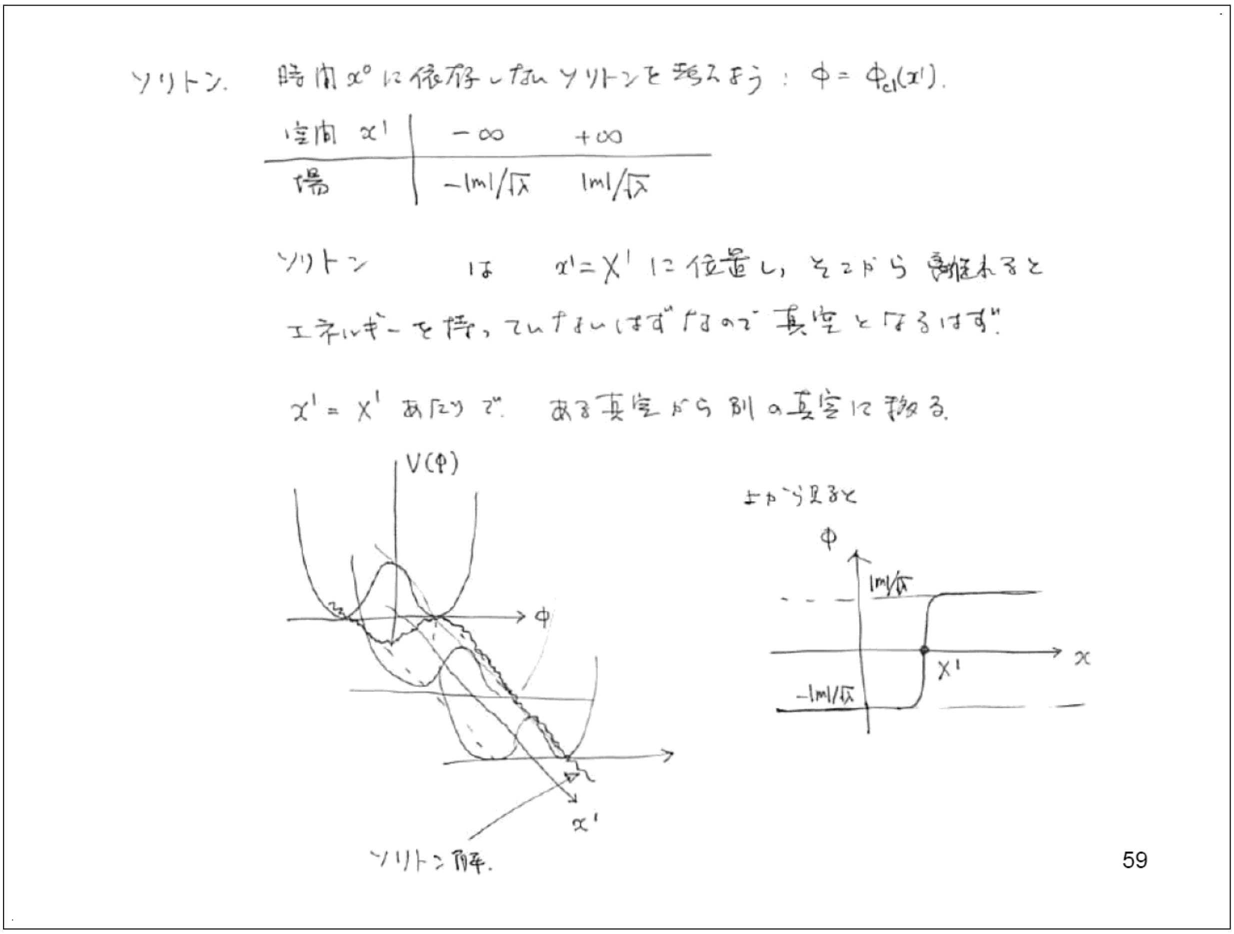
$\tilde{\phi}$は $m^2_{\tilde{\phi}}>0$ となっている。 問題ない.

58

m^2 が負だとタキオンが出るんじゃないかという気がします。$m^2 = E^2 - |\vec{p}|^2$。これは相対論的な粒子の従う式ですが、m^2 が負なら粒子は静止できません。$m^2 < 0$ だと、$|\vec{p}|^2 = 0$ になれないですね。速度 $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E}$ ですが、これは光速を超えてしまいます。光速を超えるような粒子があれば因果律が破れるというのはよく知られています。つまり、m^2 が負であるようなラグランジアンはそもそも考えてはいけないんじゃないかと言う気がします。実はそうではなくて、先程、真空の議論がありますね。2 つの真空の部分はエネルギーが最小になっているわけですから、本当は原点部分で展開するようなものが重要になるものでなくて、真の真空のまわりで展開しないといけないわけです。真の真空の周りで場を展開すると、ϕ は

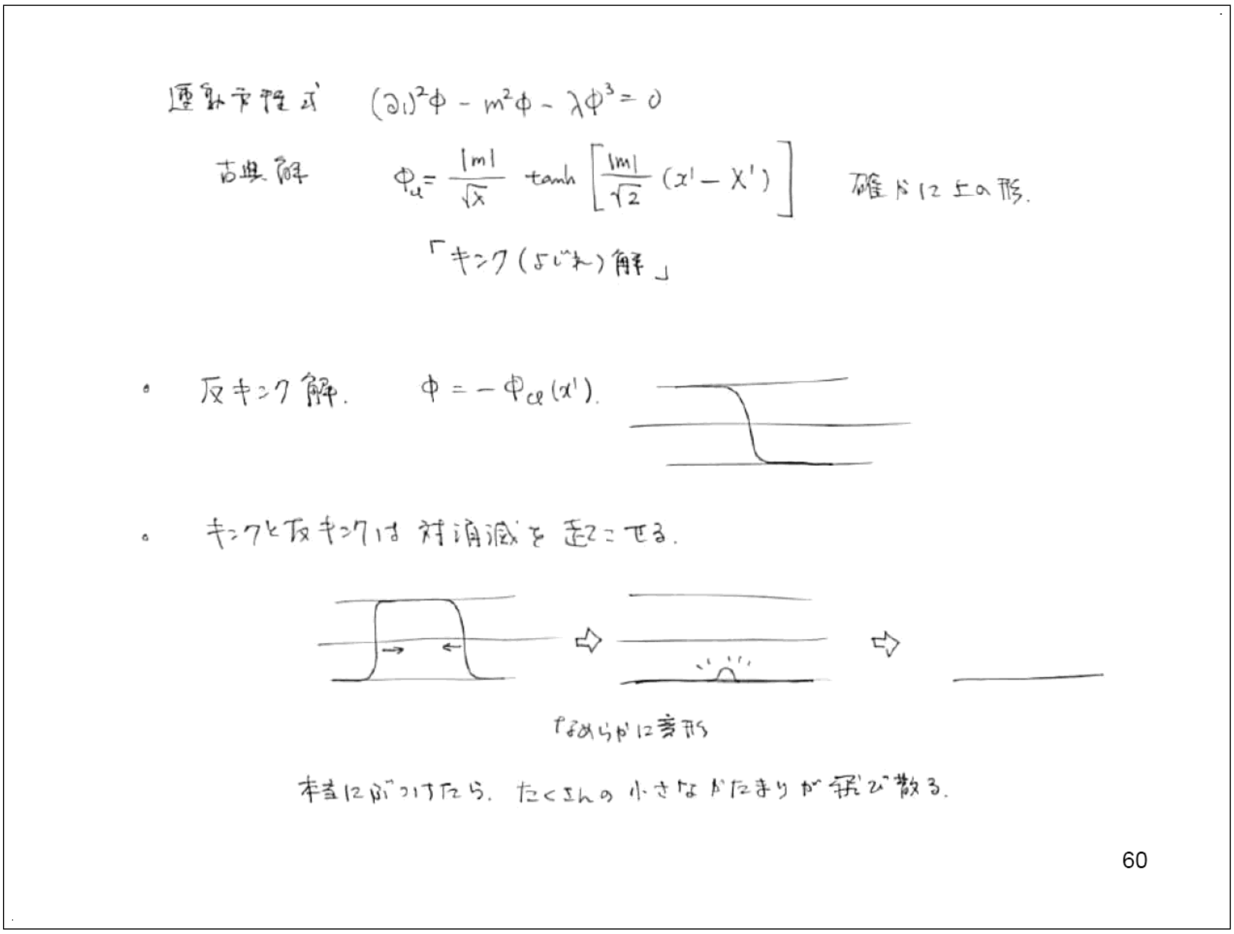
$$\phi = \frac{|m|}{\lambda} + \tilde{\phi} \tag{35}$$

というふうになって、この $\tilde{\phi}$ については、質量項を評価すると m^2 はもちろん正になっているので問題はありません。すなわちこの話の教訓は、タキオン場があるような理論でも、本当は実はそこは間違った真空で、真の真空があって、それらのまわりでは理論は矛盾しないということです。さっきの弦理論の話にもどりますと、タキオンが出てきていました。昔はタキオンが出てきたということで、その理論を捨てていました。それは consistent ではないだろうと。ところが、現在の理解ではもちろんこのようなヒッグスメカニズムが、対称性の自発的破れの話が重要であると知っていますので、タキオンが出てきても、それは間違った真空のところで展開しているだけで、本当はちゃんとした真空があって、そこは安定であると思えるわけですね。だから、ボソン的な弦理論でタキオンが出てきても、実は問題ではないということになります。



それはともかく、このような理論を考えると、ソリトンが出てくるということを見ていきましょう。時間 x^0 に依存しない、つまり、運動していないソリトンを考えたとします。ソリトンというのは運動方程式の解ですから、さっきの運動方程式を解けばいい。でその解をあとでお見せしますけども、その前に、どういう解が存在するはずかということだけ、ちょっと、見てみましょう。古典解を $\phi_{\rm cl}(x^1)$ というふうに書きます。時間に依存しないので、これは x^1 の関数になります。ここで、次のような場の配位を考えてみます。空間 $x^1 = -\infty$ の時は場がスライド p57 図中の左側の真空、$x^1 = +\infty$ の時は場が右側の真空にある。そういうふうな場の configuration を考えてみましょう。ソリトンはそもそもエネルギーが局在化しているという定義を持っていましたので、ソリトンはその中心の場所というのがあって、そこから離れるとエネルギーをもっていないはずなので、真空になっているはずです。すなわち、いま、１次元のシステムを考えているので、１次元空間のある場所にソリトンがあるんだったら、そのソリトンの右側と左側は真空になってないといかんわけです。その真空を例えば、左側では左側の真空、右側では右側の真空というふうにしたとしましょう。そうすると、必然的にこのようなチョイスから、安定なソリトンができないといかんということがわかります。$x^1 = X^1$ というところのあたりで、ある真空から別の真空に移る描像がこれ (スライド p59 右下図) です。右側が x^1 の座標で、縦が ϕ の値です。ソリトンの場所から左にいるときはマイナスの真空、右側にいるときはプラスの真空にあってここで変わる。この絵を立体的に書こうとしてみて失敗したのがこの絵です (スライド p59 左下図)。これが立体的に見える人はかなりこういう絵を描くのに習熟しているか、もしくはこの話をはじめから知っている人だと思います。右側の軸が ϕ でこの軸が x^1 です。そして、縦軸がポテンシャルエネルギー。こういうふう

に全く性質の違うものを3つの軸に書いています。ポテンシャルエネルギーはこんなふうにWの形をしていました。ソリトン解の配位を一つきめるということは、このグラフを一つきめるということですが、この x^1-ϕ 平面はこの図では水平な面になっています。スライド p59 左下図を波線の上から見たのがスライド p59 右下図です。スライド p59 左下図で示したかったのは真空から真空に移る。ここの部分ではポテンシャルの山を一旦越えている。そういう絵を描こうとして書きました。こういう物が非常に安定であるというのは明らかですね。イメージとしては、トタン屋根を考えると、トタン屋根って最近見ませんが、トタン屋根を考えて、そこに鎖を一本投げた。そうすると、鎖はそのトタン屋根の溝にはまります。スパッとはまる。ところが、時々溝をこえることがあるんですね。そういう安定な配位に落ち着くわけです。その配位の越えているところが、実はソリトンと認識できるというわけです。



実際、運動方程式を解いてやると、$\phi_{\rm cl}$ というのは tanh の関数でかけます。この関数をプロットすると、まさに先程言っていた形になります。tanh の関数の argument は $x^1 - X^1$ になります。tanh はプラスマイナス無限大で -1 と $+1$ になりますから、それに場の真空の値をかけてやると、左の真空から右の真空に interpolate するような、そういう古典解になっていることがわかるんです。いまは波動方程式がとても簡単ですから、具体的な厳密解があるんですね。

この解について前にマイナスの符号を付けたものももちろん解です。これは反キンク解と呼ばれます (上図)。右側の真空から左側の真空に移るんです。これはあってもいいんです。キンクと反キンクは対消滅を起こすことができます。すなわち、左側にキンク、右側に反キンクがあって、これをゆっくりと動かしたとしましょう。そうすると、真ん中の部分の山はもちろん小さくなったほうがエネルギーが得であることが期待できるので、滑らかに変形するとこんなふうになるんです (下図)。すなわち、キンクと反キンクは対消滅を起こすことができる。本当にぶつけたら、もちろん、このエネルギーが保存しますから、その保存したエネルギーがどうなるかってのを考えると、たくさんの小さな塊が、わーっと飛び散るんです。これはソリトンと反ソリトンが対消滅して素粒子を放出したというプロセスです。

。運動するキンク. $-(\partial_0)^2\phi + (\partial_1)^2\phi - m^2\phi - \lambda\phi^3 = 0$

$$\phi = \frac{|m|}{\sqrt{\lambda}} \tanh\left[\frac{|m|}{\sqrt{2}}\left(Ax^1 + Bx^0\right) + c\right]$$

$A^2 - B^2 = 1$, cは任意定数

(これは ローレンツ変換で得られる)

。キンクのエネルギー.

$$H = \int dx^1 \underbrace{\left[\cdots\right]}_{x^1 = X^1 \text{ のまわりに局所的に } \neq 0} = \cdots \qquad (= m_0)$$

これらから、キンクは粒子のように振舞っていることが分かる.

<u>ソリトンは、素粒子の場の理論に現れる、素粒子以外の粒子的物体</u>

61

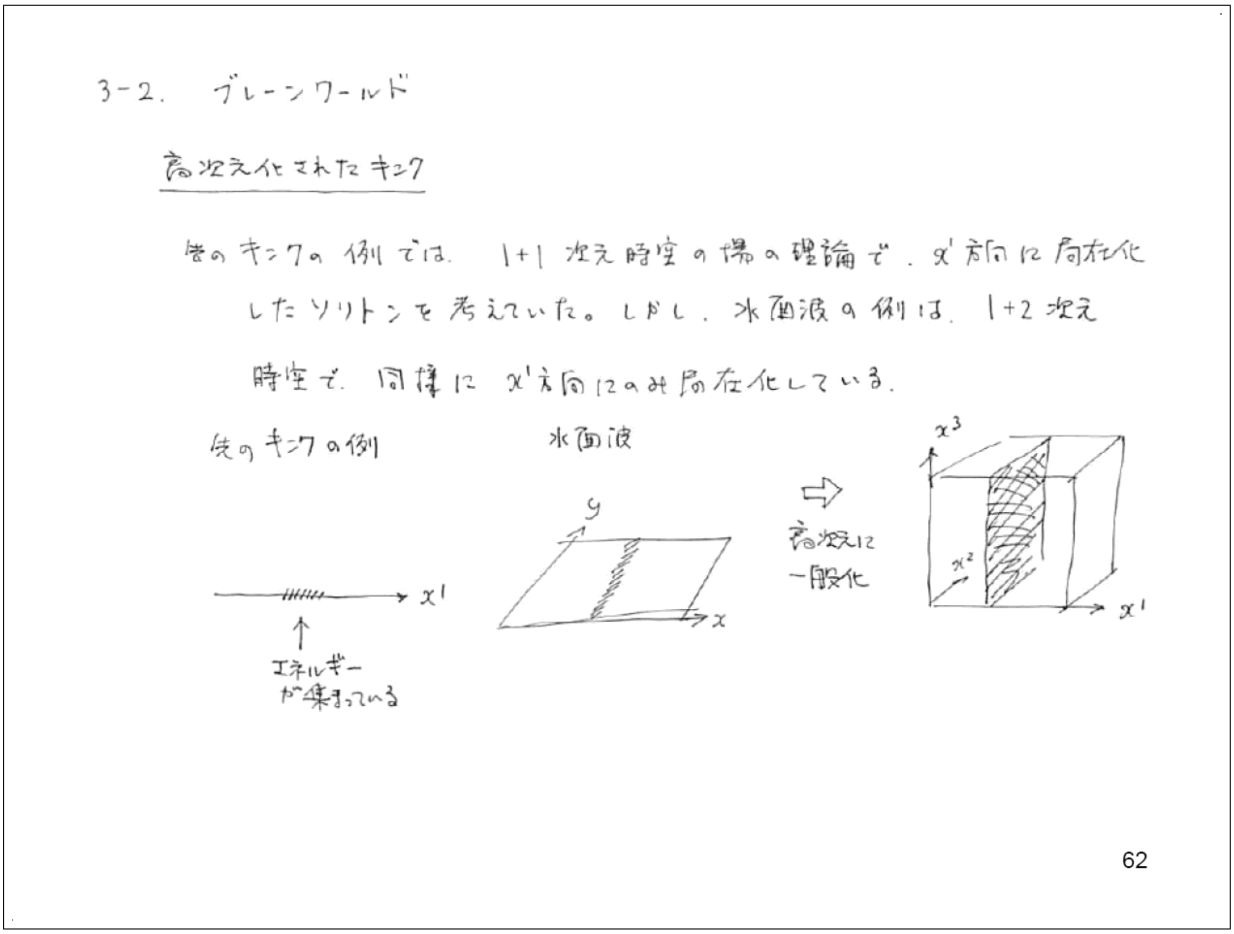
では運動するキンクはどういうふうにして求まるかというとこれも簡単です。もともとの運動方程式はローレンツ対称性を持っていたので、さっきの止まったキンク解にローレンツ変換をしてやれば、運動するキンクが簡単に得られます。先程の解と変わったところは x^1 と書いてあったところが $Ax^1 + Bx^0$ に変わったと。この A と B についての $A^2 - B^2 = 1$ という条件式は相対論的なローレンツ変換になっているということがわかると思いますが、この条件式を満たしておけば、先程の止まったキンク解からローレンツ変換で移ることができますね。これが運動するキンクです。キンクのエネルギーはさっきのハミルトニアンにこの解を代入してやれば簡単にわかります。その結果はここには書きませんが、$x^1 = X^1$ の周りに局所的にノンゼロになっていて、その他のところが exp でゼロに近づいていくという結果になります。このことを総合的に見ますと、まず、キンクは粒子的にエネルギーを局在化しているもので、しかも、キンクと反キンクは対消滅を起こす。キンクは運動することができて、その形は変わることがない。このことを総合的に判断すると、ソリトンは素粒子の一般的な場の理論に現れる、素粒子以外の粒子的な物体であるというふうに言えるわけです。素粒子論の場合はたいがいの場合は第二量子化しますといって、普通は場に対応する素粒子を導入して散乱振幅がどうだと言って、M1 の一年間がすぎてしまうわけです。ところが、ソリトンというものが、実は古典的なものとして存在しまして、これも素粒子と同様な性質を示し、重要な意味付けができるということです。質問ありますか。

(質問) ソリトンを古典的に扱っていい理由は何ですか？

(答) ソリトンを古典的に扱っていい理由はなにか。えー。

(質問) 大きさを持つと量子的なものという描像が無いからですか。

(答) 大きさを持ったものは量子的な描像が無いからか？ソリトンを量子的に扱うことも可能です。ここではソリトンの量子化はちょっと難しいので扱わないんですが、答え方に二つの方法があって、一つは、今の話で分かる方で、もう一つはアドバンスドで、僕がカッコよく見える方法ですけども、一つめの方法は λ が十分小さいと思うと、ソリトンはものすごい重いわけですね。その重いところからゆらして、通常の第二量子化のように量子化することができます。こういう量子化を行うときはソリトン自身の生成消滅を扱うようなものではなくて、一個ソリトンがありますよと。その周りのゆらぎを量子化するとこうなりますよという話になります。それを通常、ソリトンの量子化といっています。それはなんとなくわかりますよね。例えば、ソリトンがない真空から第二量子化して素粒子を得るという手続きを知ってますよね。一方、ソリトンがある真空から同じようなことをやることができますよね。ソリトンがある真空というと言い方が悪いですが、ある古典的な配位があって、その周りの摂動を第二量子化することができます。そういうことをやるときはソリトンが無いセクター、１個あるセクター、２個あるセクター３個あるセクター、というふうにまず場の理論を分解してそのそれぞれで量子論をやると。QCD のインスタントンとかを勉強したことがある人はそういうやりかたで、インスタントンが１個のセクター、２個のセクターというふうに分けて、それぞれの分配関数を計算するということをやっているわけです。一方、ソリトンの生成消滅みたいなことをやることもある種の理論については可能です。それはまさに素粒子とソリトンの区別をなくした場合しかできないんですけど、例えば、$\mathcal{N}=2$ の SQCD のサイバーグ・ウィッテン理論 [14, 15] の場合、ソリトンと素粒子が全く同等の物として扱われます。そういうことができるのはこういう手続を踏まずに超対称性の非常に大きい constraint がありまして、そこから結果はこうなるはずですという。それは予め分かるからできるわけですけども、こういう手続で、λ が小さい時の話から展開していく場合はやっぱりソリトンが１個あるセクター２個あるセクター、という分けた話になっていますね。他に質問ありますか？



3.2 ブレーンワールド

高次元化されたキンク

では、あと 20 分位時間が。今日の最後になんでこんなソリトンを考えると面白いことが分かるのかってことを話しましょう。ブレーンワールドの話です。他のソリトンを考える前に、キンクをブレーンワールドという考え方に応用することができるという話をしましょう。

高次元化されたキンク。先程のキンクの例では $(1+1)$ 次元時空の場の理論で、x^1 方向に局在化したソリトンを考えました。しかし、水面波の例を思い出すと、それはもともと $(1+2)$ 次元時空の話で x^1 方向にのみ局在化している。ただ、余計に y 方向というのがあったわけです。今のキンクの例だと空間の 1 次元で、そのうち、一部分だけエネルギーがたまっていると。水面波の場合はこんなふうに y 方向にエネルギーが溜まっている領域が伸びているわけです。これを高次元に一般化すると、例えば、$(1+3)$ 次元の場合は x^1 の方向だけに局在化して、x^2、x^3 の方向にはエネルギーの分布が伸びているわけです。こんなキンクを考えても良い。

同じ ϕ^4 模型の 同じキンク解でも、次元によって物理的意味が違う。

1+1 次元時空のキンク解	——	粒子的	particle	1+0 次元に拡がる世界線
1+2	——	弦的	string	1+1 〃 世界膜
1+3	——	膜的	membrane	1+2 〃 世界体積
1+4	…?…	?	←「高次元膜」	
⋮				
1+(p+1)	——	p-ブレーン	p-brane（ブレーンと呼ばれる）	1+p 〃 世界体積

例として 1+4 次元時空を考えると、キンク解の世界体積は 1+3 次元時空。
3 ブレーン となる。 … これは我々の時空次元である。

⇝ 我々は ブレーンの上に「住んでいる」可能性もある？

「ブレーンワールド」シナリオ と呼ばれる

同じ ϕ^4 模型のキンク解でも、次元によって物理的な意味が違います。先程見た例は $(1+1)$ 次元時空のキンク解で、これは粒子的でした。粒子の trajectory を考えると $(1+0)$ 次元に広がる世界線です。すなわち、これは粒子です。これを $(1+2)$ 次元時空にしますと、キンク解はストリングのようになります。つまりそのストリングが sweep した後は、ワールドシートができるわけです。$(1+1)$ 次元。これを同じようにどんどんふやしていきますと、たとえば、$(1+3)$ 次元ではスライド p62 右図のような膜になって、膜は英語で membrane。これが sweep する体積のことを $(1+2)$ 次元の world volume(世界体積) と言います。$(1+4)$ 次元時空にすると高次元膜。そのように $(1+p+1)$ 次元時空で一般の物を考えることができます。この高次元膜のことをブレーンと呼びます。ブレーンはメンブレーンからから来ています。一般にこれを p ブレーンといいます。p というのは world sheet もしくは world volume の次元が $(1+p)$ の場合、すなわち、ブレーンが張っている、エネルギーが溜まっている領域の空間次元が p であるものを p ブレーンといいます。この p ブレーンがキンク解から出来ている場合はもともとのブレーンの次元からさらに一個上がって $1+(p+1)$ 次元時空におけるキンク解になっている。

例として、$(1+4)$ 次元時空から出発したとしましょう。そうすると、$p=3$ です。キンク解の世界体積は $(1+3)$ 次元時空すなわち、3 ブレーンとなります。この時空次元は面白いことに、我々のよく知っている時空次元と同じです。我々はブレーンの上に住んでいる可能性があるのではないか。これがブレーンワールドシナリオです。ブレーンワールドシナリオでは高次元時空がもともとあるということを仮定します。そしてその中にソリトン的なものが運動方程式の解から出てきて、そのソリトンの上にのみ我々は住んでいて、他の次元は感知できない。そういう考え方のことをブレーンワールドシナリオと呼ぶわけです。

ブレーンの上に住む

標準模型は 1+3次元時空上の場の理論なので. 本当に我々が
3ブレーン(ソリトン)の上に住んでいるのなら. 1+4次元の場の理論から
1+3次元の場の理論が導出されなければならない.

(KKの例. 1+4次元の1方向を円にコンパクト化
→ ~~質~~その方向が $\cos\frac{nx^i}{R}$ という場に制限
→ ~~質量~~無限個の 1+3次元場(質量 $\frac{n}{R}$.))

この例では「ブレーン」は無い.

ブレーンの上に住む

ブレーンの上に住むということはどういうことであろうか、ということを考えてみましょう。標準模型は 1 + 3 次元時空上の場の理論です。ラグランジアンはそう書かれている。すなわち、本当に我々が 3 ブレーンというソリトンの上に住んでいるんだったら、1 + 4 次元の場の理論から 1 + 3 次元の場の理論が導出されなければいけませんね。標準模型のラグランジアンが 1 + 4 次元のもうちょっと簡単なラグランジアンから計算で導出できるはずです。Kaluza-Klein の例を思い出してみると、1 + 4 次元の次元が一個余っているような場合も、一つの方向を円周にコンパクト化しました。そうするとその方向がコサイン何とかという場に制限され、一個の場から無限個の 1 + 3 次元の場が出てきたことを見ました。Kaluza-Klein の場合はブレーンというのはありません。今のブレーンの場合の話は余分な次元の方向がコンパクト化されている必要がないわけです。そっちの方が無限に広がっていてもよい。ただ、その中に何かある古典的に局在化した物体があって、その上に我々が住んでいるということが確証されればそれでいいわけです。そのことを確証しなければいけませんが、Kaluza-Klein の例の場合に、もし、コンパクト化されていた方向がものすごい広くなったらどうなるかということを想像してみましょう。そうすると R が無限大になりますので、どんどん Kaluza-Klein 粒子の質量が下がってきます。で、我々が観測できるようになります。でので、それは実験的に駄目だと。排除される。一方、ブレーンワールドの場合はその方向が無限に伸びていても構いません。もし、ちゃんと 1 + 3 次元の場がソリトン上に局在化しているということが言えれば、ですけどね。それが言えるということをこれから見ていきましょう。

1+4次元時空でのキンク解を考える.

$$\phi_{cl} = \frac{|m|}{\sqrt{\lambda}} \tanh\left[\frac{|m|}{\sqrt{2}}\left(x^4 - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{定数}}}{X^4}\right)\right] \qquad x^4\text{方向に局所化.}$$

$$S = \int dx^0 dx^1 \cdots dx^4 \left[\frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_1\phi)^2 - \cdots - \frac{1}{2}(\partial_4\phi)^2 - V(\phi)\right]$$

ϕ_{cl}は解だが、ここで X^4 を定数ではなく

$$X^4 = X^4(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

という関数と仮定してみる。 $|m|X^4 \ll 1$ と仮定して ϕ_{cl} を $|m|X^4$で展開し、運動方程式に代入すると…

$$\left(-(\partial_0)^2 + (\partial_1)^2 + (\partial_2)^2 + (\partial_3)^2\right) X^4(x^0, x^1, x^2, x^3) = 0$$

$|m|X^4$の2乗を無視した.

これは1+3次元時空での無質量場の運動方程式である!

65

1 + 4 次元時空のキンク解を考えます。ここからやることは先程の Kaluza-Klein でサイン、コサインで展開した時と良く似たことをやるんですけども、それを見ていってください。1 + 4 次元時空でのキンク解を考えます。

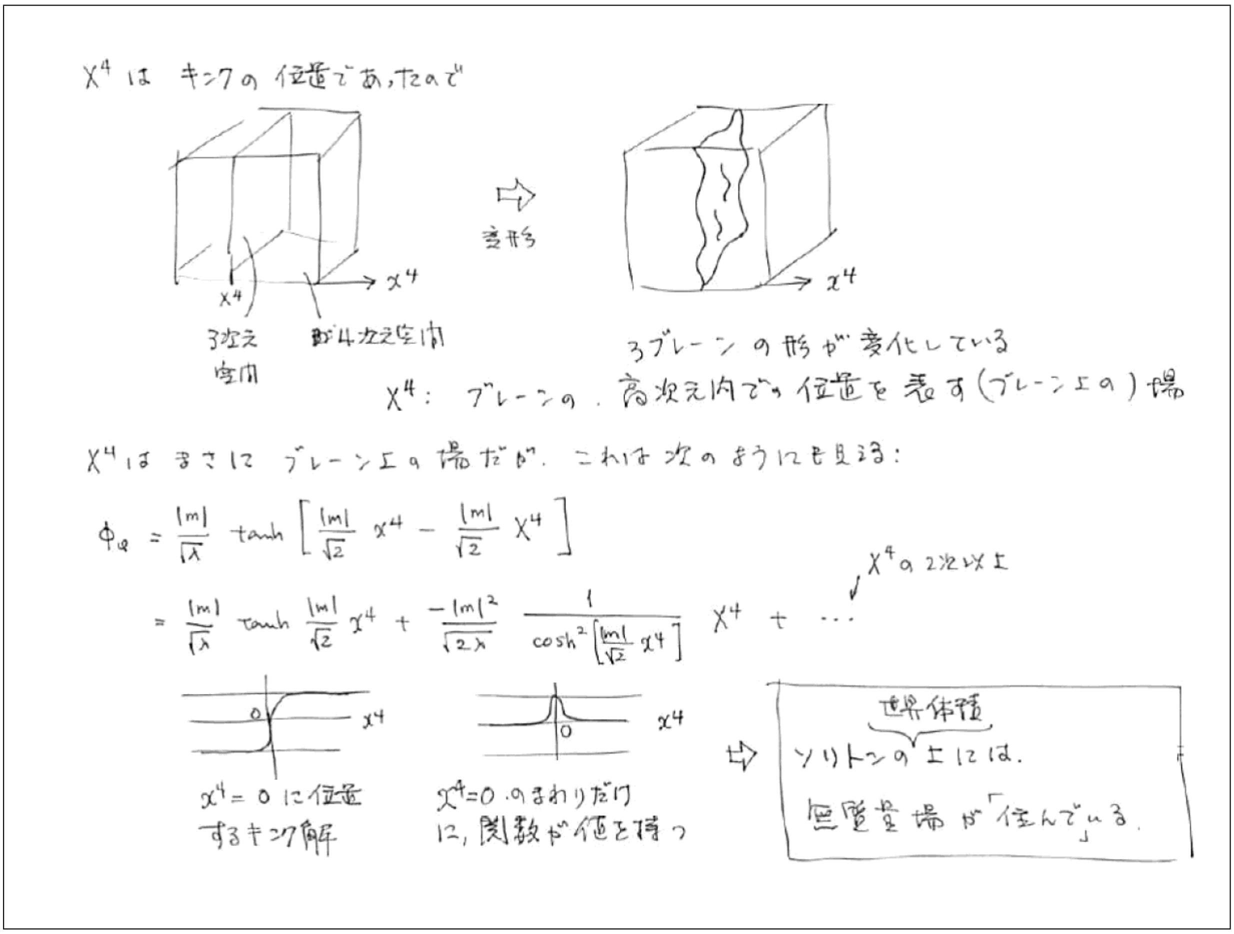
$$\phi_{cl} = \frac{|m|}{\lambda} \tanh\left[\frac{|m|}{\sqrt{2}}(x^4 - X^4)\right] \tag{36}$$

これは先程の特解ですね。さっきは x^1 という座標で考えていましたが、今は 1 + 3 次元時空をブレーンの上に出したいので、エクストラな次元の方は x^4 と書きます。x^0 から x^3 は考えずに x^4 だけ考える。x^4 方向に局在化している、その位置を X^4 と書きます。ラグランジアンはこんなふうに微分の項が増えただけでもともとのラグランジアンと一緒です。ただ、1 + 4 次元時空で考えているので、x^4 方向の積分とそれに対応する微分がある。この解は x^0 から x^3 までの依存性を全部忘れたとして考えると、もちろん同じ解が同じ方程式を満たしていることは明らかです。ここで、ϕ_{cl} というのはもちろん解なんですけども、X^4 が定数のときのみ解である。X^4 が定数ではなく、のこりの x^0 から x^3 までの関数というふうに仮定してみます。これは勝手に仮定しただけです。そうすると解ではなくなるわけです。しかし、運動方程式には微分の項、kinetic term があるので、これがもし、ある種の関係式を満たすと、また解になる可能性がありますね。それを見てみましょう。$|m|X^4$ が十分小さいと仮定して $\phi_{\rm cl}$ を $|m|X^4$ で展開し、運動方程式に代入したとします。すると、$\phi_{\rm cl}|_{X^4=0}$ は運動方程式の解になっているので、tanh のところは消えるわけですが、X^4 の一次の項が残りますので、

ちょうど、運動方程式としてはこんな形になります。

$$\left[-(\partial_0)^2+(\partial_1)^2+(\partial_2)^2+(\partial_3)^2\right] X^4(x^0,x^1,x^2,x^3)=0. \tag{37}$$

つまり、X^4 という場が、x^0、x^1、x^2、x^3 の微分について波動方程式を満たしている。これはまさに $1+3$ 次元時空での massless particle の運動方程式ではありませんか。このようにして、もともとのキンク解の定数のところを場に格上げして、そしてこれを、ブレーンの上に局在化しているモードだと理解することで massless の次元の下がった運動方程式が導出できるわけです。この方法はじつは moduli approximation という名前でソリトンの業界で呼ばれているものですが、もう少し詳細を見てみましょう。確かに、$1+3$ 次元時空で massless の運動方程式がでたけども、X^4 だけ特別扱いするのはどうかと。これは良いテクニックだけどそれはどうかと思ったとします。



そのことについてわかるようになるために、X^4 の意味を考えてみましょう。X^4 はキンクの場所でした。これが定数の時にはキンクがどこにあるかという場所を特徴付けていました。(スライド左上図を指して) 横軸が x^4 方向で、上下方向と奥行きの方向が $1+3$ 次元時空だと思いますと、ソリトンはこの場所にあったと。次に、$X^4 = X^4(x^0, x^1, x^2, x^3)$ という関数にしますと、(スライド右上図を指して) この平べったい面がこんなふうにぐにゃぐにゃになっているということに相当しているということがわかります。つまり、この方向の x^0 から x^3 までの関数としてこの場所が与えられるわけですから、その関数が、場所によって値が違うわけですから、こんなふうになる。3 ブレーンの形が変化しているんです。つまり、X^4 は非常に特徴的な関数で、ブレーンの高次元面での位置を表すブレーン上の場であると。X^4 はまさにブレーン上の場であることが次のようにしてわかります。先程、X^4 について展開するといいましたが、それをちょっと明らかにやってみましょう。

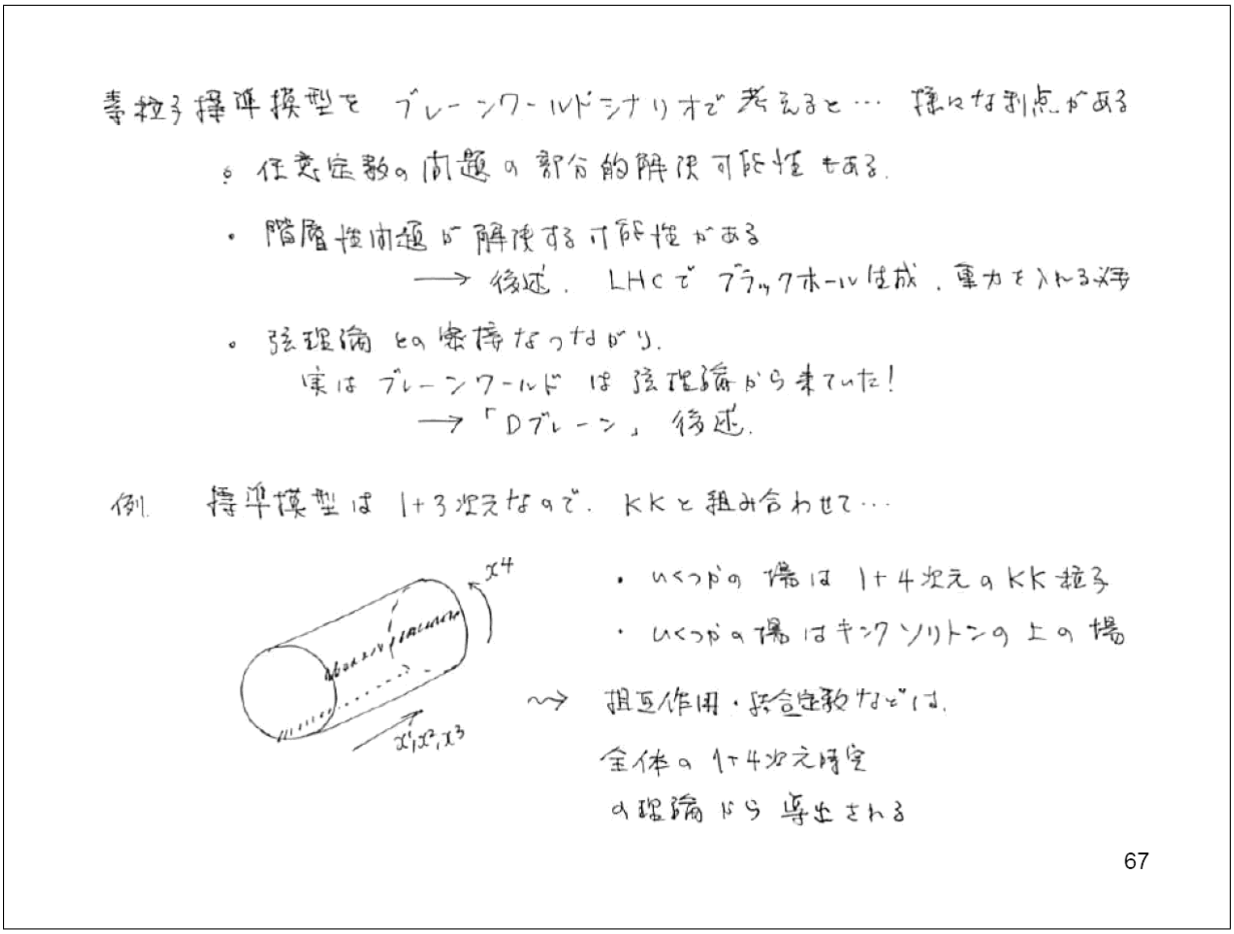
$$\phi_{cl} = \frac{|m|}{\lambda} \tanh\left[\frac{|m|}{\sqrt{2}}(x^4 - X^4)\right] \tag{38}$$

これが古典解で、X^4 が関数だといま思っているわけです。X^4 が小さいと思って、tanh を展開します。

$$\phi_{\rm cl} = \frac{|m|}{\sqrt{\lambda}} \tanh \frac{|m|}{\sqrt{2}} x^4 - \frac{|m|^2}{\sqrt{2\lambda}} \frac{1}{\cosh^2\left[\frac{|m|}{\sqrt{2}} x^4\right]} X^4 + \cdots \tag{39}$$

すると、初項は $X^4 = 0$ と置いたもともとの解ですね。第二項は tanh を微分しましたから、$\cosh^{-2}$ です。この関数型をプロットしてみると、もちろん初項は $x^4 = 0$ に位置するキンク解ですが、この次の項は、つまり、

X^4 のゆらぎが重要な項は $\cosh^{-2}$ という形をしていて、そのかたちは確かに $x^4 = 0$ のまわりに局在化しています。すなわち、$X^4 \neq 0$ にしてもその効果は実はブレーンの場所あたりの場の配位にしか効かないということです。これをもって確かに X^4 という場はブレーンの上に住んでるということがわかるわけです。もしブレーンの上に住んでいなかったら、ϕ という場の配位の、例えば、ブレーンの場所からずいぶん離れたところがいろいろ変わってくるはずなんですね。今見たのは、X^4 というのがちょうどブレーンの場所のところのみ値を変えるそういう自由度であったということを見たわけです。ソリトンの世界体積の上には massless の場が住んでいるということが言えるわけです。このことは非常に一般的で ϕ^4 模型もキンク解しか考えませんでしたが、全然違う場の理論をもってきてキンク解を考えたとしましょう。そうしたら、その場所を特定するパラメータが絶対あるはずですね。初めに並進不変性があったわけだから、その解にはそのようなパラメータが必ずあるはずです。そのパラメータをちょっと関数に格上げしてやる。それはいつだってできます。その格上げしたやつをもともとの運動方程式に代入すれば、必ず、massless の場が出ます。なんで必ず massless かというと、この X^4 が定数であれば、いつでも解であるんですね。X^4 が定数であるということは微分したらゼロであるということです。なので、ここに質量項があったら、そういうことは全然おきませんね。というわけで、どのような場の理論から出発しても、ソリトン解を作って、そのパラメータを関数に格上げすれば、必ずそれはソリトン上の massless な場として見れるわけです。このことは実は、南部・ゴールドストーンの定理と関係しています。南部・ゴールドストーンの定理というのはもともとの理論に、ある global な対称性があったとしましょう。それを自発的に破るとしましょう。そうすると、その自発的対称性の破れに関連して、massless の particle が必ず出るという主張です。実はソリトンの場合は並進対称性を破っているので少し応用が難しいのですが、その思想に沿ったものであるのは明らかですね。いま、並進対称性をソリトン解で自発的に破ったと、そうするとその破ったところの上に、確かにスカラー場が massless で出ますというわけです。かなり一般的であることがわかりますね。



素粒子標準模型をブレーンワールドシナリオで考えると様々な利点があります。一つめ、任意定数の問題の部分的解決の可能性があります。二つ目、階層性問題が解決する可能性がある。これについてはあとで見ます。三つめ、弦理論と密接なつながりがあることが明らかになります。実はブレーンワールドの考え方は弦理論から来ていました。それは、弦理論で非常に自然にソリトン的な物体が考えられるからです。それを D ブレーンと呼びます。さっきのものはブレーンと呼びましたが、ブレーンと D ブレーンは違います。どう違うかというと、ブレーンというのは非常に大きなカテゴリーで、ある次元の空間の中に局在化した膜とかひもとかそういうのは全部ブレーンと呼びます。ですから、粒子もブレーンですし、ひももブレーンですし、膜もブレーン。弦理論の出てくる D ブレーンはその中のある特殊なものです。それについては明日お話しましょう。標準模型は 1 + 3 次元なので、例えば Kaluza-Klein の考え方と、ソリトンの考え方を組み合わせて、いくつかの場は 1 + 4 次元の Kaluza-Klein 粒子、いくつかの場はキンクのソリトン上の場というコンビネーションも考えることができます。相互作用や結合定数などは全体の 1 + 4 次元時空の理論を考えて、そっから導出されるわけですから、様々な 1 + 3 次元の場、そして様々な質量、そして様々な結合定数はこの高次元のところで統一される可能性があるわけです。こんな素粒子の現象論模型はこの 10 年ほどの間、ものすごく研究が進みまして、丁度この夏の学校の、講義 C で尾田欣也さんがその話をします。ですので、彼はこの話をされると思うんですけども、興味がある人は講義を聞いてください。今日の話はこのキンク解を考えると、様々な任意定数が統一される、様々な場が統一される、そして、あとで見るように、階層性問題と弦理論との関係が理解できる、という意味で面白いトピックになっているわけです。

$$\phi = \phi_{cl} + \delta\phi$$

$$\delta\phi = \frac{\sinh\left[\frac{|m|}{\sqrt{2}} x^4\right]}{\cosh^2\left[\frac{|m|}{\sqrt{2}} x^4\right]} \psi(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

とすると、ψ は 1+3 次元の、質量のある自由場の運動方程式

$$\left(-\partial_0^2 + \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 - \tilde{m}^2\right)\psi = 0$$

を満たす

$$\tilde{m} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, m$$

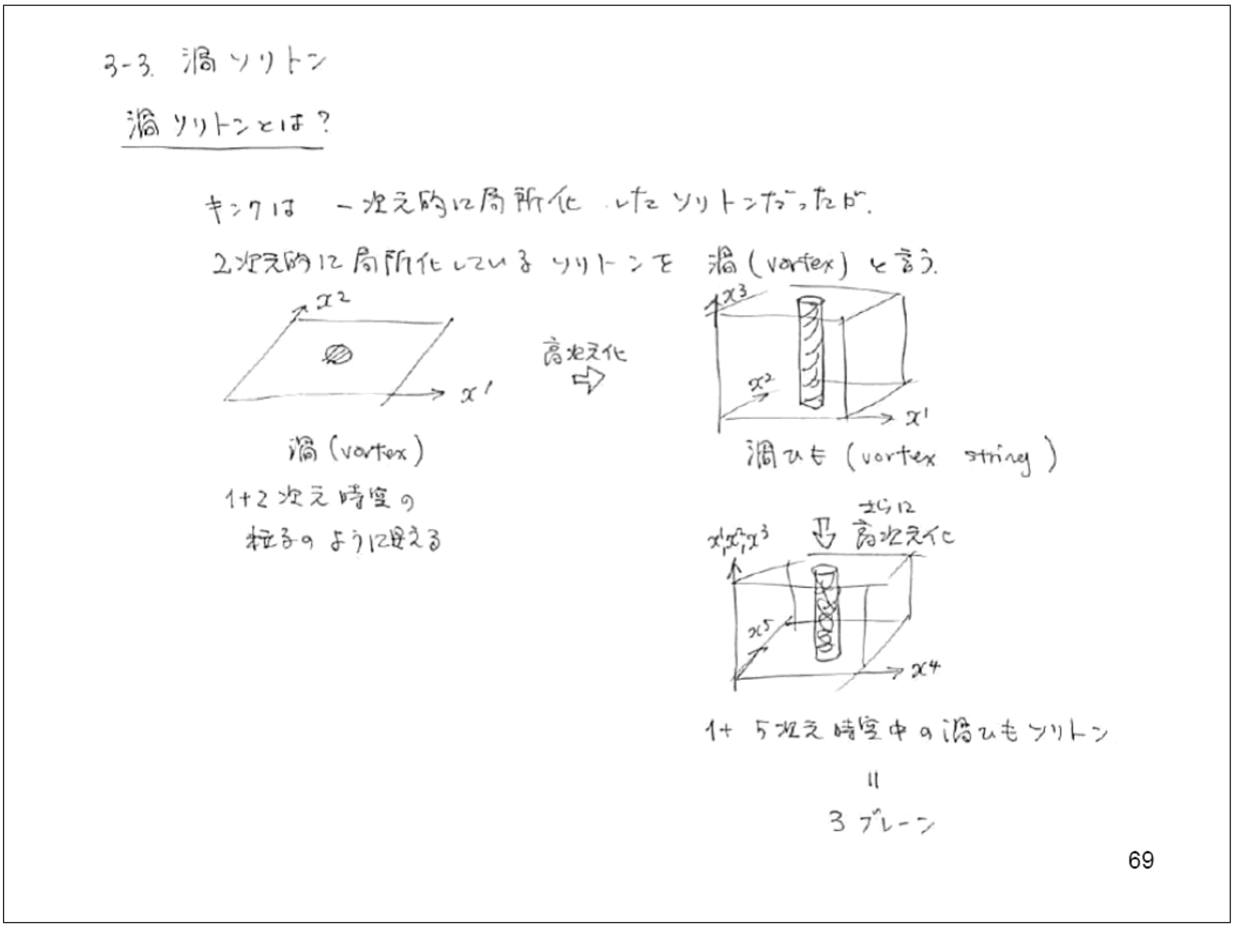
これもブレーン上に局在化した場である。

68

ϕ の微小なズレとして、X^4 というのを考えました。それは massless でした。じゃあ、massive なやつはあるのかということを考えてみましょう。実は、質量があるものが出てきます。そのうちの一つを見てみましょう [16]。$\phi_{\rm cl}$ という解の周りに、$\delta\phi$ というのをくっつけたとします。で、$\delta\phi$ の前の係数をさっきは $\cosh^{-2}$ でしたが、$\sinh\cosh^{-2}$ とこんな関数に勝手に変えたとします。そうすると、この係数場の ψ はさっきの手続きをもっかいします。つまり、運動方程式に代入して、この ψ にかんする運動方程式を落としますと、丁度、質量項が出てきます。この質量項はもともとの ϕ^4 模型の質量と $\tilde{m} = \sqrt{\frac{3}{2}}m$ のように関係しています。この前の関数をみて分かる通り、これもブレーンの上に局在化した場です。ですので、massless の方だけではなく massive なものも出てくるんです。じゃあ、この ψ の係数はどうやって出してきたかというと、これはですね、ψ の係数を任意関数にしておいて、$\phi = \phi_{cl} + \delta\phi$ を元々のラグランジアンに代入し、$\sinh\left[\frac{|m|}{\sqrt{2}}x^4\right] / \cosh^2\left[\frac{|m|}{\sqrt{2}}x^4\right]$ になるように決めました[*5]。

明日は他のソリトンの例を説明し、その後、D ブレーンを説明して、弦理論でそれがどういうふうに応用されているか、あと、二つの問題、階層性問題と強結合の問題がどのように弦理論で解消されるかについて述べたいと思います。では今日はこれでお終いですが、質問ありますか？

[*5] 場のゆらぎを $\delta\phi(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4) = Y(x^4)\psi(x^0, x^1, x^2, x^3)$ と変数分離し、運動方程式に代入すると、$Y(x^4)$ が満たすべき方程式は系のポテンシャルに対する 1 次元 Schrödinger 方程式になる。したがって、方程式の解は束縛型と散乱型が存在し、前者は離散的な質量、後者は連続的な質量のスペクトラムを持つ。



3.3 渦ソリトン

渦ソリトンとは？

昨日の話では、弦理論の一番アイディアになるところを説明しました。素粒子論の課題としまして、特に５つ項目を挙げました。まずは理論的な問題として、

1. 任意定数の問題
2. 階層性問題
3. 重力の量子化の問題

   そして技術的な問題として、

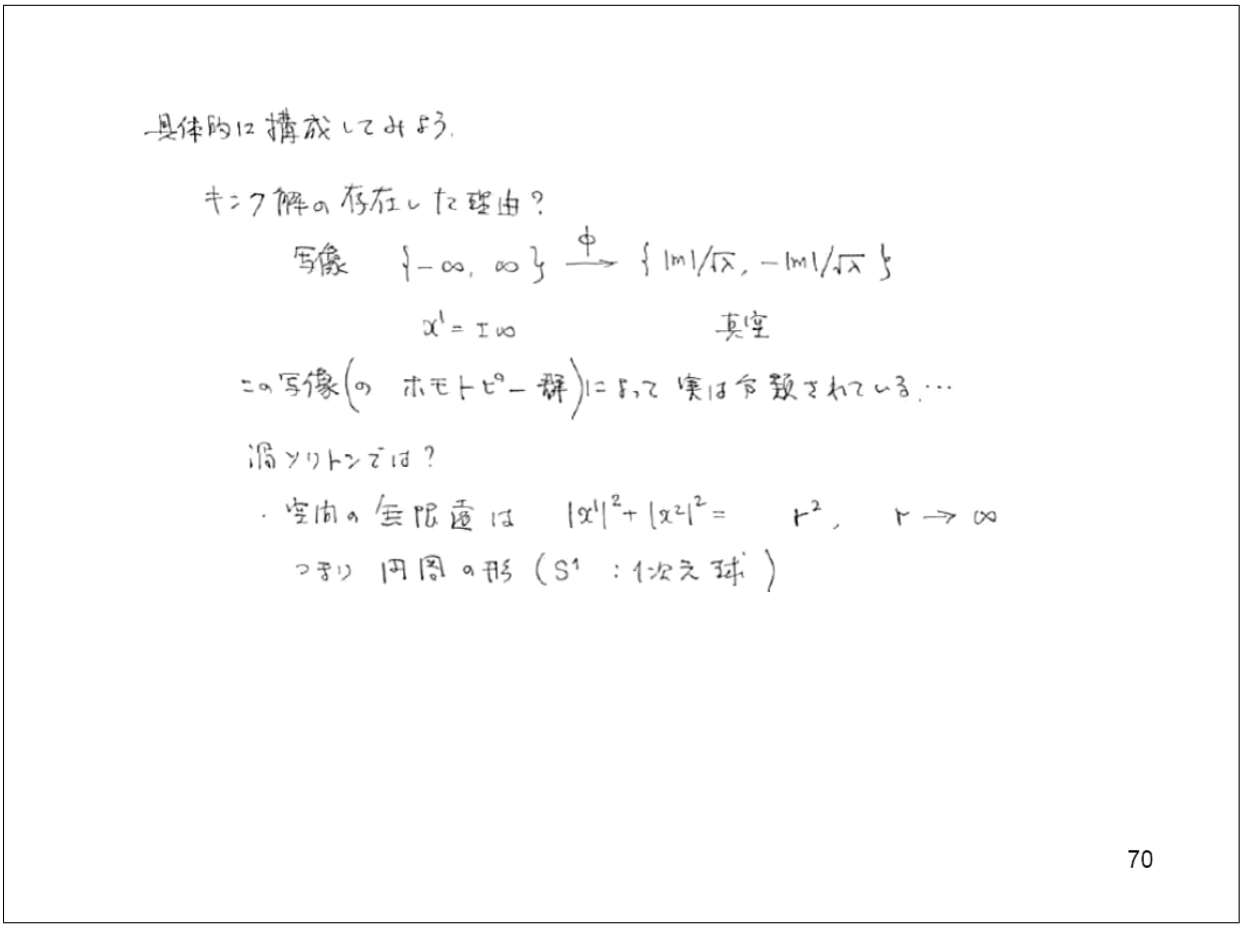
4. 強結合の問題
5. 閉じ込めの問題

この５つの問題を挙げました。そのうち、１つ目と３つ目の任意定数の問題と重力の量子化の問題。これについては、弦理論がどういうふうに改善する可能性を与えているか述べました。重力の量子化については、そもそも発散がありません。ですので、重力は量子化できる。そして任意定数の問題については、高次元というものが自然に出てくるのでそこからうまくコンパクト化、もしくはブレーンワールドなりを使うことで、様々な結合定数がうまく constraint を与えることができる、というわけでした。

ここでは残りの３つの問題についてお話したいと思います。すなわち、階層性問題がどのように解決される可能性があるか、そして技術的な問題、強結合の問題とクォークの閉じ込めの問題。それについてお話したいと思います。これは昨日の目次ですが、この目次で言うと、ちょうど 3-2 まで終わりました。今日は 3-3、3-4 と、ソリトンを、異なる種類のソリトンをお話しまして、次に D ブレーンの話に入ります。最後に階層性の問題と強結合の問題、それらがどのように解決される可能性があるかということについて述べます。講義まだ半分もいってない気がしますが、このスライドは 140 ページありまして、昨日ちょうど 70 ページ終了しました。非常に良いペースです。ですので、それを言っているのは昨日たくさん質問ありましたが、どんどん質問してもらってかまわないということです。分からないことがあれば、すぐつっこんでください。質問ありますか。

それでは、今日は「ソリトンとモノポール」というところからお話ししましょう。昨日お話ししたところは、ソリトンとキンク解というところでした。これは１次元的に局在化したような物体で、それを高次元に拡張すると、うまいことブレーンワールドみたいなシナリオが出てきて、ソリトンの上に局在化している massless の場というものが出てきたわけです。今度は渦ソリトンと言っているのは、これは 2 次元的に局在化したようなソリトンです。1 次元に局在化したソリトンがあれば、2 次元、3 次元のソリトンがあるっていうのは明らかですね。しかし　どういうふうな一般化をすれば、そういうものが作れるのかということはあまり明らかではないです。基本的には昨日書いた ϕ^4 模型のラグランジアンをちょっと小細工して書いてみただけです。そうすると、エネルギーが局在化して、しかも有限のエネルギーのソリトン解が、たくさん見つかってきます。それを 2 次元に局在化したものがソリトンで、3 次元に局在化したものをモノポールと呼びます。4 次元はどうかというと、もちろんありまして、4 次元はインスタントンと呼ばれてます。それでは 5 次元はどうか。5 次元は残念ながらあんまりよく知られていません。その次は 8 次元になります。知られてるのはって意味ですよ。5 次元、6 次元、7 次元、それも面白い物理があるはずなんですが、あまりよく分かってません。8 次元が若干分かっていて、その次はよく分かっていない。8 次元以上のものを　考える必然性はブレーンワールド的にはモチベーションがちょっと少ないですね。なぜなら超弦理論に応用したいと思う場合は、超弦理論は 10 次元から出発しますから 10 次元を我々の時空である 4 次元にコンパクト化、もしくはブレーンワールドを考えたとしても 6 個下げないといけないです。6 より大きいもの考えたらそういう意味ではモチベーション少ないですね。でも　もっと高次元から出発したいと思う場合、もしくは我々の時空間での局在化したものを扱いたい場合、そのときはもちろん高い次元のこの 1234 よりもっと高いものがあってもいいです。ではこの次のセクションについて述べたいと思います。

それでは　渦ソリトンについて述べたいと思います。昨日お話ししました、キンクもしくはドメインウォールとも呼ばれてるんですけども、ここではキンクって単語で統一したとしましょう。キンクは 1 次元的に局在化したソリトンでした。　けれども、2 次元的に局所化してるものを考えてみますね。それを渦と呼びます。渦と言ってる理由は、確かに渦は巻いてるというそういう描像が正しくて、それがどういうふうにして出てくるか見たいわけです。英語では vortex。例えば、$1+2$ 次元時空の中でボーテックスを考えると、これは $1+2$ 次元時空の中では粒子のように見えます。これは昨日と同じで、$1+1$ 次元時空のキンクを考えたらそれは粒子に見えるだけです。しかしこれを高い次元の中にこのようなものを置くと、渦ひもと呼ばれるものができます。ボーテックスストリング。さらに高次元化して、例えば $1+5$ 次元の中の渦ひもソリトンを考えれば、これは 3 ブレーンになります。なので、昨日と同じようにブレーンワールド的な見方ができるってのは明らかですね。面白いことに弦理論的なブレーンワールドの応用ってのは、ほとんどキンクもしくはドメインウォール解に限られています。それより高い次元のものを使うと、現象論的にちょっとあまり欲しくない性質が色々現れてしまって、そのためにブレーンワールドシナリオにこういうものが使われることはあんまり多くはないですけど、一般的にはこういうふうにして高い次元の一般化が考えられるわけです。

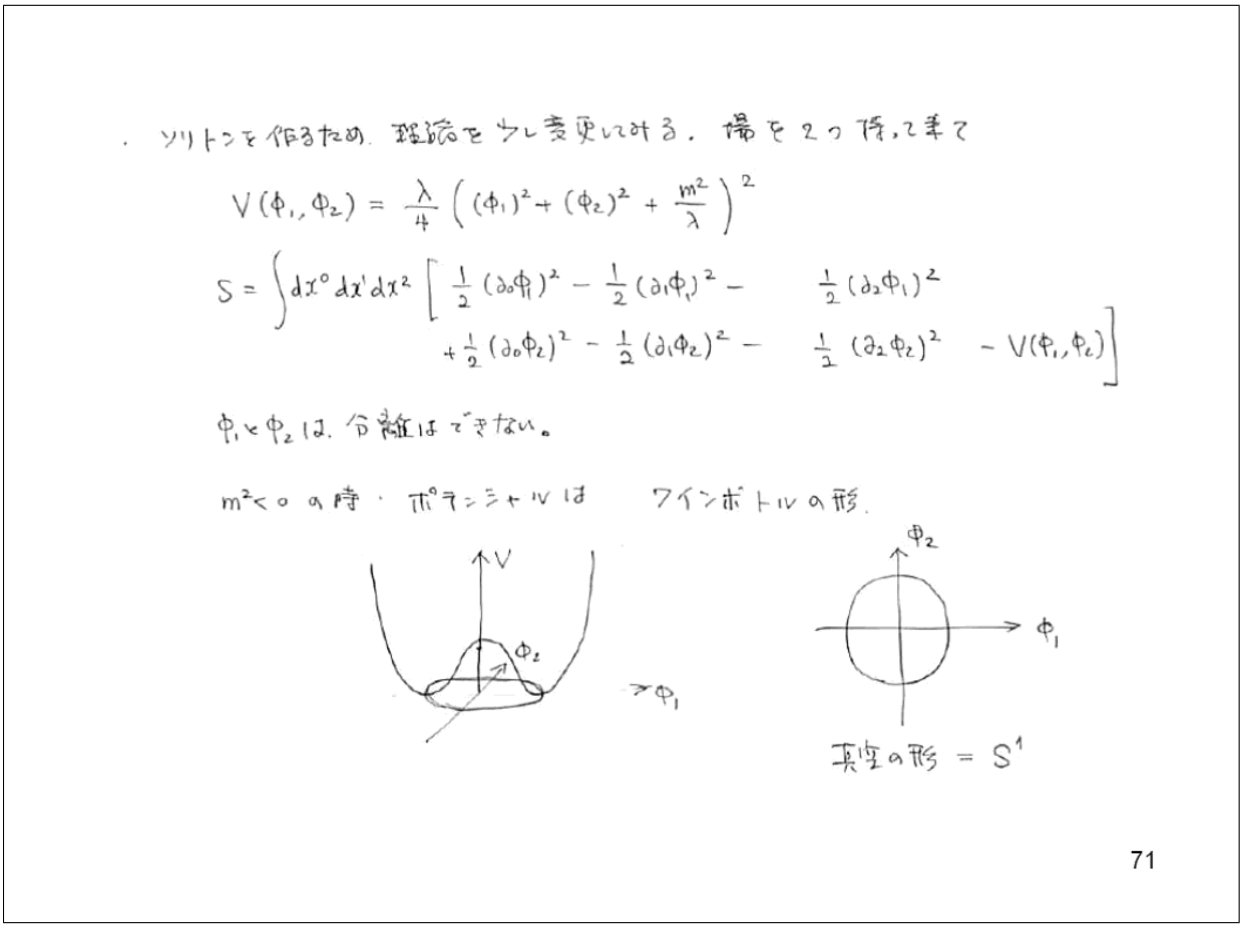


それでは、具体的に構成していきましょう。キンク解が存在した理由を振り返ってみますと、こんなふうでした。こんなふうな写像

$$\{-\infty\ ,\ \infty\}\ \xrightarrow{\phi} \left\{\frac{|m|}{\sqrt{\lambda}}\ ,\ -\frac{|m|}{\sqrt{\lambda}}\right\} \tag{40}$$

を考えて、すなわち、x_1 が $\pm\infty$ の集合 $\{+\infty, -\infty\}$ から、真空の集合 $\{$(右側の真空), (左側の真空)$\}$ へのマップを考えましょう。ϕ という場はもちろん、x_1 から全ての値についての写像になってるんですけど、特にこの無限遠と真空、そこまでの座標を見てみましょう。これが non trivial になってるときに、キンクが出たわけです。ですから、この写像によってキンク解は分類されるってわけです。例えば、$-\infty$ はマイナス、$+\infty$ がプラスの真空にいくんだったらキンク解だし、もし反対だったら反キンク解。この 2 つの無限遠が同じ点にいく場合はキンクではない。ソリトンはどうでしょうか。

無限遠の集合というのは、今はこういうふうに 2 点ではなくて $x_1^2 + x_2^2 = r$、これは極座標ですね。で、r を無限大にした。それが無限遠です。つまり円周の形をしてるわけです。円周は S^1 と書くわけです。1 次元の球。左側に入るべき記号は円周、すなわち S^1 なんです。



ソリトンを作るために理論を少し変更します。実はさっきキンクを作ったときの ϕ^4 模型では残念ながらソリトンは作れません。次のように変更します。x_1 と x_2 と2つ座標を入れたことに対応して、場を2つにします。昨日は ϕ という場が1つだけでしたが、ϕ_1 と ϕ_2 っていう実スカラー場を入れます。同じように結合定数を λ と書きます。m^2 は同じように負にとっておく。ラグランジアンを書き下すのは簡単で、ϕ_1 のものに加えて ϕ_2 のものを書く。しかしポテンシャル項は ϕ_1 と ϕ_2 のそれぞれの和で書くことができて、こういうふうに相互作用が入ってるわけです。

$$V(\phi_1, \phi_2) = \frac{\lambda}{4}\left((\phi_1)^2 + (\phi_2)^2 + \frac{m^2}{\lambda}\right)^2 \tag{41}$$

m^2 が負のときはポテンシャルは、いわゆるワインボトルの底の形をしています。つまり、$(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2 =$ (ある定数) となるところが真空なんです。この一般化では真空の形が S^1 になってます。昨日のキンクの例では、２点から２点への写像でソリトンが作られました。今日は S^1 から S^1 への写像でソリトンが作られます。

・理論の対称性.

$$\phi_1(x)+i\phi_2(x) \longrightarrow e^{i\varphi}\left(\phi_1(x)+i\phi_2(x)\right) \qquad \phi_1(x)+i\phi_2(x)=\underbrace{\phi(x)}_{\text{複素場}}$$

場を複素に組んだ時の、位相を変化させる。

$$S=\int dx^0\,dx^1\,dx^2\left[-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi^*\partial_\nu\phi\,\eta^{\mu\nu}-V(|\phi|)\right]$$

$$V(|\phi|)=\frac{\lambda}{4}\left[|\phi|^2+\frac{m^2}{\lambda}\right]^2$$

は $\phi(x)\to e^{i\varphi}\phi(x)$ で不変。

真空として1つ. $\phi_1=\frac{|m|}{\sqrt{\lambda}}$, $\phi_2=0$ を例えば選んでおくと. 対称性が自発的に破れていることになる.

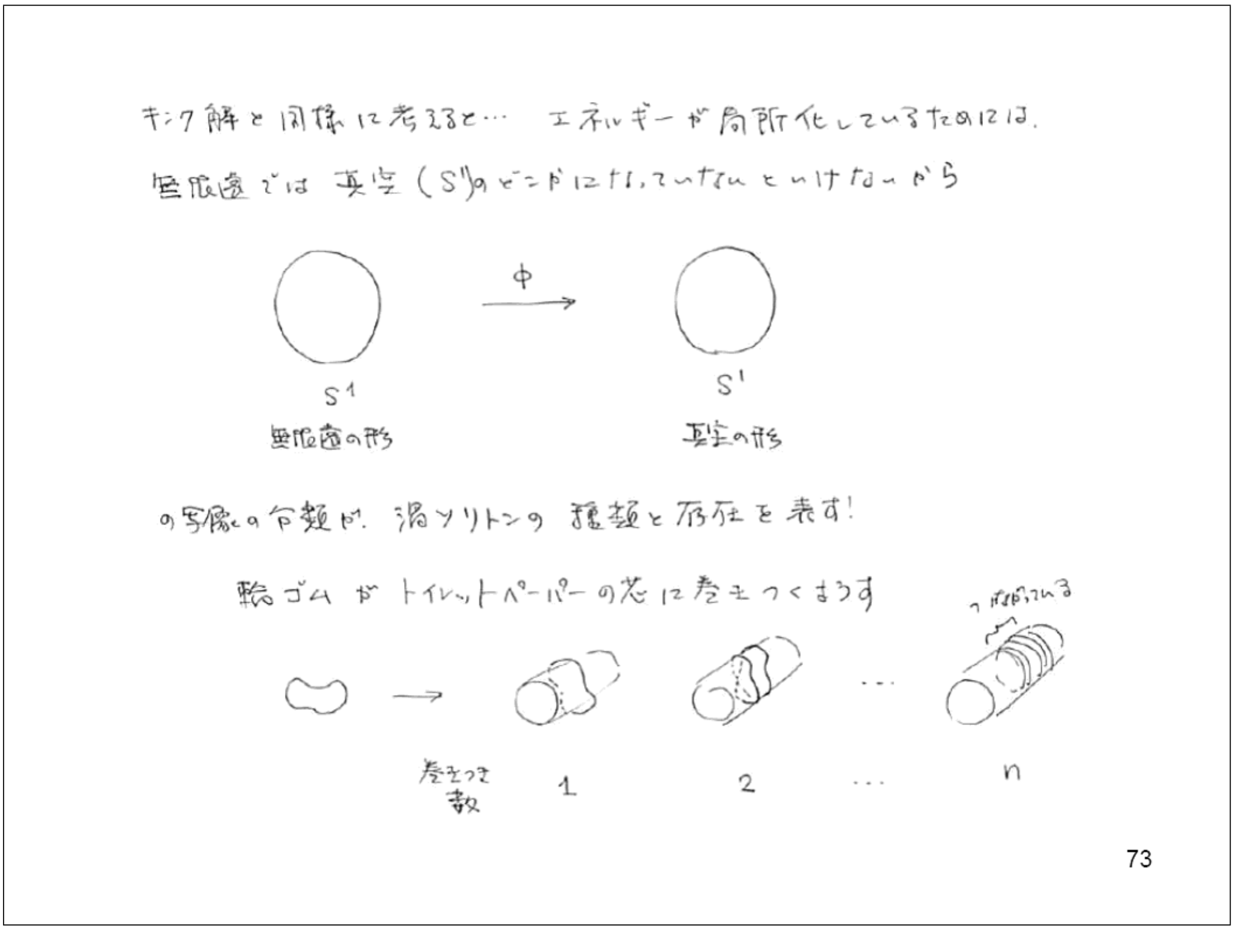
72

この理論には ϕ_2 を導入したおかげで対称性があります。$\phi_1+i\phi_2$ という複素スカラー場をコンビネーションとして取ってみますと、このコンビネーションの位相を定数だけ変える、そういう対称性の変換で作用が不変になっています。これは作用を見れば明らかで、ϕ_1 と ϕ_2 がそれぞれちょうど２乗＋２乗の形で全部入っていますから、極座標と同じような変換で、原点を中心とする回転変換をすると action が不変になってるわけです。例えば、真空としてその中で１つだけ、

$$\phi_1=(\text{ある定数})\ ,\ \phi_2=0 \tag{42}$$

というところを選べば、この対称性がやはり自発的に破れてるということになるわけです。

昨日は W の形をしたポテンシャル、左の真空か右の真空かどちらを選ぶかというので、自発的に符号を変える対称性が破れている。今日も全く同じで、この円周の内どこかポッて１点を選んでしまいますと、このグルグル回す対称性がそこで破れてしまうわけです。これは手で選びましたが、もちろんどこに選んでも話は同じでその意味で対称性はラグランジアンの形から大丈夫なわけですけども、自発的にそれをポテンシャルのおかげで破る、ということになるわけですね。これが自発的対称性の破れです。



キンク解と同様に、この真空を考えたときにソリトンがどのように出てくるか見てみましょう。キンク解のときの議論はこうでした。ソリトンから離れたところでは、エネルギーは 0 になってないといけないんです。なぜならソリトンの定義はエネルギーが局所化しているものだからです。すると、この場合も同じで、エネルギーが局所化していくためにはソリトンから離れた無限遠では、真空のどこかになってないといけないので、無限遠の形である S^1 から真空の形である S^1 への写像、これがソリトンを分類するということになります。この写像は非常に簡単ですね。輪ゴムとトイレットペーパーの芯を持ってきて、輪ゴムをトイレットペーパーの芯に巻きつけたと、そうすると巻きつき数によってきます。これがソリトンの種類と存在を表しているわけです。

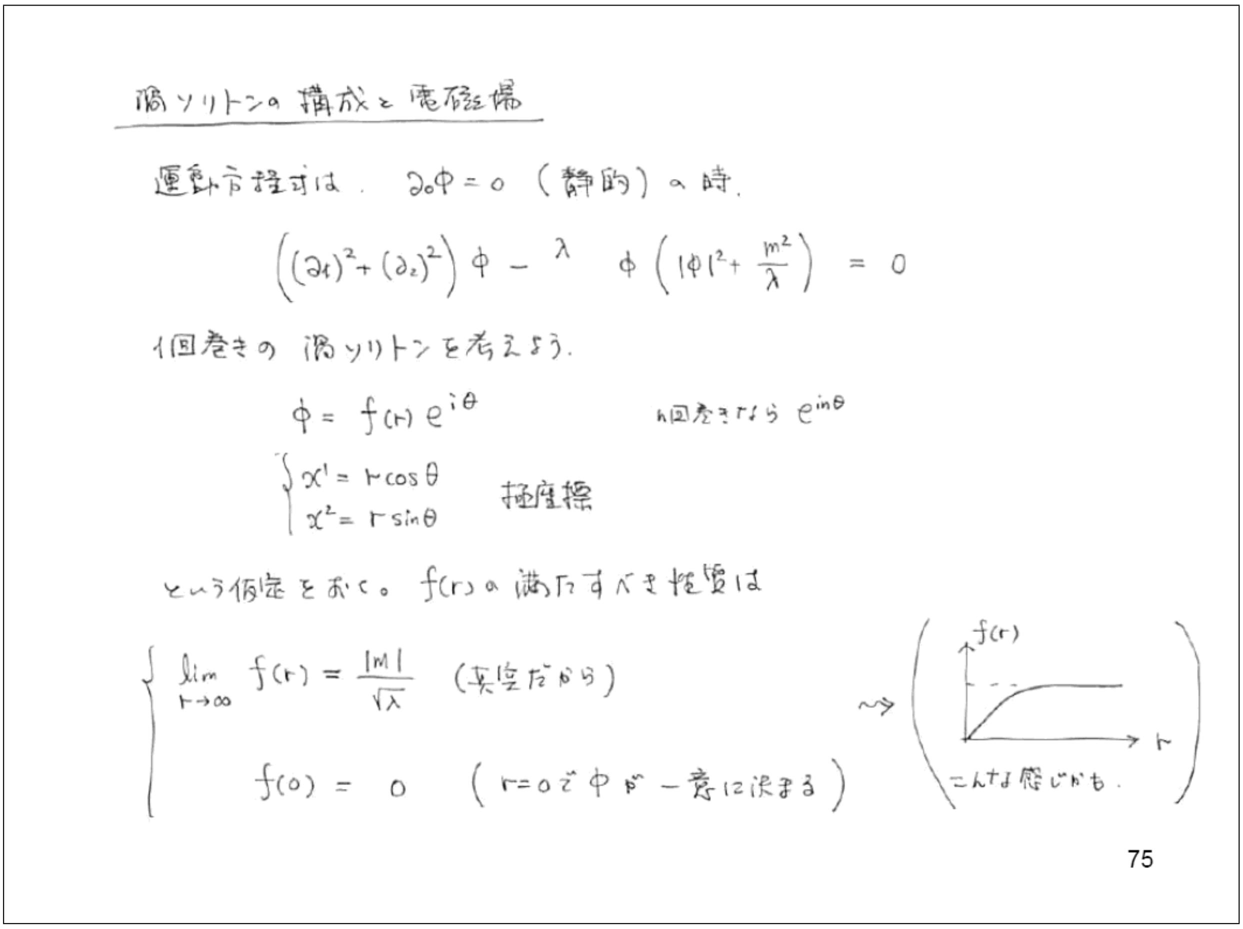
輪ゴムに向きがあるとすると、巻きつき数 -1 も考えられます。向きがあると考えるのは、もちろんこの S^1 が先程の変換で向きづけができるわけです。向きづけができない場合は今は考えてないです。先ほどの作用から見ると真空は確かにこっち向きに回るということが意味づけられていて、向きづけが可能です。すると、この巻きつき数は負の数を取ることができる。もちろん 0 も取ることができるというわけです。

これが渦ソリトンの粒子数に対応する。

−1のは 反渦 (anti-vortex) と呼ばれる.

74

この巻きつき数がソリトンの粒子数というものに対応しています。昨日のキンクは、確かに粒子のように見えても実はちょっと粒子と違うところがありましたね。キンクが２個、もしくは反キンクが２個、そんな配位は作れないわけです。真空が２コしかないから。一方もしトタン屋根みたいのを考えれば、キンクが２個とか３個とかそういうのを考えることができますね。トタン屋根だったら、真空がたくさんあって右に何個ずれるか左に何個ずれるかそういう数が定義できます。でも ϕ^4 模型の場合は真空が２個しかなかったからキンクが２個とかキンクが３個とかそういうのは作れなかった。今の場合はそうではなくて、ソリトンボーテックスが１個２個３個ということが考えられます。-1 のものは anti-vortex というふうに呼ばれます。昨日のものよりさらに粒子に性質が近くなったと思われますね。



渦ソリトンの構成と電磁場

では、運動方程式を解いて具体的にその渦ソリトンを構成してみましょう。昨日は tanh の形の解が出てきました。今日はどうでしょうか。まず、昨日と同様に時間微分が 0、static なソリトンを考えたとします。すると運動方程式は簡単で kinetic term とポテンシャル term の ϕ 微分が 0、これは ϕ がもう既に複素場の notation に入っていますが、こんな形になります。

$$\left((\partial_1)^2 + (\partial_2)^2\right)\phi - \lambda\phi\left(|\phi|^2 + \frac{m^2}{\lambda}\right) = 0 \tag{43}$$

１回巻きのソリトンを考えてみましょう。これは偏微分方程式なので解くには ansatz が必要ですが、次のような ansatz をおいてみます。

$$\phi(r,\theta) = f(r)e^{i\theta} \tag{44}$$

つまり、ϕ は r の関数である $f(r)$ と $e^{i\theta}$ の積とおいてみます。ここで極座標を取りました。

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta \\ x_2 = r\sin\theta \end{cases} \tag{45}$$

n 回巻きなら $e^{in\theta}$ というふうにおいておいたとします。そうすると、１回巻きのソリトンをそういうふうに置けば、実は $f(r)$ の満たすべき性質は次のようになります。すなわち $f(r)$ の $r \to \infty$ は真空の値、一方

$f(0)=0$。グラフで書くと上図右下のようになります。$r=0$ のときは 0 ですが、無限大にいくとこれが定数になる。こんなものを考えるとどうしてソリトンになってるかっていうのは、実はこの ϕ の形から明らかですね。$r\to\infty$ にいくと $f(r)$ は定数になりますから、だいたい $e^{i\theta}$ になります。$e^{i\theta}$ というのは、θ が 1 回回ると ϕ が 1 回回るというわけですから、先ほどの S^1 から S^1 への写像の 1 回巻きを実現する。

輪ゴムはゆるんでもいいですが、これはゆるんでいる輪ゴムは表してないですね。輪ゴムがゆるむということは、そこで余分なエネルギーを稼いでいる。運動方程式を解くときには余分なエネルギーがあればそれは完全にいつも minimize されますから、そういうのはないはずですね。ですから、ちょうど θ がちょっと動くとどういうふうに真空が動くかは linear になるように $e^{i\theta}$ っていうのが実現されるはずなんです。これで実際にこの運動方程式が解けるということが分かります。

$$\partial_1^2+\partial_2^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

より、上の運動方程式は $f'' + \frac{1}{r} f' - \frac{1}{r^2} f - f\left(f^2+\frac{m^2}{\lambda}\right) = 0$

この式を解析的に解いた人はいない… しかし数値解はある。

問題点：ソリトンの質量は ∞ となる。

f を、r が大きい所で $f=\frac{|m|}{\sqrt{\lambda}} + c r^a$ $(a<0)$ としよう。

$f^2+\frac{m^2}{\lambda} = 2\frac{|m|}{\sqrt{\lambda}} c r^a + \cdots$ $\quad f\left(f^2+\frac{m^2}{\lambda}\right) = 2\frac{|m|^2}{\lambda} c r^a + \cdots$

$f' = car^{a-1}$. $\quad f'' = ca(a-1)r^{a-2}$.

$$\therefore f'' + \frac{1}{r} f' - \frac{1}{r^2} f - f\left(f^2+\frac{m^2}{\lambda}\right)$$
$$= \left(ca(a-1) + ca - c - 2\frac{|m|^2}{\lambda} c\right) r^{a-2}$$
$$= \left(a^2-1-\frac{2|m|^2}{\lambda}\right) c r^{a-2} \qquad \therefore a = -\sqrt{1+\frac{2|m|^2}{\lambda}}$$

$\partial_1^2+\partial_2^2$ を極座標で書くと、教科書に載ってるような公式を使って、特に θ の微分のところは $\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ という形になります。なので　この ansatz を運動方程式に代入しますと常微分方程式になりまして、f の方程式としてこのような非線形な方程式になります。

$$f'' + \frac{1}{r}f' - \frac{1}{r^2}f - f\left(f^2+\frac{m^2}{\lambda}\right) = 0 \tag{46}$$

昨日の非線形な方程式は、tanh という解がありました。ところが、この非線形方程式を解析的に解いた人はいません。これが（解析的に）解ければ、ものすごい良いことだと思います。是非チャレンジしてみてください。もちろんこれ mathematica とかそういうのに入れて数値解を得ることは簡単です。

しかし、このソリトンには実は問題点があります。得られた後の関数形を、ハミルトニアンに代入してハミルトニアンの空間積分を行ったとします。そうするとそれは発散してしまいます。昨日のキンクの場合は tanh の解をハミルトニアンに入れて空間積分計算すると有限です。つまり、そのソリトンは確かにそういう質量を持った粒子のように見えます。ところがこの場合はですね、この数値解を、もしくは数値解ではなくこれから解きますが、解析的にこれは分かるんですけども、ハミルトニアンに代入して積分をすると発散します。発散するということは、残念ながらそれは粒子のようにはなってないということですね。それは困る。ソリトンは、この理論に出てくる有限エネルギーの運動積分の動けるような物体だと思いたいわけです。もちろん、動かなくてもいいという立場もあります。それはこれをどのように応用するかに依りますが、これを動いてほしいと思うと、この発散は問題なわけです。どうしてソリトンの質量が無限大になるかということをちょっと計算で見てみましょう。

エネルギーを決める H は

$$\int r\,dr\,d\theta\ \left[(\partial_r\phi)^2 + \underbrace{\frac{1}{r^2}(\partial_\theta\phi)^2}\right] + \cdots \sim \int r\,dr\,d\theta\ \frac{1}{r^2}\left(\frac{|m|}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 \sim \left[\log r \cdot \frac{|m|^2}{\lambda}\right]^\infty$$

：発散している

これを救うために，理論を更に修正する

⇝ ゲージ場の導入

元々の理論の対称性：$\phi(x) \to e^{i\varphi}\phi(x)$　φ は定数

これを，φ を関数に格上げする！

$$\phi(x) \to e^{i\varphi(x)}\phi(x)$$

すると作用は不変ではないが，次の変更で不変にできる

$$\partial_\mu\phi(x) \rightsquigarrow \partial_\mu\phi(x) - ieA_\mu(x)\phi(x) \equiv D_\mu\phi(x)$$

「共変微分」

変換性 $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\varphi(x)$

を用いると，$D_\mu\phi(x)$ は変換で不変となる。

この変換はまさにゲージ変換（マクスウェル理論の）である。

77

ハミルトニアンの形がどんなものになってるかと言うと、極座標の形では $(\partial_r\phi)^2$ と $(\partial_\theta\phi)^2$、それぞれの和なんです。ところが、θ の微分の項の部分の前にはラプラシアンの $1/r^2$ というのがついていました。ここに解を入れます。ϕ の θ 微分ってのは有限です。というのは　無限遠では ϕ は $e^{i\theta}$ のように振る舞いますから、θ で微分しても 0 にはなりませんね。無限遠でこれを評価してみたとしますと、だいたい $1/r^2 \times |\phi|$ というものになります。そして r の積分を r の大きいところで実行したとしますと、$1/r^2$ のところに極座標からきているヤコビアンは r ですから、全体で $1/r$、それで r の積分は $\log r$ になります。つまり、どこにカットオフをおくかで質量が全然違って、そのカットオフを無限にやると、実際に質量が無限大になってしまう。

この残念な事実を救うために理論をさらに修正します。ゲージ場を導入します。このゲージ場の導入は、他にもたくさんの理由があるんですけども、それはちょっと後で述べることにして、今はこの発散の問題を救おうという立場で導入したいと思います。元々の理論の対称性は ϕ という複素場を定数位相場でマップする、そういう対称性でした。この位相 φ というのは定数ですが、これを関数に格上げします。φ を $\varphi(x)$ というふうに格上げします。こんな変更をしてももちろん理論は変更していません。勝手に関数に格上げしただけですから、作用は不変ではなくなります。ところが　ゲージ場というものを導入してゲージ場と ϕ をうまく couple させると、理論を不変にすることができます。ϕ の微分項 $\partial_\mu\phi$ っていうものから、実は φ を格上げしたときにお釣りの項が出てきますが、それをキャンセルするために

$$\partial_\mu\phi(x) \ \to\ \partial_\mu\phi(x) - ieA_\mu(x)\phi(x) \tag{47}$$

として、これを共変微分と呼んでますけど、こんなふうに変更しますと、$A_\mu(x)$ に対して、

$$A_\mu(x) \ \to \ A_\mu(x) + \partial_\mu \varphi \tag{48}$$

だけ変化するというのを仮定すれば、この combination $D_\mu \phi$ は実は不変になります。

元々の定数位相の場合に実現されていたもので、これをキープしておけば　もちろん理論は不変になってます。こんなふうに、φ を $\varphi(x)$ に格上げすれば、ゲージ場というものをとらえておくと、理論は不変になるということがわかります。$A_\mu(x)$ というゲージ場のこの変換は、もちろんおなじみの電磁気学に出てくるゲージ変換です。なので、この $A_\mu(x)$ というのは、これは電磁場です。フォトンです。複素場の ϕ^4 模型にうまく電磁場を couple させてみました。これは単に couple させてみただけです。

新しい ゲージ不変作用

共変微分

$$S = -\int d^3x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi + V(\phi) \right)$$

電磁気学と ϕ^4 模型の組み合わせ.

この運動方程式を解くと....

① ソリトンのエネルギーが有限になる.

詳しくはやらないが.. $\partial_\theta \phi \rightsquigarrow (\partial_\theta - iA_\theta)\phi$

となるので. $A_\theta \sim$ 定数 $(r \to \infty)$ と選べば. これは

先の発散を打ち消す.

② 解は $F_{12} \neq 0$ となる. $\left(F_{12} \to 0 \ (r \to \infty) \right)$

つまり中心部分に磁場を持つ.

78

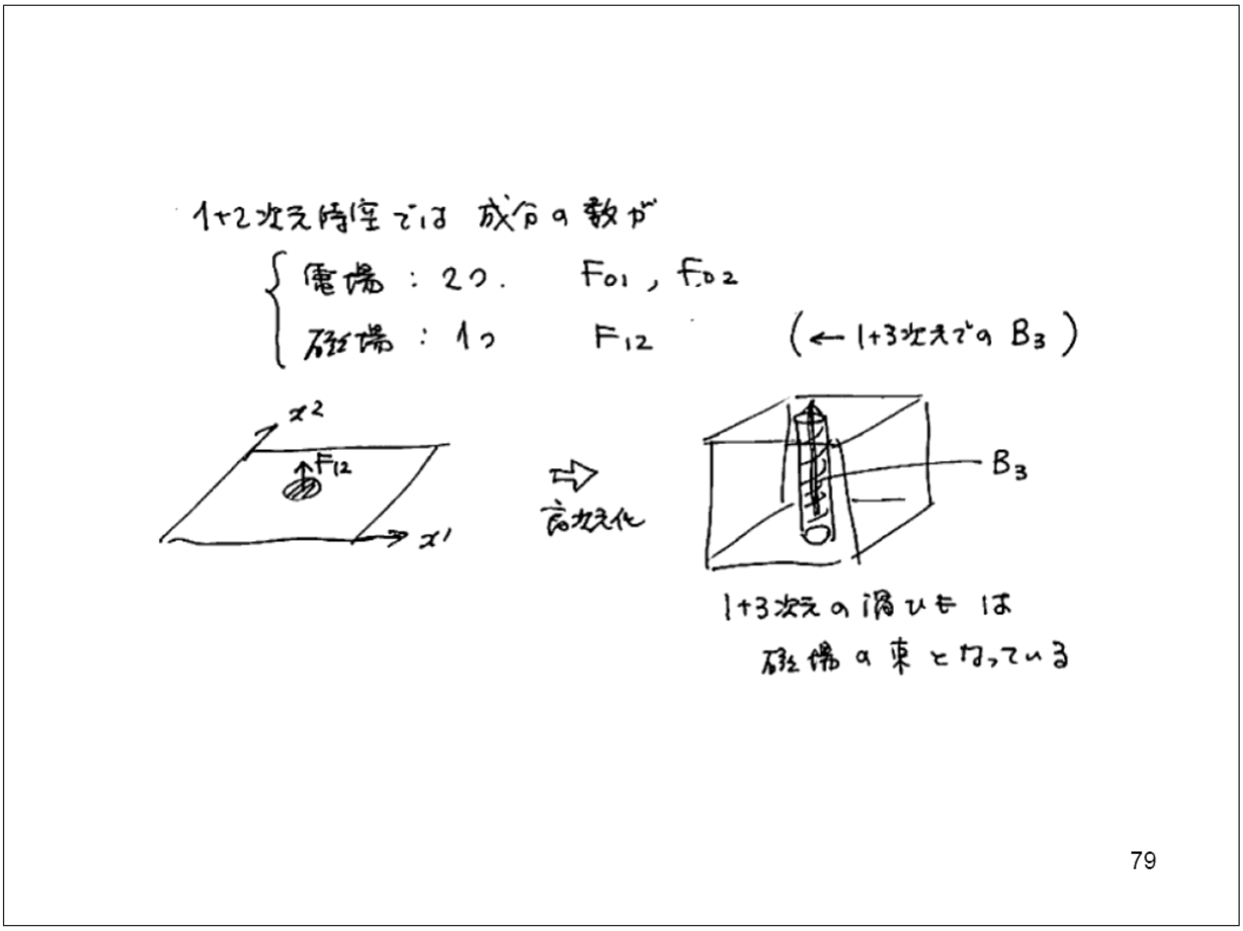
こうすると発散がなくなるということが、実は言えます。新しいゲージ不変な作用は、微分項が共変微分で書き換わり、ポテンシャル項はそのまま。ゲージ場の運動項は特に足さなくてもいいんですけども、もちろんゲージ場についても我々は propagate してほしいと思って運動項を足しておくことにしましょう。そうすると、トータルとして、こんなふうな作用になります。

$$S = -\int d^3x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi + V(\phi) \right) \tag{49}$$

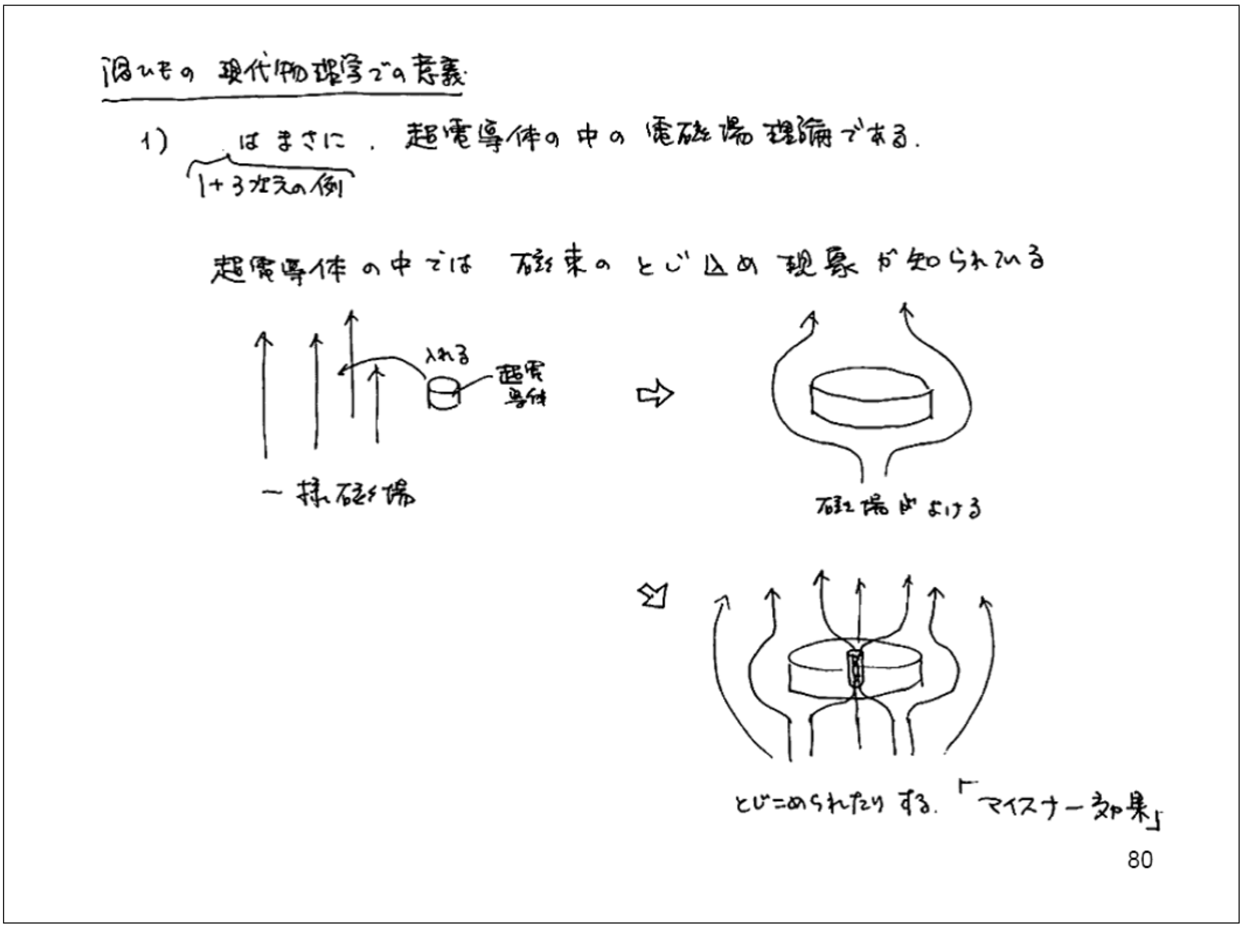
これが電磁気学と ϕ^4 模型の組み合わせです。まずこの運動方程式を解くとですね、ソリトンのエネルギーが先ほど言ったように有限になります。これがどうしてかというのを見ていきましょう。方程式をここでバーっと書いて解説するのは簡単なんですが、エッセンスは次の通りです。先ほどの発散を出したのは、$(\partial_\theta \phi)^2$ という項でした。今そこを共変微分に変えましたから、$(\partial_\theta - iA_\theta)\phi$ というものがついてきます。θ の微分のところはさっきと同じように発散を出すんですけども、A_θ というものをここでキャンセルするようにうまく取っといてあげると、さっきの発散がなくなりますね。ミソはそれだけです。つまり、A_θ の無限遠での boundary condition を適切に取っといてやると、先ほどの発散の問題がなくなるということがすぐに分かります。ですから、ここで勝手に φ を関数に格上げしたらゲージ場を導入できますよって言いましたが、その導入したミソは、共変微分をこの発散を打ち消すために使いたいから。もちろんこの A_θ がうまく不変であるべし、ということは要求しないといけません。そういうふうにすると、うまくエネルギーが有限になるというわけです。この A_θ の条件を見てみますと、無限遠ではこれを打ち消すために定数になってないといけませんが、r が 0 の

ところでは A_θ というのは 0 になってないといけない。どうしてかと言うと、A_θ っていうのは θ 方向のゲージ場ですから、r が 0 のところでは θ 方向ってのは定義できませんね。なのでそこのとこで変な振る舞いしたら困るわけです。なので、そういうことから A_θ は、r について、無限遠では定数、原点では 0、というふうな境界条件を満たさなければいけないわけということが分かります。

すなわち A_θ は r に依存してるわけです。A_θ が r に依存すると、何が起こるかっていうと、このソリトンが磁場を持つということなんです。解は必ず F_{12} が nonzero になります。どうしてかっていうと、F_{12} は、極座標で書くと、$F_{r\theta}$ ですね。$r\theta$ ってのは A_θ の r 微分です。さっき言ったことは、この境界条件の話から A_θ は必ず r に依存しないといけない。つまり、この模型では必ず、ボーテックスのところで何か磁場が出てるんです。有限エネルギーのソリトンを考えると、真ん中には磁場が入っていけないということがわかりました。



これがソリトンのお話です。これをちょっと拡張して、例えば高次元化したらどうなるかっていうのは明らかですね。今はこの丸のところに磁場が、ソリトンのところしか磁場はありません。どうしてかと言うと、A_θ は無限、r の大きいところだと定数になってしまって、定数にならないと発散がキャンセルしませんから、そうすると、r が大きいところでは磁場はほとんど 0 になります。でも r が 0 のところで急激に変化しないといけないので、そこのところで磁場が出ます。つまりソリトンのとこだけ、磁場が出る。これに 1 次元加えて、渦ひもを考えたとしましょう。そうすると、$1+3$ 次元時空のひもは磁場の束、磁束ですね。磁束をその中に持っています。nonzero になるのは F_{12} という成分ですが、もしこれ x_3 という空間成分があれば、これはもちろん 3-方向の磁場です。それが、渦ひもの中でのみ nonzero になっている。他のところでは磁場がない、というような模型になっています。



渦ひもの現代物理学での意義

それでは、こんなソリトンを考えたらブレーンワールドの話以外にどんないいことがあるかということを現代物理学の観点から見ていきましょう。今見た 1＋3 次元時空の例、渦ひもの中に磁場が閉じ込められているという例は、実は超伝導体の中の電磁場強度と全く同じです。この理論は、物性物理の一番始めのとこを勉強した人は、知っているかもしれませんけども、よくこういう模型が考えられて、超伝導体の導入として使われます。超伝導体の中では、磁束の閉じ込め、マイスナー効果というものが知られています。すなわち、一様磁場の中に超伝導体をポンって入れると、磁場が避けます。もしくは避けられないぐらい大きくなれば、中を通らざるをえない。これが磁束の閉じ込めです。こんなマイスナー効果がどうして起こるかっていうと、さっき見たような自発的な対称性によって起こるようです。ですからこれは特に知られた模型です。ソリトンと言うと、ちょっと恐ろしい感じがしますが、超伝導体では非常によく知られたソリトンです。

2) 弱い相互作用

標準模型の Z_μ は、質量を持っているが、電磁場 A_μ は無質量

(物質中ではなく真空)

Z_μ は本当はゲージ場なのだが、
ϕ のような場と結合し、ϕ が自発的にゲージ対称性を破ってしまう。 $\left(\phi = \frac{|m|}{\sqrt{\lambda}}\right)$

すると $\frac{1}{2}(D_\mu\phi)^* D^\mu\phi = \frac{1}{2}\frac{|m|^2}{\lambda}A_\mu A^\mu$ となりゲージ場の質量項が現れる。

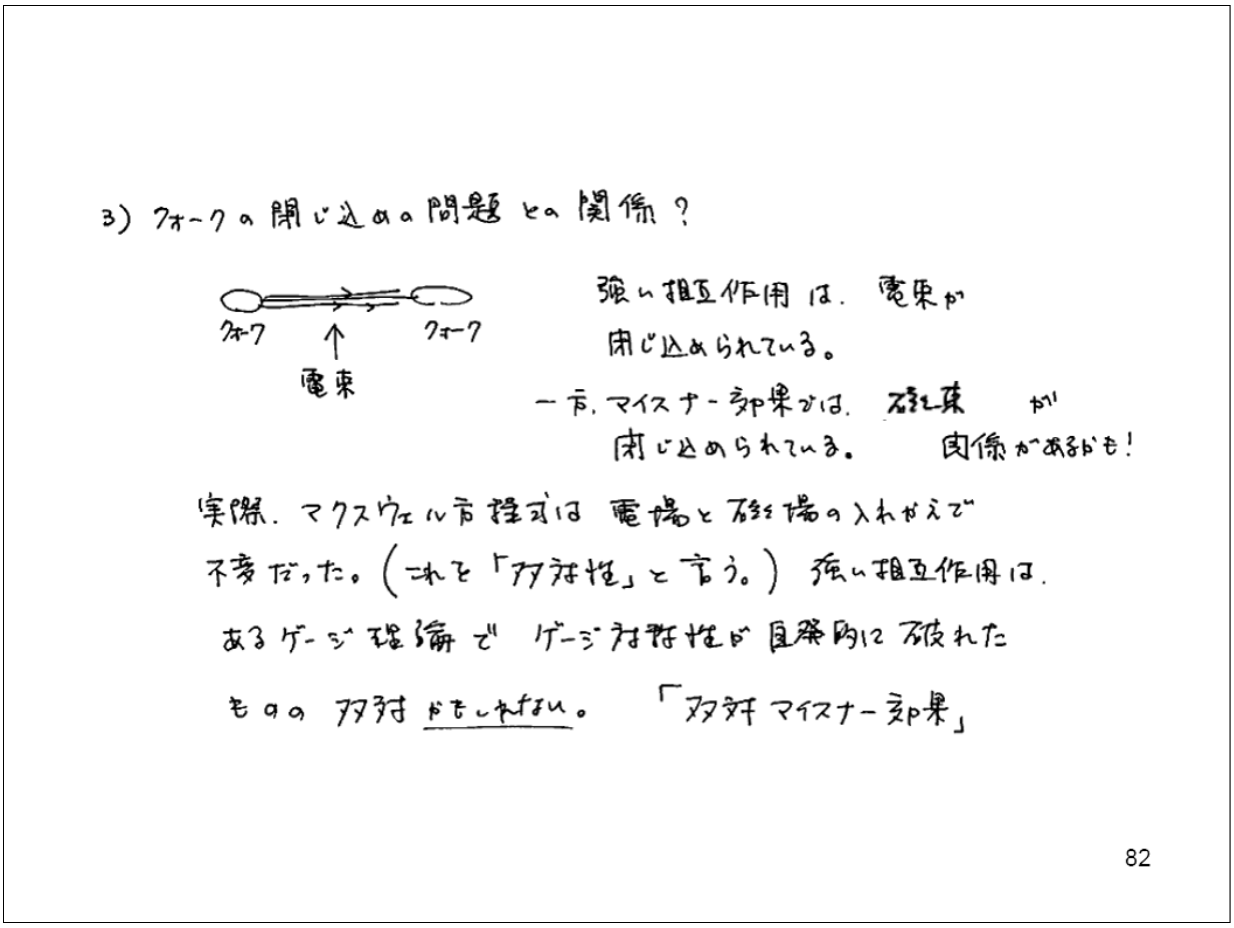
ϕ をヒッグス粒子と呼び、この機構をヒッグス機構と呼ぶ。

・Z_μ の他に $W_\mu^\pm$ もあるが、これは次の章で取り扱う。
・「弱い弦(渦ひも) weak string」というものが実在するはずだが実は不安定。

81

次に　弱い相互作用について見てみましょう。標準模型には、Z_μ ボソンというのがあります。この Z_μ ボソンというのは、ベクターボソンですが、質量を持っています。一方電磁場、フォトンはもちろん massless です。ゲージ場であるはずの Z_μ がどうして質量を持っているのか。これは先ほどの模型に秘密があります。標準模型にある Z_μ はほんとはゲージ場なので、やっぱり ϕ というのと結合していると思われるのですが、今見たように ϕ が自発的に対称性を破る、今の対称性はゲージ対称性ですけども、それが破るというふうに仮定しますと、ϕ はある真空期待値を持ちます。さっきの kinetic term を見てみますと、ϕ がもしこういう定数 $\phi = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$ を持てば、共変微分のところから A_μ の mass term が出ます。こういうふうにゲージ場に質量が出せる、という機構をヒッグス機構と言います。ヒッグス機構は Z_μ が見つかる前から提唱されていたんですけども、実際 Z_μ がこんなふうに質量を持って出てくる、ということが発見されて、ここは ϕ という場が実験で見つかるかということが焦点になってます。LHC では、ϕ のことをヒッグス (Higgs) と呼んでいます。Z_μ の他にWボソンというのがありますが、それはモノポールの話のところでどういう意味があるか見ていきましょう。この考え方から分かる通り、標準模型にも渦ひもがあるんじゃないかと思われます。なぜならば、標準模型にも ϕ という場があると思っていて、しかも Z というゲージ場があることも知っていますから、先ほどの話を応用すると Z について磁場を持つような渦ひもがこの宇宙にはあるんじゃないか、ということになりますね。このことはほとんど、標準模型の教科書には書かれていません。なぜならば、これは考えられたんですけども、実はこの渦ひもはあんまり安定ではないということが、昨日のキンクの解析で分かってしまっています。昨日キンクで何をやったかというと、キンク解をもってきてその周りの fluctuation、$\delta\phi$ というのを考え

ました。そうするとこれがスペクトル出しますね。そしてそのスペクトルを調べてやると、キンクが安定かどうかってことが分かりますね。もしそこで不安定モードが出たりすると、キンクが崩壊しちゃったりするわけです。標準模型の場合は、Ｚの他にWがあったりとか ϕ という場がちょっと１コじゃなくてたくさんあったりしてちょっと状況が違います。そのために標準模型に現れるはずの渦ひもというのは不安定だってことが知られています。それでこれを研究した人はたくさんいたんですけど、ま、発見はできないだろう、ということであまり教科書に書かれてない。ただ、このようなラグランジアンがあれば、いつでもこういうひもがあってもよいということはちょっと頭の片隅に置いとくと便利かもしれません。例えば、宇宙の進化の過程でそういう不安定なものが大量に生成されて、そしてなくなるというプロセスが考えられてもよいですね。そういうプロセスの名残りが、今重要な物理に関係しているかもしれない。これが標準模型との関係。

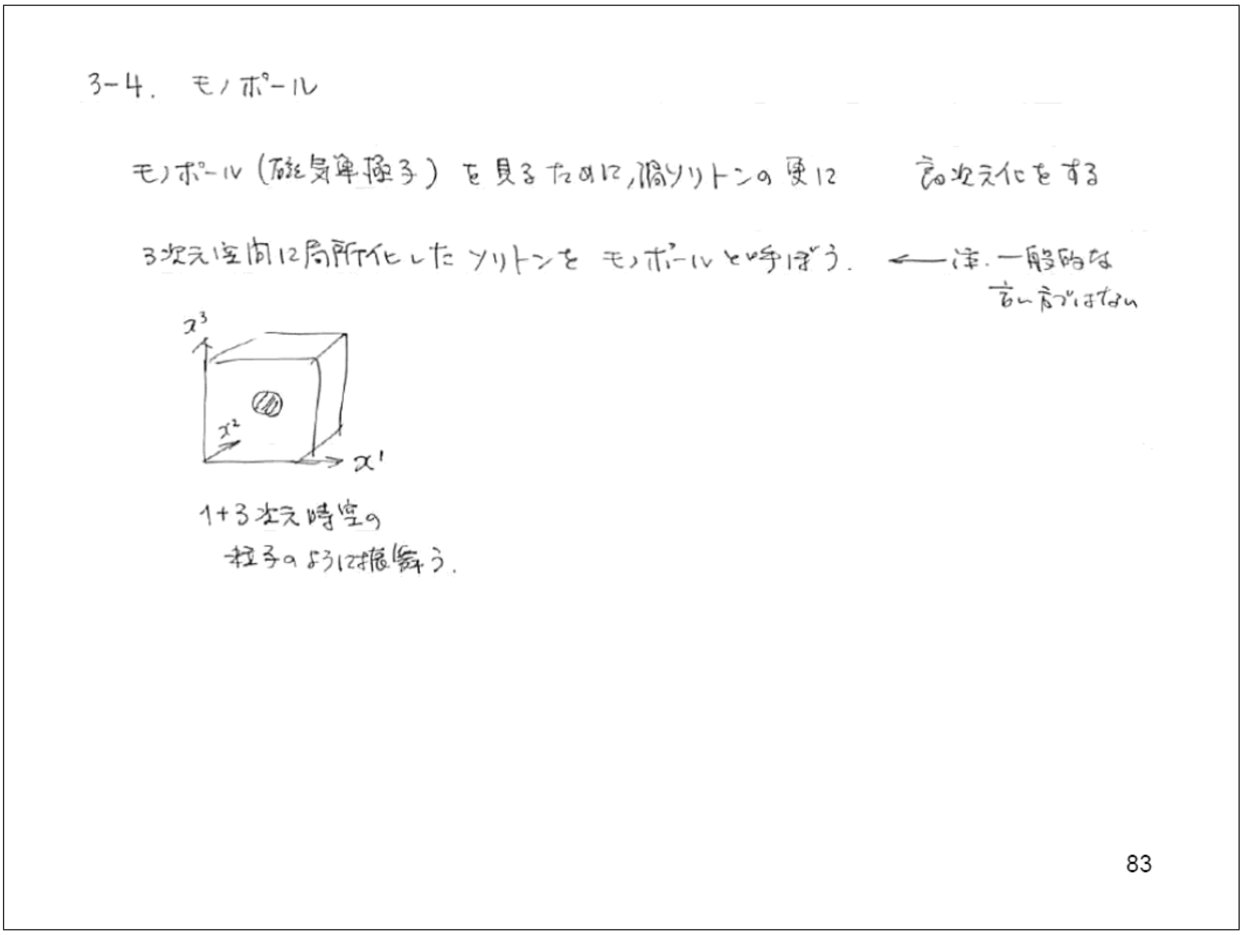


クォークの閉じ込めの問題とも関係していると思われます。それはどうでしょうか。クォークの場合は、一番始めに述べましたように、クォークとクォークの間を、クォークが持っている荷電、カラーチャージですが、そのカラーチャージをつなぐような電束が閉じ込められている。これが QCD ストリング（QCD 弦）というやつでした。一方、先ほどのマイスナー効果では磁束が閉じ込められている。電束が閉じ込められていることと磁束が閉じ込められてるのは関係があるかもしれませんね。実際、マクスウェル方程式は電場と磁場を勝手に入れ換えると、それが不変になります。つまり電場だと思ってたのを磁場だと、磁場だと思ってたものを電場だと思っても、見てる側には実は変わりがないという意味です。もちろん、そこに電荷を持ったものを手で導入すれば変わりますよ。けれども、電荷を持ったものがないようなマクスウェル方程式を考えると、それは電場と磁場の入れ換えで対称になっています。その意味で、電場と磁場を入れ換えるような対称性が、何らかの意味で、強い相互作用にもあるかもしれない。もしあるとすると、マイスナー効果で磁束が閉じ込められているので、電束が閉じ込められているということもあるかもしれない。電場と磁場の入れ換えのことを、双対性、デュアリティと言います。electric-magnetic duality。強い相互作用にもしこのデュアリティがあれば、クォークの閉じ込めが説明できるかもしれない。このことを dual Meissner effect、双対マイスナー効果と言います。これは呼んでるだけで、誰も示した人はいません。強い相互作用のクォークの閉じ込めの問題は解かれてないです。ただ、渦ひものソリトンの考え方を応用すると、こういうふうにクォークの閉じ込めの問題が解けるんじゃないかと考えて研究してる人はたくさんいます。でも双対性は非常に面白い話で、超対称性をたくさん入れてあるとか、もしくは超弦理論に埋め込んでやるとか、色んな場の理論でこういう双対性があるん

じゃないかと予想があります。その予想を場の理論的に証明するのは非常に困難で、もし QCD に関係したような理論で、この双対性がちゃんと証明できれば、クォークの閉じ込めの問題に大きな一歩になるという期待ができます。もしこれで興味を持った人がいたらチャレンジしてみてください。文献はたくさんあると思います。以上で渦ひものセクションは終わりですが、何か質問はありますか。

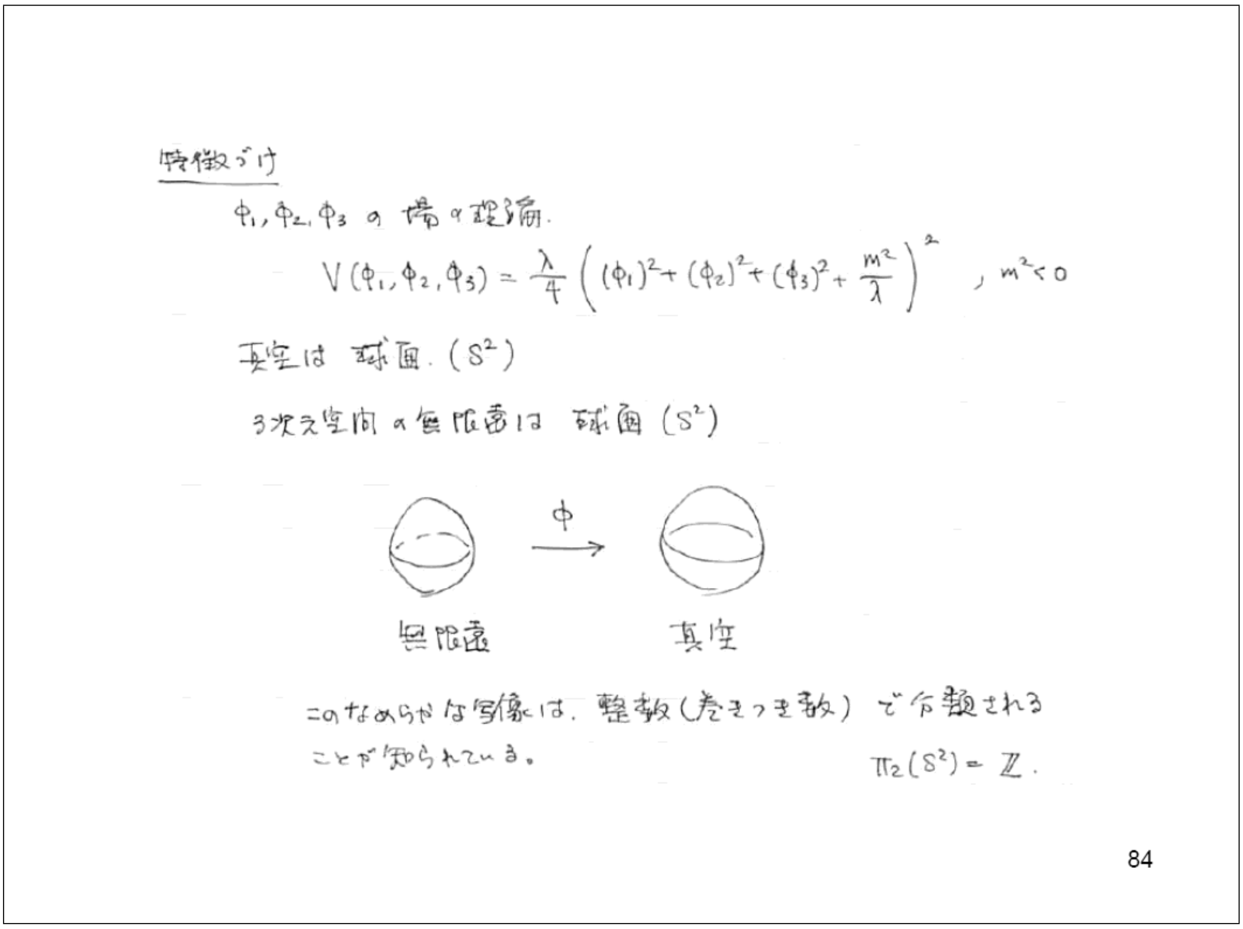
(質問) フォトンを導入したときにソリトンの mass が finite になりましたよね。それは物理的に直観的な理解というのはあるのですか。

(答) 直観的な理解があるかですか。どうでしょうね、少なくとも僕はよく分かんないです。空間が 2 次元ってのはいつでも特殊なんですね。というのは、クーロンポテンシャルを書いてみても、空間 3 次元だったら $1/r$ ですけど、空間 2 次元だったら $\log r$ ですね。そうすると、log になるってことは $r = 0$ でも発散するし $r \to \infty$ でも発散する。ということでうまく定義できないんです。距離の話してどうなるかということが、3 次元に比べて全然変わってしまいますね。それが少なくとも ϕ の場合も、ゲージ場 A_μ の場合も言えます。ところがそれうまくバランスしてやると、その場所をどこにでも取ることができれば、その $\log r$ ってのがキャンセルすることができる。だから、ϕ だけの理論を持ってきて、それでうまいソリトンを考えようってのはちょっと難しい。けれども他の場を導入して、その $\log r$ の振る舞いをキャンセルするようにすれば、consistent に 3 次元、つまり我々の知ってる particle のそれと似たような描像が作れる。テクニカルなコメントはできますけど、それ以上のことは分かりません。はい。



3.4 モノポール

次にモノポールを見てみましょう。どのような一般化があるかというのはほとんどもう明らかですね。さっき ϕ を一個から二個にしました。今度は三個にするということです。これは magnetic monopole のことで、磁気単極子という日本語がついています。こういうふうな日本語で呼ぶ人はほとんどいませんが。これを見るために、ソリトンの場合をさらに高次元化していきます。ソリトンは 2 次元空間で局所化したものでしたけど、これを 3 次元空間で局所化してみる。そうすると、こんなふうになっていて、まさに 1 + 3 次元時空の粒子のように振る舞っています。



特徴づけ

特徴づけはどうでしょうか。ϕ を三つ持ってきて、ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 の場の理論を考えます。ポテンシャルはおなじみのこういう形、

$$V(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \frac{\lambda}{4}\left((\phi_1)^2 + (\phi_2)^2 + (\phi_3)^2 + \frac{m^2}{\lambda}\right)^2 \tag{50}$$

m^2 は負に取る。この理論の真空はどうでしょうか。渦ひも、もしくは渦の場合は、S^1 でした。この場合は、S^2 になります。明らかですね。そして 3 次元空間の無限遠は何であったかっていうと、それも S^2 です。ですから、無限遠から真空への写像で分類されると考えられるソリトンは、球面から球面、2 次元球面から 2 次元球面への写像です。さきほど、輪ゴムを考えましたが、今度はゴムのボールみたいのを考えます。ゴムのボールをこれに巻きつけれる数というのは、ちょっと頭の中を 4 次元空間にしないとわかりにくいですけども、この滑らかな写像は整数で分類されるってことが直観的には分かります。何回巻きにするかってことですね。これは数学的にもちろん証明できます。正確な言葉では、ホモトピー群を使って、$\pi_2(S^2) = \mathbf{Z}$ となる。そういうのがモノポールを特徴づけてるっていうのは魅力的ですね。

非可換ゲージ理論

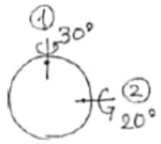
この場合も，ゲージ場を導入しないと ソリトンの エネルギーは ∞ となって
しまう。 どんな ゲージ場 か？

渦の例 ： 定数 $\varphi \rightsquigarrow \varphi(x)$ に格上げ。 $\rightsquigarrow$ ゲージ場 $A_\mu(x)$

モノポール ： 定数は3つ。
$\because$ 球面の回転自由度は3つの角度で指定される（オイラー角）

$\rightsquigarrow$ ゲージ場 3つ！

しかも，この3つのパラメータの回転変換は「可換」ではない。



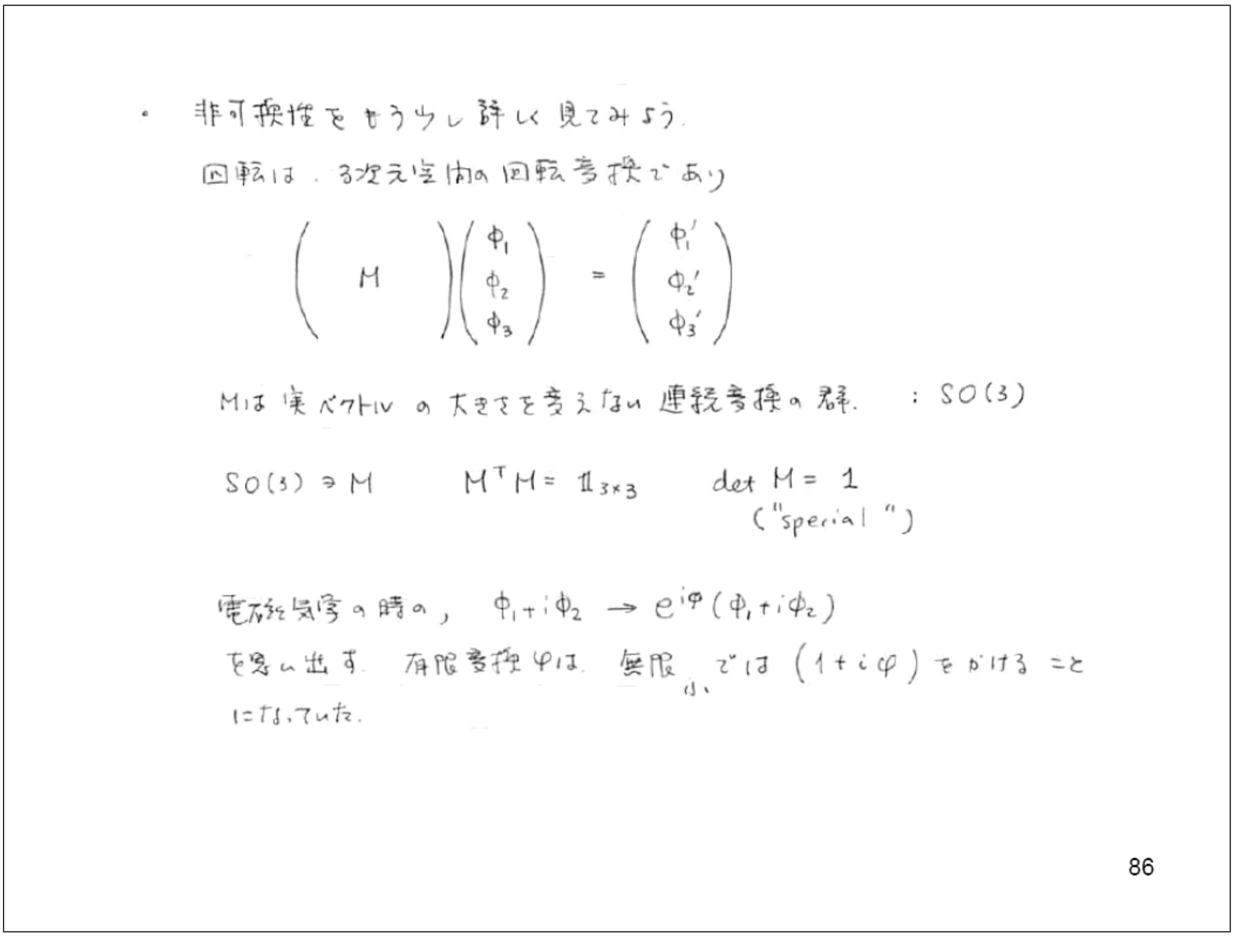
①→② で得られる回転と ②→① で
得られる回転は等しくない。即ち ①と② は
操作順が可換ではない。

つまり，3つの電磁気学ではダメで，ゲージ場3成分
の「非可換ゲージ理論（non-Abelian gauge theory）」となる

非可換ゲージ理論

この場合もやっぱり、ゲージ場を導入しないとソリトンのエネルギーが無限大になってしまうわけです。なのでどうしたらいいかってことを考えましょう。渦の例では、定数 ϕ というのを $\phi(x)$ に格上げして、ゲージ場を導入しました。モノポールの場合はどうでしょう。この変換は、このラグラジアンを不変にするやつですから、この定数は一個じゃなくて３つの変換パラメータで埋められるということが分かります。というのは、先ほどの真空の S^2 の対称性から分かるように、この理論は球面の回転対称性を持ってます。球面の回転自由度は３つの角度で指定されます。これはオイラー角。ですので定数は３つある。この定数３つを関数に格上げしたときに action が不変になりなさいって要請すると、ゲージ場は３つ導入しないといけないわけです。しかもこの３つのパラメータの回転変換は、お互いに可換ではありません。どうしてかというと、左下図のように球面があるときに２つの軸を１番と２番としましょう。１番でまず回して次２番で回すオペレーションと、２番で回して１番で回すオペレーションは、結果は等しくないです。すなわち、１番と２番は操作の順序が可換ではない。つまり３つの電磁気学を勝手に持ってきて結合させただけではだめで、ゲージ場は３成分の非可換ゲージ理論になってないといけない、というわけです。非可換ゲージ理論を勉強した人もいると思いますが、ここでは勉強していない人のために、それがどんなものであるかちょっと見てみましょう。標準模型の非常に重要な一部分になっています。英語では、non-abelian ゲージ理論。こんなふうに考えると、どうしてこういうものを考えないといけないのかということが、理由が分かりますね。教科書を見ると、「標準模型は

非可換ゲージ理論だから。」こんなふうに書いてあります。こんなふうに書いてあるんですけど、こんなものを考える必要がどこにあるんだ、そういう理由づけが欲しいじゃないですか。少なくとも僕は M1 のときそうでした。で、それがよくわからないまま、10 年以上経過したわけですけど、モノポールの話を読んで、「あー、なるほどな。」っと思った。それでここで紹介させてもらいます。



非可換性をもう少し詳しく見てみましょう。回転は３次元空間の回転変換なので、ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 をベクトル、列ベクトルとして書くと、これに M という行列、回転変換を作用させると、$\phi_1', \phi_2', \phi_3'$ というものに移ります。この M は３成分実ベクトルの大きさを変えない連続変換の群で、$SO(3)$ 行列。$SO(3)$ っちゅーのは、$SO(3)$ の元をMとすると、$M^T M$ が単位行列。で、$\det M$ が１。そういう行列の集合です。電磁気学のときは、$\phi_1 + i\phi_2$ という複素のコンビネーションを $e^{i\phi}$ というので回す、これが回転変換でした。この ϕ が無限小のときは、$e^{i\phi}$ というのが $1 + i\phi$ と書けることを思い出すと、今の M も $1 + i\times$（非常に小さいもの）というふうに無限小変換を書きます。

今の場合

$M = \mathbb{1}_{3\times3} + i\epsilon T$ とおくと

Tは 純虚, $T^T + T = 0$, $\mathrm{tr}\, T = 0$

$$\Rightarrow \quad T = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$ の3つ

これらを T_1, T_2, T_3 と書く。

→ この3つに関連して，ゲージ場が3つ現れることになる。

非可換性：

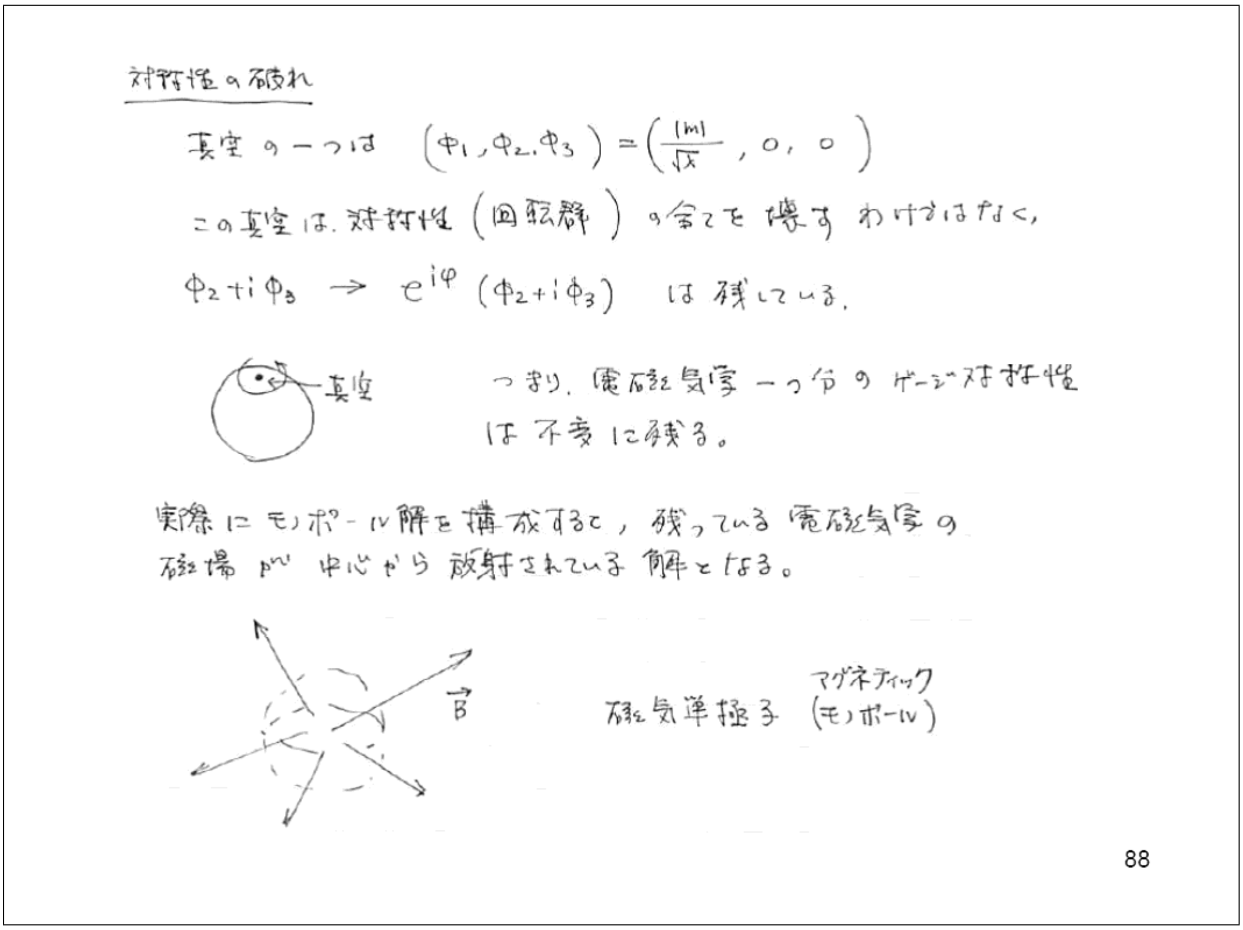
$$[T_i, T_j] = i\,\epsilon_{ijk} T_k \qquad i,j,k = 1,2,3$$

この非可換ゲージ対称性は，弱い相互作用を表している！

$(W_\mu^+, W_\mu^-, Z_\mu)$ の3つ

87

今の場合 M も、こんなふうに $M = 1 + i\epsilon T$ と置くと、先ほどの M に対する条件は T に対する条件に書き換わって、T はまず純虚数で、$T^T + T = 0$, $trT = 0$。こういう条件が出てきます。これはまず M が real で、$M^T M = 1$ で、$\det M = 1$ だから。そういう条件が T で焼き直されただけです。この条件を解きますと、こんなふうになります。これは線形な条件なので、T はこの３つを基底として張られるということが分かります。これを T_1, T_2, T_3 と書きましょう。この３つに関連してゲージ場が３つ現れるということになります。非可換性はどうなってるのかを見てみますと、$M_1 M_2$ が $M_2 M_1$ と等しくないことは、exponential の言葉で直しますと、T の交換子になっていまして、$[T_i, T_j]$ にお釣りがあって、それは $i\epsilon_{ijk} T_k$ ということになる。こんなふうな代数を満たします。これがモノポールの場合の、ゲージ場を couple させるやり方です。実はこのようにして導入された非可換ゲージ対称性は弱い相互作用とそっくりなんです。標準模型に出てくる弱い相互作用のセクターはまさにこのゲージ場３つが $W^\pm, Z$ なんですけども、この３つに対応してるわけです。これらが質量を持つやり方はちょっと若干これとは違うんですけど、ゲージ場が３つ出てくるやり方ってのは、こんなふうな対称性に支配されている。



対称性の破れ

対称性が破れるとどうなるかということも考えていきましょう。真空の１つはもちろんある特定の S^2 の中の点に選べばいいんですが、簡単のためにこれでやることにします。この真空は、対称性の全てを壊すわけでなくて、実は一部だけ残します。ソリトンの場合は、円周を回す回転対称性が一気に全部壊れてしまいました。ところが今の場合は、対称性が残ります。どんな対称性が残るかと言うと、この２つ目のエントリーと３つ目のエントリーを回すような対称性。これは０になっているわけですから、そういう対称性は残るわけです。そこがちょっとさっきのと違いますね。これが真空の絵ですけども、真空の S^2 の中で１点を選ぶ。そうすると、この、１点の周りをぐるぐる回すとこういうボールを回す対称性は真空を不変に保ちますから、壊れずに残るわけです。つまり、３つあるゲージ場の中で、電磁気学１つ分のゲージ対称性は、壊れずに残ります。実際にモノポール解を運動方程式を解いて構成しますと、これ実は厳密解がある極限で存在するんですが、厳密解を見てやると、残っている電磁気学の磁場が中心から放射されているという解になります。

さっき渦ひもの場合は、こう２次元の中で局所化した渦があって、その渦のあの世の方向に磁場が出る。今そうじゃなくて、３次元空間の中にモノポールという局所化したものがあって、そっから放射状に磁場が放射される。そんなふうになります。この放射状ってことから磁気単極子モノポールと呼ばれるわけです。

大統一理論

電磁気学には、電子と陽電子（電気単極子）はあっても
モノポールはない。

しかし、上で見たように、もし電磁気学が、何らかの非可換ゲージ
理論の一部であって、それが自発的に破れることによって
出て来ているとしよう。すると… モノポールがあるはず。

大統一理論：電磁気学（γ）、弱い相互作用（$W^{\pm}, Z$）、強い相互作用（$G^{(a)}$）
を、大きな非可換ゲージ理論の対称性の自発的破れとして出す理論。

$SU(5)$, $SO(10)$, E_6, …

より美しく、高い対称性を持つ。うまくいけば、
標準模型のパラメータに対して制限（関係）を
つけられるかもしれないので、盛んに研究されている。

モノポールが観測されれば、大統一理論の証拠となるが、まだ見つかっていない。

89

大統一理論

このモノポールの意味を見てみましょう。もちろんこれも、やはりブレーンワールドに使うことができます。それも使うという論文、野心的な論文はあまり僕は見たことはないですけども、というのもさっきの渦の場合と同じように、キンクよりも難しくなってるんですね。これで作れれば僕面白いと思うんですけど、それよりですね、モノポールは現代物理学で非常に重要な意味を持っています。それは何か。大統一理論。電磁気学では観測されているものが電子と陽電子はあっても、モノポールはありません。けれども上で見たように、もし電磁気学が例えばさっきの場合だと３つのゲージ場の中の残った一個、そんなふうにして電磁気学がもし実現されていれば、モノポールがあるはずなんです。

大統一理論、GUT と呼ばれてる理論は、電磁気学と弱い相互作用、さっきの $W^{\pm}$ と Z、それと強い相互作用、これを媒介するのはグルーオンと呼ばれる８つのゲージ場ですが、この全体を大きな対称性の非可換ゲージ理論の対称性の自発的破れとして出す理論です。こんなふうに大きな対称性が自発的に破れて、電磁気学を持ったとしますと、必ずモノポールがいるということが証明できます。モノポールがいれば、それを観測することが可能なはずです。それは磁荷を持っているからね。観測にかかるはずだ。そのような観測は数 10 年にわたって続いていますが、今のところある１つのイベントを除いて、観測された情報はありません。その１つのイベントは、それが本当であるかどうかについては、当時議論が頻繁に、今ではあまり考えないことにしようというふうになってるはずですが、そういう１イベントがありました。それはわかりません。宇宙のどっか

にたくさんモノポールがあって、それがたまたま地球に降ってきて観測できるかもしれないし、わからない。もし大統一理論がちゃんと確証できれば、これはとても面白いことになります。というのは、大きなゲージ対称性から出発しているので、標準模型の様々なパラメータについて制限を課すことができます。うまくいけば、全ての標準模型のパラメータを、この大きなゲージ群から出すことができるかもしれない。そうすると、標準模型を超える理論が分かったということで、ものすごい面白いです。盛んに研究されています。つまり、今言ったようなモノポールがもし観測されれば、大統一理論の証拠になる。

・何故モノポールが見つかっていないのか？

実は重いから！　モノポールの質量 〜 対称性の破れのエネルギーの大きさ

（キンクだと山を超えるから．）

加速器で　生成不可能．

これは実は 10^{16} GeV 位かと思われている（くりこみ群は説明しないが）

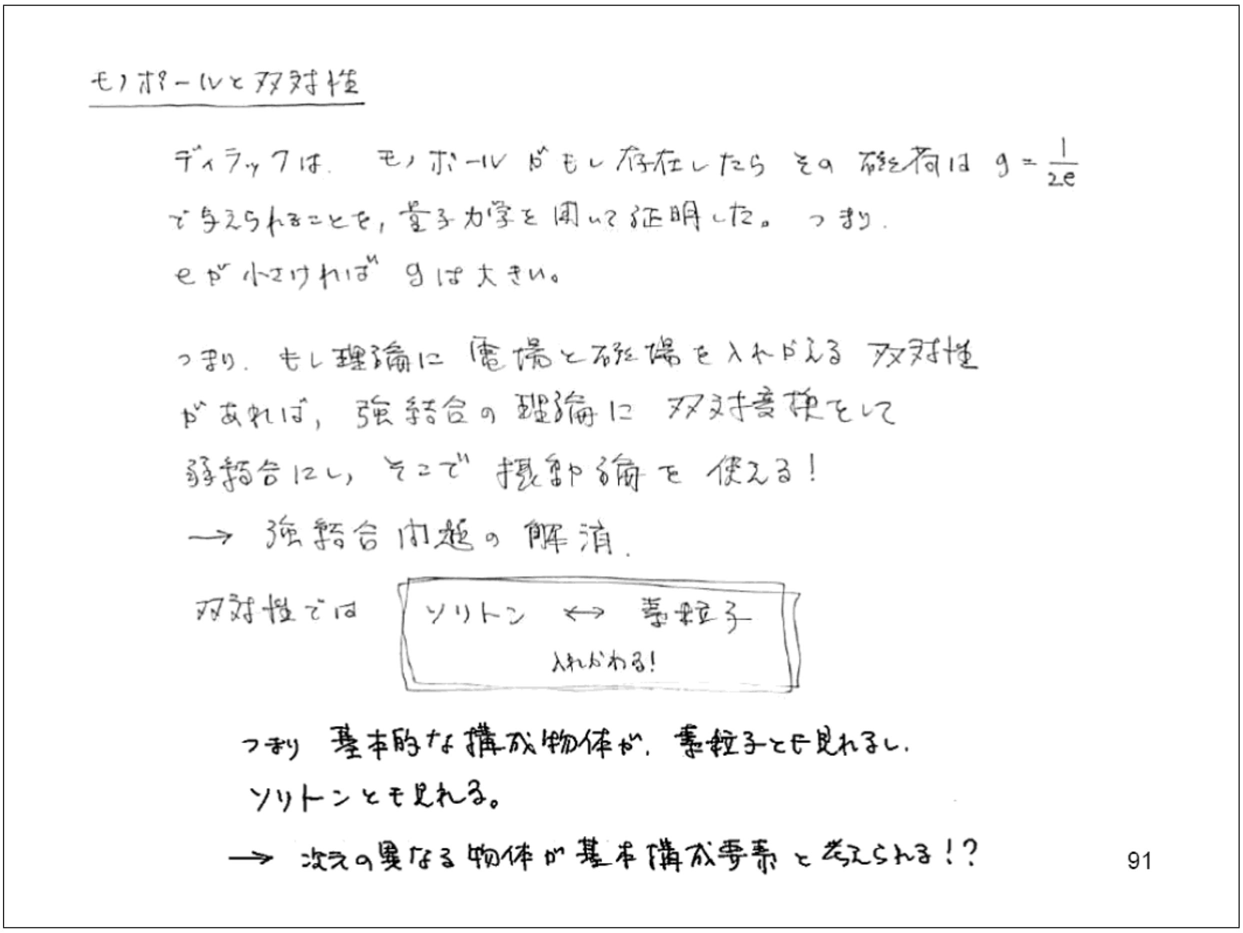
しかし．宇宙初期の高温で　大量に作られた可能性がある。

そのようなモノポールが宇宙からたまたま飛んできたとすると…

大統一理論のみに存在する相互作用で．陽子（水素原子核）が崩壊する！　それを見ることができるかもしれない（神岡）

90

なぜモノポールが見つかっていないかということをちょっとだけ話しましょう。実はそれはものすごい重いからです。モノポールの質量はだいたい対称性の破れのエネルギーの大きさのはずです。coupling がだいたいオーダー 1 だと思ったとしても、やはりポテンシャルがあって、それでソリトンの解っていうのはそのポテンシャルの高さを超えないといけませんから、その高さの分だけエネルギー稼ぐはずですね。それがどうしても出てきます。この対称性の破れのエネルギーは大統一理論の場合は 10^{16}[GeV] ぐらいと言われてます。こんなに重いと加速器では生成することは不可能です。もし加速器がこのエネルギースケールに到達すれば、モノポールと anti-モノポールの対生成ができるはずですが、それは残念ながらできない。しかし宇宙の初期の高温でこういうモノポールが大量に作られた可能性があります。ですから、それが地球に降り注いで観測される可能性があるわけです。観測の方法についてはジョセフソン効果を使うやつか、もしくは非常に有名なのは神岡の実験ですね。大統一理論のゲージ相互作用で陽子が崩壊する、これモノポールとは関係ないですが、大統一理論があれば、これ以上言うのやめましょう、神岡実験で大統一理論が検証されるかもしれない。神岡の実験は、ニュートリノの宇宙観測でノーベル賞取りましたけども、小柴さんがノーベル賞取りましたが、元々のモチベーションは陽子が崩壊するかもしれないという大統一理論の検証です。それは今でももちろん検証実験は続いています。



モノポールと双対性

最後にモノポールと双対性の話をします。ディラックは、モノポールがもし存在したらその磁荷は、$g \sim 1/e$ で与えられることを量子力学を用いて証明しました。つまり、電荷 e が小さければ、磁荷 g は非常に大きいということになります。さっき言いましたように、もし理論に電場と磁場を入れ換える双対性というものがあれば、強結合の理論に双対変換をして弱結合にしてそこで摂動論を使えます。はじめに言った強結合の問題はもしこの双対性があれば解消できるわけです。しかし、電荷 e と磁荷 g を入れ換えるということは、双対性を使うと、素粒子とソリトンが入れ替わることになります。今までソリトンは素粒子に加えて場の理論に存在する物体で非常に重い、という話をしていましたが、もしですね、理論にさらなる対称性があって、電場と磁場を入れ換えれるとしますと、なんとソリトンが素粒子の代わりを果たす、ということになるんです。双対性が非常に面白いのはこういうところです。ソリトンと素粒子というのは、全く違う観点から導出されてきました。最初に言いましたね。水面波の例で、ものすごい高い水面波、これをソリトンと呼びました。非常に小さいさざ波を素粒子だと思う。区別がはっきりしています。ところが、理論にこんなふうな妙な対称性があると、役割が全く入れ替わってしまうんです。こんなことを期待するのは、強結合の問題がこんなふうな考え方で解消できるんじゃないか、と考えているからです。渦ひもの場合も、クォークの閉じ込めの問題が、もし双対性がうまく使えれば、解消されるということを言いました。双対性の問題というのは、このように強結合、クォークの問題と非常に大きくからんでる。そのからんでる舞台に、ソリトンが表役者として登場するというわけで

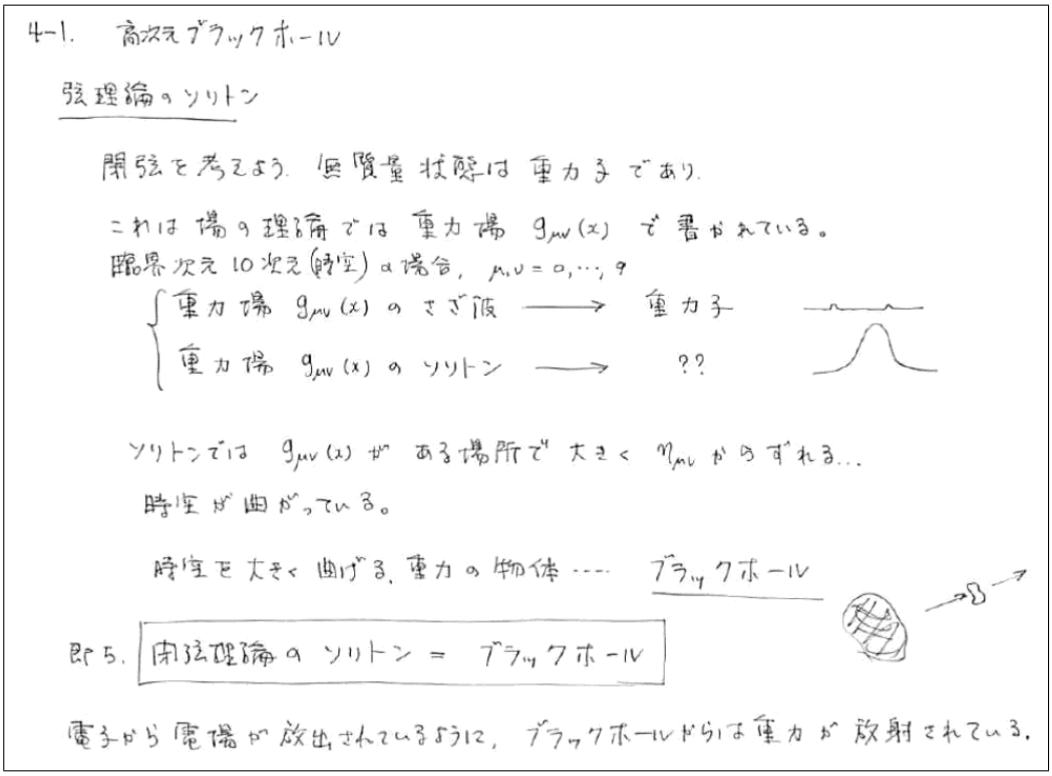
す。すなわち、この双対性変換をすると、素粒子だったものが、ソリトンに思える。ですから、ソリトンの性質を調べると、素粒子の性質に直結する。ここで、１回目の１時間を終わりにします。次の１時間で、D ブレーンの導入をします。はい、どうぞ。

(質問) モノポールの話なんですけど、古典的な電磁気学だったら、ベクトルポテンシャルの divergence が 0 になりますよね。それは一般的にないってことを示しているんですか。それは Maxwell 方程式が間違っているということではないんですか。

(答) はい、間違ってるということではないです。このことはとても重要な質問だと思います。今の質問は、普通の電磁気学でマクスウェル方程式を書いたときに、右辺に磁荷があると思うと矛盾が生じる。それについての質問です。今のやつでは矛盾は生じないのか。実は矛盾は生じないです。それは電磁気学だと思っているやつが元々３つのゲージ場の一部分を見ていると思う。そういうふうに電磁気学が残りましたね。そこがちょっと違うところです。おっしゃる通り、普通の電磁気学を考えるときにはモノポールがあったら困るわけです。それは絶対。なので、ディラックモノポールとか考えるときはそこからディラックストリングが伸びていて、ちゃんと磁荷が全体ではないというようにしないといけないですね。けれども今の例の場合はそうではなくて、３つのゲージ場がまずあって遠方ではある１つのものが真空に選ばれることで残る。それを電磁気学と思うわけですね。真ん中の方ではやっぱり３つ残ってるわけです。そういうトリックがあって、divergence を取ったら 0 になるんじゃないかという論理は無限遠ではできるのだけども、真ん中では適用できなくなってる。そこがポイントです。もし関連する教科書とか何か計算をちょっとしてみると、それがよく分かって面白い。

(質問) モノポールっていうのは、素粒子の意味で存在すると思っているのでしょうか。

（答）今日の話では、モノポールは特に素粒子だと思っているわけではないです。ソリトンとしてこういう解が存在して、その解は、エネルギーが有限だと思うと磁荷を持っていないといけない、というのが主張です。で、モノポールの数は一個二個と数えることができて、そういう古典解を作ることができて、-1 という数を持つモノポール解もある。なので、素粒子に非常に性質は似てるんだけれども、これは運動方程式の古典解ですから素粒子とは関係ないです。



4-1. 高次元ブラックホール

弦理論のソリトン

閉弦を考えよう。無質量状態は重力子であり。

これは場の理論では重力場 $g_{\mu\nu}(x)$ で書かれている。

臨界次元 10次元(時空)の場合、$\mu,\nu=0,\cdots,9$

$\begin{cases} \text{重力場 } g_{\mu\nu}(x) \text{ のさざ波} \longrightarrow \text{重力子} \\ \text{重力場 } g_{\mu\nu}(x) \text{ のソリトン} \longrightarrow \text{??} \end{cases}$

ソリトンでは $g_{\mu\nu}(x)$ がある場所で大きく $\eta_{\mu\nu}$ からずれる...

時空が曲がっている。

時空を大きく曲げる、重力の物体 ---- ブラックホール

即ち、 $\boxed{\text{閉弦理論のソリトン} = \text{ブラックホール}}$

電子から電場が放出されているように、ブラックホールからは重力が放射されている。

4　弦理論の D ブレーン

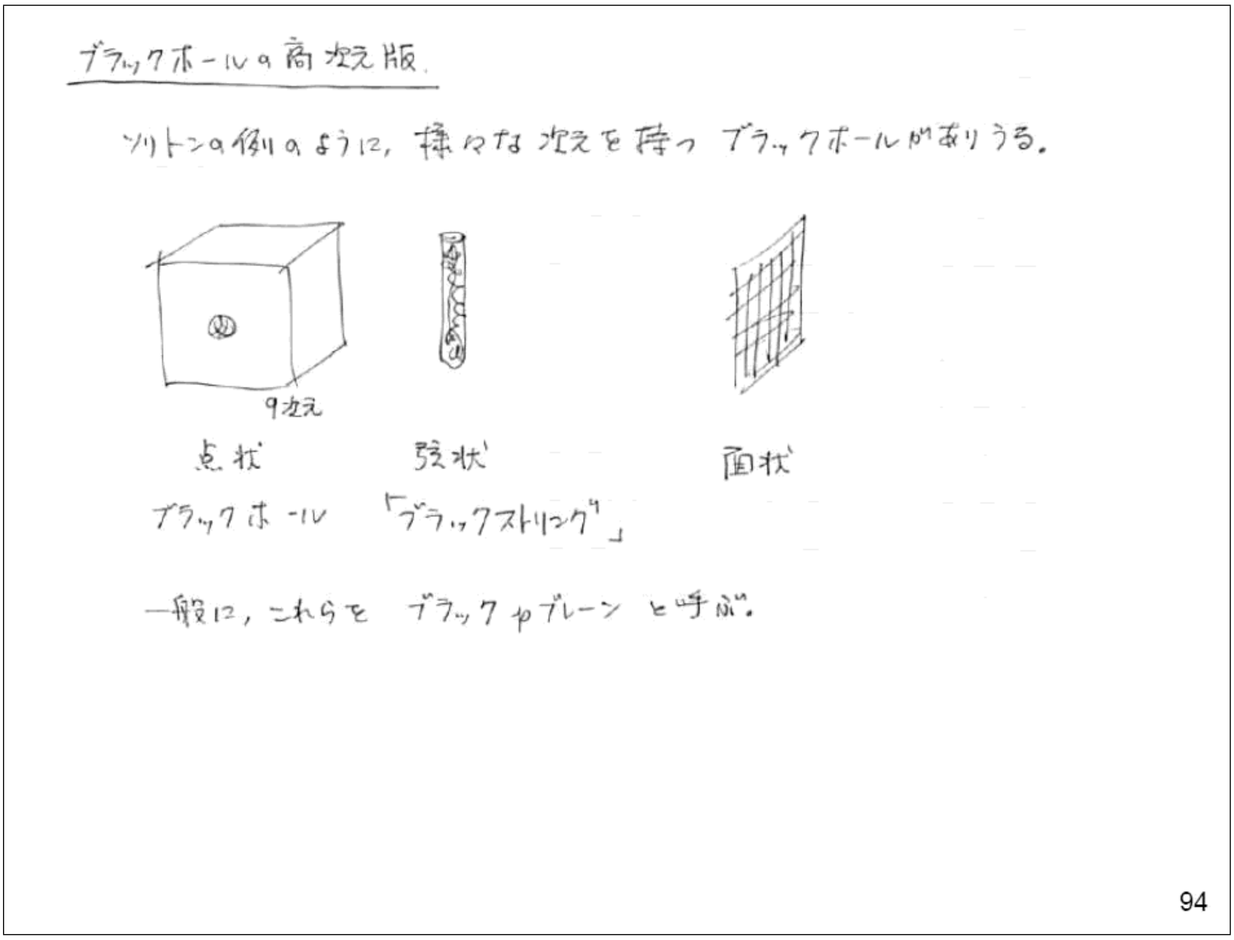
4.1　高次元ブラックホール

弦理論のソリトン

はい、それでは次の一時間で D ブレーンとは何かということをお話ししたいと思います。弦理論のソリトンは何であるかと考えてみましょう。今まで ϕ^4 模型のソリトン、それにゲージ場がカップルした場合を見てきました。弦理論も、もちろんそこには場があります。始めに言いましたように、開いた弦からは電磁場、そして閉じた弦からはその振動から重力場がでるわけです。つまり、それらの弦の、例えば散乱とかを考えると、電磁場、重力場のラグランジアンから計算される散乱と同様になるだろうと期待されます。実際、そのような計算をやってみまして、弦理論の低エネルギー有効作用というのがあって、弦理論でもやはり重力の Einstein-Hilbert ラグランジアンがあって、電磁気学も Maxwell ラグランジアンみたいなものがあって、ということが知られています。そのような理論があるわけですから、弦理論のソリトンというものを考えることが出来るわけです。

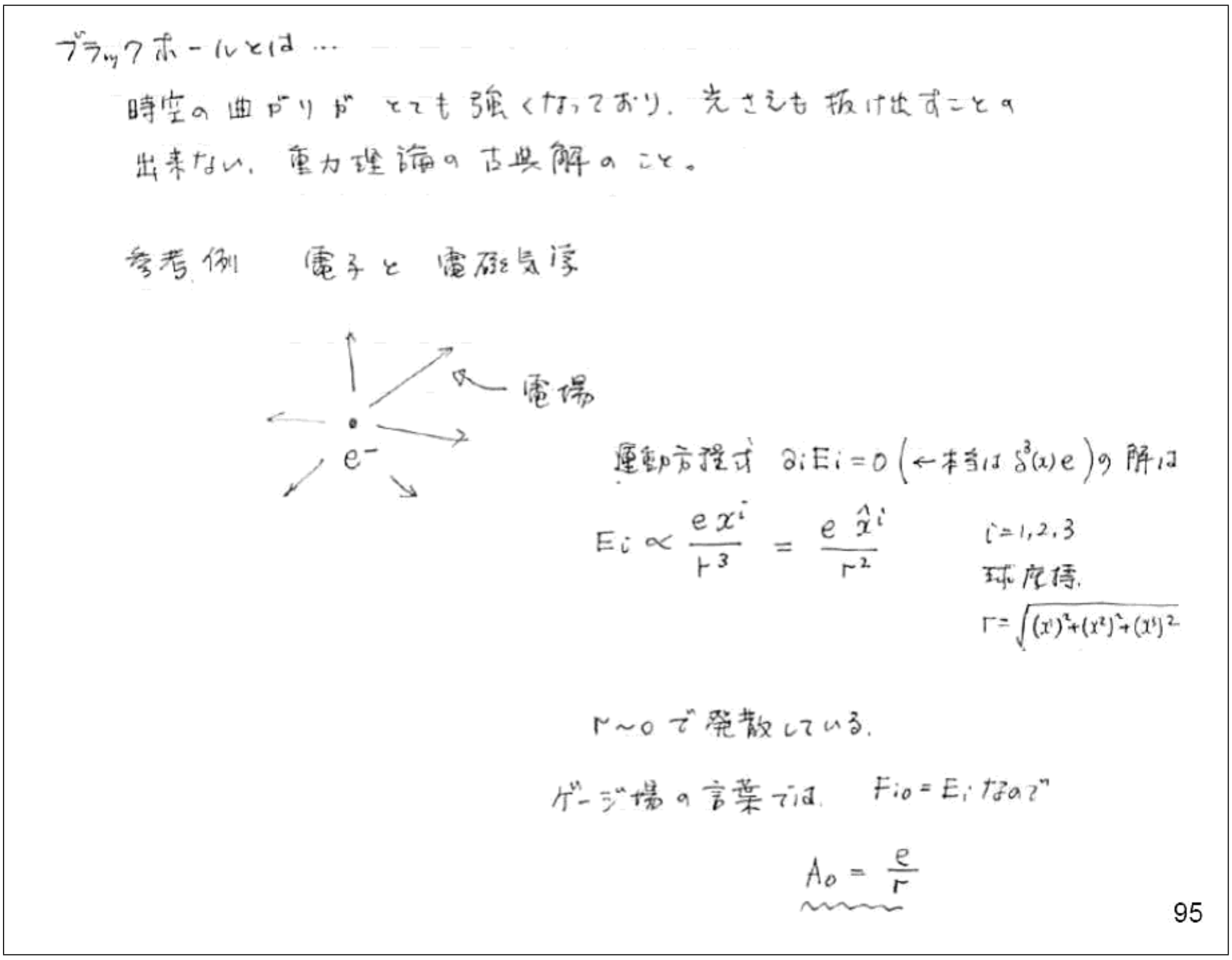
閉じた弦を考えてみましょう。その無質量状態はグラビトン、重力子です。場の理論では重力場とは $g_{\mu\nu}(x)$ というもので書かれています。臨界次元が 10 次元の場合は、μ,ν は 0 から 9 まで。重力場のさざ波はグラビトンです。絵で描くとこんな感じ (右上図)。では、ソリトンとは何であるか？これは何なのか？ソリトンは、$g_{\mu\nu}$ が局在化していて、ある場所で大きくフラットな計量 $\eta_{\mu\nu}(x)$ からずれるということを言っているわけです。すなわち、そこでは時空が非常に大きく曲がっている。時空を大きく曲げる重力に特徴的な物体というと、ブラックホールです。つまり、安直な議論ですが、閉弦理論のソリトンはブラックホールであるということがわかるわけです。

電磁気学で電子を持ってくると、電子の近くでは電磁場は非常に大きくなっています。それと同じことが考えられます。電子から電場が放出されているように、ブラックホールからは重力子が放射されている。放射されているというのは、ここですごく曲がっているということですが、まあ、そういうイメージが出来るわけです。一言で言うと、閉弦理論のソリトンはブラックホールであると。

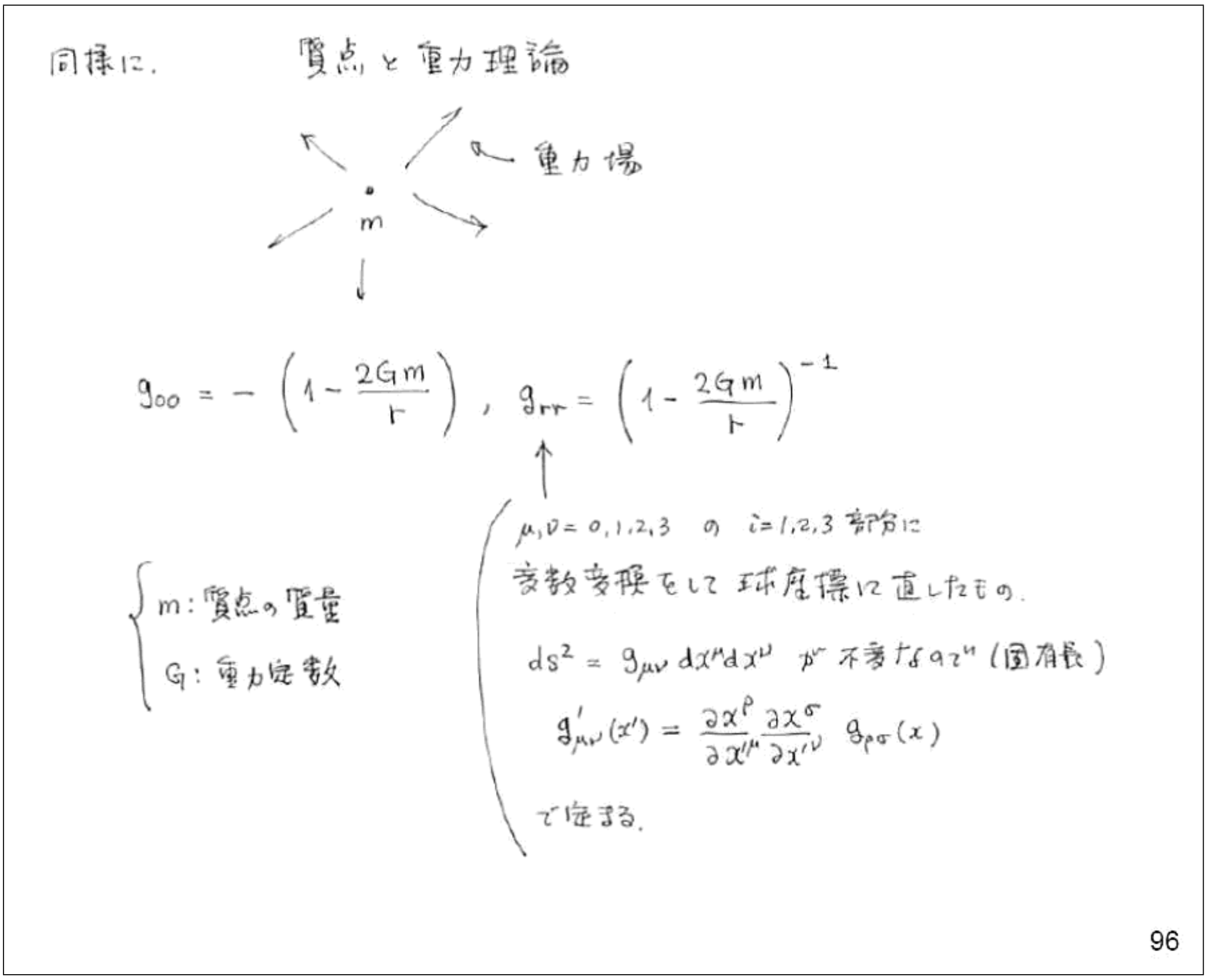


ブラックホールの高次元版

弦理論は 10 次元時空でした。なので、ブラックホールも様々な一般化が可能になります [17]。この一般化は、今までソリトンの話をしてきましたからほとんど明らかですが、今まで見てきた例のように、様々な次元を持つブラックホールがあり得ます。例えば、この 9 次元空間の中で点状のもの、これはブラックホールですね。一方、伸びているということも考えられます。これをブラックストリングといいます。この伸びているのが、例えばわっかみたいな形になっているものはブラックリングといいます。そんな風に、様々な重力理論の運動方程式の解が考えられるわけです。もちろん、ひも状になっているものだけでなくて、9 次元にありますから、その何次元部分を占めるかということでもっと大きなブレーンを、ブラックホールを考えることが出来ます。



ブラックホールとは何だったかということをちょっと復習してみましょう。ブラックホールは時空の曲がりが非常に強くなって、そこからは光さえも抜け出すことが出来ない重力理論の古典解のことです。もうちょっと正確には色々定義があって、ホライズンがあるとかいうわけですけど、今はこれだけで十分です。参考として電子と電磁気学の例を思い出しましょう。ここに電子があって、それから電場が出て、運動方程式は $\partial_i E_i = 0$、本当は右辺にデルタ関数が入っているんですけども、その解は $E_i \propto \frac{ex^i}{r^3}$ という形になります。ここで球座標をとりました。これを見たらわかる通り、もちろん $r = 0$ でこれは発散しています。それはこの右辺にソースとしてデルタ関数を入れたからです。ゲージポテンシャルの言葉では、これは F_{i0} がちょうど E_i になっていますので、ゲージ場の 0 成分が $A_0 = \frac{e}{r}$ になる、これが電子の場合の電磁気学でした。



これと同じことを重力理論で考えてみましょう。もちろん我々は Einstein-Hilbert のラグランジアンから変分して Einstein 方程式を出して、とかいうことを知っていますけども、それはさておき、みなさんそれは家に帰って勉強できるから、ここで簡単なことを考えてみましょう。質点と重力理論。重力理論の場合は、チャージに相当するものは質量です。質点から重力場が放出されている。Einstein 方程式を matter がない場合に解くとこんなふうな解があります。

$$g_{00} = -\left(1-\frac{2Gm}{r}\right) \quad , \quad g_{rr} = \left(1-\frac{2Gm}{r}\right)^{-1} \tag{51}$$

g_{00} というのを見ると、先ほどの電磁場の例ではゲージ場のポテンシャル A_0 が $\frac{1}{r}$ となっていたというのと全く同じようになっています。これは Schwarzschild ブラックホール解といいます。確かに、g_{00} は $\frac{1}{r}$ の形をしているわけですね。他の成分もノンゼロになっています。

・rが十分大きければ、
$$\begin{cases} g_{00} \sim -1 \\ g_{rr} \sim 1 \end{cases}$$

$$g_{\mu\nu}(r\to\infty) = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{\mu\nu}$$ で平坦な時空に一致する

・逆にrが小さいと？

平坦なメトリック $\eta_{\mu\nu}$ からのずれが大きくなり、

$$r = 2Gm$$

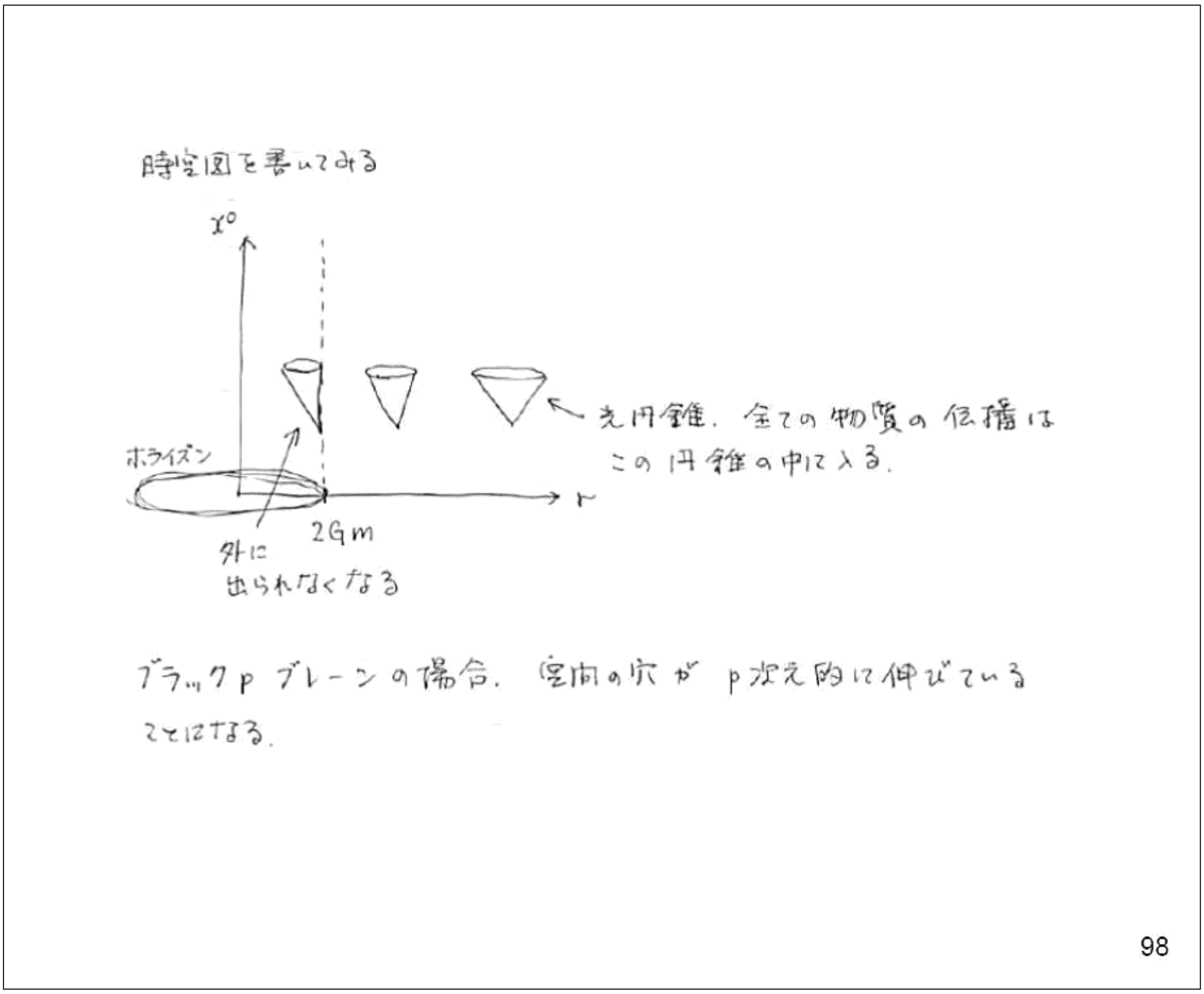
という特徴的な半径に到達する。これをシュバルツシルト半径と呼び、これより内側では時空が大きく曲がっているので、そこから出ようとすると光速より速い速度が必要となる。それは相対論ではあり得ないので、これを

事象の地平面（ホライズン）

と呼ぶ。　ブラックホール ＝ 空間の穴

97

この形をみたら簡単にわかりますが、r が十分大きければ、このメトリックは ± 1 にいきます。これはフラットなメトリックです。平坦な時空。一方、r が小さいと、$\frac{1}{r}$ という項がありましたから、平坦なメトリックからのずれが非常に大きくなります。特に、$r = 2Gm$ というところで特徴的な振る舞い、$g_{00} = 0$、というところに到達します。これは実は座標が悪いだけなんですけども、ちょっとそのことは今置いておいて、r が特徴的な距離になると、時空がものすごい曲がっているということだけを覚えておいて下さい。この半径は Schwarzshild 半径と呼ばれていて、この内側では時空が大きく曲がっているのでそこから出ようとすると光速より速い速度が必要となる。これをホライズンと呼んでいるわけです。つまり、ブラックホールは空間の穴、という言い方が使われるわけですね。



この簡単な話はちょっと置いておきましょう。

注）2Gm は 非常に小さい.

$m =$ 我々の体重 $\sim 10^2\,\mathrm{kg}$　　$G = 6.6\times10^{-11}\,[\mathrm{m^3\cdot s^{-2}\cdot kg^{-1}}]$

$Gm \sim 10^{-8}\,[\mathrm{m^3\cdot s^{-2}}]$

$\therefore\ \dfrac{Gm}{c^2} = \dfrac{10^{-8}}{(3\times10^8)^2}\,[\mathrm{m}] \sim 10^{-25}\,[\mathrm{m}]$　小さすぎる.

（原子核は $10^{-10}\,[\mathrm{m}]$ の半径…）

つまり. 非常に小さな領域に質量をつめ込まないと.
ブラックホールの性質は見えない。

地球の質量 $= 6.0\times10^{24}\,[\mathrm{kg}]$

$\dfrac{Gm}{c^2} \cong 10^{-2}\,[\mathrm{m}] = \underline{\underline{1\,[\mathrm{cm}]}}$

地球の全物質を 1cm 立方より小さく凝縮
した時に ブラックホールが 現れる.

99

この $2Gm$ という値は非常に小さいということを見てみます。簡単のために、我々の体重が大体 10^2kg だとしましょう。こんな風な近似をするのは物理学者だけだといってよく笑われますけども、我々がブラックホールになったらどうなるかと、それをみてみましょう。重力定数 G は $G = 6.6 \times 10^{-11}[\mathrm{m^3s^{-2}kg^{-1}}]$ という値をもっていますので、Gm というのは $Gm \sim 10^{-8}[\mathrm{m^3s^{-2}}]$ です。これを光速が 1 であるという単位系に直すと $\frac{Gm}{c^2} \sim 10^{-25}$[m] という大きさになります。これものすごい小さい大きさですね。つまり、非常に小さい領域に質量をつめ込まないとブラックホールというのは出てこないということになります。我々の体重のかわりに地球の質量をもってきますと、$\frac{Gm}{c^2} \sim 1$[cm] になります。地球の質量を 1cm に閉じ込めたら、ブラックホールが出来るということです。それくらい小さい。それくらいブラックホールを作るのは難しい、ということがこの簡単な計算からわかるわけです。

注) 素粒子は 大きさが無いものと 考えられている.

→ 全ての素粒子は ブラックホールになる?!

… その半径では違う物理学が存在していると考えられている.

弦理論? 弦も無限にほそい…

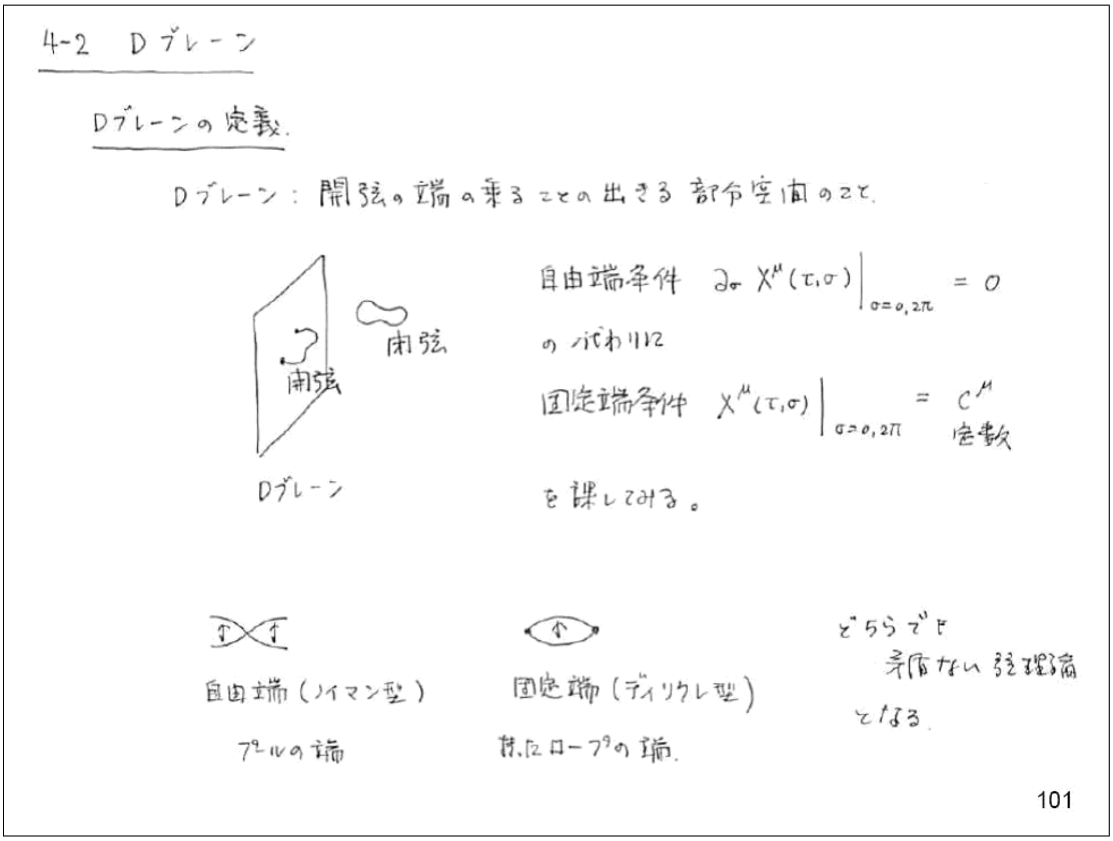
→ 実は, rが十分小さい領域では 弦の高い

振動モードが 現れるので. それも考慮すると

時空はそんなに曲がらないのでは? と思われている

100

あれ、我々は素粒子の大きさが無いものと思っている、素粒子は質量がある、そしたら素粒子はブラックホールですか？という質問がよく聞かれます。この問いには私は答えられません。全ての素粒子はブラックホールなんじゃないですか？これはわかりません。この問いに答えられたら、非常に素晴らしいわけです。よく言われることは、その半径、こういう小さいところまで見てしまうと、違う物理学が存在するんじゃないか、普通の場の理論ではわからないような状態になっているんじゃないか、と考える。その候補が弦理論です。でも、弦は無限に細いじゃないか、じゃあ弦もブラックホールなんじゃないですか、そういう質問もできますね。それについては非常に面白い物理が弦理論で発展しています。弦は、実は先ほどの双対変換みたいなものがあって、それを通じると実はブラックホールと同定出来るとか、そんな話しがあります。その話しは今回しませんけども、こんな風な意味で素粒子物理学とブラックホールの話というのは根源的なところで繋がっているんじゃないかという期待があります。



4.2 D ブレーン

D ブレーンの定義

では、ようやく D ブレーンにいきましょう。D ブレーンとは何か？それは非常に簡単な定義です。D ブレーンとは、開いた弦の端が乗ることの出来る部分空間のことです[*6]。超弦理論は 10 次元の時空から出発します。その中をひもが飛んでいく。そのひもを記述する時に、境界条件というものをおかなければいけませんでした。ひもの端っこはどうなっているか。閉じた弦の場合は周期的境界条件をおいた。開いた弦の場合は、端っこに自由端境界条件をおきました。この自由端境界条件の替わりに、固定端境界条件というものを課します。固定端境界条件を課す時は、この μ という足がどういう方向を向いているかによって、例えばこの方向は自由端境界条件、こっちの方向は固定端境界条件という風に選ぶことができますね。そして、固定端境界条件は端っこがあるところに fix されているということですから、この定数 c^μ を選ぶことが出来ます。$X^\mu(\tau, \sigma)$ の σ が 0 と 2π の時は定数 c^μ にありなさい。その 2 つの自由度があるわけです。固定端境界条件は何かというとこれは簡単で、まず左が自由端境界条件のイメージ図。プールの端の水面の様子です。一方、固定端境界条件は端っこがある点に固定されているということで、これは例えば張ったロープの端になっている。このどちらでも矛盾の無い弦理論をつくることが出来ます。D ブレーンは、定義としてはこれだけです。なので、全く、何も難しいことは言っていない。固定端境界条件を選んでみよう、そうすると開いた弦が 9 次元空間中のどこかに固定されちゃうわけですけども、その固定される面のことを、面というか次元が高いから面でないけども、その

[*6] Polchinski によるレクチャーノート Ref.[18] には D ブレーンの基礎が簡潔にまとめられている。

超空間のことを D ブレーンと呼びましょうというわけです。こんな風に導入した D ブレーンは全く面白くない気がしますね。非常にまず artificial だし、こんなものが、これ単に条件として出てきたものだから動かないですよね、そこにボンとあるだけで。それどうするんですか？実はこれが重要な役割を果たすことをこれから見ていきます。

10次元時空のそれぞれの方向に対して，NかDを課してよい．
例えば

$$\begin{cases} \mu = 0, 1, 2, \cdots, p & : \text{N型} \\ \mu = p+1, \cdots, 9 & : \text{D型} \end{cases}$$

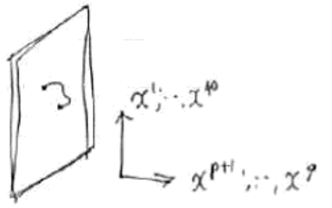
としてみると，x^i $(i = p+1, \cdots, 9)$ の方向には開弦の重心は動くことが出来ず，弦の端点が乗っている面は

$$x^i = c^i \quad (i = p+1, \cdots, 9)$$

で規定される．この面を「Dブレーン」と呼ぶ．

Dirichlet のD． メンブレーン．

空間方向にp次元のびているDブレーンを「Dpブレーン」と呼ぶ．



102

まず、10 次元時空のそれぞれの方向に対して、自由端、Neumann 条件か、固定端、Dirichlet 条件のどちらかを課してよいというわけですから、例えば μ が 0 から p までは自由端、そして $p+1$ から 9 までは固定端、という風にとったとしましょう。そうすると、$p+1$ から 9 の固定端境界条件の方向には開弦の重心、x^i と書いていたやつですけども、それは動くことが出来ない。弦の端点が乗っている面は $x^i = c^i$ という方程式で規定されます。この面のことを D ブレーンと呼ぶわけです。D は固定端境界条件の”Dirichlet”の D、そしてブレーンは “membrane”の一部をとっています。昔は Dirichlet ブレーンとかいう風に呼ばれていましたが、今は Dirichlet ブレーンと呼ぶ人はいなく、D ブレーンと単に呼ばれています。空間方向に p 次元伸びていく D ブレーン、すなわち上のように自由端境界条件と固定端境界条件の数を合わせた場合、これを Dp ブレーンと呼びます。Dp ブレーンという命名は誰が考えたのか知りませんけども、ある種、こんなことを考えても面白くないんじゃないかと考えていた人が名付けたらしいです。というのは、p ブレーンというのは、アメリカ人にお前 p ブレーンだっていうと、ボコボコにされます。どうしてかと言うと、ピー (pea) というのは豆って意味ですね。ブレーン (brain) というのは、脳みそのことです。だから、お前 p ブレーンだって言えば必ずボコボコにしてくれます。もちろん、スペルは違いますけどね。でも、発音は一緒ですから。ですから、なるべく p ブレーンと言わずに、Dp ブレーンと呼びましょう。これは外国で発表する時のコツですね。

Dブレーンと開弦

完全に自由な開弦は 全方向にN型の境界条件を満たし、その振動の無質量状態は 10次元時空上のゲージ場

$A_\mu(x^0,\cdots,x^9)$ $(\mu=0,\cdots,9)$ である。

いくつかの方向を固定端にすると…

$$\begin{cases} \text{1) 重心はそちら方向には動けず、開弦の動き回る空間は } x^0,\cdots,x^p \text{ の } p+1 \text{ 次元時空のみ。} \\ \text{2) } A_\mu \text{ の足 } \mu \text{ は、} \mu=0,\cdots,p \text{ は「時空」の意味をもつが、他の足 } \mu=p+1,\cdots,9 \text{ は時空方向ではなくなる。} \end{cases}$$

⇝ Dpブレーンに端を持つ開弦の振動からは

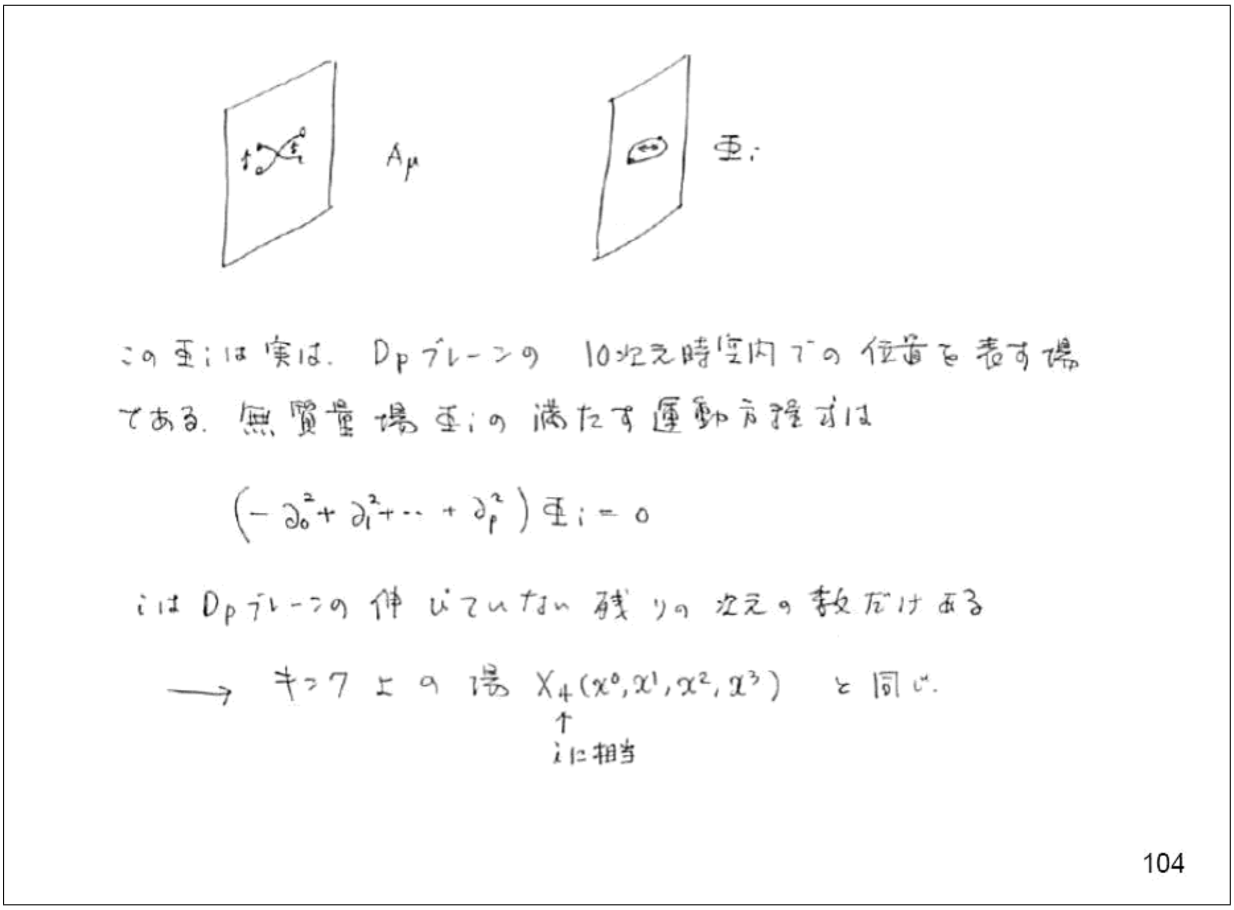
$$\begin{cases} A_\mu(x^0,\cdots,x^p) & \mu=0,\cdots,p \quad \text{ゲージ場} \\ \Phi_i(x^0,\cdots,x^p) & i=p+1,\cdots,9 \quad \leftarrow \text{ラベル} \end{cases}$$

の2種類の無質量場が出現する。

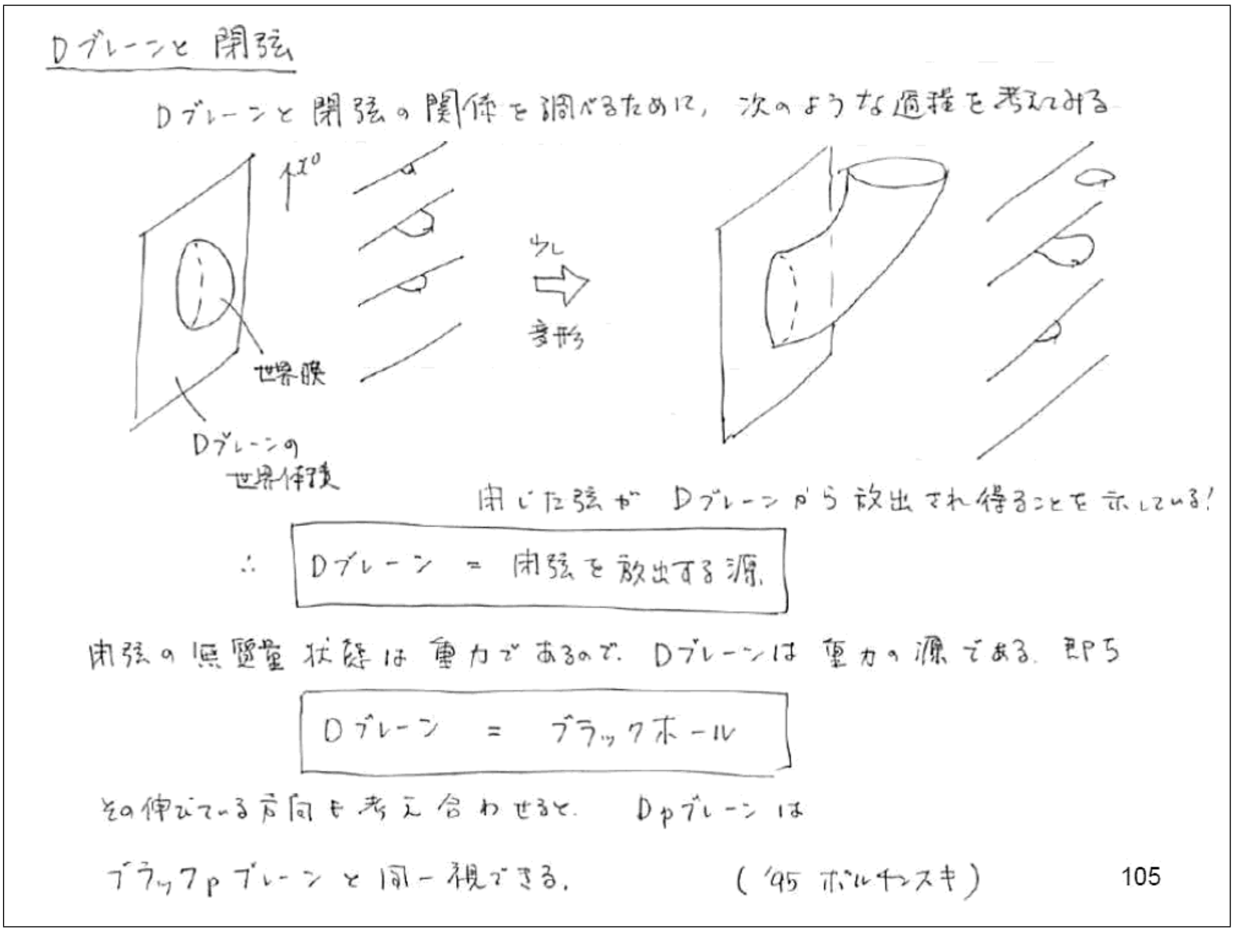
13

D ブレーンと開弦

D ブレーンと開いた弦の関係をもうちょっと詳しく見てみましょう。完全に自由な開弦は、全方向に自由端境界条件を満たしている、それを見てきました。その振動の無質量状態は、10 次元時空のゲージ場 A_μ です。振動の方向に 10 方向あるので、ちょうどその自由度がゲージ場の足 μ に対応している、ということがわかりました。そこで、幾つかの方向を固定端境界条件に変えて D ブレーンを考えたとしましょう。そうすると、2 つのことがわかります。まず第一に、開いた弦の重心は固定端の方向には動くことが出来ない。D ブレーンの上に端っこが乗っていますから。そうすると、開弦の動き回る空間は、$x^0, \cdots, x^p$ までの $p+1$ 次元時空のみです。元々の話は、A_μ というのは x^0 から x^9 までの関数だったんですけども、x^0 から x^p までの関数になってしまうということです。次に、この A_μ の足 μ ですけども、μ が 0 から p までというのは時空の意味をもちますが、残りの足、$p+1$ から 9 というのは時空方向ではなくなります。なので、その分はスカラー場になってしまいます。スカラー場のラベルが $p+1$ から 9 と。この話は Kaluza-Klein の時とそっくりですね。実は、Kaluza-Klein の reduction をすると、A_μ という元々考えていた 10 次元のものが、ゲージ場とスカラー場に落ちるということは簡単にわかります。ですので、話は全く一緒。今見たことは、A_μ というものが伝搬している次元が $p+1$ 次元時空になると。そして、ゲージ場の一部はスカラー場として見えることになるということです。



マンガで書きますと、A_μ というのはブレーンに沿った方向の自由端の振動、Φ_i というスカラー場は D ブレーンに垂直な方向の振動。この 2 つの振動は、ゲージ場とスカラー場を出すというわけです。このような Φ_i が出てくるということは、ブレーンワールドのところでちょっと見ましたね。この Φ_i は実は、Dp ブレーンの 10 次元時空内の位置を表わすブレーン上の場です。実際、無質量場 Φ_i の満たす運動方程式は、$(-\partial_0^2+\partial_1^2+\cdots+\partial_p^2)\Phi_i=0$ というわけです。しかも i は Dp ブレーンの伸びていない、直交する残りの次元の数だけあるわけです。この話しは、キンク上の X_4 の場合と全く同じですね。X_4 の足として 4 というのが付いていましたけど、これはキンクに垂直な方向。今は i というのがそれに相当しています。そして、キンク上の場は、キンクの伸びている方向、すなわち x^0 から x^3 までの関数として与えられる。今もそうですね。Φ は x^0 から x^p までの関数として与えられる。このような意味で、ブレーンワールドと言ってソリトン解を一生懸命導出してきましたけども、弦理論の中でも固定端境界条件を課すだけで全く同じような性質を持つものが出てくるわけです。



D ブレーンと閉弦

では、D ブレーンと閉じた弦の関係を見てみましょう。D ブレーンは開いた弦で定義されました。ところが、開いた弦と閉じた弦は関係があるということを述べました。穴が開いたワールドシートを変形すると閉じた弦に見えますねという話をしました。それと同じようなことを考えて見ましょう。左側の絵は、D ブレーンに端を持った開いた弦が変形していく状況を表わした絵です。スライスしていくと、各時間での D ブレーンと弦の形が見えるという絵です。世界膜を変形すると、右のようなプロセスも可能ですね。閉じた弦を一個ポンと出している、そんな絵です。こんなワールドシートの絵を描いても良いので、閉じた弦は D ブレーンから放出されることが出来る。一方、閉じた弦とは何だったかというと、その無質量状態というのは重力子です。D ブレーンは重力子を放出する源と考えることが出来るわけです。先ほどのところで、重力子を放出する源はブラックホールだと言いました。ですから、この安直な議論で、D ブレーンはブラックホールであるということが示唆されるわけです。伸びている方向を考え合わせると、Dp ブレーンはブラック p ブレーンと呼ばれているものと同一視出来ます。ここで、ブラック p ブレーンとは、ブラックホールの伸びている方向が空間的に p 個あるというものです。そういうブラックホールの一般化です。ブラックストリングとかありましたが、それは p が 1 の場合、ブラックホールは p が 0 の場合です。こんなことを言ったところでですね、全く違うオリジンのものをイコールと書いたら普通は怒られるわけですね。性質が似ていますね、だから等しい、と言ったら怒られるわけです。ところが、この Polchinski はものすごい偉い人でそれを言ってみたわけです [19]。偉い

人が言ったらみんな考えるわけですね。そうかもしれないなぁと。実際に、Polchinski は非常に偉かった。D ブレーンはブラックホールであるという同一視はものすごい突飛であるにもかかわらず、実は正しいと考えられています。どうしてこれが突飛かというのは明らかですね。D ブレーンは元々平坦な時空の中に勝手に考えた板です。一方、ブラックホールというのはもっと違うものだと思っています。時空が曲がっていて、ホライズンがあって、そこに吸い込まれて、出てこられなくなる。そういうイメージなわけです。そういう全く違うものをイコールで結んでみた。このイコールはまだ誰も証明していません。Polchinski が言ったと。それで考えてみた。D ブレーンの側で色々計算してみた。ブラックホールの側で色々計算してみた。そうしたらこれが、なんと合うじゃないかと。そういう論文がその後山のように出ます。そのため、この等式は正しいんじゃないかと考えられています。これが証明出来たら、弦理論がある意味で非常に重要な部分を解いたと言って良いでしょう。それぐらい重要な問題です。まだわかっていない。けれども、ナイーブにはこの等式はわかりますね。今見た通り、D ブレーンは確かに閉じた弦を放出するようなソースになっている。一方、ブラックホールも、運動方程式の古典解ですが、ソリトンとして重力子を放出する過程があると。そしたら、同じようなものであるというのは、その観点からは確かにそうであると言えます。このことは、後の応用のところでものすごい重要になってくるので、ちょっとその性質は置いておいて、あ、一つ重要なこと言い忘れました。弦理論のソリトンはブラックホールであると言いました。そして、ブラックホールは D ブレーンであると言いました。ですので、弦理論のソリトンは D ブレーンであると言えるわけです。良いでしょうか？

今までソリトンと言うと運動方程式の古典解を解いて云々と言いましたね。そしてその上にどういう自由度があるかというのを展開して求めて…と言いました。ここではそういう導出は一切せずに、むしろ開いた弦の境界条件で D ブレーンというものが定義出来るじゃないかと、そして定義してみるとブラックホールとよく似た性質を示しますね、ですから D ブレーンは弦理論のソリトンであると言えますねと、そういう論理です。で、何回も言いますが、この等式に関しては今のところよくわかっていません。どういう風に証明するかわかっていない。ただ、この等式を使うと面白いことが色々言える、両辺である量を計算すると完全に一致するということがわかる、そういうことです。

4-3 Dブレーンと非可換ゲージ理論.

Dブレーン上の有効理論

Dpブレーンが一枚ある時、その上には

$A_\mu(x^0,\cdots,x^p)$, $\Phi_i(x^0,\cdots,x^p)$ $\begin{cases} i=p+1,\cdots,9 \\ \mu=0,\cdots,p \end{cases}$

の無質量場があるため、その作用は

$$S=-\int \underbrace{d^{p+1}x}_{\uparrow}\left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi_i\,\partial^\mu\Phi_i\right).$$

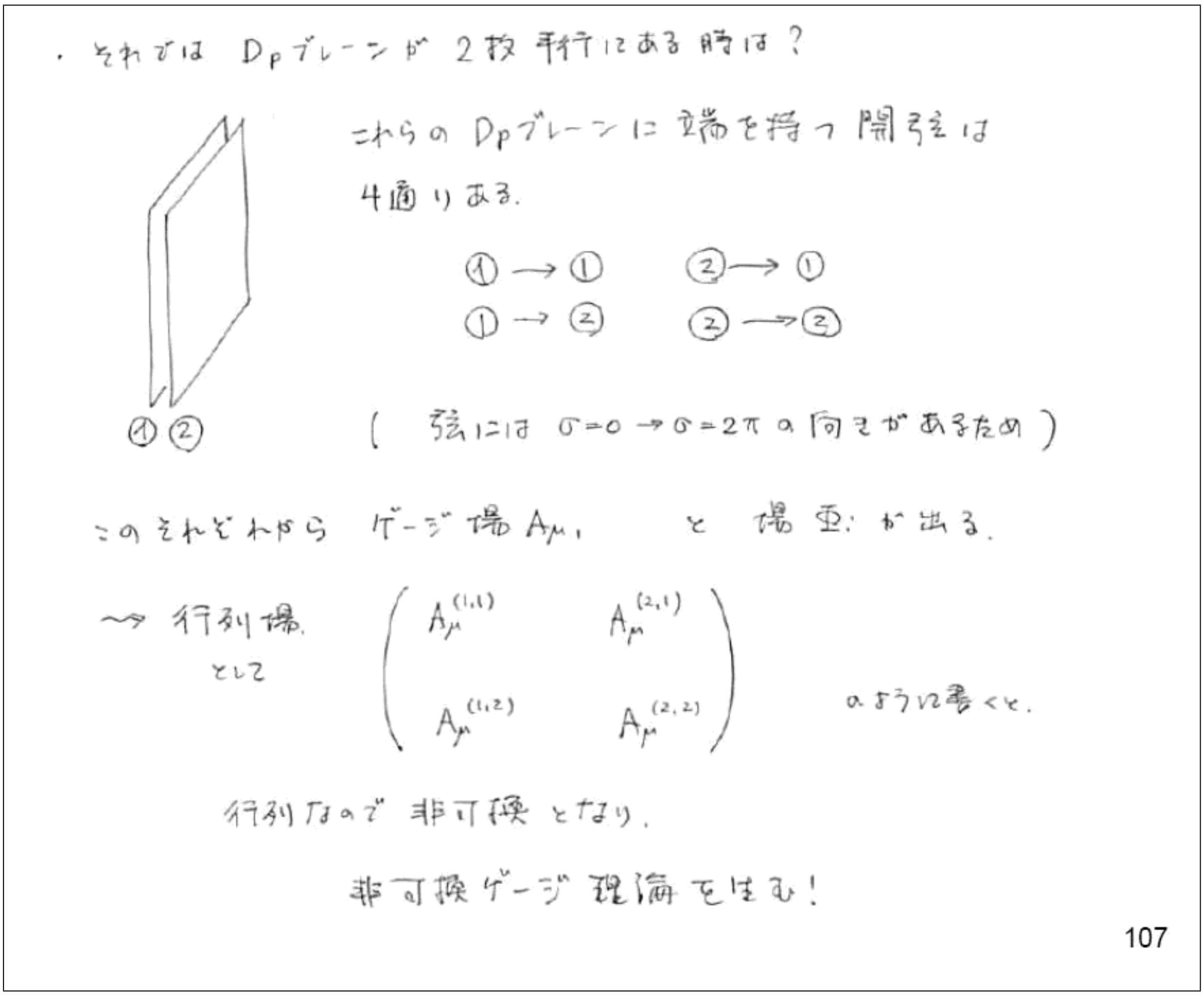
p+1次元時空 = Dpブレーンの世界体積

106

4.3 Dブレーンと非可換ゲージ理論

Dブレーン上の有効理論

では次に、Dブレーンと非可換ゲージ理論の関係について見ていきましょう。Dブレーンの上には開弦がくっつくことが出来るので、そういうところには場が出てくると言いました。その場のラグランジアンのことをDブレーン上の低エネルギー有効理論と言います。Dpブレーンが1枚ある時は、その上にはゲージ場 A_μ とスカラー場 Φ_i があって、その2つの場は x^0 から x^p までの関数です。これらは無質量場なので、その作用は非常に簡単で、Maxwellラグランジアンとスカラー場の運動項、それだけです。ただ、積分範囲は $d^{p+1}x$ になっていて、$p+1$ 次元時空、つまりDpブレーンの世界体積の上でのみ存在する場であるということを指定します。これがラグランジアンですね。



それでは、D ブレーンが２枚ある時はどうであろうか。２枚あるというのはどう意味であるかというと、弦の端を持つ部分空間が２種類ありますよと、それだけです。一個目の D ブレーンと二個目の D ブレーンを同じものだと思って、このように並行に置いたとします。離してもいいんですけども、くっつけて置いたとします。これらの Dp ブレーンに足を持つ開弦は全部で４通りあります。$1 \to 2$ と $2 \to 1$ が違うのは、弦として $\sigma = 0$ から 2π という向き付けが出来るものを考えているからです。この４通りがあります。それぞれから、ゲージ場 A_μ とスカラー場 Φ_i が出てきます。振動の解析も同じです。この４種類は行列場として $A_\mu^{(1,1)}, A_\mu^{(2,1)}, \cdots$ と書くとうまくまとまります。これは行列なので非可換となり、非可換ゲージ理論を生みます。こんな風に D ブレーンを重ねると非可換ゲージ理論が出てくるわけです。

その作用は　$S = -\int d^{p+1}x \ \mathrm{tr}\left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \cdots \right)$

行列についてのトレース.

作用が実であるためには,

$A_\mu^{(1,1)},\ A_\mu^{(2,2)}$: 実　　$\left(A_\mu^{(1,2)}\right)^* = A_\mu^{(2,1)}$

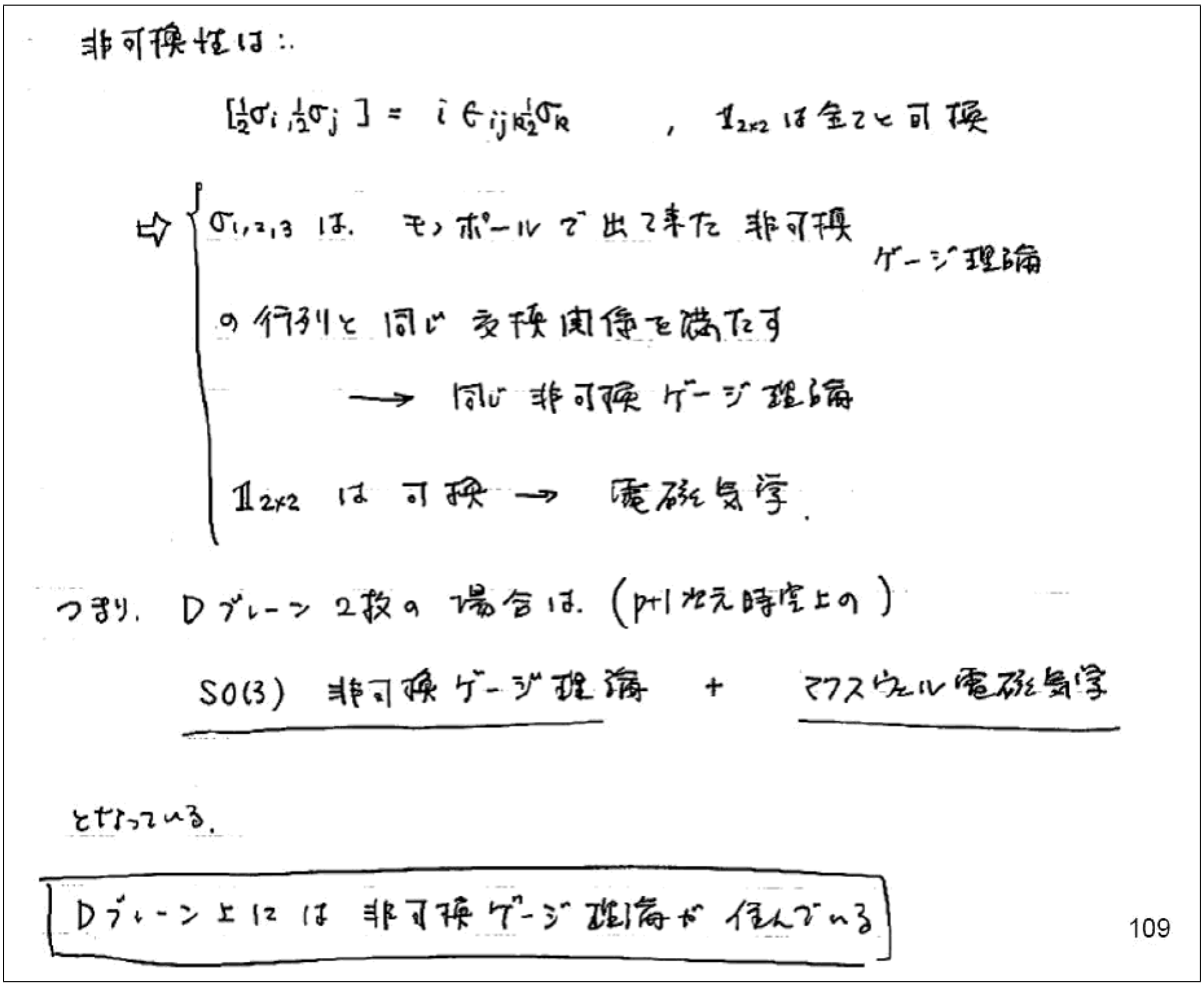
即ち. 2×2 行列は次の基底×実数で展開できる:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{2\times 2}, \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_3, \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_1, \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_2$$

と書く.

108

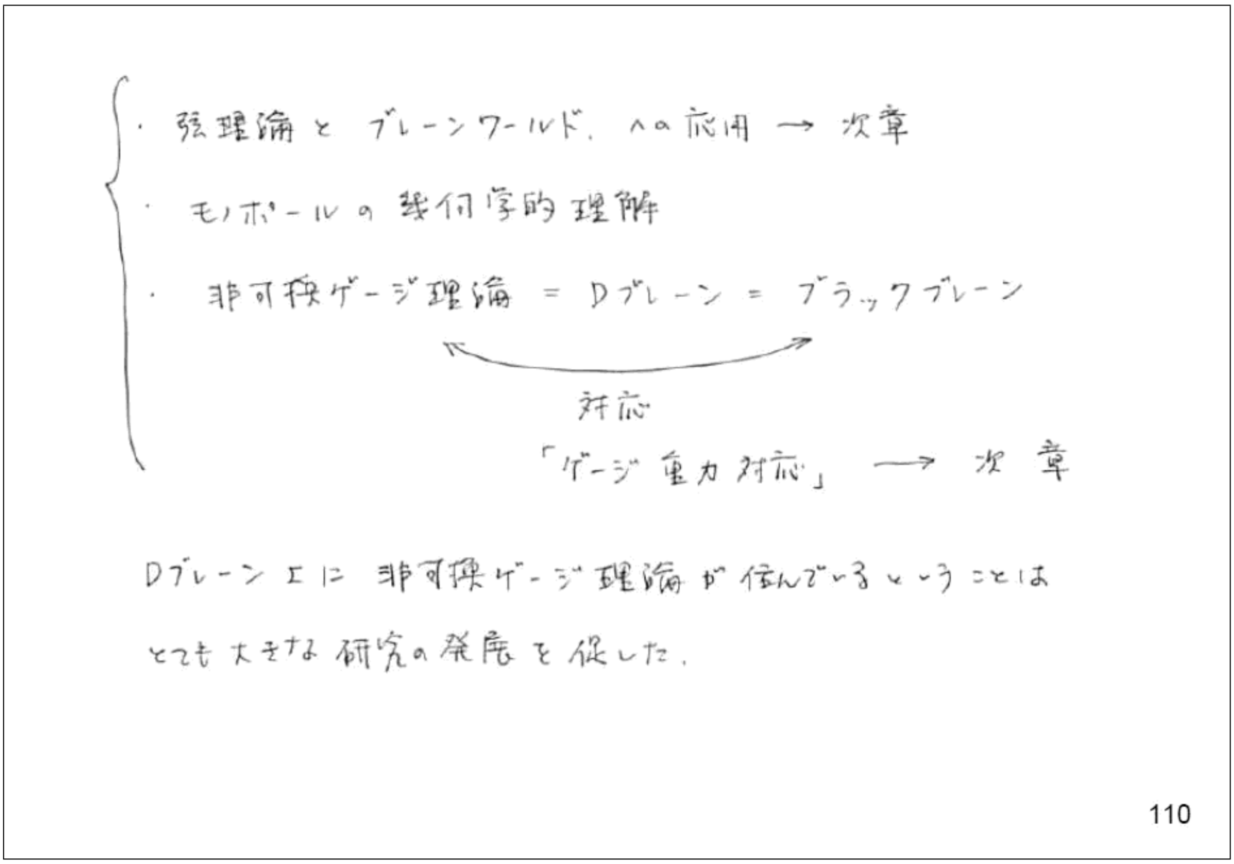
その作用はどうなっているかという風に考えますと、先ほどの行列を $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ というところに代入して、行列についてトレースをとれば良いと。ここにごちゃごちゃ書いてありますが、あんまり気にしないで下さい。作用が実数であるには A_μ の対角成分は実数で、右上の成分は左下の成分の複素共役でなければならない、こういうものは $1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ で展開出来ます。



この基底は実は $[\frac{1}{2}\sigma_i, \frac{1}{2}\sigma_j] = i\epsilon_{ijk}\frac{1}{2}\sigma_k$ という代数を満たしていて、この代数はモノポールで出てきた非可換ゲージ理論の行列と同じ交換関係ということがわかる。ですので、モノポールの時に出てきた $SO(3)$ の非可換ゲージ理論と一緒です。それに加えて単位行列というのが生成子で加わっていて、モノポールはこれと全部可換ですから、$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ と独立に電磁気学が一個出来る、という仕組みになっています。つまり、D ブレーンが 2 枚ある場合は、$p+1$ 次元時空上の $SO(3)$ の非可換ゲージ理論 + Maxwell 電磁気学 + スカラー場、という風なものになっているというわけです。D ブレーン上には非可換ゲージ理論が住んでいるということが明らかになりました。

ここでざっとお話しをしましたが、実はですね、ここで行列に組むのは何故ですか？という質問があると思います。こう書かなくても、例えば縦に 4 つ並べてもいいじゃないですか、何で行列に並べるのか。行列に並べれば確かにこういう結果になりそうですけども、そうでなければそうじゃないですよね。その consistency はどこからきているかというとですね、もうちょっとラグランジアンの $[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \cdots]$ の $\cdots$ のところの構造を見ないといけません。言葉だけで言いますが、今 D ブレーンが並行に重なっていましたが、この 2 つをちょっと離してみます。ちょっと離すと、1 番と 2 番を繋いでいるストリングは伸びますね。弦が伸びると、弦は単位長さあたりの質量を持っているのでちょっと質量を稼ぎます。一方、$1 \to 1, 2 \to 2$ は無質量のままです。$1 \to 2, 2 \to 1$ は質量を持ちます。ゲージ場が質量を持つメカニズムは何だったかというと、ヒッグス機構

ですね。さっき勉強しました。ですので、１番と２番を離すという操作でヒッグス機構が起こらないと困るんです。そうしないとこの考え方は矛盾しますね。ヒッグス機構がうまく起こるようにするのは、対角の部分のゲージ場については電荷を持っていないけども、非対角の部分については電荷を持つようなヒッグス場が必要です。そのヒッグス場は何かというと、Φ_i しかないです。Φ_i はどういう意味を持っていたかというと、１番と２番のブレーンの場所を表わす、そういうスカラー場でした。その値がノンゼロであるということは、確かに D ブレーンが離れるという自由度を表わすわけです。なので、Φ_i の値が行列としてちょっと違う値をとった時にちょうど A_μ の非対角成分が質量を持つように、そういうヒッグス機構が起こるようにラグランジアンを書かないとダメなわけです。A_μ と Φ_i が出てきた根拠を考えてみましょう。元々 10 次元のゲージ場があって、そのうち幾つかの方向を Dirichlet にしてしまったために、そっち方向はスカラー場になっちゃったわけです。ですから、元々のラグランジアンは A_μ と Φ_i について美しい対称性で結ばれていないといけないということがわかりますね。これは、昨日ちょっと研究会で話がありましたが、Gauge-Higgs unification というのと一緒です。ヒッグス場とゲージ場が繋がっている。そういう consistency を色々考えていくと、実はこういう風に行列で組んでラグランジアンを書くしかないということがわかります。以上の議論から、D ブレーンの上には非可換ゲージ理論が住んでいるということがわかりました。

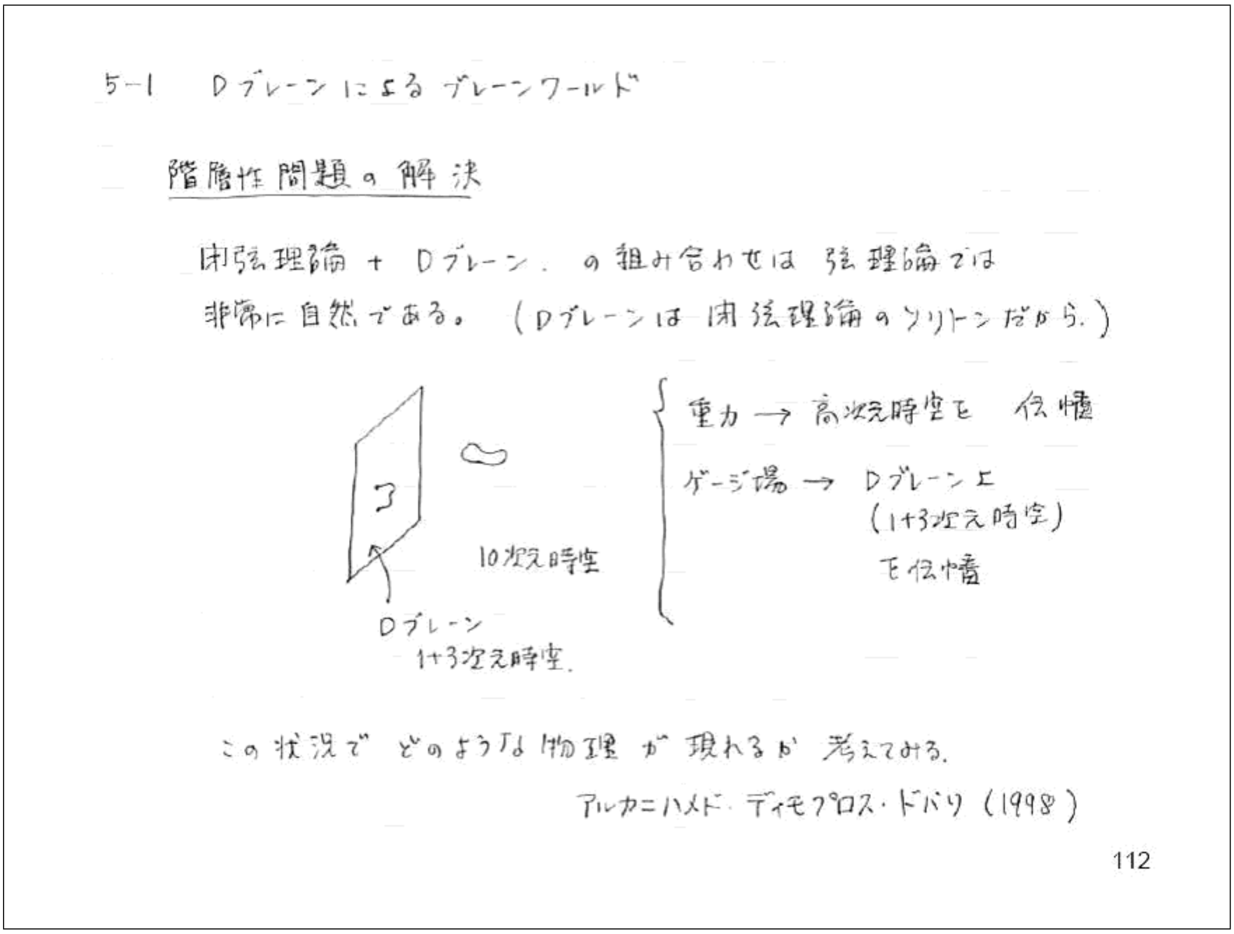


これで、２時間目を終わります。次にやりたいことは、最後のセクションに進みまして、弦理論とブレーンワールドへの応用、そして非可換ゲージ理論とブラックホールとの対応を使って強結合の問題を解くということをお話しします。以上で終わります。

質問ありますか？大丈夫？それでは。

5　D ブレーンから素粒子論へ

じゃあ最後の section に入ります。この section では階層性の問題がこういうブレーンワールドの考え方からどんな風に解決される可能性があるか、そして強結合の問題をどういう風に解決できるか、ということについて述べます。この 2 つは素粒子論の非常に最近の発展を含んでいまして、elementary な事しか説明しませんが、このようなところを研究している人が非常に多い、ということをまあ覚えておいて下さい。まあもちろん昨日の研究会とかこれからの研究会とかでそういう話を聞くと思いますし、特にこれからお話する階層性の解決の話はおそらく講義 C で尾田さんが詳しくお話をしてくださると思います。それではこの階層性問題のところから入りましょう。



5.1 D ブレーンによるブレーンワールド

階層性問題の解決

階層性問題を解決したい。でこれにブレーンワールド、そして弦理論はどういうふうに contribute してくれるか？ということです。閉弦理論を考えてそこに D ブレーンを置くと、その上には開弦がある。そういう組み合わせは弦理論では非常に自然です。どうしてかと言うと、初めに弦を考えれば、その閉弦理論のソリトンとして D ブレーンが出てくるわけだから、その D ブレーンの上に開いた弦が住んでいて、そういうセットアップは自然なわけです。こういうセットアップを考えたときに、昨日話したブレーンワールドと違う点があります。その違う点は、次のようなことです。まず、閉弦と開弦はそれぞれ重力とゲージ場、スカラー場を出して、重力のほうは D ブレーンと関係ない、つまり閉弦だから高次元時空上を伝搬することができる。一方ゲージ場は、これは開いた弦からきているので D ブレーン上だけを伝搬することができる。ここが違うわけです。このような状況でどのような物理が現れるかということを考えていきましょう。これからお話するのは large extra dimension model と呼ばれる、アルカニハメド、ディモプロス、ドバリという人たちが 10 年前に提唱した模型の話です [20]。

まず 重力は 高次元時空を伝わるので、

重力ポテンシャル

$$F = \frac{1}{M_{pl}^2}\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \left(\Leftrightarrow \quad V(r) = -\frac{m_1 m_2}{M_{pl}^2}\frac{1}{r} \right)$$

のニュートンの法則は修正され

$$V(r) = -\frac{m_1 m_2}{M_{pl(4+n)}^{n+2}}\frac{1}{r^{n+1}}$$

rは$(4+n)$次元時空におけるキョリ

$M_{pl(4+n)}$ は $(4+n)$ 次元時空のプランク質量

これは そのままでは問題がある。なぜなら太陽系は逆2乗則で支配されていることを知っているからである。そこで余分なn次元（「余剰次元」と呼ぶ）が KKコンパクト化されているとしよう（半径R）.

113

まず、重力は高次元時空を伝わる。弦理論の場合だったら 10 次元時空。コンパクト化しなければ、まさに 10 次元時空になっています。そのためにニュートンの法則は修正されます。ニュートンの法則は、2 つの質点、m_1, m_2 を持つ質量の間の重力相互作用の力が $\frac{1}{r^2}$ になっているという形です。重力ポテンシャルで書くと、$\frac{1}{r}$ というものになっています。$\frac{1}{r}$ というのは、divergence が 0 という harmonic function ですね。これが高次元になると、ラプラシアンの微分の数が変わりますから、r のべきが変わるわけです。高次元にいくとこのニュートンの法則は修正されて、$\frac{1}{r}$ ではなく $\frac{1}{r^{n+1}}$ というものになります。ここで r は $4+n$ 次元時空における距離。そしてこの前の係数 $M_{pl(4+n)}$ は $4+n$ 次元時空のプランク質量です。この高次元のプランク質量に $n+2$ 乗というべきがかかっているのは、この $V(r)$ というものの質量次元を正しく出すためです。ポテンシャルは質量次元が 1 なので、ここに $\frac{1}{r^{n+1}}$ というものが入れば、この質量次元をキャンセルするために、$M_{pl(4+n)}$ は $n+2$ 乗で入らないといけません。もちろん $n=0$ だったら 4 次元のものに reduce するようにしてあるわけです。こんなことをするともちろんそのままでは問題があるわけです。なぜならば太陽系は逆 2 乗法則で支配されていることを知っている。それは長年にわたり研究されてきており、それは consistent でないといけないと知っているわけです。そこで、余分な n 次元、これを余剰次元 (extra dimension) と呼びますが、余剰次元が Kaluza-Klein コンパクト化されているとしましょう。半径は R。

すると $r \gg R$ では 4次元時空のように見えるはずなので

$$V(r) = -\frac{m_1 m_2}{M_{pl(n+4)}^{n+2}} \frac{1}{R^n} \frac{1}{r} \qquad (r \gg R)$$

となるはず。この右辺を、我々の知る逆2乗則と等しいとると

$$M_{pl}^2 = M_{pl(4+n)}^{2+n} R^n$$

$(4+n=10$ なら $n=6)$

114

半径 R でコンパクト化されているというときは、$r \gg R$ でみると、4 次元時空のように見えるはずです。この見えるという意味は、昨日詳しく説明しました。半径よりも大きな長さのスケールだと、低い次元に見えるけれども、半径よりも小さい長さのスケールにいくと、高次元時空に見える。そういう意味ですね。$r \gg R$ の領域では 4 次元時空のように見えるはずなので、先程のポテンシャルは $\frac{1}{r}$ になるはずです。けれども、もともと $\frac{1}{r^{n+1}}$ になっていたので、consistent であるためには、ポテンシャルがこんな風な形

$$V(r) = -\frac{m_1 m_2}{M_{pl(4+n)}} \frac{1}{R^n} \frac{1}{r} \tag{52}$$

をしていないといけない。$\frac{1}{r^{n+1}}$ だったところが $\frac{1}{R^n}\frac{1}{r}$ のようになっていないといけませんね。こうなっていれば、$r = R$ を代入すればさっきの式に到達するし、r が大きいところでは $\frac{1}{r}$ の振る舞いをするということになるわけです。まあ正確にはもっとちゃんとしたことをやらないといけないけども、今はちょっとオーダーの話をしているので、これでやってみることにしましょう。この右辺が、我々の知っている逆 2 乗法則と等しいとしますと、前の係数が我々の知っているプランク質量と関係がつきます。その関係は明らかにこうですね。

$$M_{pl}^2 = M_{pl(4+n)}^{n+2} R^n \tag{53}$$

(52) 式の分母に現れている部分が、我々の知っているプランク質量の 2 乗になっています。

階層性問題の解決のためには？

$$M_{pl} = 10^{19}\ \mathrm{GeV}$$

が、W の質量 10^2 GeV と比べて大きいのが問題だった。

$\longrightarrow$ $\underline{M_{pl(4+n)}\ \text{が十分小さければ解決する！}}$

現在の加速器で量子重力効果は見えていないので、

最低で $M_{pl(4+n)} \cong 10^3$ GeV ととれる。すると

$$R \simeq 10^{\frac{30}{n}-19}\ [m] \quad \text{を得る。}$$

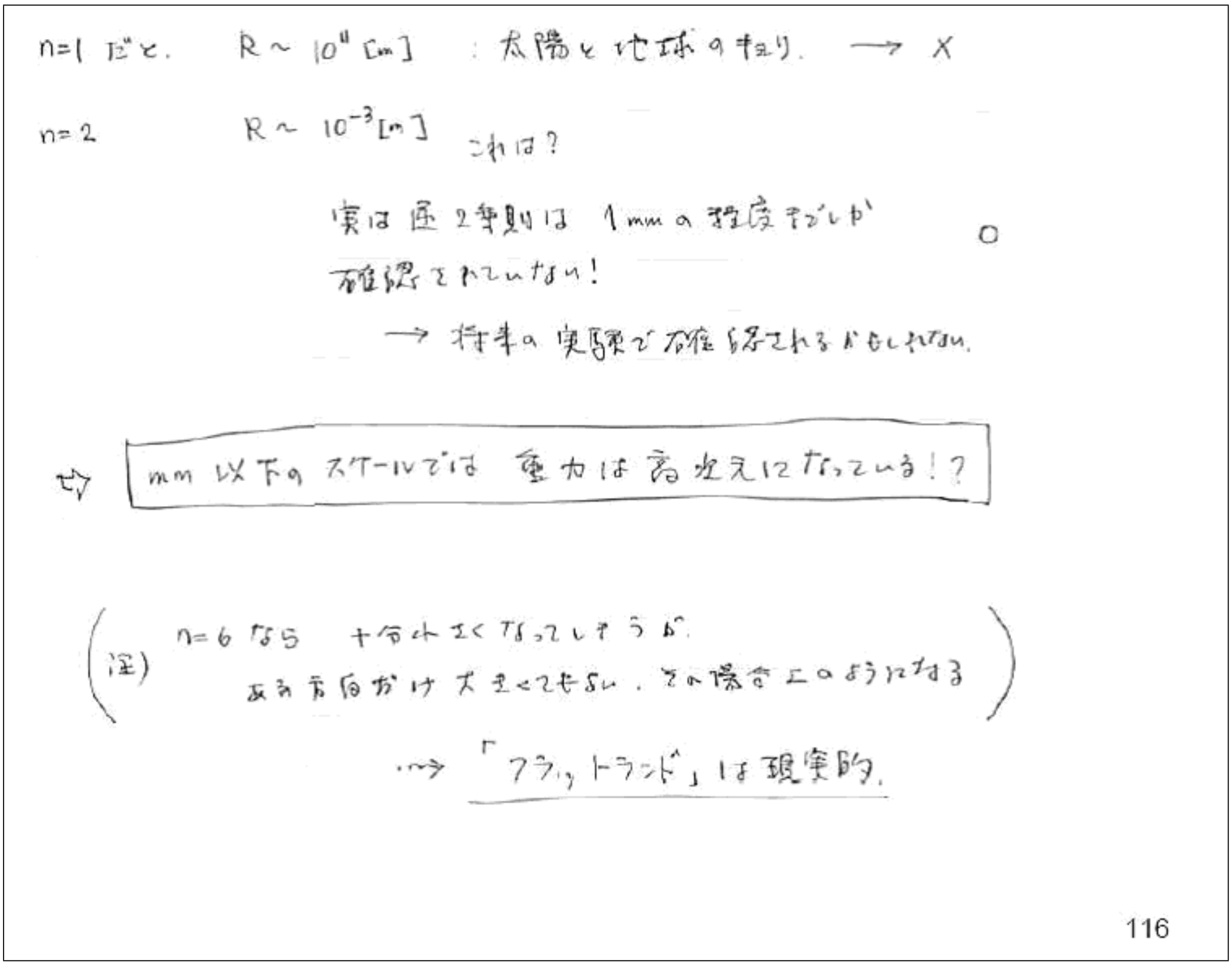
プランク長 $\cong 10^{-35}$ [m] $= 10^{19}$ [GeV^{-1}]　　$\therefore$ 1 [GeV^{-1}] $= 10^{-16}$ [m]

115

階層性問題は何だったかといいますと、プランク質量が我々の知っているエネルギースケールよりもものすごい大きい。それが階層性問題の一部でした。特に、例えば W ボソンの質量、これは weak スケールと呼ばれますが、この 10^2 [GeV] ぐらいの大きさに比べて、この 10^{19} [GeV] というのはものすごい大きいわけです。しかしこれがもし見かけの大きさであって、先程の (53) 式でこの $M_{pl(4+n)}$ が weak スケールよりもあまり離れていないような値であれば、この M_{pl} というのは見かけ上大きかっただけで、実はそんな階層性問題はないんだという可能性も出てきますね。現在の加速器で、量子重力の効果は見えていません。量子重力の効果といのは、このプランク質量ぐらいの大きさのエネルギーを持つものを生成することができれば重力の特徴的な効果が出てくるはずですが、その効果は見えていない。ですので、この仮想的な高次元時空のプランク質量の大きさは 10^3 [GeV] よりも大きくないといけないわけです。今度の LHC でこういうものが観測されるためには $M_{pl(4+n)}$ がこれぐらいの大きさでないと見えないし、これが小さければ小さいほど得なんですね。なぜかというと階層性問題が解決されるからです。高次元時空でのプランク質量 $M_{pl(4+n)}$ を 10^3 [GeV] ととったとしましょう。そうすると、先程の (53) 式に代入すると R がこんなふうに求まります。

$$R \simeq 10^{\frac{30}{n}-19}\ [m] \tag{54}$$

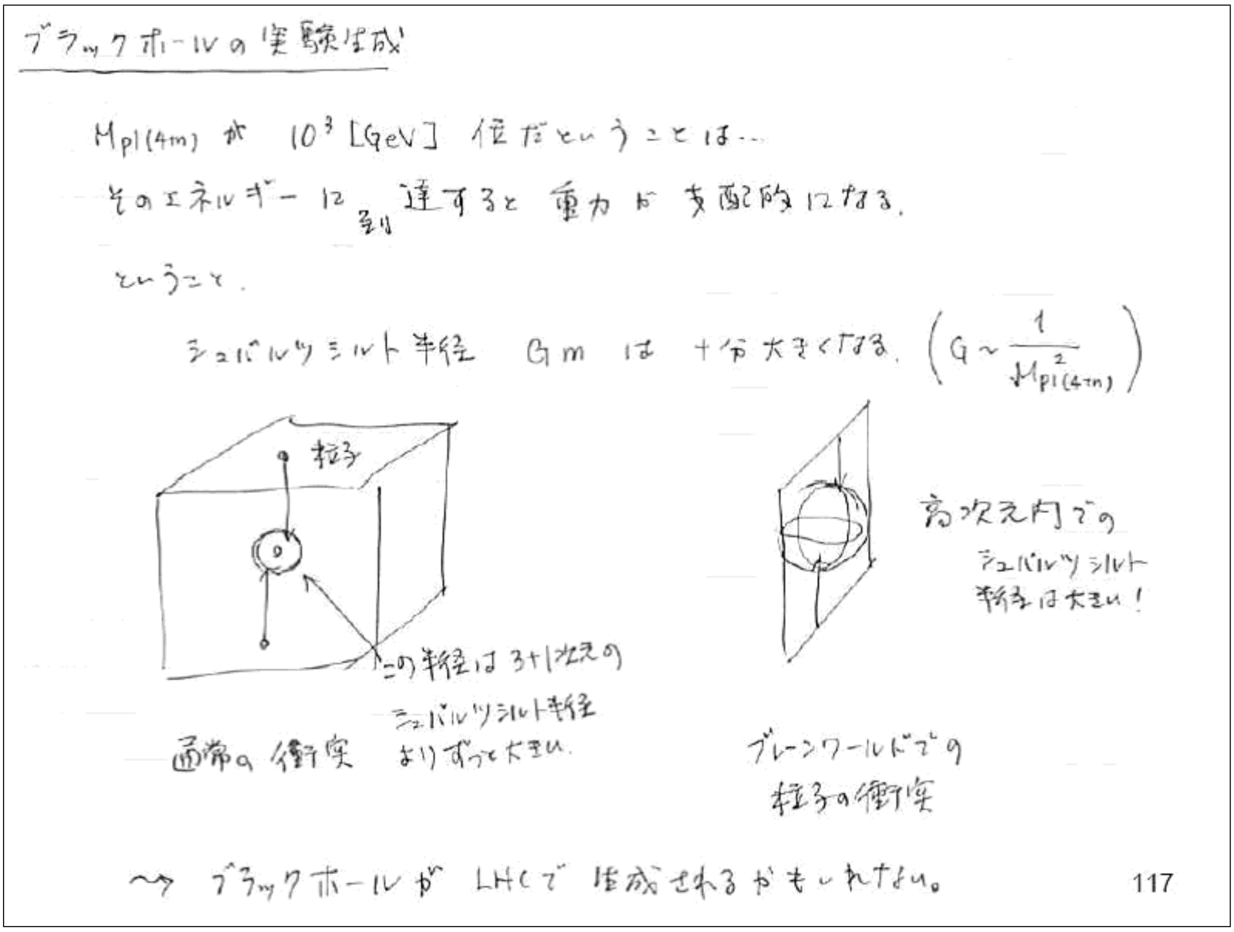
今、GeV をメートルの単位に戻しました。



この公式を見てみましょう。もし、$n=1$、すなわち余剰次元が 1 個だけであったとしましょう。超弦理論の場合それは 6 個ですけれども、6 個のうちいくつかが小さくていくつかが大きいとかそういうことも可能ですね。で、1 個だけが大きくなってそれだけが effective になってきたと考えてもいいです。そのようにして $n=1$ だったとしましょう。そうすると、この R は 10^{11} $[m]$ になって太陽と地球の間の距離と同じです。これでは観測と矛盾します。では次に $n=2$ だとしましょう。これは余剰次元が 2 個だけあったという例です。本当は時空次元が 6 であったという意味。そのときには r がこれよりも非常に劇的に減って 10^{-3}[m] になります。これはどうであろうか。実は、重力の逆二乗法則というのは、1 mm 程度までしか確認されていません [22] [*7]。実験的には。ですので、10^{-3}[m] というのは 1[mm] ですから、ノートの字ぐらいの大きさですね。で、そのぐらいの大きさで実は次元が変わっているというとても突飛なアイディアなわけですが、これは重力相互作用のことのみについて言っていますので、実験とは矛盾していません。もし電磁気の相互作用が、10^{-3}[m] つまり 1[mm] のところで次元が変わっていたらですね、我々の見ているものは全然違うはずですね。こう鉛筆で書くともう高次元時空になっているわけです。そんなことはもちろん起こっていない。けれども重力の場合は、まあ重力を使って鉛筆を動かしているわけじゃないですから、わからないわけです。で、実際に、例えば逆二乗法則をどういうふうにして測るかというと、まあ、ものすごく大きい鉄の球を 2 個用意してですね、その鉄の球を棒でつなげて、ねじればかりでつるして、それで動かすと。そんなふうな非常に地道な実験

[*7] “Extra Dimensions”の章を参照。$\mathcal{O}(10^{-1})$ [mm] まで制限されている。

が行われます。で、その実験の結果は 1[mm] ぐらいの精度しか出ていません。それよりも小さいところでは、逆二乗法則になってないかもしれないわけです。で、その bound は、もちろん、年々、実験の結果が improve されて下がってきているわけですけれども、現時点では、1[mm] の程度である。すなわち、将来の実験で確認されるかもしれないわけです。余剰次元模型でそのまま電磁気相互作用を高次元に拡張したら問題があります。先程、階層性問題を解決しないのをみましたね。けれども、重力と電磁気を別に考えて、重力だけ高次元時空を伝播すると思えば矛盾しないわけです。さらに、階層性問題も解決されるかもしれないし、このように実験で確認する術もあるということです。1[mm] 以下のスケールでは、重力は高次元になっているのではないか。この意味でフラットランドというのは、これは平面国というおとぎ話の話ですが、これは現実的なわけです。全く変なことを言っているわけではなくて、確かに、今までの実験と矛盾しないし、これからの実験で観測される可能性もある。さらに、階層性問題も解決できるかもしれない、という意味で魅力的なシナリオなわけです。こんなシナリオが出てきた理由は明らかで、弦理論の方で D ブレーンというアイディアがあったからですね。D ブレーンに特徴的だったことは、重力は、D ブレーンの外をどんどん伝播できるけども、ゲージ場は D ブレーンの上だけにある。我々の体を構成しているのはこれはゲージ場と matter です。で重力がこれをつなぎとめているわけではないですね。ですので、我々は、ブレーンの上にいるわけだけども、実は重力はその外側まで行くことができる。その外側のスケールというのは mm ぐらいかもしれない。そういうことです。



ブラックホールの実験生成

こんなことが起こったとすると、非常に drastic な実験結果が期待できます。先程言いました、若干地道な、鉄の球を回すという話ではなく、この年末には動くと言われている LHC、ラージハドロンコライダーでブラックホールが実験的に生成できるんじゃないか、ということが真剣に謳われています。LHC のホームページにいけばわかりますが、ブラックホールの生成に関して非常に詳しい記述があります。これは、僕は又聞きなので知りませんけれども、いろんな人がブラックホールができたら、地球が飲み込まれて、それで、地球が消滅すると。消滅しない理由は、まあ後で言いますが、まあそんなふうになるんじゃないか、と言っている人がいたんですね。で、LHC の人はもちろんそういうことにも答えないといけないわけです。それで LHC では特別な委員会が組まれて、そんなことはないんですよ、ということを公表するということが行われました。それにも関わらずこれは非常に面白い可能性で、つまり地球が飲み込まれるとかそういう話。で、そういうことが起こらないということは、もちろん我々は科学者ですから確証しなければならないわけですけれども。じゃあブラックホールがどうしてできるかということを見てみましょう。さっきの、我々の体重が 10^2 [kg] だったと仮定しようという話を思い出してみると、ブラックホールを作るのはものすごく難しいという話でした。つまり地球全体を 1[cm] に縮めないとブラックホールなんてできないわけです。そんなものが地球の上の小さい加速器でできるか？できるわけがない。けれども、この余剰次元模型を使いますとできる可能性があるわけです。それをみてみましょう。この Planck スケール、Planck 質量の大きさが 10^3[GeV] ぐらいである、ということは、このエネルギーに到達するとすでに重力が支配的になってしまうということです。Schwarzschild 半

径は Gm という combination でした。この G は重力定数ですが、今は、この Planck 質量が 10^3[GeV] ぐらいになっていますから、Planck 質量の 2 乗分の 1 に匹敵する G は前の値に比べてものすごく大きくなっているわけですね。粒子の衝突を考えてみましょう。これは 3 次元空間として、通常の粒子の衝突は、上と下から素粒子が出てくる、加速器で加速されてやってくる。それがこう衝突するわけです。衝突するときの半径、インパクトパラメータと呼ばれますが、その半径が Schwarzschild 半径よりももし小さければ、その小さな領域にエネルギーを我々はためることができるので、ブラックホールが一瞬生成すると考えられます。つまり Schawarzschild 半径で決まるところよりも十分小さな領域に静止質量を作ったわけですから、ブラックホールができる。これがブラックホールの生成条件です。ところがこの Schwarzschild 半径は地球の場合 1[cm] ですから、ものすごい小さいわけです。ところが、ブレーンワールド模型、今の余剰次元模型を考えると、実はこの全ての 3 次元のセットアップというのは面上にあってですね、重力はその外側も飛んでるわけです。衝突を考えるとしましょう。そうするとブラックホールができるんですが、ブラックホールは高次元側にもしみだしますね。この Schwarzschild 半径は、この関係式により、ものすごく大きくなっているわけです。つまり、衝突する半径を、十分大きくしてもいいので、ブラックホールが LHC で生成されるかもしれないわけです。生成されるエネルギーはもちろんこれですよ、これですけども、その生成される条件、判定条件が変わるわけです。Schwarzschild 半径が通常の場合だとものすごい小さいから生成されないわけですけれども、この余剰次元模型だと Schwarzschild 半径が大きいのでそういうふうな領域に粒子が入る可能性がある。

$m = 10^3$ GeV

$M_{pl(4+n)} = 10^3$ GeV.

$\to$ $Gm = 10^{-3}[\mathrm{GeV}^{-1}] = 10^{-19}[m]$ $\leftrightarrow$ 原子核 $10^{-15}[m]$

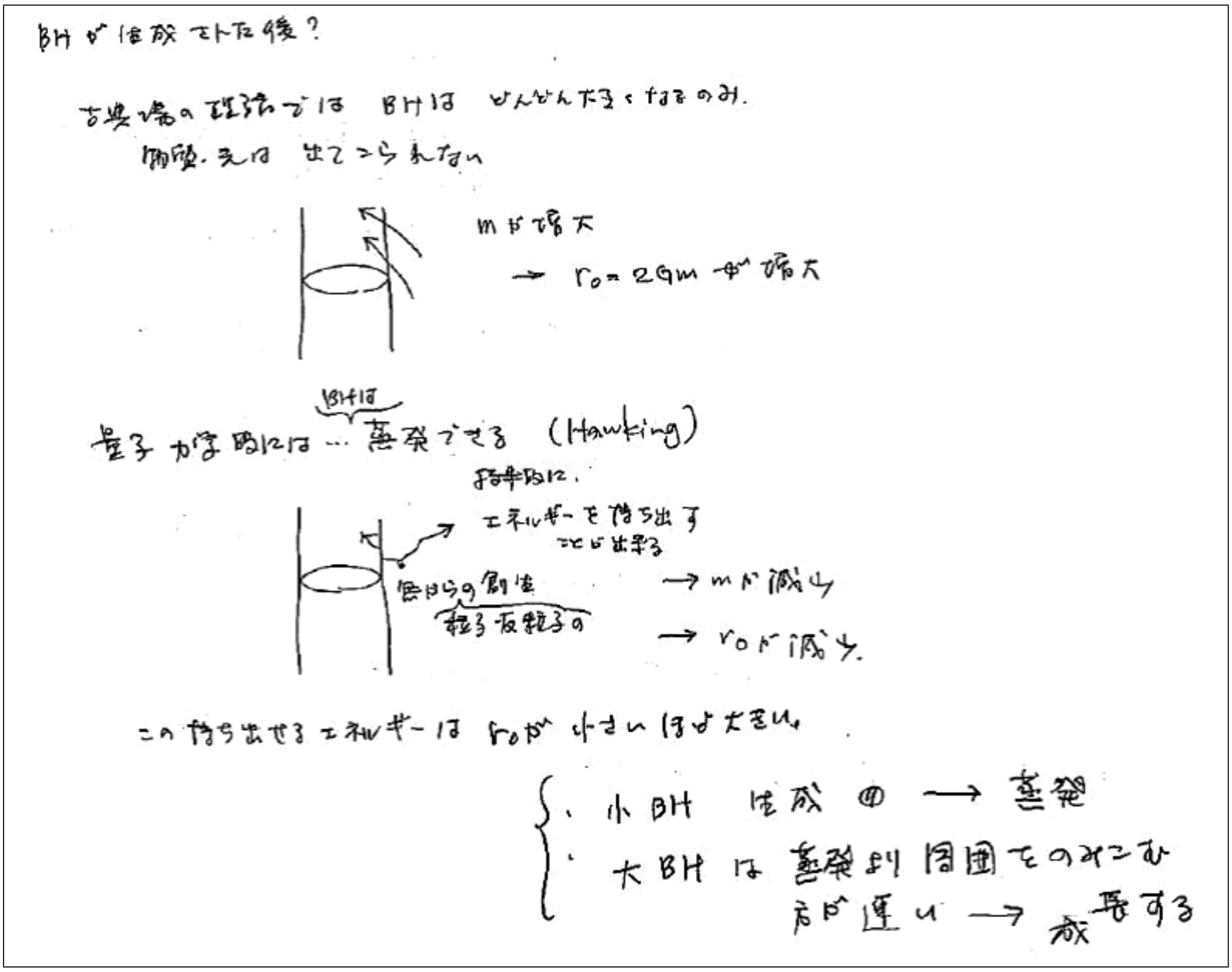
通常の1+3次元なら

$M_{pl} = 10^{19}$ GeV.

$Gm = m M_{pl}^{-2} = 10^{-35}[\mathrm{GeV}] = 10^{-51}[m]$ 小さすぎる

118

これはちょっと計算してみたものなのでまあいいかな。



ブラックホールが生成されたあとはどうなるか、ということを考えてみましょう。古典場の理論ではブラックホールはどんどん大きくなるのみです。なぜかというとブラックホールはホライズンをもっていて、そのホライズンから外に matter が出てこないわけだから、エネルギーをどんどん吸い込んで増大する。で最終的には地球を飲み込むっちゅう話なわけです。ところが量子力学的にはブラックホールは蒸発できるということが知られています。これは Hawking がはじめに言いだしたことですね。Hawking の計算は非常に面白いので一回原論文 [21] を読んでほしいんですけれども、それはここではやらずに、簡単に説明しますと、ホライズンのすぐそばで量子力学を考えると、そこで粒子と反粒子の対生成を起こすことができる。反粒子、もしくは粒子がホライズンの中に入って、粒子が外側に生き残るということがありえます。そうすると、これはブラックホールから粒子が放出されたということで、ブラックホールの質量が減少してホライズンが減少する。こういう過程を Hawking は提唱してブラックホールは蒸発するということを言ったわけです。ですから LHC がブラックホールを作っても、もし蒸発すれば、それは地球を飲み込む心配はないわけです。この計算によると、持ち出せるエネルギーは Schwarzschild 半径が小さいほど大きいので、小さなブラックホールが生成されると蒸発します。大きなブラックホールが蒸発より周囲を飲み込む方がもし速かったとすると、なんか周りに matter があってね、そうするとそれはどんどん成長します。そういう違いがあるわけです。LHC の場合は、もちろん小さなブラックホールしか生成しないので、すぐに蒸発すると期待されます。Hawking が正しければですけどね。Hawking が間違ってたら、もし生成されたら終了ですね。終了。Hawking が正しければブラックホールが生成されて蒸発するから、Hawking はノーベル賞をとるわけです。まあいずれにしても Hawking

はノーベル賞をとるわけです。これは非常にいい方法ですよね。あ、もちろんこの余剰次元模型が正しくなければ何もわからないですよね。こういう面白い実験結果が期待できます。ブラックホールが生成したということをどういうふうに判定できるかということですが、Hawking の理論を用いますと、ここから出てくる粒子の種類は、ある温度をもった輻射としてこの放射が理解できるということですので、非常に熱的に等分された放射が見られます。その放射がもし観測されれば、この模型が正しいということがわかりますね。LHC のホームページは非常に面白いので、一度みにいってください。

(質問) さっきの蒸発のところなんですけれども、反粒子を吸って粒子を放出して質量が減るからいずれ蒸発するんですよね。逆のパターンはどうなりますか？

(答) それは粒子が吸いこまれて反粒子が出てくるということですか？

(質問) そういうことって考えられないんですか？

(答) もちろんそれも同じ確率で発生します。反粒子と粒子の区別っていうのは単に電荷をどういうふうに assign するかという問題で、特に不都合は生じませんよね。いずれにしても何かエネルギーを持ったものがそこから取り出されているわけですから、いずれにしてもブラックホールは小さくなっていきます。他に質問はありますか？いいですか？

(質問) D ブレーンの話があって、D ブレーンの流れから余剰次元が出てきて階層性の問題を解決するという流れはわかったんですけど、階層性の問題を解決するだけであれば余剰次元があればいいような印象を受けたんですけど。

(答) この階層性の問題をこういうふうに解決しようと思えば、おっしゃる通り、D ブレーンとか超弦理論とかいう必要はないですね。ただ、言いたかったことは、D ブレーンのアイディアをここで使っているということです。つまり、ブレーンの上に我々が住んでいるというブレーンワールドのような模型というものは普通のソリトンからも出てくるものですが、ここの話で重要だったのは、ブレーンの外側に重力がいて、ブレーンの内側に matter とかゲージ場がいる。そういうセットアップが必要だったという意味です。で、そのセットアップを自然に実現できるのが弦理論の良い点だったということですね。だから本当に超弦理論とか D ブレーンが必要であるとは言っていないです。確かに、それは言っていないです。おっしゃる通り。他に質問はありますか？よいですか？では、次に話を進めます。

曲がった余剰次元

先のブレーンワールド模型の難点.

余剰次元 〜 ミリメートル. 〜 10^{-4} [eV]

新しい階層性を導入してしまった！

→ 曲がった余剰次元による解決　　ランドール・サンドラム (1999)

余剰次元を一次元とする (x^4 方向)

$$g_{MN}(x^\mu, x^4) = \begin{pmatrix} -e^{-2kx^4} & & & & \\ & e^{-2kx^4} & & & \\ & & e^{-2kx^4} & & \\ & & & e^{-2kx^4} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

5×5行列.
$M = 0,1,2,3,4$

ブレーンの x^4 方向の位置に従ってメトリックが定数倍(e^{-2kx^4})される. (これを「反ド・ジッター時空」という)

20

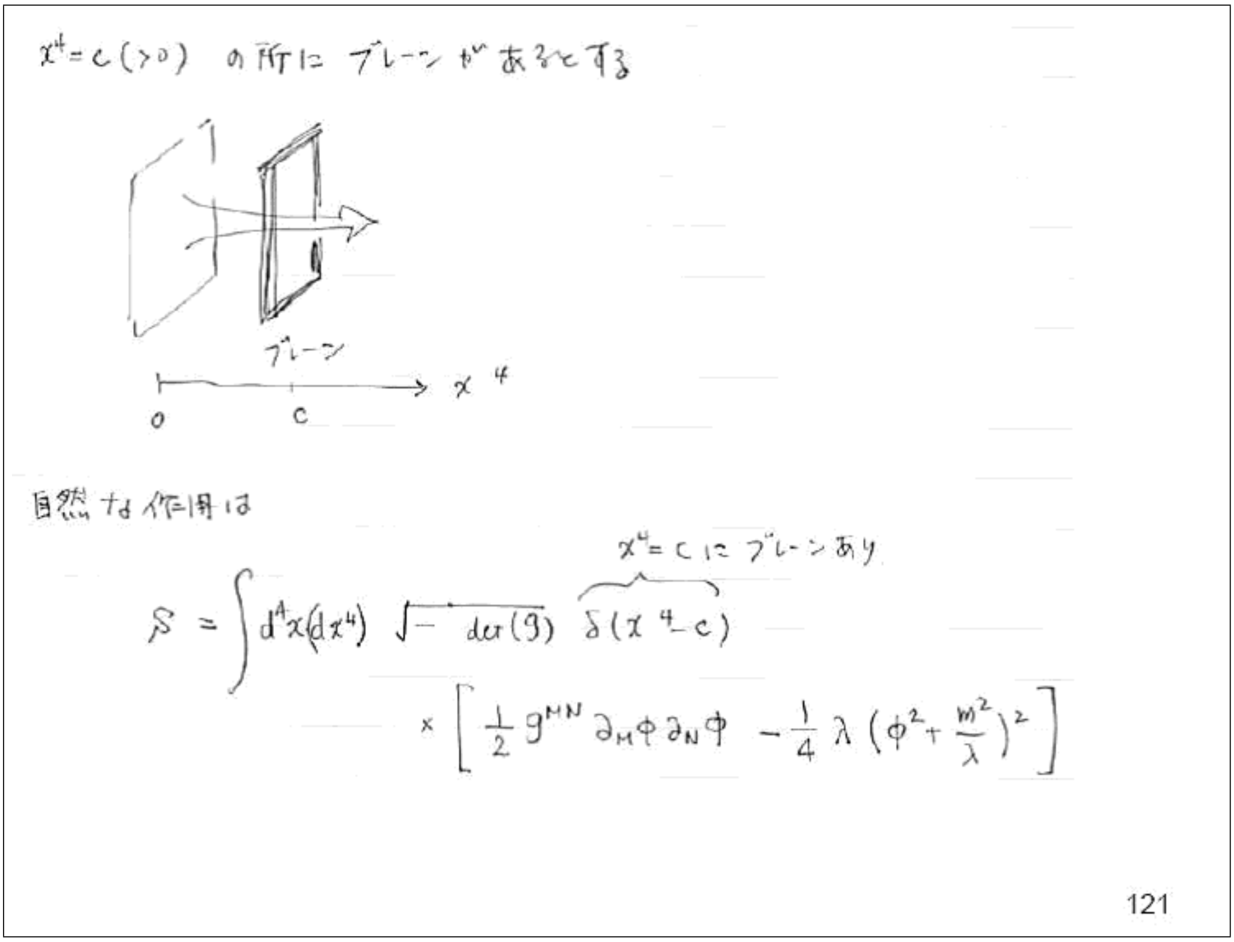
曲がった余剰次元

今、階層性問題が解決されたというふうに言いました。確かに、高次元の Planck スケールはそんなに weak スケールと変わらないという模型が提案されました。ところがですね、それは実はみかけ上の階層性問題の解決で本当に解決はしていません。なんでかといいますと、先のブレーンワールド模型の欠点は余剰次元が mm になりましたけれども、mm というのをエネルギーの単位に直すと、10^{-4}[eV] です。ですから、M_{pl} というのと、高次元の M_{pl} というその 2 つの部分で階層性問題を解決したように見えたんだけれども、R というのももちろん次元をもっているわけです。でその次元をみたら、大きさは 10^{-4}[eV] で、weak スケールよりもものすごい小さいわけです。ある意味当たり前ですよね。1 個のものと他のものが関係しているといったときに、関係している大きさが階層性問題を解決するぐらい違ったとしましょう。そしたらその係数はものすごい小さいわけです。その係数は高次元模型を考えたら必ず次元が入ってしまいますので、それはこんな大きさになって、新しい階層性を導入したことにより、見かけ上解決したと言っていたに過ぎない、ということがわかってしまうわけです。これは非常に残念。で、そのあとにすぐ登場したランドール-サンドラム模型 [23, 24] という、これもまあ非常に有名な模型ですが、これを用いるとこの新しい階層性を導入せずに、余剰次元を用いて階層性問題が解決できるということが謳われました。それをみてみましょう。余剰次元が 1 次元とするような模型を考えます。つまり、先程の n というのは 1。その方向を x^4 方向としたとしましょう。そして、この方向について高次元時空が曲がっているとします。曲がっているという意味は、メトリックが x^4 に依存しているという意味です。今、$1+4$ 次元になっているので、全体で 5 次元です。時空は 5 次元なので、メトリック

は 5×5 行列。そのメトリックがですね、こんな形をしていると仮定しましょう。

$$g_{MN}(x^\mu, x^4) = \begin{pmatrix} -e^{-2kx^4} & & & & \\ & e^{-2kx^4} & & & \\ & & e^{-2kx^4} & & \\ & & & e^{-2kx^4} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{55}$$

x^4 方向にはメトリックは 1 なんだけども、通常の x^0 から x^3 方向には x^4 の exponential に関連した entry をもってきます。これは単にもってきただけです。こういうメトリックを出すような 5 次元の Einstein 重力理論はもちろんあります。この時空は反ドシッター時空と呼ばれていて、5 次元の反ドシッター時空は 5 次元の Einstein-Hilbert 項プラス宇宙定数というラグランジアンを書けば、運動方程式の解として出てきます。こういうメトリックを考えたとしましょう。今までの例では、全部ここのところが定数になっていて、余剰次元があってもそれを Kaluza-Klein でコンパクト化する。といっても別にその方向は曲がっていなかったわけです。で、これを曲がっているふうにするとどうなるかということを考えたのがランドール-サンドラムたちです。ブレーンワールドのシナリオでは、こういう曲がった時空の中にブレーンを置きます。そのブレーンの上にゲージ場とか matter がのっている。すなわちブレーン上に我々が住んでいる、という考え方です。ブレーンの x^4 方向の位置、どこにそのブレーンを置くか、というその置き方に従って、そのブレーンの上の matter が感じる長さのスケールが変わるわけです。これが反ドシッター時空のメトリックの本質です。ブレーンの場所というのは $x^4 = const$ というふうに置かれますから、$x^4 = const$ というふうに置くと、この 4 つの行列要素がある定数になりますね。その定数は 1 ではないです。ですから、長さの単位がちょっとずれるということですね。反ドシッター時空を高次元で考えるということは、ブレーンの上で長さのスケールを自在に変えることができるということに対応します。



で、その模式図がこれです。$x^4 = c$ のところにブレーンを置いた。そうするとこの矢印は時空が曲がってるよということをイメージするような感じですけれども、ブレーンをこっちに持っていくと、長さのスケールがぐっと変わる。そういうふうな感じです。で、このブレーンを表すような自然な作用はどうなっているかということを考えてみましょう。ブレーンの上には、ゲージ場とか matter 場とかそういうものがいます。例えば Higgs 場とかそういうものもいます。そのラグランジアンはもちろん $1+3$ 次元の時空のラグランジアンですね。$1+3$ 次元の時空のラグランジアンを $1+4$ 次元で無理やり書くと、こんなふうなラグランジアンになるはずです。

$$S = \int d^4x (dx^4) \sqrt{-\det(g)}\ \delta(x^4 - c) \left[\frac{1}{2} g^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi - \frac{1}{4} \lambda \left(\phi^2 + \frac{m^2}{\lambda^2} \right)^2 \right] \tag{56}$$

このラグランジアンでは $1+3$ 次元のラグランジアンを $1+4$ 次元に持ちあげるために δ 関数を導入しました。$x^4 = c$ のところにこの matter が局在化しているというラグランジアンを書いてみました。ところがもちろんこのラグランジアンには微分とかそういうものが含まれていますから、重力理論と consistent に結合するためには、メトリックが入っていないといけません。微分はもちろんメトリックの上付きのやつで contract しないといけないし、前の方には不変 volume をつけておかないといけないわけです。ただまあここに δ 関数があるから、この δ 関数はブレーンの上にこれが localize していますよ、ということを特徴づけているわけです。このラグランジアンをちょっと計算してみましょう。

これで $\Phi = \phi^{kc}$ と定義し直すと

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{4} \lambda \left(\Phi^2 + e^{-2kc} \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 \right]$$

→ 真空は $\Phi = \pm e^{-kc} \frac{|m|}{\sqrt{\lambda}}$

「ワープ因子」

対称性の破れのエネルギーの大きさがワープ因子だけ小さくなる.

しかも指数関数的. $kc \sim 10$ とか 50 なら

とても大きいエネルギースケールの変化を導ける。

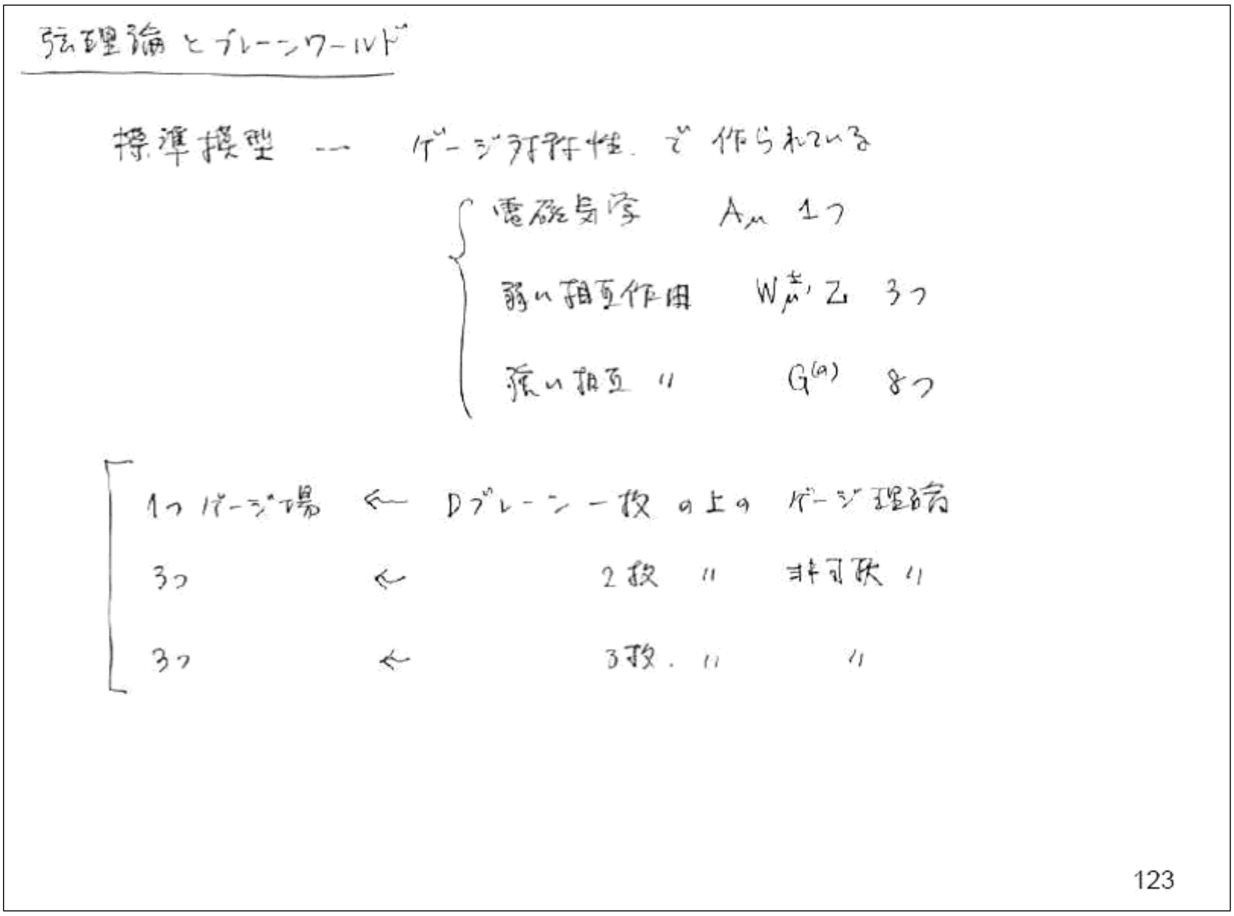
cは余剰次元の大きさを表すが、それは mm ほどは大きくない。→ 新しいエネルギースケールを導入する必要がない。

→ 階層性問題の解決

122

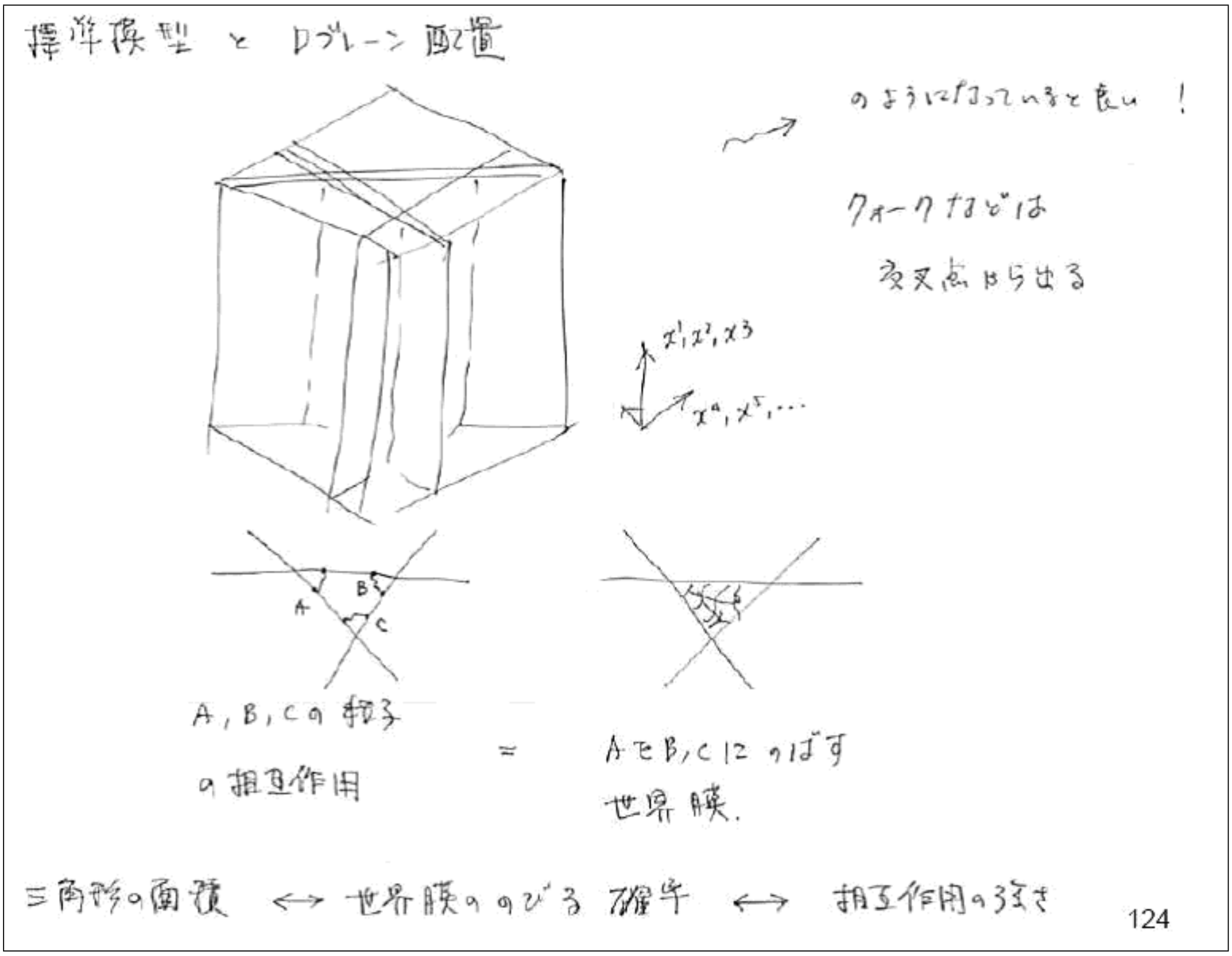
このラグランジアンで、x^4 方向の積分を δ 関数を使って積分してしまいます。そうすると $1+3$ 次元の普通のラグランジアンになるはずですが、これを積分するときに $\phi = \phi e^{kc}$ というふうに定数倍だけ定義しなおすと、ϕ の前の係数がちょうど canonical に normalize された 1/2 になります。もともとさっきのラグランジアンにはこんなふうに $\sqrt{-\det(g)}$ などがありましたから、この $\sqrt{-\det(g)}$ とか g^{MN} のところに反ドシッター時空のメトリックを代入して、ϕ を定義しなおすと、前のところを 1/2 に normalize することができます。ところが 1/2 に normalize したおかげで、potential term のところがちょっとずれるわけです。ϕ のスケール倍の部分だけ、真空の $\frac{m^2}{\lambda}$ というね、このルートが真空の値でしたけれども、その真空の前のところに factor がつきます。つまり真空は $\phi = \frac{|m|}{\sqrt{\lambda}}$ というもともとの値じゃなくて、$e^{-k\times(\text{ブレーンの場所})}$ という factor だけずれてしまう。この factor のことを warp factor と呼びます。このことが言っているのは、対称性の破れのエネルギーの大きさが warp 因子だけ小さくなり、しかもこの形が exponential である。exponential であるというのがポイントです。もしこれが exponential でなかったら、ちょっとずらすだけですね。ただ、今の場合は、高次元時空がどれぐらい曲がっているかという指標である exponential の肩の k をオーダー 1 の量としてブレーンの位置 c もその程度の量だと思って $kc \sim 10$ とかにするとですね、exponential の肩に乗っているから e^{-kc} はものすごい小さい factor になるわけです。このことによって、とても大きいエネルギースケールの変化を導くことができるわけです。ϕ の大きさっていうのはだいたい weak スケールだと思っている。一方、重力で特徴的なスケールは、Planck スケールだと思っている。その差がもし exponential だったら階層性問題は

ないわけです。何事も log プロットにしたら、大きいものも小さいものも同じところに描けます。それと同じで、exponential でスケールしてやって自然になるんだったら、それで階層性問題が解決されるわけです。こんなふうにして新しい 2 次スケールを導入する必要もなく、階層性問題が解決できるという模型が提案されました。この模型のポイントは、ブレーンワールドをまず使っている。それは D ブレーンから motivate されたやつですね。高次元の方に重力があって、ブレーンの上に matter がいる。そういういうものをまず使っているというのが 1 つ。それともう 1 つは、高次元方向がちょっと曲がっている。そういうのを考えたというのが 1 つです。その 2 つを使うと階層性問題が自在に解決できるという模型が提案されているわけです。



弦理論とブレーンワールド

最後にこれを弦理論の中にもうちょっとうまくうめこんで、ブレーンワールドと弦理論がどう関係しているのかということについてちょっとだけ述べましょう。標準模型はゲージ対称性で作られていました。電磁気学は、A_μ が 1 つ、弱い相互作用はゲージ場 3 つ、強い相互作用はゲージ場が 8 つ。これだけあったわけです。一方 D ブレーンを考えると、D ブレーンの上にはゲージ場が出てきました。1 枚、2 枚、3 枚というものを考えれば、その上にはちょうど非可換ゲージ理論が出てきて、1 枚の場合はゲージ場 1 つ、2 枚の場合は 3 つ、3 つプラス 1 なんですけれども、3 枚の場合は、あ、これ間違っていますね、8 つ。8 つプラス 1 個。というふうになります。ですので、こういう標準模型を実現したければ、実は D ブレーンをこんなふうに重ねて置いておけばいい、ということがわかります。つまり高次元の中でこんなふうに重なった D ブレーンをうまく配置しておけば、それが標準模型に対応しているということがわかるわけです。幾何学的にね。



これが、標準模型の D ブレーン配置に相当するだろうという想像図です。ほんとはもうちょっと細かくいろんな調整をしないといけないんですけれども、イメージとしてはこんな感じ。この図は、縦方向が x^1, x^2, x^3 という我々の空間方向。そして、横方向は $x^4, x^5, \cdots, x^9$ まであり、これが extra dimension の方向です。こんなふうになっていたとしますと、1 枚重なっているもの、2 枚重なっているもの、3 枚重なっているものがありますので、ちょうどこれらから標準模型のゲージ群が出ます。ここでこんなふうに四角でかいているのは、この四角の辺が S^1 でそれぞれコンパクト化されていると思っている。そういう絵です。もうちょっと具体的にはこれはトーラスだと思っているということです。対辺をそれぞれ同一視する。そういう Kaluza-Klein の状況を考えています。そうすると、この例えば 3 枚のやつというのは、うまくトーラスのサイクルというものに巻きついていますね。それ以上縮むことができない。この斜めのやつも上部の四角形の対辺は同一視されていますから、うまく巻いているわけです。こういうふうに巻いていると、ブレーンは一番小さい長さで shrink して安定化されますから、こういう配位が存在するはずです。適当にこう巻いておくと、先程のゲージ群が出る。標準模型の matter はどうなっているかということを思い出してみますと、例えばクォークは強い相互作用の 3 表現、そして弱い相互作用の 2 表現もしくは singlet。そんなふうになっています。なので matter は必ず bifundamental 表現になっています。bifundamental というのは、たくさんゲージ群があったときに、あるゲージ群の基本表現とあるゲージ群の基本表現、その重なったものになっている、というわけです。matter は全てそうかかれている。標準模型では。このブレーンの配置で、例えば 2 枚の重なっているブレーン (ブレーン (i) とする) と 3 枚の重なっているブレーン (ブレーン (ii) とする) の交点を考えてみましょう。この交点で

は、ブレーン (i) に端をもって、ブレーン (ii) にもう一方の端をもつ。そういうブレーンを橋渡しするような弦が存在します。その弦は、例えば (i) 側では 2 種類の足をもつことができるし、(ii) 側では 3 種類の足をもつことができます。それは確かに bifundamental 表現なわけです。ですからうまくこうフェルミオンだけがこの 2 つのブレーンをつなぐところから出るという風なセットアップを考えれば、標準模型が D ブレーンからうまく説明されるというわけです。D ブレーンのこういう構成法がいっているのは、なぜ bifundamental の matter が標準模型にあるのか、それを非常に簡単に説明するというわけです。通常の場の理論では、どういう matter 場を入れてもいいですね。それは自由です。けれども、なぜ標準模型で bifundamental の matter があるのか、そういうのに答えるためには、場の理論を越えた何らかの枠組みが必要です。D ブレーンの枠組みはそういうものの 1 つになっているわけです。ではそういうフェルミオンとか Higgs 場、そういうものの間の湯川結合がどうなっているかということを考えてみましょう。クォークなどは交点から出ますので、例えば上から見たらこんな絵になっていますけれども、この A,B,C という 3 つの交点があってその交点それぞれにクォークなどが住んでいます。湯川相互作用というのは、この 3 つの素粒子の相互作用のことです。粒子は string からきていると思うと、string には tension がありますから、string を伸ばすとその分だけエネルギーを損します。ですので、粒子はだいたいこの交点の周りのみにしか存在していません。ただこのそれぞれの交点に存在している素粒子が、相互作用しようと思うと、例えばひもをのばしてひっぱっていって、最後に 2 つに分ける。そういう操作を考えればいいですね。時系列でみると、時間の流れに沿って string が三角形を sweep するような感じになります。そんな string の動きを考えると、この三角形の中に張った世界膜、その大きさがこの 3 つの素粒子の相互作用に対応しているということがわかります。つまり、高次元のこういう幾何学で三角形がこういうふうにできたとすると、その三角形の面積が世界膜の伸びる確率と対応していて、その伸びる確率がちょうど湯川結合に対応している、ということになるわけです。今適当にこういうふうに配置して matter content がこんなふうなものが出ますねと言いましたが、この三角形をうまく調節すれば湯川結合が出るわけです。でね、適当に置けば適当に湯川結合が出るんだったら、何にも説明してないじゃないかと思うかもしれないですね。ところが、もちろんこの例えばここの三角形があれば他の三角形もあるわけです。で、いろんな場をもってきたいと思うなら、いろんな D ブレーンをもってこないといけない。そうすると 5 次元の中で、それは全部 consistent になっていないといけないですね。どの三角形がどういうふうになっているかという。その consistency から、様々な湯川結合の間の関係がつくわけです。湯川結合は、これはこの値だ、これはこの値だ、1 個ずつ言えるわけではなくても、たくさんある湯川結合の関係を少しでも与えることができれば、それは標準模型に対する予言になるわけです。そんなふうに、D ブレーンを使った標準模型の構成というのは、標準模型を超える物理としていろんな予言を与えることができるわけです。

最後のセクションに進むことにしますが、何か質問はありますか？今のところで

(質問) ランドール-サンドラム模型で、2 枚ブレーンを置いて、warp factor で suppress されて重力が弱くなるというのはいいんですけれども、suppress されていない方のブレーンにもゲージ場がいるんですか？

(答) ああ、ここに四角が書いてあるのは、ここにブレーンがあるというわけではないです。ちょっと confusing な描き方ですが、この四角はじゃあ無視して下さい。何もブレーンはなくて 1 個だけブレーンを置いてみました。1 個だけブレーンを置いてそれが曲がった時空の中にあるとしました。それがこれです。もちろんここにブレーンを置いてもいいです。ここにブレーンを置いたら、この上に何か matter が出ますね。で、その matter は、確かに、我々の知っている matter がのっているところとは違う matter なので、これは Planck ブレーンとか呼ばれますけれども、こういうところにも何か matter が乗っていますね。でもその matter はおそらく我々の matter とは非常に弱い相互作用しかしないでしょう。というのは高次元の中では重力しか伝播しなくて、距離にもよりますけれども、重力によってのみ相互作用するっていうわけだから、我々

のスケールからすると小さく見えるんじゃないか、そしたらそういう Planck ブレーンの物理っていうのは一応無視してもいいんじゃないか、という意味ですね。それについてはいろんなこういう模型の一般化のテクノロジーが発展していて、どういうふうにしておけばどう consistent かという議論もたくさんあります。他に質問はありますか？はい、どうぞ。

(質問) 先程 Planck スケールで 10^3[GeV] というオーダーをおいて、階層性問題をという話があったんですけれども、さっきのゲージ場を三角形に置いたっていう話で GUT スケールが 10^{16}[GeV] であるという階層性が解決できるとかそういうものもあるんですか？

(答) そういう模型は少ないと思いますね。D ブレーンを用いて標準模型を作るという立場だと、そもそも GUT を考える必然性があんまりないんですね。D ブレーンの安定な配置をこういうふうに置けば、標準模型の matter がこのように出ますと。で、それが統一されていないといけないというふうな理由はあまりないです。どうしてかというと、GUT を考える motivation というのは、もともと、例えば $SU(3), SU(2), U(1)$ のゲージ coupling がくりこみ群で高エネルギーにいくと統一される。1 つの coupling からそれが 3 つ出てくるわけだから、それで矛盾がないじゃないか、いいじゃないかと。そういう motivation もありますし、もしくは高い次元の、高い rank のゲージ群にうめこむことができれば、そこから matter を制限することができる。そういう利点があったわけです。一方その利点と今の D ブレーンの話の利点を比べてみると、ここではすでに matter がどういう形をしているかというのは D ブレーンの配置から制限されているわけですね。全く違う制限のされ方ですけれども制限されているわけです。この制限のされ方が実は GUT と似ているという話は、ちょっと勉強すればいろいろ書かれていると思いますけれども、そういう話もあります。一方、coupling の unification に関しては、これはもともと超弦理論から出発しているので、coupling が 1 個しかないんですね。あとはその coupling をどういうふうに現実の coupling と合うように、この内部空間の大きさとかそういうものを決めていくかという問題になるわけです。ですから GUT をわざわざ考えなくても、coupling が 1 個であるとか、matter 場が制限されるというものはすでにここに内包されているので、この模型をわざわざさらに GUT にうめこむ必要はないんじゃないか、そういうふうな立場が、たぶん圧倒的だと思います。で、もちろん D ブレーンの立場で GUT をやろうという研究もあります。それはさらに高い、なんというか、統一の可能性を求めるみたいな感じですけれども。それは研究者の立場によって考え方は違いますが、少なくとも言えるのは、こういう D ブレーンの配置とかそういうものを考えると、標準模型に対する、GUT とよく似たような統一とかそういう、matter の数、種類をどういうふうにするとか、そういう constraint がすでにここであるということですね。それで答えになったかな？他に質問はありますか？はい、どうぞ。

(質問) 普通 D ブレーンの low energy effective theory を考えるときに、そこには matter だけ住んでいて、重力はいないというふうに思うと思うんですけれども、今のブレーンワールドのモデルでは、4 次元のブレーン上にいる人にとって感じる重力というのはどういうふうに考えているんですか？

(答) ああ、今のというかこれ (スライド p.124 の D ブレーン配置) の？

(質問) それでもその前 (RS 模型) のでも。

(答) この場合は、ここの extra dimension の方向がコンパクト化されていますので、やはり重力は高次元を伝播しているとはいえど、我々の知っているエネルギースケールではやっぱり 4 次元の重力があると考えられるわけですね。それで答えになっていますか？

(質問) あ、じゃなくて例えば D3 ブレーンの low energy theory は Yang-Mills で、そこに重力はいませんよね。

(答) あ、そういう意味ですか。重力はいないんですけれども、重力はバルクに住んでいるわけです。バル

クっていいますか、ブレーンから離れているところに住んでいるわけですね。D ブレーンの上に住んでいるそういうゲージ場とか scalar 場と、バルクに住んでいる重力場は結合しますね。で、問題は、重力場は高次元を伝播しているので 10 次元のラグランジアン、ブレーンの上では 4 次元のラグランジアンを書いている。そしたら我々の時空の話と違いますね。それは問題なんだけども、この模型では残りの 6 次元のところはうまくコンパクト化してしまっているので、10 次元の重力のところは 4 次元になってしまっています。Kaluza-Klein mode がいっぱいありますけれども。そんなふうにちゃんと couple しているわけですね、covariant に。で、一方、前のこの、こっちの (RS) 模型の場合は、この方向が、確かに無限大になっているのでコンパクト化されていないのでまずいような気がします。ところがこの場合は、この周りでの重力の fluctuation をランドール-サンドラムは計算していまして、ちょうど重力がこのブレーンの上に局在化するような感じになっています。なので 4 次元であるということは問題がない。他に質問はありますか？はい、どうぞ。

(質問) すいません、先程はブレーンの配置で Yukawa の間に関係性がつけられるという話だったんですけれども、最新の D ブレーンの模型だとどれぐらいの関係性が標準模型の Yukawa につけられるのかについて教えて頂きたいんですが。

(答) それに関しては、僕は専門家ではないので、正確な答えは言えません。ただ、僕の印象では、様々なたくさん論文が出ているんですけれども、まず、この D ブレーンの考え方を使ってちゃんとした matter content が出るか？それが第一段階です。その次に、もし出れば、それから湯川結合とかを計算できるかという段階に入りますね。今ここで非常に naive な模型を考えましたが、実はこういうふうなブレーンの配位を考えると、クォークとかそういうもの以外にですね、いっぱい他の必要ない、標準模型には登場しない matter が出てしまいます。で、そういうものがいかに出ないように、ブレーンをうまく組むか。で、そういうセットアップが残念ながら今のところ、まだ見つかっていないです。余分なものが、どんなものであればそれをよしとするかというのは現象論的なセンスになるので、こういうものが余分にあってもまあいいじゃないかと思う人もいれば、これは困ると思う人もいるわけですね。だから、余分なものが一切ないような標準模型がちゃんとこのブレーンの組み合わせから出れば、そのあと Yukawa の結合の話になっていくと思います。で、日本では京大の小林さんがそういうことの専門家で、Yukawa に関する関係式をいろいろ導かれているので、もしよかったら小林さんの論文を見て下さい*8。僕はそれ以上ちょっと知らないので、まあ Yukawa の間に関係式が書かれているのは知っていますけれども、どれとどれがどういうふうになっているかちょっと覚えていないので、すいませんけど、はい。他にありますか？大丈夫ですか？

*8 例えば、Ref.[25] とそれに引用されている論文を参照のこと。

5-2 ホログラフィーとクォークの物理

強結合の問題と閉じ込め

クォークとグルーオンの理論：「量子色力学（QCD）」

SU(3) Yang-Mills 理論 + 基本表現の fermion（クォーク）

閉じ込めの問題：クォーク単体は観測されていない。何故か？

感覚的な答…QCDは結合定数が大きくて摂動論が使えないため，そもそも基本的な場に対応する粒子描像が良いか不明

（これは一億円問題である）

125

5.2　ホログラフィーとクォークの物理

強結合の問題と閉じ込め

では最後の方のところに入りましょう。強結合の問題に超弦理論はどういうふうにチャレンジしていくか、という話です。ホログラフィーとクォークの物理。強結合の問題は何だったのか少しおさらいしましょう。クォークとグルーオンの理論は、量子色力学、QCD と呼ばれています。QCD は $SU(3)$、すなわち 3×3 行列のゲージ場の理論、Yang-Mills 理論、非可換ゲージ理論で、基本表現のフェルミオン、すなわちクォークが入っています。これが非常に簡単な理論、QCD です。ところが QCD の結合定数は、低エネルギーでものすごく大きい。大きいために、摂動論が使えません。そこに強結合の問題があるわけです。閉じ込めの問題は、クォークは単体で観測されていません。なぜか？感覚的な答えは、QCD は結合定数が大きいので、摂動論が使えません。もし摂動論が使えれば、クォークと反クォークの間の力というのはクーロンポテンシャルみたいになります。クーロンポテンシャルだったら、閉じ込めは起こらないはずですね、多分。ま、それもわからないですけど。非可換ゲージ理論だからね、よくわからないですけども、感覚的にはそう思われる。だから、強結合であることが本質的なのではないか？そもそも基本的な場に対応する粒子描像がどうなっているかわからない。粒子描像が出るためにはどんなことをしたか、ということを場の量子論の教科書に従って思い出してみると、まず相互作用項を忘れることとします。それが第一段階。そうすると、kinetic term だけになるから、そこから波動方程式になっているやつを解いて、波動解を出す。その波動解の振動の前の係数を commutator で考えて量子化する。そういう手続きです。はじめのところで、相互作用を忘れるといいましたね。そこが今

できないわけです。そしたら、どんな粒子が漸近的な状態として出てくるか、ということがわからないわけです。そういう問題がある。

閉じ込めポテンシャル

・ハドロン ＝ クォークが2つ又は3つ集まった束縛状態.

SU(3) の singlet になっている. (観測されているもの)

例. 陽子, 中性子　　uud　　中間子 $u\bar{u}$

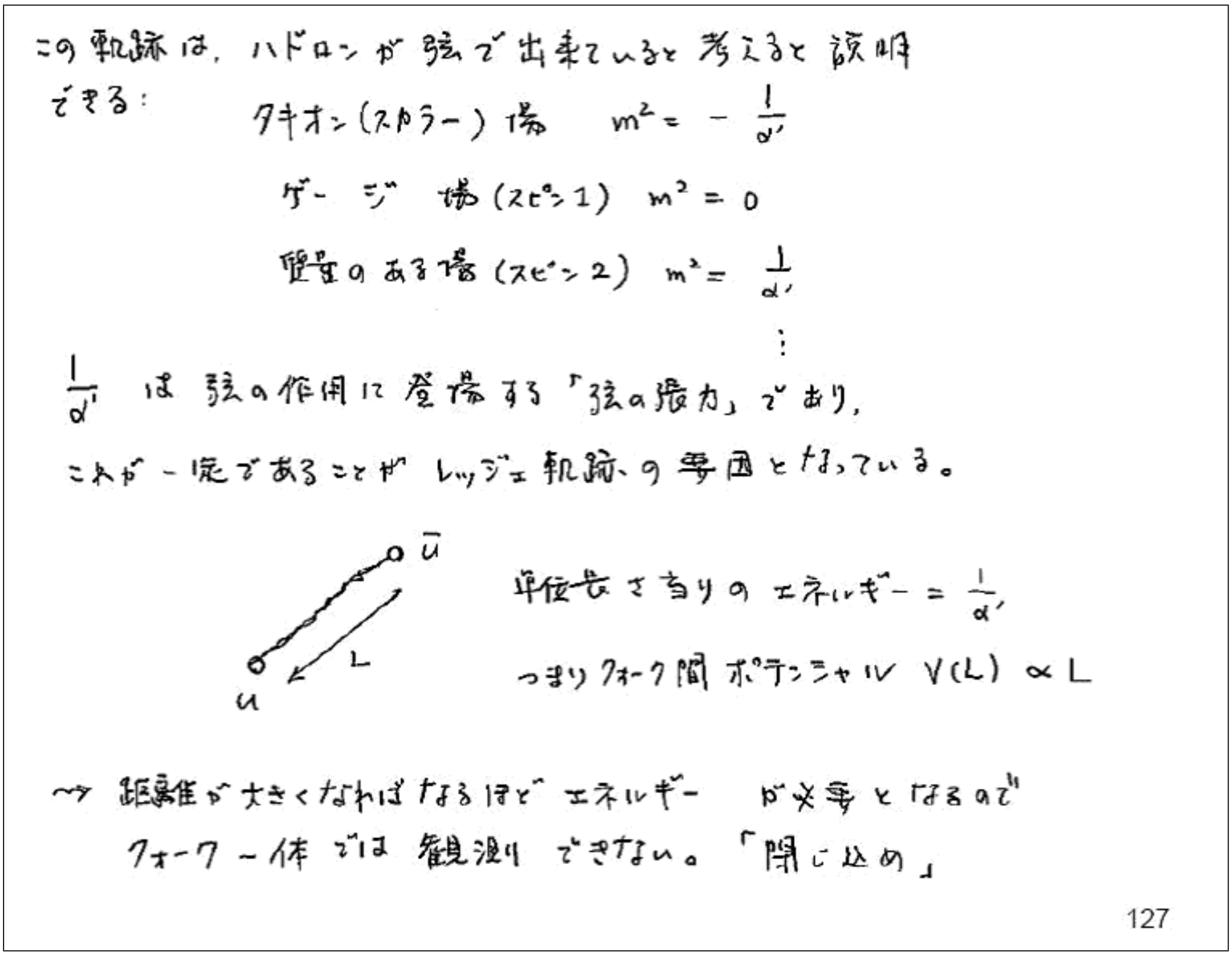
・ハドロンの測定質量の経験則 (線形レッジェ軌跡).

スピン J 以外の量子数が同じハドロンばかりを集めて
グループを考えると,

$$m^2 = \frac{1}{\alpha'} J + c$$

126

閉じ込めポテンシャルのことを復習してみましょう。ハドロンはクォークが 2 つもしくは 3 つ集まった束縛状態でした。ゲージ群の言葉で言うと $SU(3)$ の singlet になっています。3 という表現、基本表現の 2 つ、3 と $\bar{3}$ をもってきて singlet、もしくは 3 を 3 つもってきて singlet。そういうふうにハドロンが作られているわけです。中間子が 3 と $\bar{3}$ の singlet で、陽子、中性子は 3、3、3 の singlet。ハドロンの測定質量の経験則は、線形 Regge 軌跡、linear Regge trajectory と呼ばれていて、スピン J 以外の量子数が同じハドロンばかり集めてグループを考えると、そのハドロンの質量の 2 乗がスピンに比例しているということが知られているわけです。このことが、QCD から出てくるはずなんです。

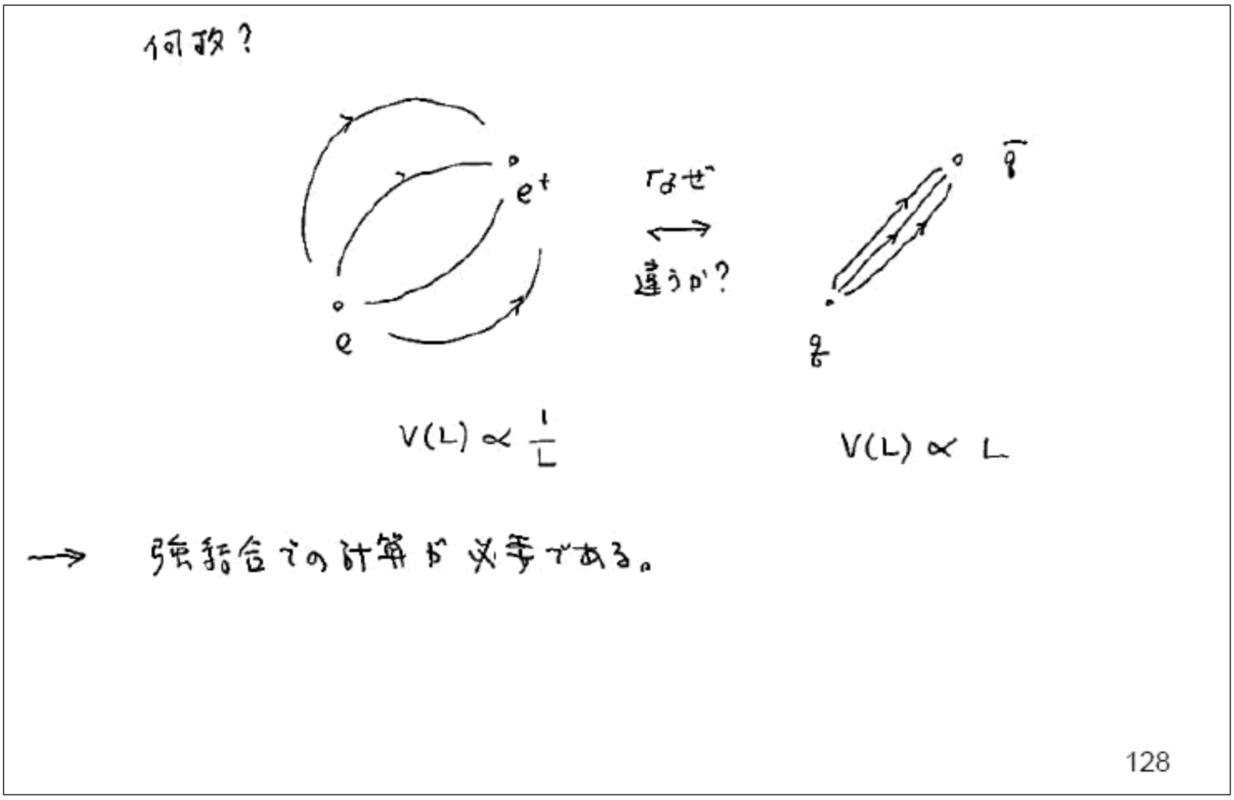


これも昨日の復習になりますが、この軌跡はハドロンが弦でできていると考えると説明できます。すなわち、mass の公式、string が振動していると思って出てきた mass の公式を見てみましょう。

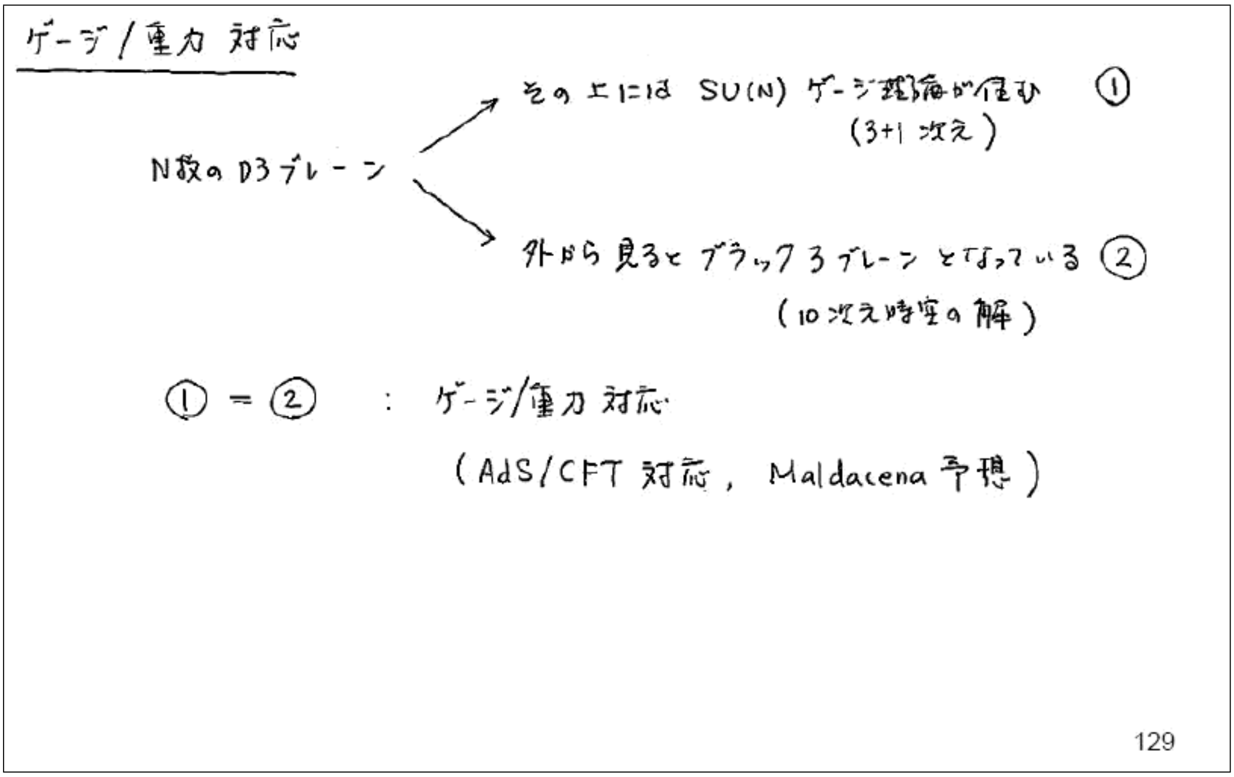
$$m^2 = \frac{1}{l_s^2}\left(-1 + \sum_{n>0} nN_n\right) \tag{57}$$

整数 N_n を 0 とおくと tachyon 場が出た。整数を 1 とおくとゲージ場が出た。こんなふうに変わってきます。で、この整数は何だったかということを思い出すと、それは、α_n^μ と書かれた oscillator の個数を数えていたわけです。だから、$N = 1$ のときはゲージ場、ベクトル場が出た、というわけだったんです。$N = 0$ だったら scalar 場しか出ません。一方 N を大きくしていくと、その分 α_μ というのもどんどん真空にかけていけますから、μ の足がたくさん増えていきますね。μ の足が増えるということは、その場のスピンが上がるということです。ですから、質量が上がるにつれてスピンがどんどん上がっていくと。スピンは整数で与えられていて、そのスピンは m^2 で与えられている。これは先程の経験則である Regge trajectory と同じです。ですから弦の量子化を考えればハドロンのスペクトルが再現できるということがわかります。ハドロンが弦だということになると、その弦は何からできているのかということに問題が移ります。QCD はクォークとグルーオンの理論でした。そこには弦はないわけです。ところが、クォークがこのように弦でつながっていると仮定すると、こういう計算が使えて、ハドロンの picture が再現できるわけです。この弦は、単位長さ当たりのエネルギーが $\frac{1}{\alpha'}$ だとすると先程の経験的な法則を再現するわけですから、QCD から出てくる QCD 弦はこのようなエネルギーをもっているはすです。クォークの間のポテンシャルは、クォークと反クォークを図のようにおき

ますと、2 つのクォークがそのようにおかれたときの相互作用エネルギーのことをいっていますけども、ポテンシャルエネルギーは L に比例します。L はこのクォークと反クォークの間の距離です。これは弦が単位長さ当たりのエネルギーが一定であるという、そういう事実に基づいて計算したものです。つまり弦があると仮定すると、このようにクォーク間ポテンシャルが長さに比例しているので、距離が大きくなればなるほどエネルギーが必要となり、閉じ込めが起こると。これが期待です。で、最後の問題は、どうしてこんなふうな弦が QCD から登場するのか、それが問題ですね。その問題に対する答えを弦理論が与えているということを見ていきましょう。



これはクーロン力と今の linear ポテンシャルとの関係を描いた絵ですが、電磁気学の場合はこういうふうに電場が広がっている。$\frac{1}{L}$ になっている。一方クォークの場合は、電束が閉じこもっている。そのおかげで linear なポテンシャルが出る。これとこれがなぜ違うかということですが、唯一違うのはこちらは弱結合でこちらは強結合である。そしてこちらは電磁気学でこちらは非可換ゲージ理論になっている。その違いです。強結合の計算が必要であるということは明らかです。

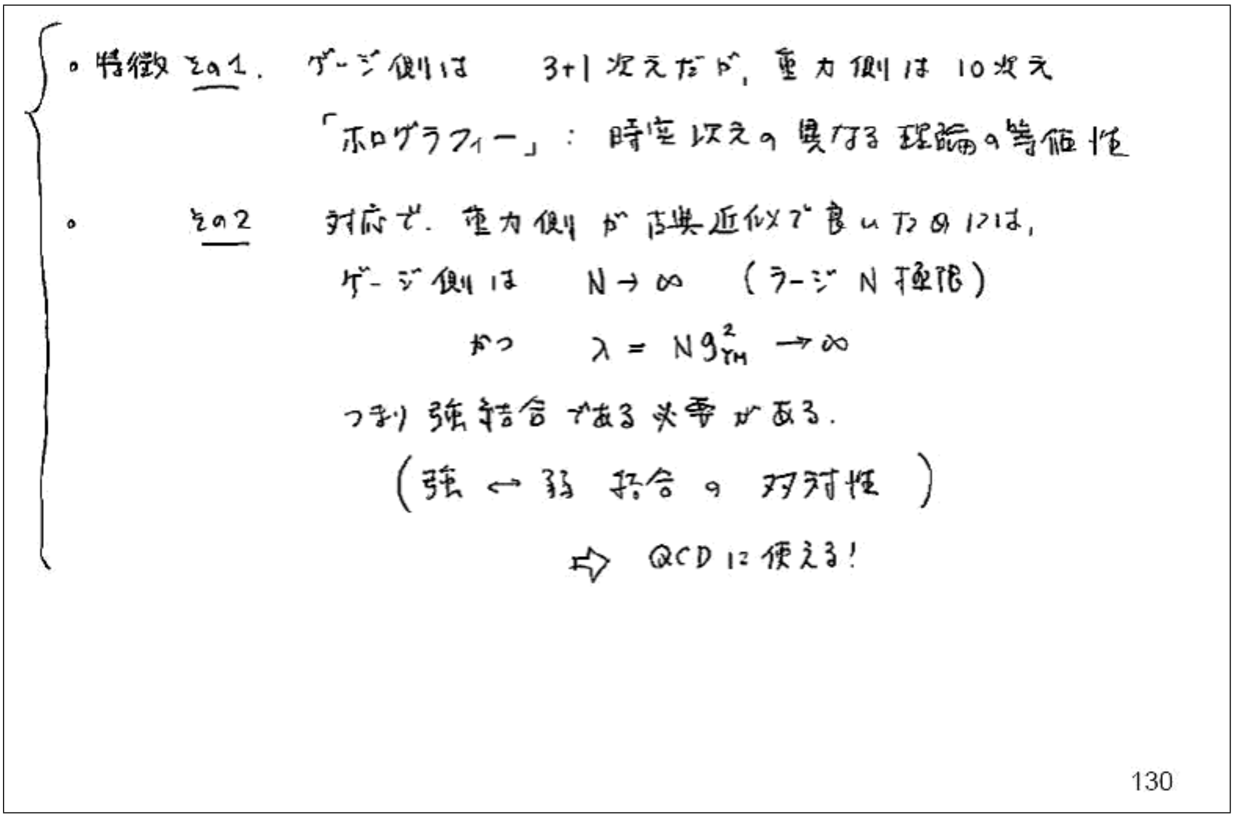


ゲージ/重力対応

では、D ブレーンの考え方を使うと、この強結合の計算ができるようになるということをお話ししましょう。これがゲージ/重力対応と呼ばれているものです。ゲージ/重力対応というと、今では弦理論の一大部門に成長していますが、そのエッセンスは実はものすごく簡単で、今 D ブレーンの定義の話をしてきましたが、ブラックホールと同一視できますよという話がありました。それを使うとまさにこのゲージ/重力対応というものが出てくるというのがわかります。ゲージ/重力対応は、D ブレーンを仮想的に考えた、まあ、我々の世界が D ブレーンであるとかそういうものを考えないでね、数学的に仮想的にこういうセットアップを考えた。で、そっから出てきたある公式です。で、その公式を標準模型として知っている QCD に応用した。そうすると強結合の問題が解ける、すなわち、強結合の計算ができますよというのがゲージ/重力対応です[*9]。ゲージ/重力対応は、特にこの我々の世の中がブレーンでできているということは要求しません。QCD の強結合を計算するための公式です。そのことを頭に置いといて下さい。今までの話は、我々の世界が確かにブレーンですよ、実験結果でそれが確認できるかもしれない、という話でしたが、この section の話は、特に、実験が、我々の世界が確かにブレーンだということを confirm する必要はありません。これは、数学的な、string から出てきた公式を、知られている標準模型の QCD に応用した、というだけです。いいかな？ではゲージ/重力対応がどんなふうにして出てくるかを見てみましょう。D3 ブレーンを考えて、その D3 ブレーンを N 個もってきたとします。で、それを重ねて置いた。そうしますと、D3 ブレーンはもともと、開いた弦の Dirichlet boundary condition で定義されましたから、その上には $SU(N)$ の非可換ゲージ理論が住んでいます。$N \times N$ 行列です。D3 ブレーンにしましたから、このゲージ理論は $3+1$ 次元のゲージ理論です。一方、ブレーンはブラッ

[*9] ゲージ/重力対応に関するレヴューは数多く存在するが、特に Ref.[26] には初期の発展が詳細にまとめられている。入門的なものとしては Ref.[27, 28] が挙げられる。

クホールだというさっきの equality を使いますと、この D3 ブレーンは、ちょっと離れて外から見るとですね、ブラック 3 ブレーンになっています。ブラック 3 ブレーンは 10 次元時空の重力理論の古典解です。3 ブレーンと言っているのは、この D3 ブレーンが空間 3 次元方向に広がっているのでブラックホールのホライズンがこの 3 方向に広がっている、そういう古典解をもってきたことに対応しています。①番と②番は全く違うものに見えます。すなわち、①番の方は 4 次元時空の非可換ゲージ理論です。このゲージ理論は標準模型でおなじみのやつ。例えば QCD。$N = 3$ だったら QCD。一方こちらの方は、全くエキゾチックなもので、仮想的な 10 次元時空を考えて、その中の、これまた仮想的なブラックホールを考える。それだけです。ポルチンスキーの equality を使うと①番と②番が等価である。そういうことになります。これをゲージ/重力対応といいます。この対応原理を非常に正確に statement として出したのがマルダセナで、これは 10 年ほど前になりますが、マルダセナ予想と呼ばれています [29]。これが予想と呼ばれる意味は、これとこれはイコールだといってもですね、何でそれがイコールなのかということは、さっき言いましたようによくわかっていないわけです。ですから証明はありません。ただ、こういうふうに予想されたものから出てくる数学公式をいろんなものに使うと、確かに①番で計算した量と②番で計算した量がピッタリ一致している。そういう例が非常に多数発見されています。ですのでこの予想はおそらく正しいんじゃないか、というふうに考えられます。マルダセナ予想は、近年は非常に大きな研究テーマになっていまして、ものすごい超弦理論学者とかたくさんの数の研究者に興味をもたらしており最近も非常に大きな発展が続いています。



この対応原理の特徴を見てみましょう。まずその 1。ゲージ理論側は $3+1$ 次元だが、重力理論側は 10 次元である。そもそも次元の違う理論が等価であるとは何事やというわけですね。で、これが、ホログラフィーとこれが呼ばれているゆえんです[*10]。時空次元の異なる理論が等価である、という主張。もちろんこれが等価であるというときに、①番と②番でそれぞれ何を計算するか、そういう辞書がないといけません。で、その辞書はマルダセナがこれを唱えたすぐ後に、ガブサー・クレバノフ・ポリャーコフという人とウィッテンが、ある辞書を与えました [30, 31]。で、その辞書によって①番と②番がそれぞれ計算されるようになったわけですね。で、ある特定の場合はそれが確かに等しいということが示されるわけです。特徴その 2。この対応において②番の重力理論側が古典的な重力近似でよいということを要請しますと、先程の辞書を使うとですね、ゲージ理論側ではある特定の領域しか考えてはいけませんよという constraint が出てきます。その constraint の導出は、15 分ぐらいかけたらちょっとできるんですけれども、あと 15 分しかないので、これとばします。その constraint は何かといいますと、まず $SU(N)$ の N が ∞ でないといけない。これはラージ N 極限といいます。また、ゲージ理論における $Ng_{YM}^2 \equiv \lambda$ という組み合わせは t'Hooft coupling といいますけれども、λ も ∞ でないといけない。その 2 つのことが要請されます。これは②番の重力側で古典近似でよいとするとこうなると。もし②番の重力側で古典近似を諦めたとすると、こんな constraint は考えなくていいです。この constraint は強結合であるということをいっています。つまり、coupling constant が大きい。これ N がかかっていて N を無限大だからこれは大きいのは当たり前じゃないかと思うかもしれませんが、もし、$SU(N)$ の N をスケールして、そしてそこで重要な coupling constant は何かということを考えると、この組み合わせでいつも出てくるということがわかります。すなわち弱結合、強結合というときは、この λ というものの組み合わせを考えないと意味がないということが分かります。これは t'Hooft の重要なラージ N の論文 [34] があ

*10 ゲージ/重力対応が登場する以前から、ホログラフィーは弦理論と独立に議論されてきた [32, 33]。

りまして、読んだことある人も多いと思いますが、そこに書いてあります。t'Hooft の極限とちょっと違うのは、t'Hooft の場合はこの λ に関する weak な展開になっているわけですね。で、今はそうではなくてこの λ も強結合である。すなわちこの理論は本質的にゲージ理論の強結合です。この等価性を使うと強結合のゲージ理論が、古典近似すなわち弱結合の理論と等価であるということなんで、強弱結合の双対性になっているわけです。で、特にこれは QCD に使えそうなわけです。なぜならば QCD は強結合で計算できないんだけども、この等価性を使うと、重力理論側では古典近似でよい。10 次元の重力理論を運動方程式を古典的に解けばハドロンの性質が再現されるはずだ、といっているわけです。もちろん N が ∞ なので、QCD は $N = 3$ ですから、$N = 3$ と $N = \infty$ は全然違うんじゃないの、という批判はごもっともです。ところがよくいわれることに、数学者は帰納法というのを使いますね。$n = 1$ で正しい、$n = 2$ で正しい、そしたら $n = \infty$ でも正しい。それと同じセンスがここにはあります。物理学者は、実は $n = 0, 1, \infty$ で示されれば、それは全て正しい、というふうにいうことがよくあります。もちろんそれは全然だめな statement ですけれども、センスはそういう感じなんです。確かに、もちろんそういう statement を確かめるためには N が大きくなったら物理量がどういうふうにスケールするかということを詳細に調べないといけません。幸いなことに、t'Hooft のラージ N の話が今まで脈々と生き残っているのは、QCD の $SU(3)$ の 3 を N にして N を大きくしていっても、ハドロンの様々な性質は実はうまくスケールしていて、あんまり spoil されない、ということが分かっているからです。この場合もその恩恵をうまく受け継いでですね、ラージ N になっているけれども QCD に使ってみよう、ということを考えるわけです。ですからもちろん注意が必要ですよ。$N = 3$ ではないので注意が必要です。QCD を扱っているわけではない。けれども QCD のある側面は、この極限をとっても、N が十分大きいと思っても大丈夫なんじゃないかと思っているわけです。これは計算してチェックしないともちろんわからないことですね。

重力側の記述

ブラック3ブレーン解

$$-g_{00} = g_{11} = g_{22} = g_{33} = f(r)^{-1/2}$$

$$g_{44} = \cdots = g_{99} = f(r)^{1/2} \qquad r = \sqrt{(x^4)^2 + \cdots + (x^9)^2}$$

$$f(r) = 1 + \frac{R^4}{r^4} \qquad R^4 = 4\pi g_s N (l_s)^4$$

SU(N) ゲージ理論は D3ブレーンの上にのみ住んでいるので、$r \sim 0$ の極限をとる。すると $f(r) = \frac{R^4}{r^4}$

$$-g_{00} = g_{11} = g_{22} = g_{33} = \frac{r^2}{R^2} \qquad g_{rr} = \frac{R^2}{r^2}$$

5次元反ド・ジッター時空

($r = Re^{-x^5/R}$, $k = \frac{1}{R}$ で前のになる)

131

重力側の記述

重力側での記述がどうなっているかというのを具体的に見てみましょう。ブラック 3 ブレーン解はこういう非常に簡単な解です。今 10 次元なので、g_{00} から g_{99} までありますが、$0, 1, 2, 3$ の方向に関しては先程の反ドシッター時空のときと同じようにある関数になっていて、残りのところはこのある関数の逆べきになっています。このある関数はこんなふうに $1 + \frac{R^4}{r^4}$ と与えられていて、r はこのブラック 3 ブレーン解から離れる方向の動径座標です。x^4 と書いていたやつですね。R というのはブラック 3 ブレーンの数を表します。すなわち D ブレーンの数です。今 N 個 D ブレーンを置きましたから、この R^4 というのは N に比例しています。次元を合わせるためとか、重力定数とかの関係から g_s とか l_s とか書いていますけれども、これは本質的に N です。$SU(N)$ のゲージ理論は D3 ブレーンの上のみに住んでいるので、こういう全体のメトリックは必要ありません。右辺に近いところだけの情報が必要である。すなわち、$r \sim 0$ の近傍だけを見てみましょう。そうするとこの $f(r)$ という関数の 1 のところは考えなくてよくなって、$\frac{R^4}{r^4}$ の部分だけが残ります。$f(r)$ はこんな関数になります。この関数を代入してみますと、非常に簡単なメトリックが現れます。g_{00} から g_{33} までは $\frac{r^2}{R^2}$。そして g_{rr} というのは $\frac{R^2}{r^2}$。これは実は先程出てきた exponential で書いていましたけれども、その反ドシッター時空と同じです。5 次元の反ドシッター時空。D3 ブレーンのホライズンの近傍を見ました。それは 5 次元の反ドシッター時空になっているわけです。で 10 次元が 5 次元になった理由は何かというと、ほんとはこれ 10 次元のメトリックなんだけれども、この 5 次元に直交する方向の 5 次元球面の方向があります。動径座標とそれに直交する角度方向。角度方向も、メトリックは実はありますが、あとであまり関係ないのでちょっとここで書いていないだけです。

ゲージ側への制限

ブラックホール解は

(i) 低エネルギー近似 $l_s \to 0$

(ii) 古典重力近似 $l_p \to 0$

で得られている。

$$\frac{1}{l_p^2} = \frac{1}{g_s^2}\frac{1}{l_s^8}$$

(i) は $R \gg l_s$ という条件で満足される

$\Rightarrow$ $g_s = g_{YM}^2$ より $N g_{YM}^2 (= \lambda) \gg 1$

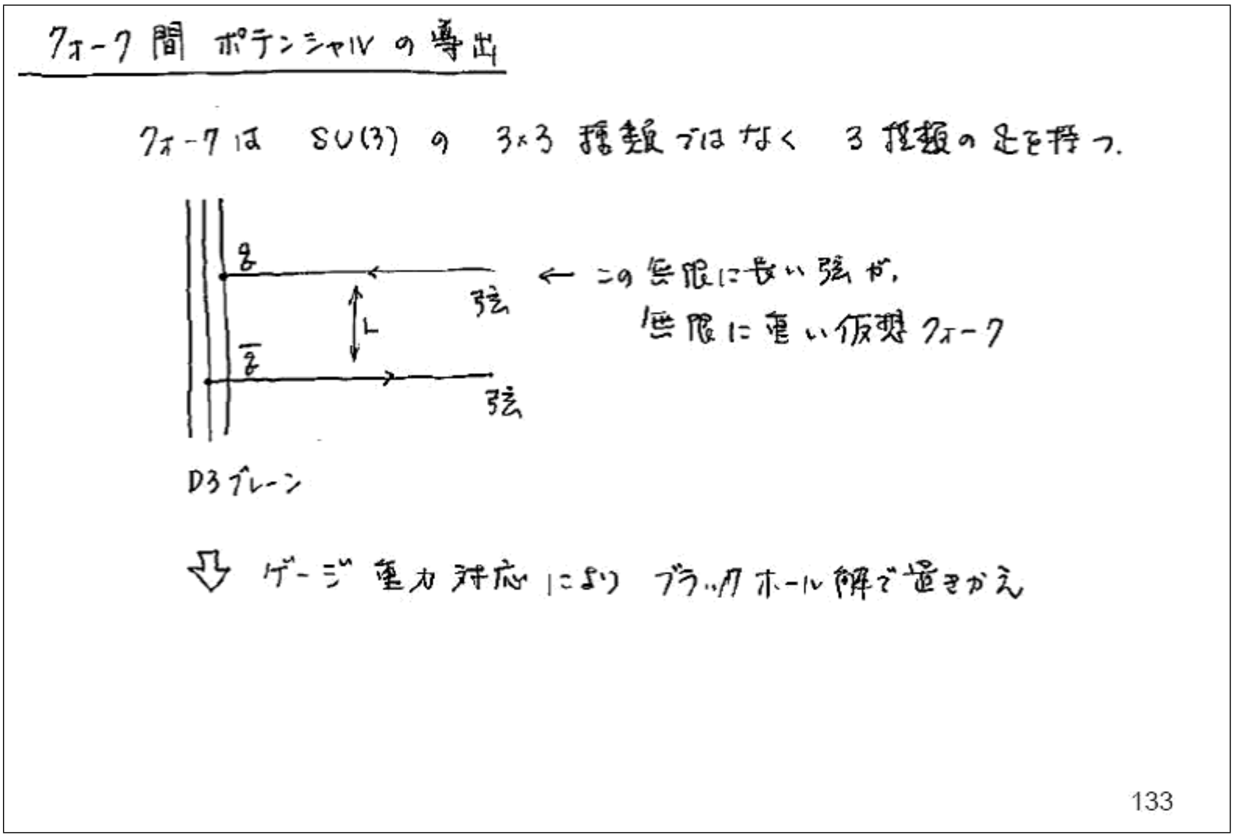
(ii) は $R \gg l_p \left(= g_s^{1/4} l_s\right)$ で満足. $\Rightarrow$ $N \gg 1$

故に対応するゲージ理論は

ラージ N, トフーフト結合が強い

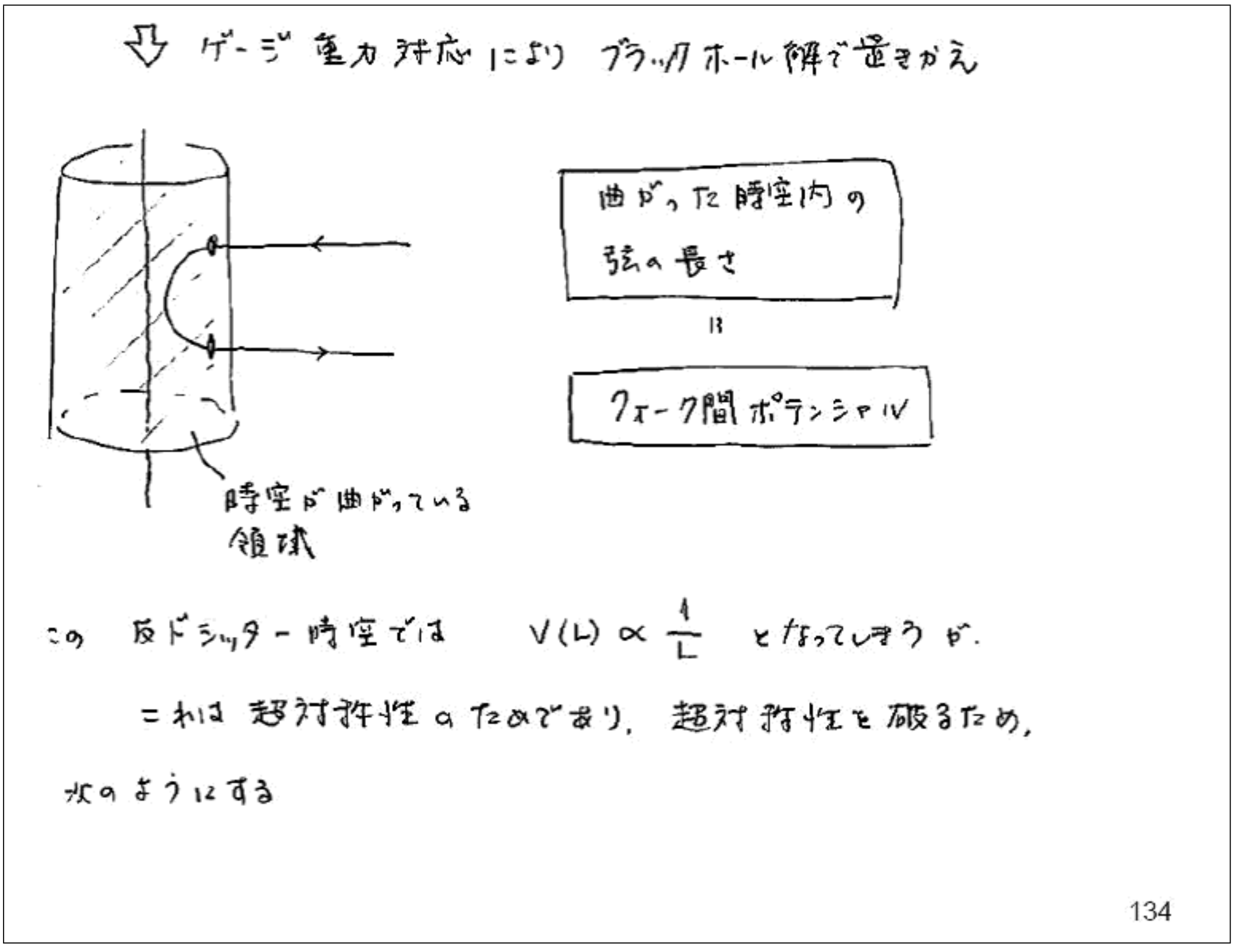
という条件を満足する必要がある。

ゲージ側への制限を見てみましょう。ブラックホール解が先程求められました。このブラックホール解はソリトン解ですから、古典的な運動方程式の解です。じゃ古典論が使えないとまずいですね。古典論が使えるという極限はどういう極限であるか？まず古典重力近似、Planck 長さ l_p が 0 でないといけない。Planck 質量が無限大でないといけない。これがないと量子重力の補正でループ補正がたくさん入ってきてまずいということです。これがまず 1 つ。そして低エネルギー近似というのもとらないといけません。この l_s というのは弦の長さです。重力は弦の振動から出てきました。ところがもっと振動すると、重力じゃないモードも出てきますね。で、そのモードが出てきたら運動方程式が変わっちゃうから、さっきのが使えなくなるので、そういうモードが無限大になるように、質量が無限大になるように極限をとります。$\frac{1}{\alpha'}$ という質量をもっていたものが無限大になるためには α' は l_s^2 なので、l_s が 0 にならないといけません。この 2 つの条件が課される必要があります。ところで、この Planck 長さ l_p というのは Planck 質量と関係していますから、10 次元の重力理論の前の係数を見ると、昨日ちょっとやりましたが、重力定数は $\frac{1}{l_p^2} = \frac{1}{g_s^2}\frac{1}{l_s^8}$ という形で与えられないといけないということを知っています。さて (i) 番の低エネルギーの近似というのは、このブラック 3 ブレーンの解の特徴的な長さスケール R というのが l_s よりも十分大きいという条件で満足されます。R の表現は $R = (4\pi g_s N)^{\frac{1}{4}} l_S$ でした。g_s は今、g_{YM}^2、これは open string の coupling の 2 乗が closed string の coupling だという条件ですけれども、それを使うと、この条件は $N g_{YM}^2 (= \lambda) \gg 1$ という条件になる。すなわち t'Hooft coupling が十分大きい。次に (ii) 番目のこの古典重力近似は、l_p が $R \gg l_p$ という条件を満たすということを考えて、そして R に先程の条件を代入しますと、$N \gg 1$ という条件になります。すなわち、このブラック 3 ブレーン解を使っていい条件は、低エネルギー近似、古典重力近似と等価ですが、それぞれはゲージ理論の言葉ではこんな状況に焼き直されるというわけです。それで強結合が出てきます。

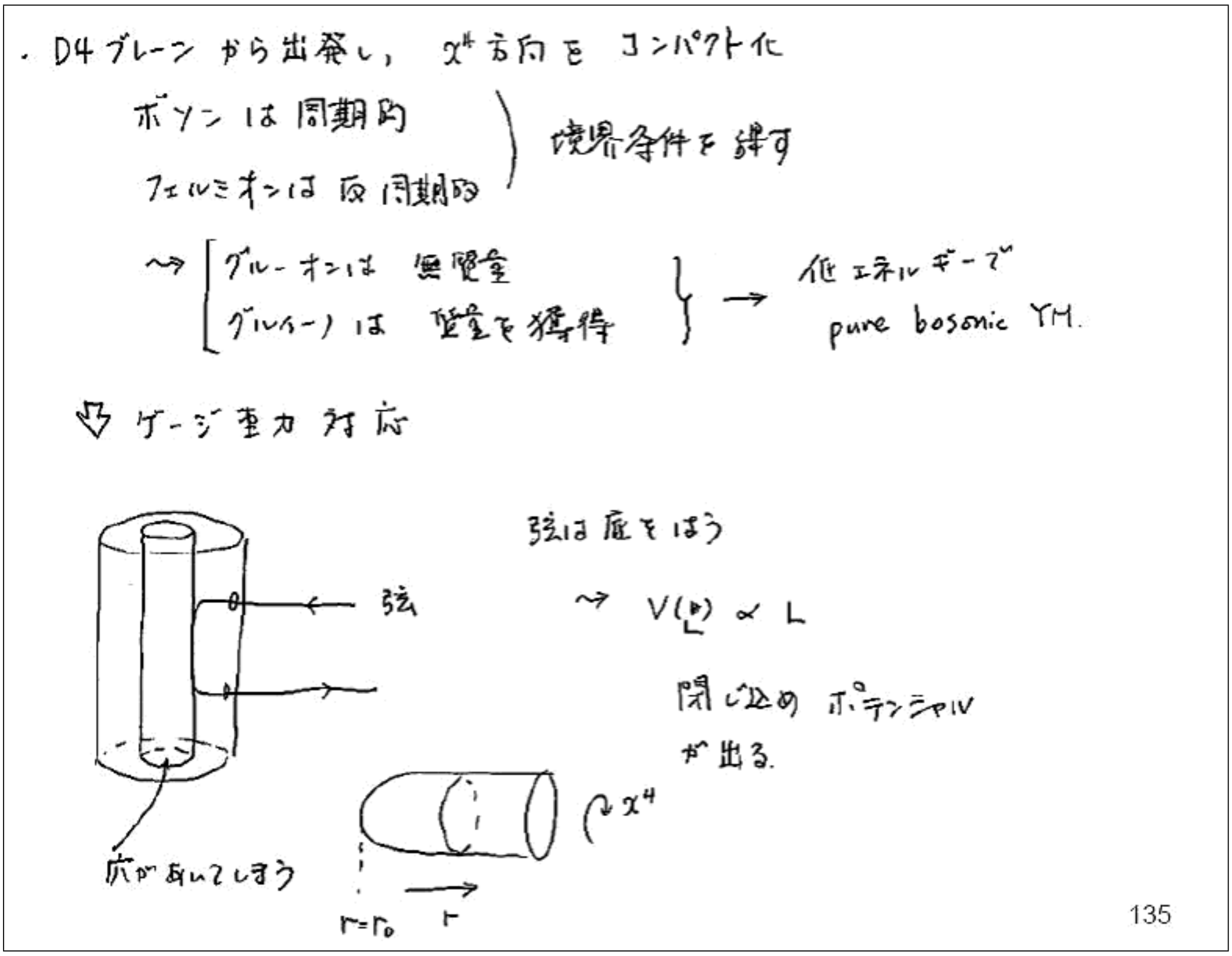


クォーク間ポテンシャルの導出

この方法を使ってクォーク間ポテンシャルを導出してみましょう。クォークの閉じ込めの問題で重要だったのは、クォークと anti クォークの間の力、それが linear なポテンシャルになっているということでした。それがもし示せれば、これは万々歳なことです。クォークは $SU(3)$ の 3×3 の行列ではなくて、fundamental 表現、3 種類の足を持っていたわけです。なので D3 ブレーンがあるとして、その D3 ブレーンの上にクォークを導入しようとすれば、両方の足がくっついている string ではなくて、片方の足だけこの D3 ブレーンに乗っていて、片方の足がどこにあるかわからない、そんなものを考える必要があります。さっき標準模型を導入するといったときはなんかもう一個他にもブレーンがあってですね、それをつなぐ string を考えていました。でも今は QCD だけ考えたいのでこういう無限に伸びたクォークを考えます。この無限に伸びたクォークは、この長さが無限大なので、このクォークは無限に重いです。つまり無限に重い仮想クォークを $SU(3)$ のゲージ理論の中にポンと置いてみた。そういう状況です。弦には向きがあるので、これがクォークだとすると、この向きは反クォークになっています。さてゲージ/重力対応を使ってこのゲージ理論の D3 ブレーンのところをブラックホール解で置き換えてみましょう。



そうすると、ブラックホールのところではこれはすごく曲がった時空になりますね。ブラックホールから離れると平坦な時空になっています。曲がった時空のおかげで、2 つの string は斜線部の曲がった時空中でつながります。曲がった時空内のこの弦の長さが実は bulk のクォーク間ポテンシャルに対応するわけです。これがゲージ/重力対応をつかってクォーク間ポテンシャルを計算する方法です。この方法はマルダセナと、スージョンレイ達によって開発されました [35, 36]。さて、具体的にこのブラック 3 ブレーン解を使ってこの長さを計算してみたとします。そうするとこのクォークと anti クォークの間の距離を L とおくと、このポテンシャルエネルギーは実は $\frac{1}{L}$ になります。これはクーロン力ですね。クーロン力が出たということはクォークの閉じ込めは起こらないです。すなわち、この考え方ではクォークの閉じ込めは起こらない。そんなことになります。この計算はとても簡単なので興味のある人はやってみて下さい。やることは、この長さを単にこういう曲がった時空上で計算するだけです。ノート 1 ページぐらいで終わる計算です。それをやると $\frac{1}{L}$ であるとわかる。実はですね、これは超対称性のためであるということが今は分かっています。$SU(3)$ のゲージ理論を考えたと言ったんですけれども、実は、超弦理論から出発しているので、グルーオンに対応する superpartner であるグルーイーノとかたくさんの余分な粒子が含まれています。そのためこれは QCD とは程遠い、全然違う理論になっています。そういう全然違う理論ではクォークは閉じ込めが起こらずに、こんなふうにクーロンポテンシャルで相互作用するということが知られています。ですのでこの結果は別に矛盾ではない。それでは、QCD に対応するような、超対称性のない、そんなゲージ理論だったらどうなるか、それを考えてみましょう。



それを考えるには、D3 ブレーンじゃなくて D4 ブレーンというものから出発してですね、x^4 方向、これは D4 ブレーンに平行な方向ですが、そっち方向を勝手に周期的にコンパクト化したとします。そうすると effective に $3+1$ 次元になりますが、もともと $4+1$ 次元になっている。そんな模型。で、このコンパクト化した方向について、超対称性を破るように、ボソンは周期的、例えばグルーオンとかね、そういうのは周期的にして、グルーイーノとかフェルミオンは反周期的にしたとします。そうすると超対称性を破ることができますね。こういうことをウィッテンは考えました [37]。でこんなことをすると、周期的境界条件を課した場合は Kaluza-Klein タワーの一番下のところが massless になりますが、反周期的境界条件を課すと、質量を獲得してしまいます。ですので、SUSY が破れているのでそういうふうにスペクトルがボソンとフェルミオンで変わっちゃうわけですけれども、低エネルギー近似をすると、massless のグルーオンだけが出てくる、そんな理論を考えました。この D4 ブレーンの対応する重力解、ブラック 4 ブレーンですけれども、それをもってきて同様の解析をしたとします。そうすると、ここでメトリックは言いませんけれども、こんなふうな状況になります。さっきと同じようにこの大きな筒の領域では時空はものすごい曲がってきているんですけれども、この真ん中のところはですね、実は時空がなくなって、スッポリ穴が空いています。こういうところにひもを垂らしたとしましょう。すると、さっきの垂れ方とはちょっと違うわけですね。真ん中に時空がない領域があるので、そこのところをこうぶち当たって底を這うようになるわけです。これが底を這うので、この部分の長さの分だけ、クォークと anti クォークはポテンシャルを稼いでしまうわけです。その結果、この長さを計算してやると、実は $V(L)$ という関数は L に比例します。この前の係数ももちろん計算できます。閉じ込めポテンシャ

ルが出るわけです。これは無理やりここに穴が開いてこういう状況を作ったわけじゃなくて、超対称性を破ってやってそのブラックホール解を考えたら、必然的にこうなってたというところがポイントです。無理やりこうなるように答えを仕組んだわけではなくて、超対称性を破っているようなところでゲージ/重力対応を考えたら、必ずこんなふうになるということがわかるわけです。で、例えば重要なことはこの係数が計算できるということです。この係数は何に対応しているかといいますと、QCD string の tension ですから、$\frac{1}{\alpha'}$ というハドロンの Regge スロープ、線形 Regge 軌跡の比例係数になっているわけです。で、それは実験と比較できますね。実験で与えられるやつと、この計算で計算できる比例係数が合うかどうかということは、具体的に、ゲージ/重力対応の検証になるわけです。よいですか？もちろんここで N を無限大にしているわけだから、ちょっと QCD と本当に比べたらまずいわけですけれども、そのことはちょっと含みおいて比べてやる。例えばオーダーが合ってるかとかね。そういうことを考える。

ゲージ重力対応で最近なされていること

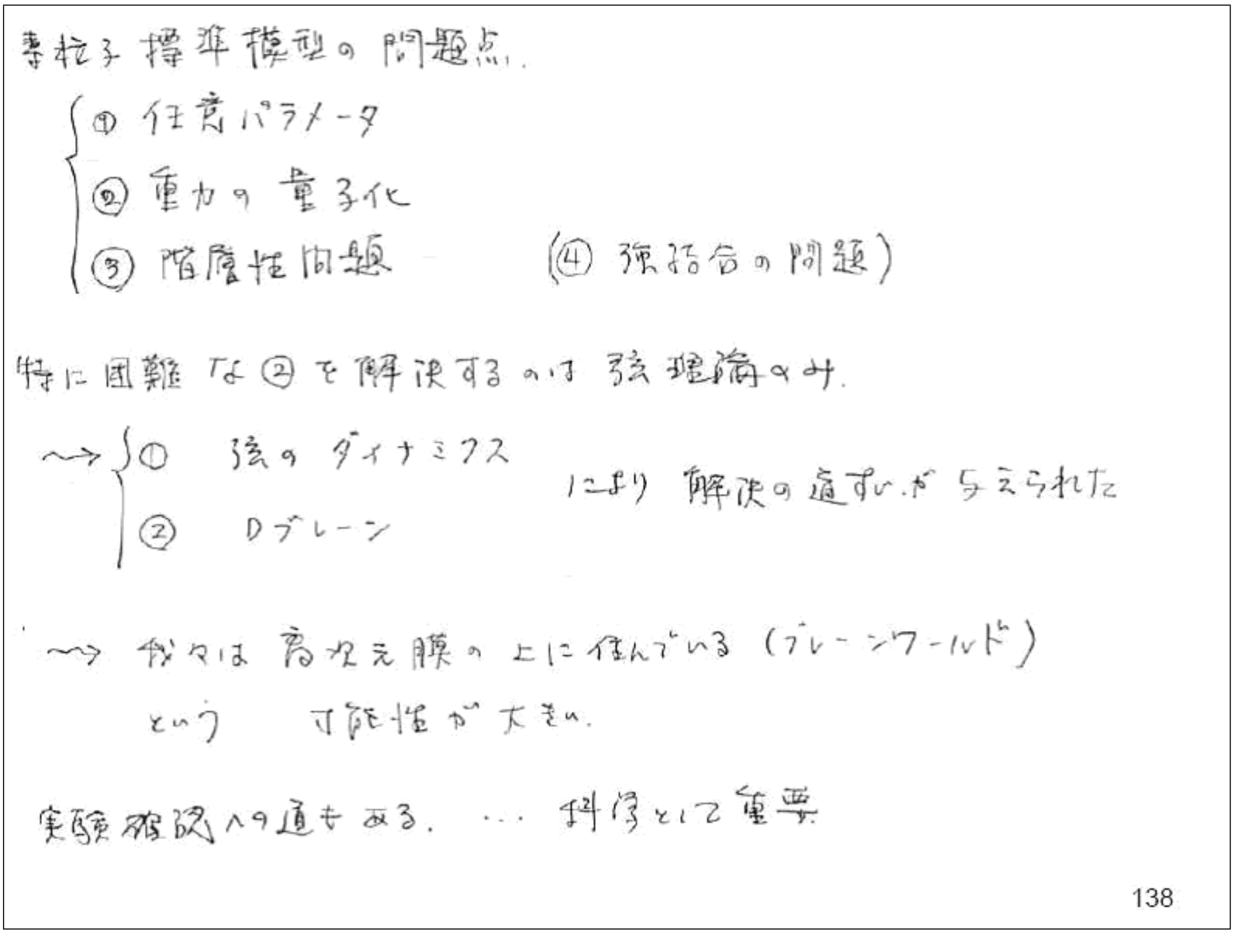
- メソンやバリオンのスペクトル・相互作用の導出，カイラルダイナミクス
- 有限温度，有限密度のハドロン状態.
  ずれ粘性/エントロピー比，クォークの運動摩擦.
- グルーボールの正体明かし

・・・・

ゲージ重力対応で最近なされていること

ゲージ/重力対応で最近なされていることをちょっと述べます。例えばメソンやバリオンのスペクトル [38, 39, 40, 41, 42]、相互作用の導出 [43, 44]、カイラルダイナミクス [45, 41]、有限温度、有限密度のハドロン状態（ずれ粘性とエントロピーの比、クォークグルーオンプラズマ [46, 47]、クォークの運動摩擦 [48, 49, 50]）、グルーボールの正体明かし [51, 52, 53] *11。まあこういうですね、強結合でなければ絶対に計算できない、そういうものが、ゲージ/重力対応を用いて重力の計算で計算されている、というのが近年の状況です。で、これらの結果は実は観測の実験結果を非常によく再現しています。ま、オーダーが合えばいいと言いましたが、オーダーが合うどころではなくてですね、それ以上に一致をみているものが非常にたくさんあります。ですので、具体的に $SU(3)$ のゲージ理論の強結合を解くという問題は、重力に全部を写像して、そちら側で計算する、という数学公式を使うことによって解決されるんだと言っていいでしょう。で、今後の課題はもちろんたくさんあります。N は無限大だから、N は 3 ではないですね、じゃ駄目じゃないかと、$\frac{1}{N}$ の補正をどんどん計算する必要があるとか、もしくは、こんなふうに超対称性を破っても余分な粒子がやっぱりちょっとたくさんあるので、そういうのをどういうふうに排除するか、とかですね、QCD に近づける努力は様々、たくさんこれからやることがあります。ここでのメッセージは、強結合の問題と、クォークの閉じ込めの問題は、うまく重力側に map することができて、重力側での計算が可能になっているというわけです。

*11 代表的なレヴューを紹介する。バリオンやグルーボールのスペクトルに関する初期の発展は Ref.[26] にまとめられている。Ref.[54] ではフレーバーの導入 [55] から酒井・杉本モデル [41] までの解説を含む近年の発展が詳しく紹介されていいる。AdS/CFT を QGP に応用する場合には線形応答理論や流体力学的な取り扱いが必要であるが、Ref.[56] ではそれらを重力側で行う方法を解説している。また、Ref.[57] では現代的視点から AdS/CFT の基礎を解説した後、流体力学や物性物理学への応用が議論されている。



6　まとめ

これでおしまいです。まとめとしましては、素粒子標準模型の問題点、任意パラメータ、重力の量子化、階層性の問題、そして強結合の問題、これらは超弦理論のアイディア、もしくは計算技術を使って解決される可能性がある。重力の量子化については確実にこれは超弦理論は解決しています。弦のダイナミクス、そして D ブレーンにより、これら他のものに関係して、解決の道筋が、可能性が与えられています。我々は高次元膜の上に住んでいるというブレーンワールドのシナリオが真剣に検討されています。これは実験で検証されなければいけません。折しも、LHC が動き始めるその直前に我々はいるわけですが、そこで確かにこういう模型が正しいと思われる、かもしれないし、もしくは、全くこういうのが見えないかもしれない。ただ、こういう理論的な問題点を解決する模型というのはそんなにたくさん種類があるわけではない。そのうちで、ブレーンワールドシナリオというのは、非常に大きな魅力を与えている 1 つの模型というのは正しい statement だと思います。では、これで。ちょっと 5 分延長してすいません。終わりにしたいと思います。ありがとうございました。

(質問) すいません、さっきの D4 ブレーンをコンパクト化した理論で計算した string tension は実験とどれぐらい合っているんですか？

(答) 数字はちょっとすいません忘れましたが、オーダーはだいたい合っていると思います。この係数はもちろん次元をもっているので、他のもので何か次元を、その値を決めて、それから計算をしないといけないです

ね。例えば vector メソン、ρ メソンの mass とか、そういうものから次元を与える量を 1 つ決めて、それから計算することができます。オーダーはだいたい合っています。

(質問) 素朴には、non-planar の寄与が $\frac{1}{N^2}$ ぐらいですから、だいたい、90 パーセントぐらい合ってそうな気がするんですが。それぐらいですか？

(答) pure な Yang-Mills だと、確かに non-planar の寄与が $\frac{1}{N^2}$ で suppress されるんですが、今こういうふうにクォークが入っているとですね、クォークの寄与は $\frac{1}{N^2}$ ではなくて $\frac{1}{N}$ で効いてくるんですね。ですから $\frac{1}{N}$ のオーダーの correction になります。N は 3 なので、3 割ということになりますね。

講義録作成校からの謝辞

橋本幸士先生は講師の依頼を快諾して下さり、非常に丁寧で分かりやすい講義をして下さいました。講義録作成にあたっても、原稿の内容を詳細にチェックして頂きました。ここに心より感謝の意を表します。また講義録作成に際して、参考文献に関する有益な助言を下さった京都大学大学院理学研究科 小林達夫 准教授と高エネルギー加速器研究機構素粒子原子核研究所 阪村豊 助教に御礼申し上げます。最後に、夏の学校を企画・運営して下さった皆様に感謝いたします。

参考文献

[1] P. Minkowski, "Mu → E Gamma At A Rate Of One Out Of 1-Billion Muon Decays?," Phys. Lett. B **67**, 421 (1977).

[2] T. Yanagida, "Horizontal gauge symmetry and masses of neutrinos," In *Proceedings of the Workshop on the Baryon Number of the Universe and Unified Theories*, Tsukuba, Japan, 13-14 Feb 1979, edited by O. Sawada and A. Sugamoto (KEK-79-18-95)

[3] M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, "Complex Spinors And Unified Theories," in *Supergravity*, Proceedings of the Workshop, Stony Brook, NY, 1979, edited by P. van Nieuwenhuizen and D. Freedman (North-Holland, Amsterdam, 1979)

[4] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, "One loop divergencies in the theory of gravitation," Annales Poincare Phys. Theor. A **20**, 69 (1974).

[5] M. J. G. Veltman, "Quantum Theory Of Gravitation," SPIRES entry *In *Les Houches 1975, Proceedings, Methods In Field Theory*, Amsterdam 1976, 265-327*

[6] S. Deser and P. van Nieuwenhuizen, "One Loop Divergences Of Quantized Einstein-Maxwell Fields," Phys. Rev. D **10**, 401 (1974).

[7] S. Deser, H. S. Tsao and P. van Nieuwenhuizen, "One Loop Divergences Of The Einstein Yang-Mills System," Phys. Rev. D **10**, 3337 (1974).

[8] M. H. Goroff and A. Sagnotti, "The Ultraviolet Behavior Of Einstein Gravity," Nucl. Phys. B **266**, 709 (1986).

[9] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, "SUPERSTRING THEORY. VOL. 1: INTRODUCTION," *Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1987) 469 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics)*

[10] J. Polchinski, "String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string," *Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) 402 P.*

[11] A. Sen, "Tachyon dynamics in open string theory," Int. J. Mod. Phys. A **20**, 5513 (2005) [arXiv:hep-

th/0410103].

[12] S. Mandelstam, "The n loop string amplitude: Explicit formulas, finiteness and absence of ambiguities," Phys. Lett. B **277**, 82 (1992).

[13] N. Berkovits, "Multiloop amplitudes and vanishing theorems using the pure spinor formalism for the superstring," JHEP **0409**, 047 (2004) [arXiv:hep-th/0406055].

[14] N. Seiberg and E. Witten, "Monopole Condensation, And Confinement In N=2 Supersymmetric Yang-Mills Theory," Nucl. Phys. B **426**, 19 (1994) [Erratum-ibid. B **430**, 485 (1994)] [arXiv:hep-th/9407087].

[15] N. Seiberg and E. Witten, "Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in N=2 supersymmetric QCD," Nucl. Phys. B **431**, 484 (1994) [arXiv:hep-th/9408099].

[16] R. F. Dashen, B. Hasslacher and A. Neveu, "Nonperturbative Methods And Extended Hadron Models In Field Theory. 2. Two-Dimensional Models And Extended Hadrons," Phys. Rev. D **10**, 4130 (1974).

[17] G. T. Horowitz and A. Strominger, "Black strings and P-branes," Nucl. Phys. B **360**, 197 (1991).

[18] J. Polchinski, "Lectures on D-branes," arXiv:hep-th/9611050.

[19] J. Polchinski, "Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges," Phys. Rev. Lett. **75**, 4724 (1995) [arXiv:hep-th/9510017].

[20] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, "The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter," Phys. Lett. B **429**, 263 (1998) [arXiv:hep-ph/9803315].

[21] S. W. Hawking, "Particle Creation By Black Holes," Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975) [Erratum-ibid. **46**, 206 (1976)].

[22] K. Nakamura et al. (Particle Data Group), "Review of particle physics", J. Phys. G **37**, 075021 (2010)

[23] L. Randall and R. Sundrum, "A large mass hierarchy from a small extra dimension," Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999) [arXiv:hep-ph/9905221].

[24] L. Randall and R. Sundrum, "An alternative to compactification," Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999) [arXiv:hep-th/9906064].

[25] T. Higaki, N. Kitazawa, T. Kobayashi and K. j. Takahashi, "Flavor structure and coupling selection rule from intersecting D-branes," Phys. Rev. D **72**, 086003 (2005) [arXiv:hep-th/0504019].

[26] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, "Large N field theories, string theory and gravity," Phys. Rept. **323**, 183 (2000) [arXiv:hep-th/9905111].

[27] I. R. Klebanov, "TASI lectures: Introduction to the AdS/CFT correspondence," arXiv:hep-th/0009139.

[28] J. M. Maldacena, "Lectures on AdS/CFT," arXiv:hep-th/0309246.

[29] J. M. Maldacena, "The large N limit of superconformal field theories and supergravity," Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998) [Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999)] [arXiv:hep-th/9711200].

[30] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, "Gauge theory correlators from non-critical string theory," Phys. Lett. B **428**, 105 (1998) [arXiv:hep-th/9802109].

[31] E. Witten, "Anti-de Sitter space and holography," Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998) [arXiv:hep-th/9802150].

[32] G. 't Hooft, "Dimensional reduction in quantum gravity," arXiv:gr-qc/9310026.

[33] L. Susskind, "The World As A Hologram," J. Math. Phys. **36**, 6377 (1995) [arXiv:hep-th/9409089].

[34] G. 't Hooft, "A PLANAR DIAGRAM THEORY FOR STRONG INTERACTIONS," Nucl. Phys. B **72**, 461 (1974).

[35] S. J. Rey and J. T. Yee, "Macroscopic strings as heavy quarks in large N gauge theory and anti-de Sitter supergravity," Eur. Phys. J. C **22**, 379 (2001) [arXiv:hep-th/9803001].

[36] J. M. Maldacena, "Wilson loops in large N field theories," Phys. Rev. Lett. **80**, 4859 (1998) [arXiv:hep-th/9803002].

[37] E. Witten, "Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories," Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 505 (1998) [arXiv:hep-th/9803131].

[38] M. Kruczenski, D. Mateos, R. C. Myers and D. J. Winters, "Meson spectroscopy in AdS/CFT with flavour," JHEP **0307**, 049 (2003) [arXiv:hep-th/0304032].

[39] E. Witten, "Baryons and branes in anti de Sitter space," JHEP **9807**, 006 (1998) [arXiv:hep-th/9805112].

[40] D. J. Gross and H. Ooguri, "Aspects of large N gauge theory dynamics as seen by string theory," Phys. Rev. D **58**, 106002 (1998) [arXiv:hep-th/9805129].

[41] T. Sakai and S. Sugimoto, "Low energy hadron physics in holographic QCD," Prog. Theor. Phys. **113**, 843 (2005) [arXiv:hep-th/0412141].

[42] T. Sakai and S. Sugimoto, "More on a holographic dual of QCD," Prog. Theor. Phys. **114**, 1083 (2005) [arXiv:hep-th/0507073].

[43] K. Hashimoto, "Holographic Nuclei," Prog. Theor. Phys. **121**, 241 (2009) [arXiv:0809.3141 [hep-th]].

[44] K. Hashimoto, T. Sakai and S. Sugimoto, "Nuclear Force from String Theory," Prog. Theor. Phys. **122**, 427 (2009) [arXiv:0901.4449 [hep-th]].

[45] J. Babington, J. Erdmenger, N. J. Evans, Z. Guralnik and I. Kirsch, "Chiral symmetry breaking and pions in non-supersymmetric gauge / gravity duals," Phys. Rev. D **69**, 066007 (2004) [arXiv:hep-th/0306018].

[46] G. Policastro, D. T. Son and A. O. Starinets, "The shear viscosity of strongly coupled N = 4 supersymmetric Yang-Mills plasma," Phys. Rev. Lett. **87**, 081601 (2001) [arXiv:hep-th/0104066].

[47] D. Teaney, "Effect of shear viscosity on spectra, elliptic flow, and Hanbury Brown-Twiss radii," Phys. Rev. C **68**, 034913 (2003) [arXiv:nucl-th/0301099].

[48] C. P. Herzog, A. Karch, P. Kovtun, C. Kozcaz and L. G. Yaffe, "Energy loss of a heavy quark moving through N = 4 supersymmetric Yang-Mills plasma," JHEP **0607**, 013 (2006) [arXiv:hep-th/0605158].

[49] S. S. Gubser, "Drag force in AdS/CFT," Phys. Rev. D **74**, 126005 (2006) [arXiv:hep-th/0605182].

[50] H. Liu, K. Rajagopal and U. A. Wiedemann, "Calculating the jet quenching parameter from AdS/CFT," Phys. Rev. Lett. **97**, 182301 (2006) [arXiv:hep-ph/0605178].

[51] C. Csaki, H. Ooguri, Y. Oz and J. Terning, "Glueball mass spectrum from supergravity," JHEP **9901**, 017 (1999) [arXiv:hep-th/9806021].

[52] R. C. Brower, S. D. Mathur and C. I. Tan, "Glueball Spectrum for QCD from AdS Supergravity Duality," Nucl. Phys. B **587**, 249 (2000) [arXiv:hep-th/0003115].

[53] K. Hashimoto, C. I. Tan and S. Terashima, "Glueball Decay in Holographic QCD," Phys. Rev. D **77**, 086001 (2008) [arXiv:0709.2208 [hep-th]].

[54] J. Erdmenger, N. Evans, I. Kirsch and E. Threlfall, Eur. Phys. J. A **35**, 81 (2008) [arXiv:0711.4467

[hep-th]].

[55] A. Karch and E. Katz, "Adding flavor to AdS/CFT," JHEP **0206**, 043 (2002) [arXiv:hep-th/0205236].

[56] D. T. Son and A. O. Starinets, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **57**, 95 (2007) [arXiv:0704.0240 [hep-th]].

[57] J. McGreevy, "Holographic duality with a view toward many-body physics," Adv. High Energy Phys. **2010**, 723105 (2010) [arXiv:0909.0518 [hep-th]].