

2011年夏の学校

素粒子論パート 講義 A(弦理論) 講義録

# F-theory and Grand Unification

講師

川野 輝彦 助教

( 東京大学 )

講義録作成

東北大学素粒子・宇宙理論研究室

手島 芳朗	安齋 千隼	中村 充利	佐々 周平
福島 啓	村木 久祥	川端 さやか	庄司 裕太郎
斎藤 拓也	中村 佳祐	樽松 良祐	別所 泰輝

平成 23 年 8 月 17 日

午前の部 8:45-12:00 午後の部 18:30-22:00

# 目次

第 I 部 午前部	2
第 1 章 Introduction	3
1.1 Superstring Theory . . . . .	3
1.2 Supergravity . . . . .	4
1.3 T-duality . . . . .	7
1.4 M-theory . . . . .	9
1.5 $p$ -brane . . . . .	9
第 2 章 F-theory	13
2.1 10-dim SUGRA . . . . .	13
2.2 Compactification . . . . .	16
2.3 F-theory . . . . .	16
2.4 $X_8$ について . . . . .	19
第 3 章 Compactification of 11-dim SUGRA	21
3.1 11-dim SUGRA . . . . .	21
3.2 type IIA SUGRA . . . . .	23
3.3 Dimensional reduction . . . . .	25
3.4 Dimensional reduction of metric . . . . .	26
第 II 部 午後部	28
3.5 Dimensional reduction of Ricci scalar . . . . .	29
3.6 Dimensional reduction of $p$ -form . . . . .	29
3.7 Dimensional reduction of 11-dim SUGRA . . . . .	37
第 4 章 T-duality	41
4.1 Compactification of IIA SUGRA . . . . .	41
4.2 Compactification of IIB SUGRA . . . . .	41
4.3 T-duality . . . . .	44
第 5 章 F-theory and Grand Unification	47
5.1 Torus on $B_6$ . . . . .	47
5.2 具体例 1 . . . . .	49
5.3 具体例 2 . . . . .	52
5.4 F-theory and Grand Unification . . . . .	56

# 第I部

## 午前の部

# 第1章 Introduction

今日は F-theory について話そうと思います。

一番最初にちょっとどういう感じかというお話をしていきます。一応、F-theory and Grand Unification という講義タイトル通りの内容を目指して話しますが、Grand Unification までいけるかどうかは怪しいところです。とりあえず今日は F-theory っていうのがほんのり何となくどういうものかっていうのがわかってもらえれば、僕の講義は成功かなと思うので、そのあたりを目指します。

## 1.1 Superstring Theory

まずストリング理論というところから始めます。10次元のストリング理論っていうものが知られていますが、それは一般には type IIA, type IIB, heterotic っていうのと type I というものがあります。heterotic っていうのは本当は gauge 群が2種類あるのですが、詳細は省きます。

10次元 superstring

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \text{type IIA} \\ \cdot \text{type IIB} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 10 \text{次元の意味で} \\ N=2 \text{の SUSY} \end{array} \leftarrow \text{supercharge : Majorana-Weyl spinor 2個分} \\ \left. \begin{array}{l} \cdot \text{heterotic} \\ \cdot \text{type I} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 10 \text{次元の意味で} \\ N=1 \text{の SUSY} \end{array} \leftarrow \text{supercharge : Majorana-Weyl spinor 1個分} \quad (1.1)$$

heterotic と type I というのは 10次元の意味で  $N = 1$  の SUSY です。M1 の方は SUSY (supersymmetry、超対称性) についてよく知らないかもしれませんが、名前くらい聞いたことはあると思います。supersymmetry があると supercharge っていう保存量があります。この保存量は fermionic な charge で、ローレンツ群の下で spinor として変換します。10次元の  $N = 1$  の SUSY という意味は、10次元の Majorana-Weyl spinor 1個分の supercharge があるような supersymmetry もつ理論ということです。

4次元でいうと Weyl spinor っていうのがありますが、一番なじみが深いのは Dirac spinor (Dirac fermion) でしょうか。Dirac spinor というのは、ローレンツ群の下で互いに交わらない二つの成分からできています。この二つの成分のそれぞれが Weyl spinor で、ローレンツ群の既約な表現になっています。それゆえ、ローレンツ群の表現という意味で、Dirac spinor は、最小単位である Weyl spinor 2個分になっています。10次元のときには非常に特別で、Weyl に加えて Majorana という条件も同時に課することができます。spinor が Majorana っていうのは実だっていうことです。10次元では Majorana-Weyl spinor が spinor の最小単位です。4次元の場合には Majorana か Weyl か片方しか課することができません。

この heterotic とか type I っていうのは supersymmetry をもち、対応する supercharge は Majorana-Weyl spinor の意味で 1個分です。type IIA, type IIB の方は 10次元の意味で  $N = 2$  の SUSY で、

その supercharge は Majorana-Weyl spinor の意味で 2 個分ですね。

## Chirality

4次元の場合 Weyl spinor というものを思い出すと、 $\Gamma^5$  っていうのがあって fermion  $\psi, \chi$  があると

$$\begin{cases} \Gamma^5 \psi = +\psi \\ \Gamma^5 \chi = -\chi \end{cases} \quad (1.2)$$

のように、 $\Gamma^5$  に対して +1 の固有値か -1 の固有値をもつ fermion があつたと思います。Weyl spinor は (1.2) 式のどちらかを満たすものです。

今の場合は 10 次元なので、 $\Gamma^5$  と書かずに  $\Gamma^{11}$  と書きます。(1.2) 式のアナロジーを考えていただければいいと思いますが、10次元の場合

$$\begin{cases} \Gamma^{11} \psi = +\psi \\ \Gamma^{11} \chi = -\chi \end{cases} \quad (1.3)$$

の 2 種類あります。それで、type IIA というのは supercharge が 2 個あるので、その supercharge を  $Q_+, Q_-$  とすると、

$$\begin{cases} \Gamma^{11} Q_+ = +Q_+ \\ \Gamma^{11} Q_- = -Q_- \end{cases} \quad (\text{Non-Chiral}) \quad (1.4)$$

となります。このように符号の異なるものが両方あるので、こういうのはいわゆる non-chiral と呼びます。type IIB の supercharge を  $Q_1, Q_2$  としますと、

$$\begin{cases} \Gamma^{11} Q_1 = +Q_1 \\ \Gamma^{11} Q_2 = +Q_2 \end{cases} \quad (\text{Chiral}) \quad (1.5)$$

を満たします。両方とも符号が正になるか負になるかは convention に依りますが、ここではこれを正にとります。こういったどちらかに符号が偏ってるものを chiral と言い、type IIB は chiral な理論です。 $N = 2$  の SUSY をもつ場合には、type IIA と type IIB の 2 つの種類の superstring があります。

## 1.2 Supergravity

ところで、string っていうのはなにかというと、図 1.1 のように string 自体に振動する自由度があるものです。この振動する自由度から図 1.2 のような spectrum が出てきます。図 1.2 は縦軸に質量の 2 乗をとっていて、上に励起状態があがっていくという spectrum です。図 1.2 の一番下の部分から massless mode が出てきます。だいたい string が与えるスケールが Planck スケール以上であれば、massive mode は Planck スケール以上になります。例えば string が標準模型の粒子、クォークとかレプトンとか、そういったものを与えるとすると、現在の素粒子論の標準模型や大統一理論が扱っている低エネルギーでは、この Planck スケールより上のモードっていうもの

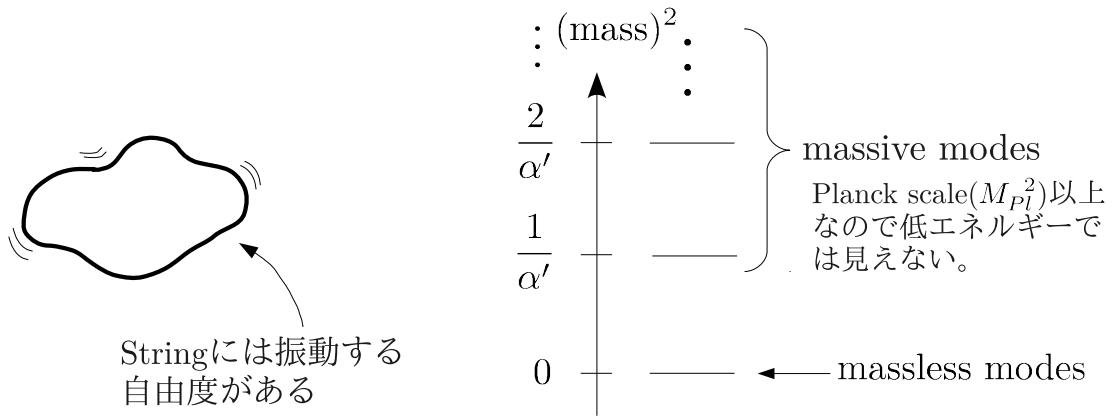
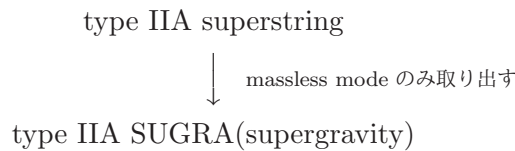


図 1.1: string が振動している様子。 図 1.2: superstring の振動から現れる mass spectrum。

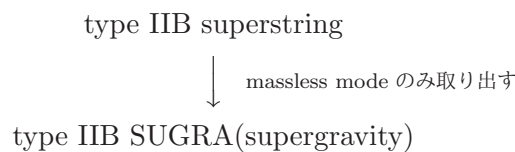
は見えるはずがないので、ストリング理論や F-Theory で大統一理論を考えたいような場合には、massless mode に着目することにします。

superstring 理論の massless mode を見ますと、必ず 2 階対称テンソルが含まれていて、graviton と同一視することができます。このように string 理論が自然に重力を含んでいる理論になっているのは驚くべき事実だったわけで、理論自体が一般座標変換不変になっているを示唆しているわけですが、今の場合には、supersymmetry(超対称性)の下でも不変になっているといかないので、massless mode だけの理論というのは、SUGRA(supergravity, 超重力理論)になっていることが予想できます。

すると、例えばさっきの type IIA superstring から massless mode のみを取り出すと、type IIA superstring というのは type IIA SUGRA(supergravity) という理論になります。



type IIB superstring も同じ操作をすると、type IIB SUGRA となります。



一方で、10次元で  $N = 2$  の SUSY をもってる SUGRA は

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{type IIA} \\ \text{type IIB} \end{array} \right.$$

のみであることが知られており、superstring 理論が低エネルギー理論としてこれらの理論を与えていることとつじつまが合います。

あと、 $N$  が 2 って言いましたが、10次元で  $N \geq 3$  の SUSY を持つ SUGRA は 2 種類以上の graviton を含むので、存在しないと言われていました。metric を graviton だと思うので、graviton

が2種類あるってことは、2種類以上の metric があるということになり、普通そういうものは考えないです。このことから  $N = 2$  の SUGRA は 10 次元で最もたくさん超対称性を持っているので maximal supersymmetric である<sup>(i)</sup> と言われます。

実はこういうことを考えるともう一つ言えて、同じく2つ以上の graviton を含むため 12 次元以上では SUGRA が存在しない<sup>(ii)</sup> と言われます。ちょっとテクニカルなことを言うと、Lorentzian metric で 12 次元以上には SUGRA が存在しないと言われていました。

これら下線部 (i), (ii) に反しない残っている部分をみると、11 次元には SUGRA が1つ存在します。これも maximal supersymmetric になります。

(質問) graviton が2種類というのは、低エネルギーに行く途中で SUSY が破れて最終的に1個になっているというふうには理解できないのですか？

(回答) その試みは、(探せばそういう文献はあるかも知れませんが、) 僕の知る限りでは誰もしたことが無いと思います。ここで重要なのは、単なる2階対称テンソルの場合であるというだけではなくて、その場が massless であるということです。また、質問の主旨にあっているかどうかはわかりませんが、「低エネルギーに行く途中で SUSY が破れて最終的に1個に」なった理論をここでは分類していると思っていただいても良いと思います。

(質問) SUGRA が 12 次元以上には存在しないのは、massless は higher spin の相互作用と矛盾するなどの事が関係するのですか？

(回答) SUGRA と言った時には、SUSY と graviton が存在することを仮定しています。一般に、SUSY の変換の下で、graviton がどのような他の場と混じらないといけないかということが決まります。つまり、SUSY の代数に対する表現で graviton を含む既約表現 (multiplet) を決めるわけですが、12 次元以上には SUGRA が存在しないというのは、この既約表現に自動的に graviton が2つ以上入ってしまい、駄目だということです。ですから、相互作用の議論をしているわけではなく、単なる表現論の話ですね。

先ほど述べた 11 次元に一つある SUGRA に話を移しましょう。奇数次元のときに Weyl spinor はないんですけど、11 次元に Majorana spinor はあります。ですから、11 次元の spinor の最小単位は、Majorana spinor です。その spinor だと思って、11 次元の supercharge を  $Q$  と書くと、type IIA の supercharge (1.4) と関係づいています。非常にナイーブに書くと、11 次元の supercharge  $Q$  は type IIA の supercharge (1.4) と同じ数だけ成分を持ち、

$$Q \sim \underbrace{\begin{pmatrix} Q_+ \\ Q_- \end{pmatrix}}_{\text{type IIA supercharge}} \quad (1.6)$$

のようになります。これは、後で見るように 10 次元に落とした (dimensional reduction した) ととき、non-chiral な理論になるので、10 次元では type IIA の方になります。

SUGRA の関係としては 11 次元に 11 次元 SUGRA があって、10 次元には type IIA SUGRA と type IIB SUGRA があります。後でやりますが、11 次元 SUGRA を  $S^1$ -コンパクト化 ( $\simeq$  dimensional reduction) すると、10 次元の type IIA SUGRA になります。そしてさらに type IIA

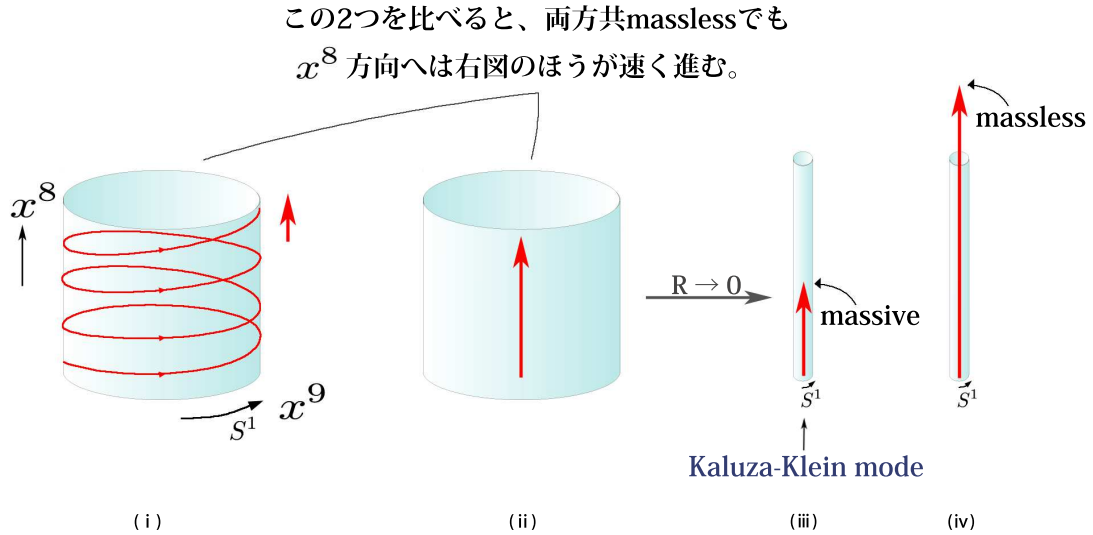


図 1.3: Kaluza-Klein mode

SUGRA と type IIB SUGRA のそれぞれを  $S^1$ -コンパクト化すると、2つとも 9次元 SUGRA になります。これら9次元のSUGRAを結びつけているものをstring理論の言葉ではT-dualityと呼んでいます。まとめると、SUGRAの関係としては次のようになっています。

$$\begin{array}{ccc}
 11 \text{次元 SUGRA} & & \\
 \downarrow S^1 \text{コンパクト化} & & \\
 10 \text{次元 type IIA} & \quad \quad & 10 \text{次元 type IIB} \\
 \downarrow S^1 \text{コンパクト化} & \quad \quad & \downarrow S^1 \text{コンパクト化} \\
 9 \text{次元 SUGRA} & \text{=====} & 9 \text{次元 SUGRA} \\
 & \text{T-duality} & 
 \end{array} \tag{1.7}$$

実は9次元にはこの対称性を持っているSUGRAは1つしかないのですが、(1.7)の一番下の2つはSUGRAの意味で実は同じものなのですが、T-dualityと言っている意味はSUGRAだけではなく、(massless mode以外のものも含めた)superstring理論の意味でも2つの理論が同じ理論になるということです。

### 1.3 T-duality

(質問) T-duality とは何ですか？

(回答) 後でやるかもしれませんが、9次元の場合のT-dualityというのをsuperstringにおいて説明します。まず図1.3を見てください。



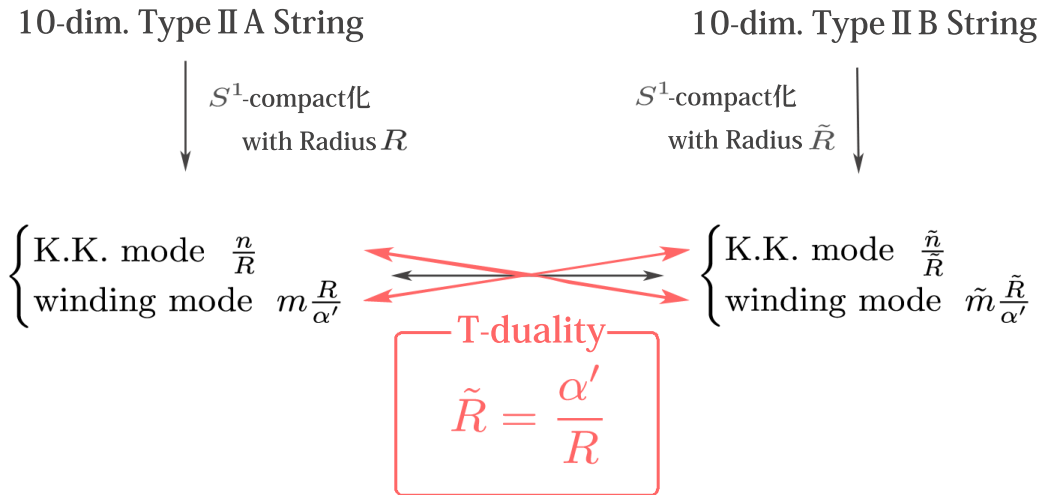


図 1.4: T-duality

まず、半径  $R$  で  $S^1$ -コンパクト化したものを考えます。ここでは  $S^1$  の円周方向を  $x^9$  方向として、図 1.3 の上方向を例えば  $x^8$  方向とします。図 1.3 の (i) では、その円柱をグルグル回りながら  $x^8$  方向に走っている string の状態を表しています。一方、図 1.3 の (ii) では、同じ円柱を string がグルグル回らないでまっすぐ  $x^8$  方向に走っている状態を表しています。両方とも（振動していない string の）massless mode だとして 2 つを比較すると、(i) はグルグル回りながら光速で進んでいるのに対して、(ii) はまっすぐ光速で  $x^8$  方向に進んでいます。そうすると、(ii) のほうが  $x^8$  方向には速く進みます。

ここで  $S^1$  の半径  $R$  を十分小さくすれば  $x^9$  方向は小さくて見えなくなってしまい、外から見ている人にとっては、(iii) は  $x^8$  方向にゆっくり進んでいるのに対して、(iv) は同じ方向に光速で進んでいるように見えます。つまりゆっくり進んでいるものは massive に見えて、光速で進んでいる方は massless に見えるわけです。こういうふうに  $S^1$  にグルグル回りながら走っていて massive に見えるものを”Kaluza-Klein mode (KK mode)” といいます。本当は両方とも光速で進んでいるのですが、外から見ている人にとっては (i) は  $S^1$  の周りをグルグル回りながら  $x^8$  方向に進んでいるので、 $x^8$  方向にはゆっくり進んでいて massive に見えるわけです。KK mode の mass っていうのは、 $n/R$  ( $n$ : 整数) になります。

それと、string っていうのは、ひもですから、 $S^1$  に巻きつくことができます。すると、その張力の分だけ重くなります。この巻いている奴を”winding mode” といいます。この winding mode が  $m$  回巻きついているとすると、その長さは円周の長さ  $2\pi R$  の  $m$  倍になるので、 $2\pi Rm$  になります。よって、string の張力  $T = 1/(2\pi\alpha')$  とその winding mode の長さ  $2\pi Rm$  を使って、この winding mode の mass は  $mR/\alpha'$  ( $m$ : 整数) になります。

10 次元の type IIA と type IIB をそれぞれ半径  $R$  と  $\tilde{R}$  で  $S^1$ -コンパクト化すると、これらの理論は等価になります。Kaluza-Klein mode と winding mode の mass は、それぞれ図 1.4 に書いてあるように対応しています。つまり、それぞれ別の方法で記述しているが、物理は同じものになっているという訳です。これが簡単な T-duality の例です。

T-duality についてですが、もちろん SUGRA の枠内で考えれば massless なので  $n = m = 0$  の場合しか考えず  $0 \leftrightarrow 0$  の T-duality になり、その場合は T-duality がそんなに面白くないですが、superstring で見るとこの様な superstring 独特の duality 関係になっています。

もし普通の particle だけの場合は winding mode が存在せず、それぞれの KK mode だけでは T-duality な関係にはなりません。つまり、これらの二つの type II SUGRA が superstring の低エネルギー理論ではない場合には、 $S^1$ -コンパクト化すると、massless mode だけの理論は 9 次元 SUGRA になり、同じに見えますが、KK mode をすべて含めると違う理論であることがわかります。そのため半径  $R, \tilde{R}$  が違うそれぞれの理論が区別できるのですが、superstring になると winding mode があるため、それぞれが同じ理論になっているということが分かるわけです。つまり superstring では  $R \rightarrow 0$  という極限が  $\tilde{R} \rightarrow \infty$  という極限に対応していて、それぞれの理論の KK mode と winding mode の mass が対応をもち、二つの理論が等価であることがわかります。superstring に固有の string が広がりを持っているからこそ起きる、duality なわけです。

## 1.4 M-theory

ここでもう一つ大事な、M-theory というものにも触れておきます。

$$\begin{array}{ccc}
 10 \text{次元 type IIA superstring} & & \text{M-theory(11次元)} \\
 \downarrow \text{massless mode} & & \downarrow \text{low-energy effective theory} \\
 10 \text{次元 type IIA SUGRA} & & 11 \text{次元 SUGRA}
 \end{array} \quad (1.8)$$

(1.8) の左側のように、10 次元 type IIA superstring から massless mode のみを取ってくると、10 次元 type IIA SUGRA になっていると言いました。ここで、massless mode のみを取ってくるといふことは、低エネルギー有効理論を見ていることを意味していました。つまり、10 次元 type IIA superstring の典型的なスケール ( $\sim 1/\sqrt{\alpha'}$ ) よりずっと低い所でみると type IIA SUGRA による記述が非常によくなります。

同様の対応がおそらく 11 次元だと思われる M-theory にもいえます。つまり M-theory の (11 次元) 低エネルギー有効理論はさっきやりました、11 次元 SUGRA になります ((1.8) 右)。ただし、10 次元 type IIA superstring は、少なくとも 10 次元の flat space で摂動論的に定義できている理論なのですが、M-theory はまだ摂動論的にも量子論的な理解をされていないものです。ただ现阶段で M-theory に対して予想されているのは、superstring は 1 次元に広がりを持つ string に対する理論であるのに対し、M-theory は背後に membrane と呼ばれる 2 次元に広がりを持つものに対する理論なのではないか、と思われています。大抵の場合 M-theory で何かする時は、membrane を少し使ったり、11 次元 SUGRA を使ったりするだけであって、(Matrix Theory という理論で定義できるのではないかという予想もありますが、) M-theory 自体の定義はまだよく分かっていません。

## 1.5 p-brane

ここで、p-brane と呼ばれている、 $p$  次元分空間に広がりがある物を紹介しておきます。例えば 1-brane は string のことで、0-brane は particle のことです。この意味で membrane と言っている

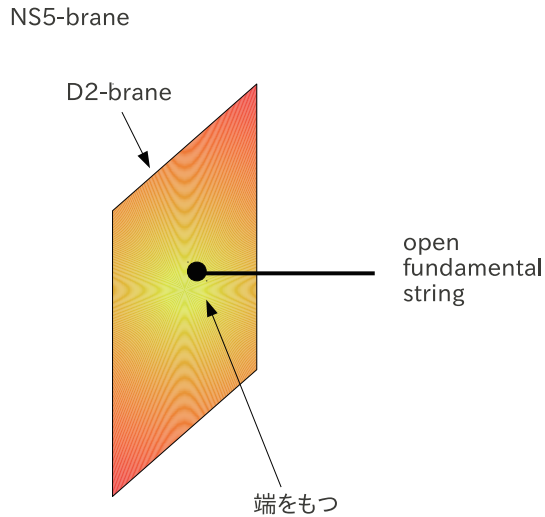


図 1.5: D2-brane と open fundamental string の端

のが 2-brane を意味します。

$p$ -brane  $\longleftrightarrow$   $p$ 次元分空間に広がりを持った object

0-brane  $\longleftrightarrow$  particle

1-brane  $\longleftrightarrow$  string

2-brane  $\longleftrightarrow$  membrane

brane が出てきたので、ついでに 10 次元の type IIA superstring っていうのはどういう理論なのかっていうことをちょっと考えておいた方が良いでしょう。10 次元の type IIA superstring には以下のようなものがあります。

$$\begin{array}{l}
 \text{string(fundamental string)} \\
 \left. \begin{array}{l}
 0\text{-brane} \\
 2\text{-brane} \\
 4\text{-brane} \\
 6\text{-brane} \\
 8\text{-brane}
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{D-brane} \\
 (\text{open string が端をもつ object})
 \end{array} \\
 \oplus \text{NS5-brane}
 \end{array} \tag{1.9}$$

まず string があります。これは fundamental string です。それ以外に 0-brane があります。それから 2-brane、4-brane、6-brane、8-brane がいて、これらはいわゆる D-brane と呼ばれているものです。D-brane は open string が端をもつ object です。例えば D2-brane があると、open な fundamental string はここに端を持ちます (図 1.5)。それプラス NS5-brane があります。これが type IIA です。

NS5-brane っていうのは、string と electric-magnetic dual な物体です。この electric-magnetic dual な物体というのは、4次元の電磁気で、電子が基本的な物体としますと、その electric-magnetic dual な物体は、Dirac monopole でした。その 10 次元バージョンでの string の electric-magnetic dual な物体が NS5-brane です。その辺のことをやり始めると完全に脇道にそれるので今回は使わないので説明しないことにします。

次に type IIB superstring theory について考えます。type IIB superstring theory には次のようなものがあります。

$$\begin{array}{l}
 \text{string(fundamental string)} \\
 \left. \begin{array}{l}
 1\text{-brane} \\
 3\text{-brane} \\
 5\text{-brane} \\
 7\text{-brane} \\
 9\text{-brane} \\
 ((-1)\text{-brane})
 \end{array} \right\} \text{D-brane} \\
 \oplus \text{NS5-brane}
 \end{array} \tag{1.10}$$

superstring 理論ですから、やっぱり fundamental string があります。それから、1-brane、3-brane、5-brane、7-brane、9-brane、(-1)-brane があります。これらは D-brane です。

(質問) すいません、(-1) はどういう意味ですか？

(回答) (-1)-brane 以外の D-brane は全部時間方向に広がっているんだけど、(-1)-brane は instanton みたいに時間方向に広がっていません。ポンと instanton みたいに出て消えます。

(質問) すみません。図 1.4 で T-duality を考えた際に、type IIA の D-brane と type IIB の D-brane の間に対応がありますか？

(回答) 対応があります。図 1.4 では string しか見ていないのですが、例えば T-duality っていう時には、この brane の間に対応とかそれぞれ見てやらないといけません。あとでできるかどうかかわかんないんだけど、そういう対応は見えます。

(質問) じゃあ、その type IIB の中に 0-brane がないのは別にそれはおかしくはないってことですか？

(回答) おかしくはありません。さっき、D-brane を open string が端をもった object という言い方をしましたけど、こういう人がなんているかっていう話です。例えば、よく知っている身近な例は particle の場合だと思しますので、その場合を例にして、brane の相互作用を考えましょう。

この時はどういうものかということと電磁気でやった相互作用で

$$\int d\tau A_\mu(z(\tau)) \dot{z}^\mu(\tau) \quad \left( \dot{z}^\mu(\tau) = \frac{dz^\mu}{d\tau}(\tau) \right) \tag{1.11}$$

と書きました。これはパラメーターをあらわに書かないと

$$\int A_\mu(z) dz^\mu \tag{1.12}$$

と書くことも出来ます。これは点粒子の相互作用です。 $p$ -brane の相互作用はこのアナロジーで

$$\int C_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} dz^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dz^{\mu_{p+1}}, \quad C_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} : \text{完全反対称の gauge 場} \tag{1.13}$$

のように書きます。 $\mu_1 \cdots \mu_{p+1}$  は完全反対称で、こういったものが  $p$ -brane の相互作用です。 $p$ -brane がある理論には  $(p+1)$ -form の gauge 場がいて欲しいことがわかります。

逆に言いますと、 $(p+1)$ -form の gauge 場があるような理論では、 $p$ -brane を考えることが自然であることがわかります。先ほど、SUSY の代数と graviton が存在することを仮定すると、graviton を含む multiplet が決まると言いましたが、この multiplet に  $(p+1)$ -form の gauge 場  $C_{\mu_1 \cdots \mu_{p+1}}$  が自然に現れることがわかります。これによって、どの  $p$ -brane を考えることが自然であるかが決まってしまうます。

## 第2章 F-theory

### 2.1 10-dim SUGRA

type IIA の SUGRA には次のような bosonic な場があります。

$$\begin{aligned}
 g_{IJ} & : \text{metric} \\
 \phi & : \text{dilaton} \\
 B_{IJ} & : \text{2-form gauge 場} \longleftrightarrow \text{type IIA string (fundamental string)} \\
 C_1 & : \text{1-form gauge 場} \longleftrightarrow \text{type IIA 0- brane} \\
 C_3 & : \text{3-form gauge 場} \longleftrightarrow \text{type IIA 2- brane}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$B_{IJ}$  は fundamental string と、 $C_1$  は 0-brane と  $C_3$  は 2-brane と... っていう風に electric に couple しています。4,6-brane は 2,0-brane の electric-magnetic dual な物体です。fundamental string が electron だと思えば NS5-brane は monopole 的な object だと前に言いました。

この辺は説明していると長くなってしまいますが、簡単に述べますと。電磁気では、ゲージ場  $A_\mu$  の運動方程式は、fieldstrength  $F_{\mu\nu}$  を使って、

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu$$

と書いていました。ここで、 $j_\nu$  は電荷カレントで、先ほどの相互作用では、

$$j^\mu(x) = \int d\tau \dot{z}^\mu(\tau) \delta^4(x^\mu - z^\mu(\tau))$$

となります。また、gauge 場  $A_\mu$  は 1-form なので、 $A = A_\mu dx^\mu$  と書くと、fieldstrength  $F_{\mu\nu}$  は、

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = dA$$

となって、gauge 場  $A_\mu$  の外微分で書けます。また、 $F$  の Hodge dual  $G$  を

$$G = \frac{1}{2} G_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad G^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

と定義すると、電磁気では、

$$\partial^\mu G_{\mu\nu} = 0$$

と習ったと思いますが、Dirac は monopole を導入して、 $G = dV$  という gauge 場  $V_\mu$  とこの monopole との相互作用を考えることで、(磁荷) カレント  $k_\mu$  が定義できて、

$$\partial^\mu G_{\mu\nu} = k_\nu$$

と変更したものを考えました。このときの  $F \Leftrightarrow G$  の Hodge dual な関係を electric-magnetic な関係といいます。ここで、 $A_\mu$  と直接相互作用していたのは electron で、 $V_\mu$  と直接相互作用していたのは monopole でした。

$p$ -brane は、 $(p+1)$ -form の gauge 場  $C_{p+1}$  と相互作用していました。この gauge 場の fieldstrength  $F_{I_1 \dots I_{p+2}}$  は、この gauge 場を微分したものの  $\partial_{I_1} C_{I_2 \dots I_{p+2}}$  を足  $(I_1, \dots, I_{p+2})$  について完全反対称化したもの  $((p+1)$ -form である gauge 場  $C_{p+1}$  を外微分したもの ;  $F_{p+2} = dC_{p+1}$ ) です。この fieldstrength  $F_{p+2}$  の Hodge dual  $G_{8-p}$

$$G_{I_1 \dots I_{8-p}} \sim \frac{1}{(p+2)!} \epsilon_{I_1 \dots I_{8-p} J_1 \dots J_{p+2}} F^{J_1 \dots J_{p+2}}$$

の gauge 場  $C_{7-p}$  は  $G_{8-p} = dC_{7-p}$  で与えられますが、この場が  $p$ -brane と electric-magnetic dual な物体  $(6-p)$ -brane と直接相互作用します。

話を元に戻して、実際に type IIA っていうのは supersymmetric な algebra を使うと、どういう場がないといけないかっていうことは勝手に決まってしまうので、SUGRA と string のこういった対応関係とは関係なしに最初から (2.1) のような場があるっていうことは知っています。逆に言うとそれに対応して、何 brane があるのかが、coupling の仕方からわかります。

同様に type IIB 方にも次のような bosonic な場があります。

$$\begin{aligned} g_{IJ} &: \text{metric} \\ \phi &: \text{dilaton} \\ B_{IJ} &: \text{2-form gauge 場} \longleftrightarrow \text{fundamental string} \\ C_0 &: \text{0-form gauge 場} \longleftrightarrow \begin{array}{ll} (-1)\text{-brane} & \text{(electric)} \\ \longleftrightarrow 7\text{-brane} & \text{(magnetic)} \end{array} \\ C_2 &: \text{2-form gauge 場} \\ C_4 &: \text{4-form gauge 場} \end{aligned} \tag{2.2}$$

ここでも  $C_0$  と  $(-1)$ -brane、 $C_2$  と  $1$ -brane... というように斜めの対応があります。実は、 $C_0$  は  $(-1)$ -brane と electric な対応になりますが、 $7$ -brane とは magnetic な対応になっています。

(質問) SUGRA の中にはもう string はいないんですよね？

(回答) SUGRA の中には string はいないです。excited mode はないです。でも、massless mode も string には違いがありませんので、文字通り「string はいない」わけではありません。

(質問) だとすると superstring theory の中で、例えば fundamental string と 2-form の gauge 場が相互作用するっていうのは、結局 fundamental string 同士だけの相互作用ですか？

(回答) fundamental string を”介して”の相互作用です。

(質問) その  $B_{IJ}$  も、もともとは fundamental string から出てきたんですよね？

(回答)  $B_{IJ}$  は非常に特殊で、fundamental string と  $B_{IJ}$  はもう直で string と coupling を持っています。だから string から出てきます。っていうより type IIB SUGRA の bosonic な場は string から出てきます。type IIA の bosonic な場も同様に量子化をすると出てきます。

(質問) それがまた fundamental string と相互作用してるってことなんですか？

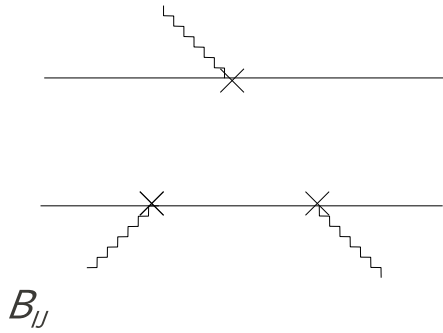


図 2.1: string と  $B_{IJ}$  の coupling

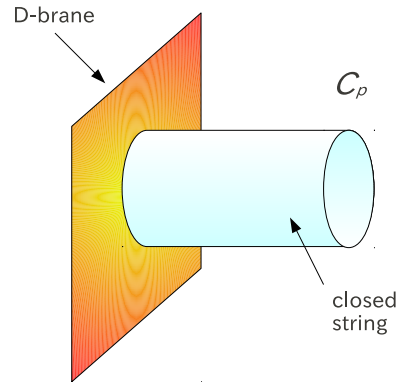


図 2.2: D-brane と closed string

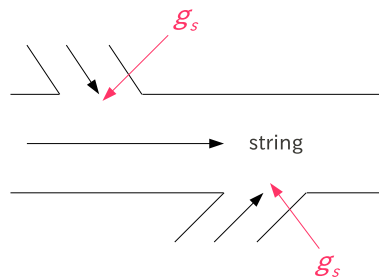


図 2.3: string の coupling

(回答) 全部 string なので string 同士が interaction しています。図 2.1 のように、string が走ってきて途中でほかの string が入ってきたり出てきたりする。それが例えば  $B_{IJ}$  等になっています。D-brane があるときは図 2.2 のように、D-brane があって closed string で描かれている  $C_p$  があってそれが brane と相互作用しています。

metric というのは皆さんもよく知っているように普通に計量です。  $C_p$  っていうのは brane たちと相互作用する gauge 場です。

じゃあ dilaton というのは何かというと、

$$g_s = \langle e^\phi \rangle \quad (2.3)$$

$g_s$  : string の結合定数

のように真空期待値が string coupling constant になっています。図 2.3 のように、string が走っていて、横から string が出たり入ってきたりすると、そこに相互作用があるので string coupling constant  $g_s$  がかかります。この  $\phi$  っていう人の真空期待値が string の結合定数を与えています。それは type IIA でも type IIB でも同じで、両方ともこの場の真空期待値が結合定数を与えます。



## 2.2 Compactification

こういった理論から effective な理論として GUT、Grand Unification を実現する model とか、標準模型とかを出そうとする時には、どうしても 10 次元から始めてるのでコンパクト化する必要があるわけです。われわれは 4 次元分だけ広がった世界に住んでいるので、それを次のように書きます。

$$10\text{-dim} \rightarrow \mathbb{R}^{1,3} \times B_6 \quad (2.4)$$

$$\left( \begin{array}{l} \mathbb{R}^{1,3} : 4\text{-dim Minkowski 空間} \\ B_6 : \text{内部空間 (実 6 次元)} \end{array} \right)$$

$\mathbb{R}^{1,3}$  は 4 次元の Minkowski 空間で、 $B_6$  がインターナルな内部空間でコンパクト化する必要がある部分です。

例として、今まで全く言っていないことなかつたことですが Heterotic strings というものを考えます。Heterotic string は 10 次元で、次のように書けます。

$$\mathbb{R}^{1,3} \times CY_3 \quad (2.5)$$

$$(CY_3 : \text{Calabi-Yau 3-fold, 複素 3 次元"多様体" (実 6 次元)})$$

$\mathbb{R}^{1,3}$  が 4 次元の Minkowski 空間で、 $CY_3$  が Calabi-Yau 3-fold 呼ばれている複素 3 次元多様体です。

そして  $CY_3$  をコンパクト化することで何か理論を作ります。F-theory の場合、何かこういう設定を考える必要があります。

(質問) すいません。多様体が ” ” で囲ってあるっていうのは何ですか？

(回答) たまに singular な場合もあつて、singular なものを多様体と呼ばない人もいるかもしれないので一応つけています。あんまり気にしないで良いです。

(質問) つまり manifold ではなくて variety のことを言ってるんですか？

(回答) はい、variety でもいいです。

## 2.3 F-theory

ここで、今、F-theory というものを

$$\text{F-theory}/X_8 \equiv \text{type IIB} / B_6 \quad \text{with } \tau(u) = C_0(u) + i \exp(-\phi(u)) \quad (2.6)$$

( $X_8$  は実次元で 8 次元、Calabi-Yau 4-fold にコンパクト化しないといけない)

( $u$  は  $B_6$  の local coordinate)

となるように定義します。

この  $C_0$  とか  $\phi$  は 0-form の gauge 場と dilaton と言いましたが、そいつが  $B_6$  という内部空間に依っています。真空期待値  $\tau(u)$  が  $B_6$  の local coordinate に依っているように  $B_6$  にコンパクト化した type IIB superstring 理論を、 $X_8$  にコンパクト化した F-theory と呼びます。それで、 $\tau$  とは何かを説明するために、まずトーラスを考えます。トーラスというのは何かというと、図 2.4 の

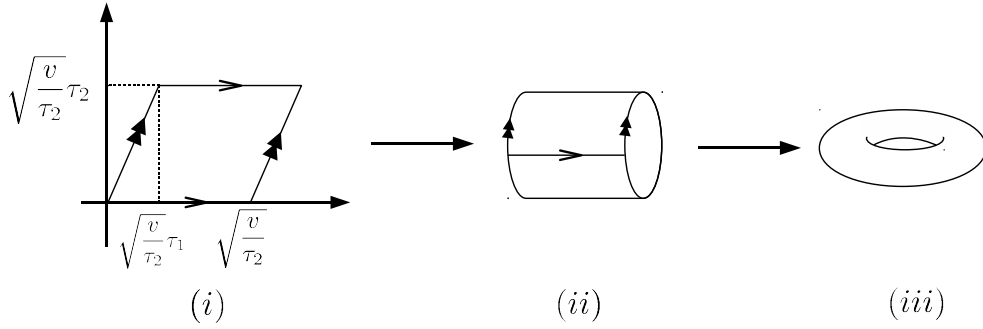


図 2.4: トーラスの構成。平行四辺形の対辺を同一視することによりトーラスが得られる。

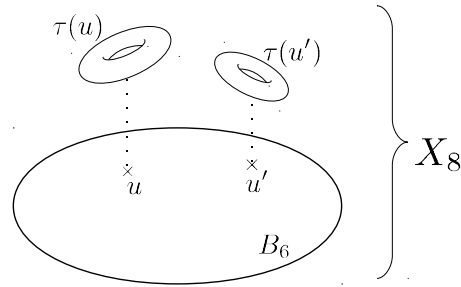


図 2.5:  $x_8$  の概念図

ような平行四辺形を用意して、対辺を同一視します。まず (i) の一つの矢印がついた辺をまず同一視すると (ii) のように円柱になり、次に二重の矢印の辺を同一視して (iii) のようにトーラスになります。これがトーラスを記述する方法です。  $\tau$  は辺のゆがみを表していて、トーラスの complex structure と呼ばれます。ここで、トーラスの metric を書くと、

$$ds^2 = \frac{v}{\tau_2} [(dx + \tau_1 dy)^2 + (\tau_2 dy)^2],$$

$$\tau = \tau_1 + i\tau_2 \quad \tau : \text{complex structure} \quad (v : \text{area}) \quad (2.7)$$

となりますが、ここで、なぜ全体の係数に  $\sqrt{\frac{v}{\tau_2}}$  をつけたかということ、単に平行四辺形の面積が  $v$  になるようにするためです。

$\tau$  の combination が (2.6) 式のようになっているとすると、絵的には図 2.5 のように  $B_6$  があって  $u$  という点の上にさっきのトーラス  $\tau(u)$  が乗っかっています。違う点  $u'$  には  $\tau(u')$  があります。こういうふうにトーラスが fiber されているものを考えます。こういう fiber されたものをもって  $X_8$  とかきます。トーラスのことを elliptic curve と呼ぶことがあるので、 $X_8$  を elliptically fibered manifold と呼ぶときがあります。そういう  $X_8$  の上に F-theory があります。type IIB が 10 次元で  $B_6$  が 6 次元なので type IIB /  $B_6$  は 4 次元で、 $\mathbb{R}^{1,3}$  方向に広がっています。したがって F-theory /  $X_8$  も effective には 4 次元の理論になっています。おおざっぱには、こういうものが F-theory です。

(質問)  $B_6$  をかえると F-theory がかわりますか？

(回答) いや、 $B_6$  をかえると  $X_8$  がかわると思ってください。

きりがいいのでここで休憩にします。

～ 休憩 ～

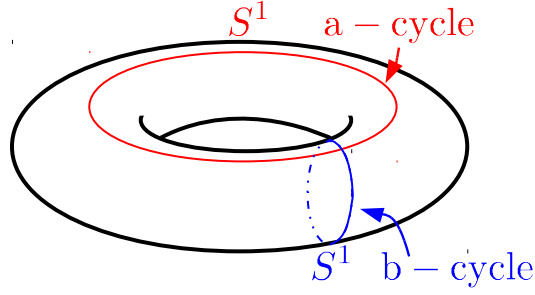


図 2.6: トーラスの二つの独立なサイクル

## 2.4 $X_8$ について

ここまで来たんですが、突然 F-theory/ $X_8$  と書かれてもよくわからないと思うので、わかりやすいように M-theory を使って理解したいと思います。まず、

$$\text{M-theory}/(T^2 \times B_6) \quad (2.8)$$

というものを考えます。 $T^2$  には図 2.6 のように二つの独立なサイクルがあって、それを a-cycle、b-cycle と呼びます。2つの  $S^1$  があるので  $T^2$  のうち a-cycle の  $S^1$  上で M-theory をコンパクト化しすると、さっきやったように M-theory が type IIA になり、b-cycle の方は使っていないのでそのまま残ります。次に、b-cycle の  $S^1$  で T-duality をとると type IIA が type IIB になります。

$$\begin{array}{c} \text{M-theory}/(T^2 \times B_6) \\ \downarrow T^2 \text{ のうち a-cycle の } S^1 \text{ でコンパクト化} \\ \text{type IIA}/(\underbrace{S^1}_{\text{b-cycle}} \times B_6) \\ \downarrow \text{b-cycle で T-duality} \\ \text{type IIB}/(S^1 \times B_6) \end{array} \quad (2.9)$$

(2.9) の二段目の  $S^1$  の半径と三段目の  $S^1$  の半径は逆数になっています。

それで次に、M-theory の metric を

$$\begin{aligned} ds_M^2 = & \underbrace{-(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2}_{(i)} \\ & + \underbrace{ds_{B_6}^2}_{(ii)} \\ & + \underbrace{\frac{v}{\tau_2} [(dx + \tau_1 dy)^2 + (\tau_2 dy)^2]}_{(iii)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

と書きます。11次元から8次元の  $T^2 \times B_6$  にコンパクト化しているので、残った3次元の部分が広がっています。(i)はその3次元分の広がった flat な方向の metric、(ii)は  $B_6$  方向の metric、(iii)はトーラス方向の metric で、 $0 \leq x, y < 1$  です。ここで、 $(dx + \tau_1 dy)^2 = d\tilde{x}^2$ 、 $(\tau_2 dy)^2 = d\tilde{y}^2$  とおきます。これによって、トーラスの同一視する前の平行四辺形は図 2.7 のようになります。こう

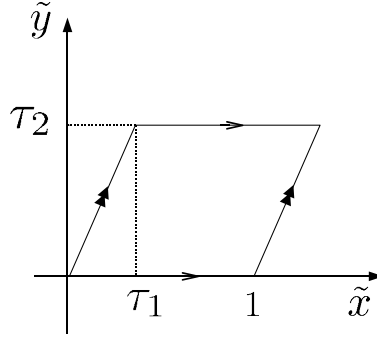


図 2.7: 変数変換後の四角形の図

いう metric を持っているとして M-theory をコンパクト化します。これを type IIB の言葉でかくと、3次元と  $B_6$  にはなにもしてないのでそのままです。トーラスの部分だけかわります。

$$\begin{aligned}
 \tau &= \tau_1 + i\tau_2 = C_0 + i \exp(-\phi) \\
 ds_{\text{IIB,E}}^2 &= -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 \\
 &\quad + ds_{B_6}^2 \\
 &\quad + \frac{l_s^4}{v} (dy)^2
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

$ds_{\text{IIB,E}}^2$  の E は Einstein frame だという意味です。frame については後で詳しく説明します。(2.10) 式の  $y$  と (2.11) 式の  $y$  は関係が無いので注意して下さい。flat な方向と、 $B_6$  方向には何もしてないのでそのままです。トーラスの部分だけ変わっています。ここで、 $(l_s^4/v)(dy)^2$  の部分を  $\tilde{R}^2(dy)^2$  と書くと、半径  $\tilde{R} = l_s^2/\sqrt{v}$  の  $S_1$  を表していることがわかります。

そこで、 $v \rightarrow 0$  の極限で  $y$  方向が decompactify してやると、全体として  $\mathbb{R}^{1,3}$  に広がった理論を得ることがわかります。

(質問) 図 2.7 で、どれが a-cycle でどれが b-cycle に当たりますか？

(回答)  $\tilde{x}$  方向が a-cycle で、 $\tilde{y}$  方向が b-cycle だと思います。

なぜこのようなことをしたかを説明します。さっき  $B_6$  の方向にこのトーラスが動いていると言いました。いわゆる type IIB superstring は perturbation の理論ですから、(2.11) 式の  $e^{-\phi}$  の部分の振る舞いはこの場合  $1/g_s$  であり、これがあまり大きくなってしまうと type IIB が本当に使っているものなのかよく分からなくなります。それを M-theory で考えれば、 $\tau_1$  や  $\tau_2$  を動かすというのは  $B_6$  の上で fiber されているものが動いているだけですから、そんなに無茶苦茶なことをしている訳ではなくなっています。したがってこのように定義されているところから出発して得られたと思えば、

さっき (2.9) で抽象的に書いた部分というのはわりとしっかり分るのではないかと思います。

(2.10) 式では  $\tau$  を constant にしていますが、これを  $B_6$  の coordinate に書いてしまえば、さっき  $T^2 \times B_6$  と書いていたものが単に直積ではなくて fiber されて  $X_8$  に上がります。したがってこれを  $B_6$  の coordinate に依存させてしまえば、直積から fiber されているものが得られますから、type IIB の方も同様にしたものだと思ってもらえればよいです。

## 第3章 Compactification of 11-dim SUGRA

F-theory はだいたいこんな感じですが、あまりにも言葉だけで面白くないかもしれないので、ちょっとテクニカルなことも使っていきます。

これから、11次元の SUGRA から始めて、それを 10次元の type IIA の SUGRA に  $S^1$ -コンパクト化して次元を落とすということをやっていきたいと思います。

SUGRA を使うにあたって、まず、notation を明確にしておきたいと思います。まず、Lorentzian metric

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & +1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

を用います。それから、SUGRA の notation は、Polchinski の本<sup>1</sup> の notation を用います。

### 3.1 11-dim SUGRA

出発点は 11次元の SUGRA です。11次元の SUGRA は

$$\begin{aligned} g_{MN} & : \text{metric} \\ A_{MNK} & : \text{3-form gauge field} \longleftrightarrow \text{membrane (2-brane)} \\ & \oplus \\ & (\text{gravitino}) \end{aligned} \quad (M, N, K = 0, 1, \dots, 10)$$

となります。ここでは、bosonic の自由度だけしか扱いませんので、gravitino は出てきません。今、11次元ですから、 $M, N, K$  は 0 から 10 までです。11次元 SUGRA には 3階反対称 tensor である 3-form gauge field  $A_{MNK}$  がありますから、これに couple できる membrane (2-brane) が理論に存在しそうだと分かります。

notation をまずは確認していきます。

$$A_3 = \frac{1}{3!} A_{MNK} dX^M \wedge dX^N \wedge dX^K \quad (3.2)$$

$$G_4 = dA_3 \quad (3.3)$$

$$= \frac{1}{4!} G_{MNKL} dX^M \wedge dX^N \wedge dX^K \wedge dX^L \quad (3.4)$$

<sup>1</sup>Polchinski textbook "String theory" Vol.2, Chap. 12.1

とします。gauge 場とその field strength の例を思い出すと

$$A = A_\mu dx^\mu \quad (3.5)$$

$$F = dA = \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} \underbrace{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)}_{F_{\mu\nu}} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (3.6)$$

となっているので、これらの足が多くなったバージョン、つまり  $A_3$  が gauge 場、 $G_4$  が field strength となります。

さて、理論の action の bosonic part は

$$S_M = \frac{1}{2\kappa_M^2} \int \left[ R_{11} \ast_{11} 1 - \frac{1}{2} G_4 \wedge \ast_{11} G_4 - \frac{1}{3!} A_3 \wedge G_4 \wedge G_4 \right] \quad (3.7)$$

です。ここで  $R_{11}$  というのは 11 次元の Ricci scalar です。これも人によって符号の notation が異なるので、一応明確にしておく

$$\Gamma_{MN}^K = \frac{1}{2} g^{KL} (-\partial_L g_{MN} + \partial_M g_{LN} + \partial_N g_{ML}) \quad (3.8)$$

$$R_{MN}{}^K{}_L = \partial_M \Gamma_{NL}^K + \Gamma_{MP}^K \Gamma_{NL}^P - (M \leftrightarrow N) \quad (3.9)$$

$$R_{MN} = R_{KM}{}^K{}_N \quad (3.10)$$

$$R_{11} = g^{MN} R_{MN} \quad (3.11)$$

という定義です。多くの人は  $R_{MN}{}^K{}_L$  を  $R^K{}_{LMN}$  と書く notation だと思えます。

D 次元での  $p$ -form の Hodge dual を考えますが、これも、念のため、その定義は、

$$\alpha_p = \frac{1}{p!} \alpha_{M_1 \dots M_p} dX^{M_1} \wedge \dots \wedge dX^{M_p} \quad (3.12)$$

$$\beta_p = \frac{1}{p!} \beta_{M_1 \dots M_p} dX^{M_1} \wedge \dots \wedge dX^{M_p} \quad (3.13)$$

に対し

$$\alpha_p \wedge \ast_D \beta_p = \langle \alpha_p, \beta_p \rangle \sqrt{-g} dX^0 \wedge dX^1 \wedge \dots \wedge dX^{D-1}, \quad (3.14)$$

$$\langle \alpha_p, \beta_p \rangle = \frac{1}{p!} g^{M_1 N_1} \dots g^{M_p N_p} \alpha_{M_1 \dots M_p} \beta_{N_1 \dots N_p} \quad (3.15)$$

です。

例として  $\alpha$  や  $\beta$  を、0-form で 1 にします：

$$\alpha = \beta = 1. \quad (3.16)$$

そうすると定義から

$$1 \wedge \ast_D 1 = \langle 1, 1 \rangle \sqrt{-g} dX^0 \wedge \dots \wedge dX^{D-1}. \quad (3.17)$$

左辺は単に 1 を掛けているだけですから  $\ast_D 1$  となり、 $\langle 1, 1 \rangle$  は 0-form なので 1 です。したがって

$$\ast_D 1 = \sqrt{-g} dX^0 \wedge dX^1 \wedge \dots \wedge dX^{D-1}. \quad (3.18)$$

さっきの action (3.7) の Ricci scalar がかかっていた部分に  $\int_D *1$  の  $D = 11$  というのがありました  
が、それは (3.18) 式の右辺となります。

念のために、積分の定義を確認しておくと、

$$\int dX^{M_1} \wedge \dots \wedge dX^{M_D} (\dots) = \int d^D X \epsilon^{M_1 \dots M_D} (\dots). \quad (3.19)$$

$\epsilon^{M_1 \dots M_D}$  は、 $\epsilon^{01 \dots D-1} = 1$  で  $M_1$  から  $M_D$  まで完全反対称です。これだけあれば、さっきの action  
を見慣れた形にできるのではないかと思います。

ここまですぐ 11 次元 SUGRA の action の説明ですが、今、これを  $S^1$  にコンパクト化して IIA の  
SUGRA にもっていきたいので、先にこれから目指すポイントである 10 次元 IIA を見ておきます。  
10 次元 IIA SUGRA では、登場する場が、NS-NS sector では、

$$\text{NS-NS sector} \left\{ \begin{array}{l} g_{IJ} \quad : \quad \text{metric} \\ \phi \quad : \quad \text{dilaton (real scalar)} \\ B_{IJ} \quad : \quad \text{B-field} \end{array} \right.$$

となり、ここで  $B_{IJ}$  はさっき書いた 2 階反対称 tensor である 2-form の gauge 場です。type IIA で  
も、type IIB でも、その中で NS-NS sector から出てくる場は同じです。ここで、 $B$  はわざと  $B_2$   
と書き

$$B_2 = \frac{1}{2} B_{IJ} dX^I \wedge dX^J \quad (3.20)$$

という書き方をします。それから

$$\text{R-R sector} \left\{ \begin{array}{l} C_1 = C_I dX^I \quad : \quad \text{1-form gauge field} \\ C_3 = \frac{1}{3!} C_{IJK} dX^I \wedge dX^J \wedge dX^K \quad : \quad \text{3-form gauge field} \\ (I, J, K = 0, 1, \dots, 9) \end{array} \right.$$

こちらは、いわゆる R-R sector です。10 次元ですから、 $I, J, K$  は 0 から 9 までです。これらの  
field strength は

$$H_3 \equiv dB_2 \quad (3.21)$$

$$F_2 \equiv dC_1 \quad (3.22)$$

$$F_4 \equiv dC_3 - C_1 \wedge H_3. \quad (3.23)$$

## 3.2 type IIA SUGRA

この理論の action の bosonic part、特に string frame と言われている frame における bosonic  
action は

$$S_A = \frac{1}{2\kappa_A^2} \int \left\{ e^{-2\phi} \left[ R_{10} \int_{10} *1 + 4 d\phi \wedge \int_{10} *d\phi - \frac{1}{2} H_3 \wedge \int_{10} *H_3 \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{2} F_2 \wedge \int_{10} *F_2 - \frac{1}{2} F_4 \wedge \int_{10} *F_4 - \frac{1}{2} B_2 \wedge dC_3 \right\} \quad (3.24)$$



となります。ストリングの worldsheet 上の理論をシグマモデルっていうのを使って、string の摂動論を考えると、 $\beta$ -function=0 っていう式からこの理論の運動方程式がでるのですが、その時に出てくる自然な場の変数を使うとこういう形で書けます。これが string frame です。この frame で特徴的なことは、action 中の scalar curvature  $R_{10}$  に  $e^{-2\phi}$  がかかっていることです。まあ、ストリングの摂動論から出てくる一番自然な変数の取り方をするとこういう形で書くことができるというふうに思ってください。string frame では、 $e^{-2\phi}$  の部分が  $1/g_s^2$  という形を取っています。

で、じつは我々が普段使っている action っていうのは、 $e^{-2\phi}$  が 1 の、普通の constant の奴ですね。そうすると、これは普通の Einstein-Hilbert action になってるので、ここが 1 のときの frame っていうのを Einstein frame と言います。で、これから、ちょっと Einstein frame に移りたいと思いますが、そのために、Weyl rescaling っていうことをする必要があります。ちょっとその公式を書こうかと思えます。Weyl rescaling は、 $D$  次元で、metric  $g_{\mu\nu}$  を

$$g_{\mu\nu} \rightarrow e^{2\sigma(x)} g_{\mu\nu} \quad (3.25)$$

のように変えたと思ってください。とすると、さっきから書いている Ricci scalar は

$$R_D \rightarrow e^{-2\sigma} [R_D - 2(D-1)\nabla^\mu \nabla_\mu \sigma - (D-1)(D-2)\nabla_\mu \sigma \nabla^\mu \sigma] \quad (3.26)$$

のように変わります。で、一方、metric の determinant でつくる volume 因子は、

$$\sqrt{-g_D} \rightarrow \sqrt{-g_D} \cdot e^{D\sigma(x)} \quad (3.27)$$

また、さっきの Hodge dual のときの定義で使った  $\wedge_D^*$  っていうのは、どうなるかっていうと、まず、

$$\langle \alpha_p, \beta_p \rangle = \frac{1}{p!} g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_p \nu_p} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p} \beta_{\nu_1 \dots \nu_p} \quad (3.28)$$

を変換すると

$$\langle \alpha_p, \beta_p \rangle \rightarrow e^{-2p\sigma} \langle \alpha_p, \beta_p \rangle \quad (3.29)$$

と移ります。ということは、

$$\alpha_p \wedge_D^* \beta_p \rightarrow e^{(D-2p)\sigma} \alpha_p \wedge_D^* \beta_p \quad (3.30)$$

こう変わります。というのをういますと、(3.24) 式の action はどう変わるかっていうと、

$$\begin{aligned} S_A \rightarrow \frac{1}{2\kappa_A^2} \int \left\{ e^{8\sigma-2\phi} \left[ R_{10} \wedge_D^* 1 - 2 \cdot 9 d_{10} \wedge_D^* d\sigma - 8 \cdot 9 d\sigma \wedge_D^* d\sigma \right. \right. \\ \left. \left. + 4d\phi \wedge_D^* d\phi - \frac{1}{2} e^{-4\sigma} H_3 \wedge_D^* H_3 \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{2} e^{6\sigma} F_2 \wedge_D^* F_2 - \frac{1}{2} e^{2\sigma} F_4 \wedge_D^* F_4 \right. \\ \left. - \frac{1}{2} B_2 \wedge dC_3 \wedge dC_3 \right\} \quad (3.31) \end{aligned}$$

こういう形に変わります。それで、Einstein frame だと  $e^{8\sigma-2\phi}$  を 1 にとるので、つまり、 $\sigma = 1/4\phi$  にとればいい訳です。これを実際に上の action に代入して、Einstein frame での action がかけま

す。それを  $I_A$  とかくと、

$$I_A \stackrel{\nabla}{=} \frac{1}{2\kappa_A^2} \int \left[ R_{10} \ast 1 - \frac{1}{2} d\phi \wedge \ast d\phi - \frac{1}{2} e^{-\phi} H_3 \wedge \ast H_3 \right. \\ \left. - \frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}\phi} F_2 \wedge \ast F_2 - \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}\phi} F_4 \wedge \ast F_4 \right. \\ \left. - \frac{1}{2} B_2 \wedge dC_3 \wedge dC_3 \right] \quad (3.32)$$

となります。 $\nabla$  は部分積分で成り立っているという意味です。

それでは、これから、さっきの 11 次元の SUGRA を  $S^1$  にコンパクト化して、この action を出そうと思います。

### 3.3 Dimensional reduction

どれぐらい皆さんに馴染みがあるかどうかよくわからないんですけど、11 次元から  $S^1$  にコンパクト化するっていうのを一応具体的にやっておきます。このやり方っていうのは dimensional reduction とも言います。そのために、さっきまで書いていた  $X^M$  というものがありますが、それを、

$$X^M : X^0, X^1, \dots, X^9, X^{10} = y \quad (3.33)$$

で、この  $X^{10}$  を  $y$  と呼びます。それで、

$$0 \leq y \leq 2\pi R, \quad y \sim y + 2\pi R \quad (3.34)$$

という同一視をします。そうすると、図 1.3 のようになっています。座標の呼び方がさっきと違っていますが、 $S^1$  方向が  $y$  でその他の  $X^1$  から  $X^9$  が広がっている感じです。さっきも言いましたけど、同じ massless particle でもぐるぐる回ってるのと回ってないのでは速さが違って見えます。両方とも massless なので、両方とも光の速さで走っているわけですが、(i) は massive に見えて、(ii) は massless に見えます。これを KK mode といって、これをもうちょっと式で書くと、場  $\Phi$  が何かあって、

$$\Phi(X^0, X^1, \dots, X^9, X^{10} = y) \quad (3.35)$$

に対して、

$$y \sim y + 2\pi R \quad (3.36)$$

こういう identification をしている訳なので、フーリエ展開を考えると、momentum  $k$  があって、

$$e^{iky} = e^{ik(y+2\pi R)} \\ k = \frac{n}{R}, \quad (n \in \mathbf{Z}) \quad (3.37)$$

なる運動量を持つ  $e^{iky}$  で  $\Phi$  が展開できて

$$\Phi(X^1, X^2, \dots, X^9, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n(X^0, X^1, \dots, X^9, y) e^{i\frac{n}{R}y} \quad (3.38)$$

こういう風になります。ここで、たとえば、こういう運動方程式を考えます。

$$\sum_{M=0}^{10} \frac{\partial}{\partial X^M} \frac{\partial}{\partial X^M} \Phi = \left[ \sum_{I=0}^9 \frac{\partial}{\partial X^I} \frac{\partial}{\partial X^I} + \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right] \Phi \quad (3.39)$$

これは広がってる方向と  $y$  方向とを、このように分けることができますから、これにさっきのフーリエ展開 (3.38) を代入してあげると、

$$\sum_{M=0}^{10} \frac{\partial}{\partial X^M} \frac{\partial}{\partial X^M} \Phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{I=0}^9 \frac{\partial}{\partial X^I} \frac{\partial}{\partial X^I} - \left( \frac{n}{R} \right)^2 \right] \Phi_n(X^0, X^1, \dots, X^9) e^{i \frac{n}{R} y} \quad (3.40)$$

のようになるので、 $\Phi_n$  をそれぞれ 1 個 1 個が粒子だと思えば、 $\left( \frac{n}{R} \right)^2$  が 1 次元低い 10 次元での質量項に見えます。よって、 $\Phi_n$  は  $X^{0,1,\dots,9}$  の広がった 10 次元から見ると、 $|n|/R$  の質量を持つ粒子のように見えます。

いま effective action を考えたいので massless の部分しか要りません。そうすると結局、 $n = 0$  を持つ場  $\Phi_0$  だけを残したいということなので、 $\Phi$  の展開の中で、 $n \neq 0$  の場を忘れて、

$$\Phi(X^0, X^1, \dots, X^9, y) = \Phi_0(X^0, X^1, \dots, X^9) \quad (3.41)$$

とすれば良いということです。これが言ってることは、単に  $y$  の argument を落とせばいいということです。つまり、

$$\Phi = \Phi(X^0, X^1, \dots, X^9, y) \quad (3.42)$$

で、この操作を、dimensional reduction といいます。

### 3.4 Dimensional reduction of metric

で、これを、さっきの 11 次元 SUGRA に、という話をやってみます。それで、まず、metric を dimensional reduction したいので、metric を考えます。metric っていうのは、いま、 $y$  をばしやつと落としただけですが、それはこの  $\Phi$  っていうのがスカラー場で足を持ってないので、これだけで済んだのですが、metric は  $y$  方向にも足を持っているので、そのことをちよつと考える必要があります。

で、ちよつと一般にやった方が見通しがたちやすいので、 $(D+1)$  次元でやります。metric をこう書きます。

$$\begin{aligned} ds_{D+1}^2 &= \sum_{I,J=0}^D G_{IJ} dX^I dX^J \\ &= \sum_{\mu,\nu=0}^{D-1} G_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + G_{DD} dy dy + 2 \sum_{\mu=0}^{D-1} G_{D\mu} dy dx^\mu \end{aligned} \quad (3.43)$$

ここでは、

$$\begin{cases} X^{I=\mu} = x^\mu \\ X^{I=D} = y \end{cases} \quad (\mu = 0, 1, \dots, D-1) \quad (3.44)$$

ととってあります。summation の記号がうるさいので、Einstein の規約に従うことにして、summation の記号を書くのをやめます。そこで、(3.43) 式の下線部を平方完成すると、

$$\begin{aligned}
&= G_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + G_{DD} \left( dy + \frac{G_{DM}}{G_{DD}}dx^\mu \right)^2 - \frac{G_{D\mu}G_{D\nu}}{G_{DD}}dx^\mu dx^\nu \\
&= \underbrace{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}_{(i)} + \underbrace{G_{DD}\left(dy + \frac{G_{DM}}{G_{DD}}dx^\mu\right)^2}_{(ii)} \\
g_{\mu\nu} &\equiv G_{\mu\nu} - \frac{G_{\mu D}G_{\nu D}}{G_{DD}}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

となります。まず言えることっていうのは、metric は spacelike な slice に対しては正定値なので、 $G_{DD}$  っていうのは正です。したがって、(3.45) 式の下線部 (ii) は正です。また、この残りの (3.45) 式の下線部 (i) にある  $g_{\mu\nu}$  も計量に見なせます。

(質問) その残りの部分も計量になるっていうのはどういうことを言ってるのですか。

(回答) (3.45) 式の下線部 (ii) の方向にゼロになるような部分空間が取れますよね。そしたら (3.45) 式の下線部 (i) は計量です。

そこで、

$$\begin{cases} G_{DD} = e^{-2\gamma}, \\ \frac{G_{D\mu}}{G_{DD}} = -a_\mu, \end{cases} \tag{3.46}$$

とおくと、

$$ds_{D+1}^2 = ds_D^2 + e^{-2\gamma}(dy - a_1)^2, \tag{3.47}$$

$$\begin{cases} ds_D^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \\ a_1 = a_\mu dx^\mu, \end{cases} \tag{3.48}$$

とできます。さっきの質問に関係するかも知れませんが、ここまでは何もしていなくて書き方を変えただけで、(3.45) 式を単にこういう風にみなせば後で便利だということを言ってるだけです。そして、そうすると、上式のようにできるので、結局、もとの書き方で見ると、

$$\begin{cases} G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + e^{-2\gamma}a_\mu a_\nu \\ G_{D\mu} = G_{\mu D} = -e^{-2\gamma}a_\mu \\ G_{DD} = e^{-2\gamma} \end{cases} \tag{3.49}$$

のようになります。

とりあえず、ここで止めます。これから後で Ricci scalar とか計算して、さっきの 11 次元 SUGRA から 10 次元の type IIA に行くところを説明したいと思いますが、それでは、ここで止めたいと思います。

～ 午前の部 終了 ～

## 第II部

### 午後の部

### 3.5 Dimensional reduction of Ricci scalar

結局、午前中この辺まで書いたと思うんですが、

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} + e^{-2\gamma} a_\mu a_\nu \\ G_{D\mu} &= -e^{-2\gamma} a_\mu \\ G_{DD} &= e^{-2\gamma} \end{aligned} \quad (3.50)$$

こういうふうに、metric を書き直してやると逆行列は、

$$G^{IJ} = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -a^\mu \\ -a^\nu & e^{2\gamma} + g^{\rho\sigma} a_\rho a_\sigma \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

です。ここで足を上げていますが、

$$a^\nu \equiv g^{\nu\rho} a_\rho \quad (3.52)$$

こう足を上げています。こうとると、元の metric の逆になるはずですが、具体的に確かめていただければ良いかと思いますが、

そのときに、 $(D+1)$ 次元の Ricci scalar は、

$$R_{D+1} = R_D - \frac{1}{4} e^{-2\gamma} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - 2e^\gamma \nabla^\mu \nabla_\mu e^{-\gamma} \quad (3.53)$$

です。ここで  $f_{\mu\nu}$  は  $a_\mu$  から作られる field strength で、

$$da_1 = f_2 = \frac{1}{2} f_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (3.54)$$

です。あとは

$$\sqrt{-G_{D+1}} = \sqrt{-g_D} e^{-\gamma} \quad (3.55)$$

を用いると 11 次元 SUGRA の Einstein-Hilbert 項は、実際にこの公式を使って計算してやれば、

$$R_{11} \underset{11}{*} 1 \stackrel{\nabla}{=} e^{-\gamma} \left[ R_{10} \underset{10}{*} 1 - \frac{1}{2} e^{-2\gamma} f_2 \wedge \underset{10}{*} f_2 \right] \quad (3.56)$$

となることがわかります。この (3.53) 式が、多分一番面倒くさい計算です。

### 3.6 Dimensional reduction of $p$ -form

そして、今度は、 $p$ -form に関する dimensional reduction をする必要があります。 $(D+1)$ 次元で考えて vielbein  $E^A_I$  ( $I = 0, \dots, D$ ;  $A = 0, \dots, D$ ) というものを用いると metric は

$$G_{IJ} = \sum_{A,B=0}^D \eta_{AB} E^A_I E^B_J \quad (3.57)$$

という形をしています。ここに書いてある  $\eta_{AB}$  は、行列で書くと普通の Lorentzian の計量で

$$\eta_{AB} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & +1 \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

です。念のために言っておくと、

$$G^{IJ} E^A{}_I E^B{}_J = \eta^{AB} \quad (3.59)$$

と書くことも出来ます。すると、さっきの計量のところを書き換えて

$$ds_{D+1}^2 = \eta_{AB} E^A E^B \quad (3.60)$$

とできます。ただし

$$E^A = E^A{}_J dX^J \quad (3.61)$$

です。

いま  $(D+1)$  次元の vielbein を導入しましたが、 $D$  次元の vielbein  $e^a{}_\mu$  ( $\mu = 0, \dots, D-1$ ;  $a = 0, \dots, D-1$ ) を導入して、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu \quad (3.62)$$

とすると、

$$ds_{D+1}^2 = ds_D^2 + e^{-2\gamma} (dy - a_1)^2 \quad (3.63)$$

だったので、ここから、

$$\begin{aligned} E^{A=a} &= E^a{}_J dX^J = e^a{}_\mu dx^\mu \\ E^D &= E^D{}_J dX^J = e^{-\gamma} (dy - a_1) \end{aligned} \quad (3.64)$$

と読み取れます。これを component で書けば、

$$\begin{aligned} E^a{}_\mu &= e^a{}_\mu \\ E^a{}_D &= 0 \\ E^D{}_\mu &= -e^{-\gamma} a_\mu \\ E^D{}_D &= e^{-\gamma} \end{aligned} \quad (3.65)$$

というふうになります。で、vielbein  $E^A{}_J$  の逆を

$$(E^{-1})^I{}_A E^A{}_J = \delta^I{}_J \quad (3.66)$$

と定義すると、

$$(E^{-1})^I{}_A (E^{-1})^J{}_B \eta^{AB} = G^{IJ} \quad (3.67)$$

とできて、

$$\begin{aligned} (E^{-1})^\mu{}_D &= 0 \\ (E^{-1})^D{}_D &= e^\gamma \\ (E^{-1})^\mu{}_a &= (e^{-1})^\mu{}_a \\ (E^{-1})^D{}_a &= (e^{-1})^\mu{}_a a_{\mu} \end{aligned} \quad (3.68)$$

となっていることがわかります。これも行列 (3.65) と積をとって逆行列であると確かめることができます。

これより、 $p$ -form  $F_p$  に対して、

$$\begin{aligned} F_p &= \frac{1}{p!} F_{J_1 \dots J_p} dX^{J_1} \wedge \dots \wedge dX^{J_p} \\ &= \frac{1}{p!} F_{A_1 \dots A_p} E^{A_1} \wedge \dots \wedge E^{A_p} \end{aligned} \quad (3.69)$$

とできます。ただし

$$F_{A_1 \dots A_p} = (E^{-1})^{J_1}_{A_1} \dots (E^{-1})^{J_p}_{A_p} F_{J_1 \dots J_p} \quad (3.70)$$

です。このとき、午前中にやった内積 (3.16) を使ってやりますと、定義から二つの  $p$ -form  $F_p$ 、 $G_p$  に対して

$$\langle F_p, G_p \rangle = \frac{1}{p!} G^{I_1 J_1} \dots G^{I_p J_p} F_{I_1 \dots I_p} G_{J_1 \dots J_p} \quad (3.71)$$

ですが、 $I$ 、 $J$  の足を  $A$ 、 $B$  の足の方に書き直してやります：

$$\langle F_p, G_p \rangle = \frac{1}{p!} \eta^{A_1 B_1} \dots \eta^{A_p B_p} F_{A_1 \dots A_p} G_{B_1 \dots B_p}. \quad (3.72)$$

$A$ 、 $B$  の足は  $0$  から  $D$  まで走っていますから、いろんな足の走り方がありますけれど、足が  $D$  をとる場合ととらない場合にわけて書くことができます：

$$\begin{aligned} \langle F_p, G_p \rangle &= \frac{1}{p!} \eta^{a_1 b_1} \dots \eta^{a_p b_p} F_{a_1 \dots a_p} G_{b_1 \dots b_p} \\ &\quad + \frac{1}{(p-1)!} \eta^{a_1 b_1} \dots \eta^{a_{(p-1)} b_{(p-1)}} \eta^{DD} F_{a_1 \dots a_{(p-1)} D} G_{b_1 \dots b_{(p-1)} D}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

$p$  個の足のうち一つが  $D$  をとるものは  $p$  個あるので  $p$  倍が出てきて、係数は  $1/(p-1)!$  になっています。ちょっとややこしいんですけど、これを書き直してやります。第二項に着目します。もちろん  $\eta^{DD} = 1$  です：

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(p-1)!} \eta^{a_1 b_1} \dots \eta^{a_{(p-1)} b_{(p-1)}} \eta^{DD} F_{a_1 \dots a_{(p-1)} D} G_{b_1 \dots b_{(p-1)} D} \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \eta^{a_1 b_1} \dots \eta^{a_{(p-1)} b_{(p-1)}} F_{a_1 \dots a_{(p-1)} D} G_{b_1 \dots b_{(p-1)} D} \end{aligned} \quad (3.74)$$

すでに  $D$  の足をもっていますから、二度手間のようなのですが小さい  $a$ 、 $b$  を大きい  $A$ 、 $B$  にもう一回元に戻します。というのも足は完全反対称なので、一旦ひとつ足を  $D$  と固定してしまうと、小さい足  $a$ 、 $b$  でも大きい足  $A$ 、 $B$  でも同じになります：

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(p-1)!} \eta^{A_1 B_1} \dots \eta^{A_{(p-1)} B_{(p-1)}} F_{A_1 \dots A_{(p-1)} A_p=D} G_{B_1 \dots B_{(p-1)} B_p=D} \\ &= \frac{1}{(p-1)!} G^{I_1 J_1} \dots G^{I_{(p-1)} J_{(p-1)}} F_{I_1 \dots I_{(p-1)} A_p=D} G_{J_1 \dots J_{(p-1)} B_p=D} \end{aligned} \quad (3.75)$$

これを書き直します。ここで  $(E^{-1})^\mu_D = 0$ 、 $(E^{-1})^D_D = e^\gamma$  により

$$\begin{aligned} F_{I_1 \dots I_{(p-1)} A_p=D} &= (E^{-1})^{I_p}_{A_p=D} F_{I_1 \dots I_{(p-1)} I_p} \\ &= (E^{-1})^D_D F_{I_1 \dots I_{(p-1)} I_p=D} \\ &= e^\gamma F_{I_1 \dots I_{(p-1)} I_p=D} \end{aligned} \quad (3.76)$$



です。\$G\$ についても同じです。だから

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(p-1)!} G^{I_1 J_1} \dots G^{I_{(p-1)} J_{(p-1)}} F_{I_1 \dots I_{(p-1)} A_p = D} G_{J_1 \dots J_{(p-1)} B_p = D} \\ &= \frac{1}{(p-1)!} e^{2\gamma} G^{I_1 J_1} \dots G^{I_{(p-1)} J_{(p-1)}} F_{I_1 \dots I_{(p-1)} I_p = D} G_{J_1 \dots J_{(p-1)} J_p = D} \end{aligned} \quad (3.77)$$

と書き換えられます。

\$I\_p, J\_p\$ が \$D\$ というのは確定しましたから、今度は、\$I\_1, \dots, I\_{p-1}, J\_1, \dots, J\_{p-1}\$ の足は \$D\$ という足を取れないので、\$\mu, \nu\$ に置き換えることができます。

$$= \frac{1}{(p-1)!} e^{2\gamma} G^{\mu_1 \nu_1} \dots G^{\mu_{(p-1)} \nu_{(p-1)}} F_{\mu_1 \dots \mu_{(p-1)} I_p = D} G_{\nu_1 \dots \nu_{(p-1)} J_p = D} \quad (3.78)$$

そこで、\$G\$ の逆行列の式 (3.51) を見れば分かってもらえると思いますが、大きい \$G\$ の上付き \$G^{\mu\nu}\$ はそのまま \$g^{\mu\nu}\$ に書き直せますから、

$$= \frac{1}{(p-1)!} e^{2\gamma} g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_{p-1} \nu_{p-1}} F_{\mu_1 \dots \mu_{p-1} I_p = D} G_{\nu_1 \dots \nu_{p-1} J_p = D} \quad (3.79)$$

とできます。

いいでしょうか。それで、今、(3.73) 式の第二項の部分を見ましたけど、次に、第一項の方も見ます。第一項の方もややこしいんですけど、いきなり全部考えずに、ちょっと \$\eta\$ を 1 個だけにして、

$$\eta^{a_p b_p} F_{a_1 \dots a_p} G_{b_1 \dots b_p} \quad (3.80)$$

を考えます。さっきの vielbein (3.65) を使うと

$$\eta^{a_p b_p} = E^{a_p}_{I_p} E^{b_p}_{I_p} G^{I_p J_p} = E^{a_p}_{\mu_p} E^{b_p}_{\nu_p} g^{\mu_p \nu_p} \quad (3.81)$$

ということが分かります。vielbein は \$D\$ の足を走らないため、そのまま 2 番目の等式が成り立ちます。それをしますと、(3.80) は

$$(3.80) = g^{\mu_p \nu_p} E^{a_p}_{\mu_p} F_{a_1 \dots a_{p-1} a_p} E^{b_p}_{\nu_p} G_{b_1 \dots b_{p-1} b_p} \quad (3.82)$$

に直せます。それで (3.82) 式の \$E^{a\_p}\_{\mu\_p} F\_{a\_1 \dots a\_{p-1} a\_p}\$ の部分を見ますと、またややこしいかもしれませんが、小さい \$a\_p\$ を大きい \$A\_p\$ と書いて \$A\_p = D\$ の項だけ抜いてやりやりますと、

$$\begin{aligned} E^{a_p}_{\mu_p} F_{a_1 \dots a_{p-1} a_p} &= E^{A_p}_{\mu_p} F_{a_1 \dots a_{p-1} A_p} - E^D_{\mu_p} F_{a_1 \dots a_{p-1} A_p = D} \\ &= F_{a_1 \dots a_{p-1} \mu_p} - e^{-\gamma} F_{a_1 \dots a_{p-1} D} a_{\mu_p} \end{aligned} \quad (3.83)$$

というふう書き直せます。ちょっとごちゃごちゃしていてすみませんが、(3.82) 式はどのような式になるかと言いますと、

$$\begin{aligned} (3.82) &= g^{\mu_p \nu_p} (F_{a_1 \dots a_{p-1} \mu_p} - e^{-\gamma} F_{a_1 \dots a_{p-1} D} a_{\mu_p}) \\ &\quad \times (G_{b_1 \dots b_{p-1} \nu_p} - e^{-\gamma} G_{b_1 \dots b_{p-1} D} a_{\nu_p}) \end{aligned} \quad (3.84)$$

となります。

それで、今、(3.80)-(3.84) でやった操作は、\$\eta\$ を計量 \$g\$ に変えて、\$a\_p, b\_p\$ の縮約を \$\mu\_p, \nu\_p\$ の縮約に置き換えるという操作でした。これをすべての足について繰り返す必要があります。もう一

回デモンストレーションした方が分かりやすいかもしれないので、もう一回だけデモンストレーションします。

今やった事をもう一度繰り返します。元々

$$\eta^{a_{p-1}b_{p-1}}\eta^{a_p b_p} F_{a_1 \dots a_p} G_{b_1 \dots b_p} = \eta^{a_{p-1}b_{p-1}} g^{\mu_p \nu_p} \tilde{F}_{a_1 \dots a_{p-1} \mu_p} \tilde{G}_{b_1 \dots b_{p-1} \nu_p} \quad (3.85)$$

という形をしていました。もちろん、この右辺の  $F$  の部分は、

$$\tilde{F}_{a_1 \dots a_{p-1} \mu_p} = F_{a_1 \dots a_{p-1} \mu_p} - e^{-\gamma} F_{a_1 \dots a_{p-1} A_p = D} a_{\mu_p} \quad (3.86)$$

というやつに書き換えられます。右辺の  $G$  についても同様です。それで、とりあえず、足  $(\mu_p, \nu_p)$  についてはもう忘れて、この  $\eta \tilde{F} \tilde{G}$  というコンビネーションを考えます。そうすると、これはさっき考えた (3.84) 式と全く同じように、 $a_{p-1}$  と  $b_{p-1}$  の足についてだけ考えればいいです。結局、 $\eta \tilde{F} \tilde{G}$  のコンビネーションの時には

$$\eta^{a_{p-1}b_{p-1}} \rightarrow g^{\mu_{p-1} \nu_{p-1}} \quad (3.87)$$

$$\tilde{F}_{a_1 \dots a_{p-1} \mu_p} \rightarrow \tilde{F}_{a_1 \dots a_{p-2} \mu_{p-1} \mu_p} - e^{-\gamma} \tilde{F}_{a_1 \dots a_{p-2} D \mu_p} a_{\mu_{p-1}} \quad (3.88)$$

というルールで置き換えなさいというのが、さっき (3.80)-(3.84) でやった事です。今、 $\tilde{F}$  と  $\tilde{G}$  と二つあったので、(3.88) 式は、 $\tilde{F}$  と  $\tilde{G}$  に対して、それぞれやりなさいということです。そうすると、 $\tilde{F}$  というものは (3.86) 式でしたから、それを  $G$  の方も合わせて顕わに書くと

$$\begin{aligned} (3.85) &= g^{\mu_{p-1} \nu_{p-1}} g^{\mu_p \nu_p} [F_{a_1 \dots a_{p-2} \mu_{p-1} \mu_p} - e^{-\gamma} F_{a_1 \dots a_{p-2} D \mu_p} a_{\mu_{p-1}} \\ &\quad + e^{-\gamma} (\tilde{F}_{a_1 \dots a_{p-2} D \mu_p} - \underbrace{e^{-\gamma} F_{a_1 \dots a_{p-2} D D a_{\mu_p}}}_{=0}) a_{\mu_{p-1}}] \\ &\quad \times [G_{b_1 \dots b_{p-2} \nu_{p-1} \nu_p} - e^{-\gamma} G_{b_1 \dots b_{p-2} D \nu_p} a_{\nu_{p-1}} \\ &\quad + e^{-\gamma} (G_{b_1 \dots b_{p-2} D \nu_p} - \underbrace{e^{-\gamma} G_{b_1 \dots b_{p-2} D D a_{\nu_p}}}_{=0}) a_{\nu_{p-1}}] \end{aligned} \quad (3.89)$$

となっています。  $F$  と  $G$  は完全反対称ですので、 $F$  と  $G$  において  $D$  の足を 2 つ持つものは落ちます。

大分気が減入ってくるかもしれないんですが、(3.73) 式の第一項目はもっと足があるので同じ事をダツと繰り返します。同じ事をダツと繰り返すんですが、よくよく考えてみるとですね、元々あった  $a, b$  の足を  $\mu, \nu$  にワンステップずつ変えて行って、各ステップごとに  $D$  の足を持つところに対応して  $a_{\mu}$  っていうやつに置き換えて、指数  $e^{-\gamma}$  を掛けなさいっていう操作をしているに過ぎません。だから、このルールを悟ったので、すぐさま計算できて、これを全部バアンってやってやれば、

$$\begin{aligned} &\eta^{a_1 b_1} \dots \eta^{a_p b_p} F_{a_1 \dots a_p} G_{b_1 \dots b_p} \\ &= g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_p \nu_p} (F_{\mu_1 \dots \mu_p} + e^{-\gamma} \sum_{k=1}^p F_{\mu_1 \dots \mu_{k-1} D \mu_{k+1} \dots \mu_p} a_{\mu_k}) \\ &\quad \times (G_{\nu_1 \dots \nu_p} + e^{-\gamma} \sum_{k=1}^p G_{\nu_1 \dots \nu_{k-1} D \nu_{k+1} \dots \nu_p} a_{\nu_k}) \end{aligned} \quad (3.90)$$

になります。

慣れている人はたぶんもうこれスパッと分かるかと思うんですが、慣れてない人はちょっとややこしく思うかもしれません。今書いた

$$\sum_{k=1}^p F_{\mu_1 \cdots \mu_{k-1} A_k = D \mu_{k+1} \cdots \mu_p} a_{\mu_k} \quad (3.91)$$

をちょっと書き直してやります。 $k$  番目に  $D$  があるのがちょっとややこしいのでガツと一番後ろに持って行きます。そうすると、これ自体は間に  $(p-k)$  ケ足があるので、その分だけ符号が出てきます。さらに、vielbein を使って、因子  $e^\gamma$  をつけて  $F$  の最後の足  $D$  を  $A_k$  ではなくて  $I_k = D$  に置き換えます。すると、

$$\begin{aligned} F_{\mu_1 \cdots \mu_{k-1} A_k = D \underbrace{\mu_{k+1} \cdots \mu_p}_{(p-k) \text{ ケ}} a_{\mu_k} &= (-1)^{p-k} F_{\mu_1 \cdots \mu_{k-1} \mu_{k+1} \cdots \mu_p A_k = D} a_{\mu_k} \\ &= (-1)^{p-k} e^\gamma F_{\mu_1 \cdots \mu_{k-1} \mu_{k+1} \cdots \mu_p I_k = D} a_{\mu_k} \end{aligned} \quad (3.92)$$

のように書き換わります。これを使って、(3.91) の  $F$  の足の並び替えをよく考えてみると、

$$(3.91) = e^\gamma \sum_{k=1}^p (-1)^{(p-k)} a_{\mu_k} F_{\mu_{k+1} \cdots \mu_p \mu_1 \cdots \mu_{k-1} I_k = D} \quad (3.93)$$

となります。 $F$  の足をガツと並び替えたので余分な因子  $(-1)^{(p-k)}$  がガチャッと付きます。結局、 $a_{\mu_k}$  と  $F$  の足を完全反対称化していることを意味するので、

$$= e^\gamma F_{[\mu_1 \cdots \mu_{p-1} a_{\mu_p}]} \quad (3.94)$$

ここで、 $D$  というのがいつも邪魔なので、添字を、こういう風に省略して書いています。

$$F_{\mu_1 \cdots \mu_{p-1}} \equiv F_{\mu_1 \cdots \mu_{p-1} I_p = D} \quad (3.95)$$

この手の話に慣れていない人で、この完全反対称化しているということが見えていないかもしれないので、もうちょっと言っておきますと、逆に、

$$F_{[\mu_1 \cdots \mu_{p-1} a_{\mu_p}]} \quad (3.96)$$

を考えると、とにかくまず初っ端 (第1項目) は、

$$F_{\mu_1 \cdots \mu_{p-1} a_{\mu_p}} \quad (3.97)$$

です。

完全反対称化をするということは、この人達の足が  $a_\mu$  の  $\mu$  に一回ずつ必ず入ったものを符号付きで足し上げることになりましたが、各項がどういう符号で来るかを考えます。やってみるとわかると思いますが、例えば  $\mu_p$  の足を一番左に持っていくとすると、間に  $F$  の足が  $(p-1)$  個あるので、

$$(-)^{p-1} F_{\mu_p \mu_1 \cdots \mu_{p-2} a_{\mu_{p-1}}} \quad (3.98)$$

という項ができます。このように繰り返していくと、

$$F_{[\mu_1 \dots \mu_{p-1} a_{\mu_p}]} = F_{\mu_1 \dots \mu_{p-1} a_{\mu_p}} + (-)^{p-1} F_{\mu_p \mu_1 \dots \mu_{p-2} a_{\mu_{p-1}}} \\ + (-)^{2(p-1)} F_{\mu_{p-1} \mu_p \mu_1 \dots \mu_{p-3} a_{\mu_{p-2}}} + \dots \quad (3.99)$$

となります。右辺は  $p$  項あり、このように足しあげれば完全反対称になります。このことを (3.94) に変形する時に使っています。

このことに気付くと、

$$\eta^{a_1 b_1} \dots \eta^{a_p b_p} F_{a_1 \dots a_p} G_{b_1 \dots b_p} \\ = g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_p \nu_p} (F_{\mu_1 \dots \mu_p} + e^{-\gamma} \sum_{k=1}^p F_{\mu_1 \dots D \dots \mu_p} a_{\mu_k}) \times \dots \quad (3.100)$$

の  $e^{-\gamma} \sum_{k=1}^p F_{\mu_1 \dots D \dots \mu_p} a_{\mu_k}$  部分が

$$e^{-\gamma} \sum_{k=1}^p F_{\mu_1 \dots D \dots \mu_p} a_{\mu_k} = F_{[\mu_1 \dots \mu_{p-1} a_{\mu_p}]} \quad (3.101)$$

と書けます。  $G$  の方も全く同じです。結局、このように書き換えられます：

$$\eta^{a_1 b_1} \dots \eta^{a_p b_p} F_{a_1 \dots a_p} G_{b_1 \dots b_p} \\ = g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_p \nu_p} (F_{\mu_1 \dots \mu_p} + F_{[\mu_1 \dots \mu_{p-1} a_{\mu_p}]}) \times (G_{\nu_1 \dots \nu_p} + G_{[\nu_1 \dots \nu_{p-1} a_{\nu_p}]}) \quad (3.102)$$

だから、ここまでものすごい時間がかかりましたが、何をやったかというのを思い出しますと、  $\langle F_p, G_p \rangle$  というのを計算していたわけですが、こいつは結局のところ、

$$\langle F_p, G_p \rangle \\ = \frac{1}{p!} g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_p \nu_p} (F_{\mu_1 \dots \mu_p} + F_{[\mu_1 \dots \mu_{p-1} a_{\mu_p}]}) (G_{\nu_1 \dots \nu_p} + G_{[\nu_1 \dots \nu_{p-1} a_{\nu_p}]}) \\ + \frac{1}{(p-1)!} g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_{p-1} \nu_{p-1}} e^{2\gamma} F_{\mu_1 \dots \mu_{p-1}} G_{\nu_1 \dots \nu_{p-1}} \quad (3.103)$$

こういう風に見えることが分かります。ここで、form の形式で書いて、

$$F_{p-1} = \frac{1}{(p-1)!} F_{\mu_1 \dots \mu_{p-1}} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{p-1}}, \\ a_1 = a_\mu dx^\mu, \quad (3.104)$$

とすると、

$$F_{p-1} \wedge a_1 = \frac{1}{p!} F_{[\mu_1 \dots \mu_{p-1} a_{\mu_p}]} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (3.105)$$

とできるので、  $\sqrt{-G_{D+1}}$  からくる  $e^{-\gamma}$  の因子も考えると、結局、  $F_p \wedge_{D+1}^* G_p$  と書いていたやつは、

$$F_p \wedge_{D+1}^* G_p \\ = \left[ e^{-\gamma} (F_p + F_{p-1} \wedge a_1) \wedge_D^* (G_p + G_{p-1} \wedge a_1) \right. \\ \left. + e^\gamma F_{p-1} \wedge_D^* G_{p-1} \right] \wedge dy \quad (3.106)$$

となります。ここで、実は左辺の  $F_p$  というのと右辺の  $F_p, G_p$  というのは意味が違います。本当は文字をかえた方がいいのですが、右辺の  $G_p$  は

$$G_p = \frac{1}{p!} G_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (3.107)$$

というつもりで書いています。右辺の  $F_p$  もそうです。なのでこっちはもう完全に D 次元の表式です。

いいですかね、ごちゃごちゃ言ったのでまとめます。まとめると、 $F_p$  というのは一番最初は、

$$F_p = \frac{1}{p!} F_{I_1 \dots I_p} dX^{I_1} \wedge \dots \wedge dX^{I_p} \quad (3.108)$$

と書いていましたが、それをわざと

$$\begin{aligned} F_p &= \frac{1}{p!} F_{I_1 \dots I_p} dX^{I_1} \wedge \dots \wedge dX^{I_p} \\ &= \frac{1}{p!} F_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \\ &\quad + \frac{1}{(p-1)!} F_{\mu_1 \dots \mu_{p-1} D} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{p-1}} \wedge dy \end{aligned} \quad (3.109)$$

と書いといてやります。これを、少し notation がわるいですが、改めて

$$F_p \equiv \frac{1}{p!} F_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (3.110)$$

$$F_{p-1} \equiv \frac{1}{(p-1)!} F_{\mu_1 \dots \mu_{p-1} D} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{p-1}} \quad (3.111)$$

と書きます。すると、 $F_p$  というのは

$$F_p = F_p + F_{p-1} \wedge dy \quad (3.112)$$

と書けているわけですが、これを

$$\begin{aligned} F_p &= F_p + F_{p-1} \wedge dy \\ &= (F_p + F_{p-1} \wedge a_1) + F_{p-1} \wedge (dy - a_1) \end{aligned} \quad (3.113)$$

としたとき、

$$\begin{aligned} F_p \wedge_{D+1}^* F_p &= \left[ e^{-\gamma} (F_p + F_{p-1} \wedge a_1) \wedge_D^* (F_p + F_{p-1} \wedge a_1) \right. \\ &\quad \left. + e^{\gamma} F_{p-1} \wedge_D^* F_{p-1} \right] \wedge dy \end{aligned} \quad (3.114)$$

となります。

### 3.7 Dimensional reduction of 11-dim SUGRA

時間がかかりましたが、これを 11 次元の SUGRA に適用します。午前中の授業でやったように、3-form の gauge 場がいて、この人は足が、

$$A_3 = \frac{1}{3!} A_{MNK} dX^M \wedge dX^N \wedge dX^K \quad (3.115)$$

と走っていたわけですが、午前中の notation を使うと

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{1}{3!} A_{MNK} dX^M \wedge dX^N \wedge dX^K \\ &= \frac{1}{3!} A_{IJK} dX^I \wedge dX^J \wedge dX^K + \frac{1}{2!} A_{IJD=10} dX^I \wedge dX^J \wedge dy \end{aligned} \quad (3.116)$$

となります。この右辺の  $I, J, K$  は、10 次元の足です。ここで、右辺の  $A$  を含んだまとまりを

$$\frac{1}{3!} A_{IJK} dX^I \wedge dX^J \wedge dX^K = C_3 \quad (3.117)$$

$$\frac{1}{2!} A_{IJD=10} dX^I \wedge dX^J = B_2 \quad (3.118)$$

のように  $C_3, B_2$  と呼びます。そうすると

$$A_3 = C_3 + B_2 \wedge dy \quad (3.119)$$

となっています。いつものように、右辺の  $C_3, B_2$  は 10 次元にしか依ってなくて、 $dy$  が 11 次元に比例した部分です。これに対して、field strength  $G_4$  というやつを  $A_3$  で

$$G_4 = dA_3 \quad (3.120)$$

と定義していましたから、さっきのルールに従うと

$$\begin{aligned} G_4 &= dA_3 \\ &= dC_3 + dB_2 \wedge dy \\ &= (dC_3 + dB_2 \wedge a_1) + dB_2 \wedge (dy - a_1) \end{aligned} \quad (3.121)$$

と書き直せます。さらに

$$F_4 \equiv dC_3 + dB_2 \wedge a_1 \quad (3.122)$$

$$H_3 \equiv dB_2 \quad (3.123)$$

とすると、午前中に書いた action の中に

$$\frac{1}{2} G_4 \wedge *_{11} G_4 \quad (3.124)$$

という部分がありましたが、それが先ほどの式を使うと、

$$\frac{1}{2} G_4 \wedge *_{11} G_4 = \frac{1}{2} e^{-\gamma} F_4 \wedge *_{10} F_4 + \frac{1}{2} e^{\gamma} H_3 \wedge *_{10} H_3 \quad (3.125)$$

と書けることが分かります。

それで、もう一つ、SUGRA の bosonic action には Chern-Simons 項があつて、それは

$$\int A_3 \wedge G_4 \wedge G_4 \quad (3.126)$$

のような項でした。これは 11 次元の積分なので、 $dy$  に比例した部分のみ残るので、中身を計算してみますと、

$$\begin{aligned} A_3 \wedge G_4 \wedge G_4 \\ = (C_3 + B_2 \wedge dy) \wedge (dC_3 + dB_2 \wedge dy)^2 \end{aligned} \quad (3.127)$$

ここで、1-form の二乗は消えるので、 $(dC_3 + dB_2 \wedge dy)^2$  の部分からは

$$(dC_3 + dB_2 \wedge dy)^2 \longrightarrow dC_3 \wedge dC_3 + 2dC_3 \wedge dB_2 \wedge dy \quad (3.128)$$

が得られます。それで、今言ったように  $dy$  に比例する部分がほしいので、そこを見てやると、

$$A_3 \wedge G_4 \wedge G_4 = [B_2 \wedge dC_3 \wedge dC_3 + 2C_3 \wedge dC_3 \wedge dB_2] \wedge dy + \dots \quad (3.129)$$

となります。ここで

$$C_3 \wedge dC_3 \wedge dB_2 = -d(C_3 \wedge dC_3 \wedge B_2) + dC_3 \wedge dC_3 \wedge B_2 \quad (3.130)$$

という書き換えができるので、

$$A_3 \wedge G_4 \wedge G_4 = 3 \cdot B_2 \wedge dC_3 \wedge dC_3 \wedge dy + \dots \quad (3.131)$$

Chern-Simons 項では  $dy$  に比例した部分のみ残るので、右辺の  $\dots$  部分は積分で落ちます。

ここまでまとめると、

$$\begin{aligned} S_M = \frac{2\pi R}{2\kappa_M^2} \int \left\{ \underbrace{e^{-\gamma} \left[ R_{10} \underset{10}{*} 1 - \frac{1}{2} e^{-2\gamma} f_2 \wedge f_2 \right]}_{(i)} \right. \\ \left. \underbrace{- \frac{1}{2} e^{-\gamma} G_4 \wedge \underset{10}{*} F_4 - \frac{1}{2} e^{\gamma} H_3 \wedge \underset{10}{*} H_3}_{(ii)} \underbrace{- \frac{1}{2} B_2 \wedge dC_3 \wedge dC_3}_{(iii)} \right\} \quad (3.132) \end{aligned}$$

$2\pi R$  は  $\int dy$  の積分から来ています。(i) の部分が、この講義の一番始めにやりました、metric の dimensional reduction の公式 (3.50) を使って出てきたものです。(ii) の部分は、(3.125) 式の  $G_4$  から、この2つの term が来て、残りの (iii) が Chern-Simons 項で、(3.131) 式からくる term です。

今日の午前中に書いた type IIA の action (3.32) というのは、ここからまだ形を整えないといけません。それが次にやることです。ほとんどゴールに近いんですが、時間的にアレなので、ここで一旦休憩に入ります。

～ 休憩 ～

(3.132) 式のようになったので、これを IIA に合わせるために、午前中にやった、Weyl rescaling の公式 (3.25) を使います:

$$g_{IJ} \rightarrow e^{2\sigma} g_{IJ} \quad (3.133)$$

ここで、(3.26) 式を見ますと、(3.132) 式の (i) の第一項の部分は

$$e^{-\gamma} R_{10} \underset{10}{*} 1 \rightarrow e^{8\sigma-\gamma} \left[ R_{10} \underset{10}{*} 1 + \dots \right]. \quad (3.134)$$

こういうふうに動くということが分かります。そこで、(3.32) 式にある Einstein frame での IIA の action  $I_A$  と比べたい、すなわち、 $e^{8\sigma-\gamma}$  の部分を 1 と置きたいので、

$$\sigma = \frac{1}{8}\gamma \quad (3.135)$$

ととれば良い事がわかるので、

$$S_M \rightarrow \frac{2\pi R}{2\kappa_M^2} \int \left[ R_{10} \underset{10}{*} 1 - \frac{9 \cdot 8}{8 \cdot 8} d\gamma \wedge \underset{10}{*} d\gamma - \frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}\gamma} H_3 \wedge \underset{10}{*} H_3 - \frac{1}{2} e^{-\frac{9}{4}\gamma} f_2 \wedge \underset{10}{*} f_2 - \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{4}\gamma} F_4 \wedge \underset{10}{*} F_4 - \frac{1}{2} B_2 \wedge dC_3 \wedge dC_3 \right] \quad (3.136)$$

とできることがわかります。これを午前中にやった Einstein frame での IIA の action (3.32) と比べると、

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{3}{2}\gamma, \\ C_1 &= a_1, \quad (F_2 = f_2) \end{aligned} \quad (3.137)$$

とすればよいことが分かります。

したがって、この 2 つの理論の読み替えを行う dictionary は、

M  $\longleftrightarrow$  IIA in the Einstein frame

$$\begin{aligned} ds_{11}^2 &= e^{-\frac{1}{6}\phi} ds_{10,E}^2 + e^{\frac{4}{3}\phi} (dy - C_1)^2, \\ A_3 &= C_3 + B_2 \wedge dy, \end{aligned} \quad (3.138)$$

となっていることがわかりました。

ところで、 $g_s$  という string coupling constant は dilaton  $e^\phi$  だったわけですが、これは今、(3.137) の第一式より、 $g_s \sim e^{-\frac{3}{2}\gamma}$  という形になります。また、11 次元目の metric は  $G_{DD}(dy)^2$  で、 $y$  が 1 から  $2\pi R$  まで動いていたということを考えると、11 次元目の半径は、 $R\sqrt{G_{DD}}$  になります。(3.138) 式より、 $G_{DD}$  という metric が、 $e^{\frac{4}{3}\phi} = e^{-2\gamma}$  だったので、

$$(S^1 \text{の半径}) \sim R\sqrt{G_{DD}} \sim R e^{-\gamma} \sim R g_s^{\frac{2}{3}} \quad (3.139)$$

ということがわかります。つまり、 $S^1$  の半径が大きくなると  $g_s$  も大きくなって、逆に  $S^1$  の半径が小さくなると  $g_s$  も小さくなります。

ここからおもしろいことが言えます。例えば、QED を考えたときに、QED の結合定数が大きくなっても 4 次元が 5 次元になるようには見えないことはないでしょう。しかし、10 次元の type IIA の理論の場合、string coupling constant がグアアっと大きくなると、10 次元を扱ってたかと思っていたのに 11 次元の様に見えるということをこれは言っています。そういう対応になっています (図 3.1)。



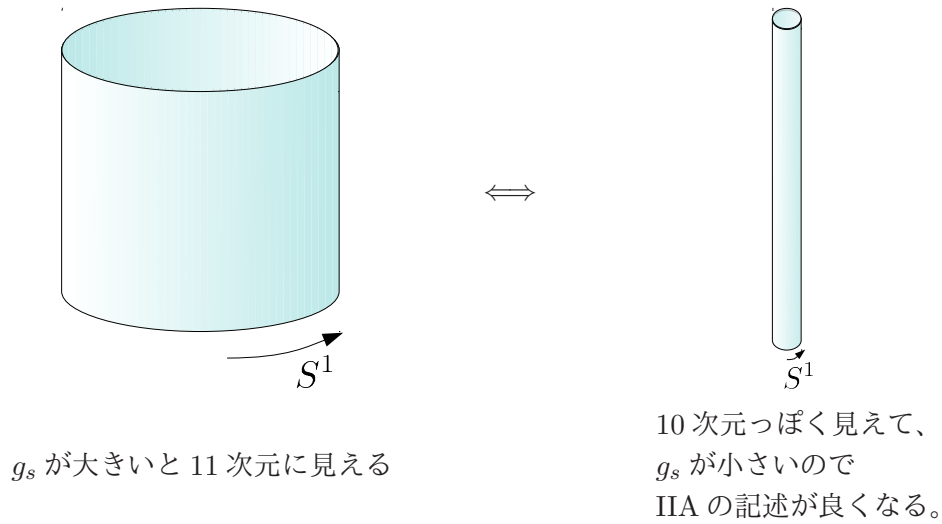


図 3.1:  $S^1$  半径と string coupling

念のために、string frame で書いておくと、IIA で string frame から Einstein frame に移るには、metric を

$$g_{IJ} \rightarrow e^{-\frac{1}{2}\phi} g_{IJ} \quad (3.140)$$

とすればよいので、

$$\begin{aligned} ds_{11}^2 &= e^{-\frac{2}{3}\phi} ds_{10,s}^2 + e^{\frac{4}{3}\phi} (dy - C_1)^2 \\ A_3 &= C_3 + B_2 \wedge dy \end{aligned} \quad (3.141)$$

となります。もちろん  $A_3$  は frame によって変わらないので書いても書かなくても同じです。これが string frame との対応です。よく使われるのがこっちの形なので一応書いておきました。

## 第4章 T-duality

それで、午前中話していたのは、こいつをさらに IIA から IIB に T-dual するということだったんですが、エライ今ので時間を食ったので、IIA と IIB の間の関係を簡単に言うことにします。これも、SUGRA のレベルでは場の間の対応を与えることになります。

### 4.1 Compactification of IIA SUGRA

IIA と IIB の SUGRA での T-duality を書きます。これは9次元で成り立ちます。実は9次元以外でも成り立つんですが、今は9次元を考えます。まず、IIA の方の metric を  $ds_A^2$  と書きますと、これを今日午前中にやってみるみたいに、同じようにコンパクト化して、

$$ds_A^2 = \underbrace{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}_{9\text{-dim}} + e^{-2\gamma} (dy - a_1)^2 \quad (4.1)$$

IIA には、 $C_1$  と  $C_3$  がありますので、さっきと同じように、

$$\begin{aligned} C_1 &= \underbrace{C_1}_{9\text{-dim part}} + C_0 \wedge dy \\ C_3 &= \underbrace{C_3}_{9\text{-dim part}} + C_2 \wedge dy \end{aligned}, \quad \begin{aligned} B_2 &= \underbrace{B_2}_{9\text{-dim part}} + B_1 \wedge dy \end{aligned} \quad (4.2)$$

こうします。notation が悪いので申し訳ないですが、右辺の  $C_1, C_3, B_2$  は9次元バージョンです。本当は10次元を  $\hat{\phantom{x}}$  か何かで書いて9次元を  $\tilde{\phantom{x}}$  無しにするとか気の利いたことをしたいんですが、後から  $\hat{\phantom{x}}$  をつけたり  $\tilde{\phantom{x}}$  をつけたりしてごちゃごちゃになるので、今はこうします。これが IIA です。

### 4.2 Compactification of IIB SUGRA

で、IIB は、

$$ds_B^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu + e^{-2\gamma} (dy - \tilde{a}_1) \quad (4.3)$$

IIB の方もほとんど同じです。9次元パートはまったく同じです。それで、残りの部分を、IIB に関してはすべて  $\tilde{\phantom{x}}$  をつけることにします。IIB には  $C_0$  っていう人がいて、これはもう scalar なので (4.2) 式のような分け方はできなくてこれしかないです。それと、 $C_2$  という人と  $C_4$  という

人がいて、 $B$ -field もいて、それぞれ

$$\begin{aligned} C_2 &= \underbrace{C_2}_{9\text{-dim part}} + C_1 \wedge dy, & B_2 &= \underbrace{B_2}_{9\text{-dim part}} + B_1 \wedge dy \\ C_4 &= \underbrace{C_4}_{9\text{-dim part}} + C_3 \wedge dy \end{aligned} \quad (4.4)$$

こういうふうに分けられます。

それで、多分僕は IIB の action を 1 度も書かなかった気もするんですが、実は IIB っていうのは本当の意味の action が書けるかどうか知られていません。どういうことかといいますと、IIB の SUGRA というのは、何か action のようなものがあるんですが、

$$\begin{aligned} S_{\text{IIB}} = \frac{1}{2\kappa_B^2} \int \left\{ e^{-2\tilde{\phi}} \left[ R_{10} \underset{10}{*} 1 + 4d\tilde{\phi} \wedge \underset{10}{*} d\tilde{\phi} - \frac{1}{2} \tilde{H}_3 \wedge \underset{10}{*} \tilde{H}_3 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \tilde{F}_1 \wedge \underset{10}{*} \tilde{F}_1 - \frac{1}{2} \tilde{F}_3 \wedge \underset{10}{*} \tilde{F}_3 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{4} \tilde{F}_5 \wedge \underset{10}{*} \tilde{F}_5 - \frac{1}{2} \tilde{C}_4 \wedge \tilde{H}_3 \wedge d\tilde{C}_2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

こうなっていて、定義が

$$\begin{aligned} \tilde{H}_3 &= d\tilde{B}_2, \quad \tilde{F}_3 = d\tilde{C}_2 - \tilde{C}_0 \tilde{H}_3, \\ \tilde{F}_5 &= d\tilde{C}_4 - \frac{1}{2} \tilde{C}_2 \wedge \tilde{H}_3 + \frac{1}{2} \tilde{B}_2 \wedge d\tilde{C}_2, \end{aligned} \quad (4.6)$$

こんなふうになっています。これに、 $F_5$  というのが、Hodge dual( $*$ )を使って、self-duality condition

$$\tilde{F} = \underset{10}{*} \tilde{F}_5 \quad (4.7)$$

を課します。これは、SUSY のある理論では、boson の自由度と fermion の自由度を同じする必要性からくるものです。今、10 次元ですから、5-form に Hodge dual をとっても 5-form なので、5-form=5-form という式になります。 $S_{\text{IIB}}$  の action(4.5) の下線部に、この self-duality を課すと、5-form 同士ですから、入れ替えるとマイナスになって、

$$\tilde{F}_5 \wedge \underset{10}{*} \tilde{F}_5 = \tilde{F}_5 \wedge \tilde{F}_5 = -\tilde{F}_5 \wedge \tilde{F}_5 = 0 \quad (4.8)$$

とゼロになってしまいます。なので、この self-duality を action に課することができません。しかし、本当の action なら self-duality を持っていないといけません。じゃあ、この action もどきは何かっていうと、これは action じゃなくて、ここから変分原理で運動方程式を出すための便利な覚書のようなものです。だから、本当に意味があるのは、 $S_{\text{IIB}}$  から変分原理で出した運動方程式に self-duality を課したものであり、 $S_{\text{IIB}}$  自体には本来の action の意味はありません。何がややこしいかという、さっきの dimensional reduction をこの action に対して行ってもあまり意味がないということです。時間がなくてできないのですが、本当は何をするかという、9 次元への dimensional reduction は  $S_{\text{IIB}}$  ではなくて、運動方程式に self-duality を  $F_5$  に課したものに dimensional reduction をする必要があります。これが一番ややこしいところです。だから、 $F_5$  の部分が一番ややこしいです。

それで、 $\tilde{C}_4$  の運動方程式を考えると、それは

$$d * \tilde{F}_5 - \tilde{H}_3 \wedge \tilde{F}_3 = 0, \quad (4.9)$$

$$\oplus$$

$$\tilde{F}_5 = *_{10} \tilde{F}_5, \quad (4.10)$$

と書けます。それで、9次元への dimensional reduction を (4.9) 式に課します。10次元の  $\tilde{F}_5$  もややこしいですが、さっきの (4.6) 式を入れてやれば出てきて、

$$\underbrace{\tilde{F}_5}_{10\text{-dim}} = \underbrace{\left[ d\tilde{C}_4 - \frac{1}{2}\tilde{C}_2 \wedge d\tilde{B}_2 + \frac{1}{2}\tilde{B}_2 \wedge d\tilde{C}_2 + \tilde{F}_4 \wedge \tilde{a}_1 \right]}_{9\text{-dim } \tilde{F}_5} + \tilde{F}_4 \wedge (dy - \tilde{a}_1)$$

と書かれます。今  $\tilde{F}_4$  というのを使っていますけれど、 $\tilde{F}_4$  は

$$\tilde{F}_4 = d\tilde{C}_3 - \frac{1}{2}\tilde{C}_2 \wedge d\tilde{b}_1 + \frac{1}{2}\tilde{C}_2 \wedge d\tilde{B}_2 + \frac{1}{2}\tilde{B}_2 \wedge d\tilde{C}_1 - \frac{1}{2}\tilde{b}_1 \wedge d\tilde{C}_2$$

と書かれています。それで、時間がないので公式を使います。vielbein を使って  $(D+1)$  次元の Hodge dual を  $D$  次元の Hodge dual で書くという、

$$\begin{aligned} *_{D+1} (e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_p}) &= *_{D} (e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_p}) \wedge e^{-\tilde{\gamma}} (dy - \tilde{a}_1) \\ *_{D+1} (e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_p} \wedge (dy - \tilde{a}_1)) &= (-)^{D-p} e^{\gamma} *_{D} (e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_p}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

という公式があります。これは元々の Hodge dual の定義に戻れば証明することができますが、今は時間がないので省略します。(4.11) 式を使いますと、10次元の  $\tilde{F}_5$  は

$$*_{10} \tilde{F}_5 = *_{10} \left( \tilde{F}_5 + \tilde{F}_4 \wedge (dy - \tilde{a}_1) \right) \quad (4.12)$$

$$= -e^{\gamma} *_{9} \tilde{F}_5 + e^{-\gamma} *_{9} \tilde{F}_4 \wedge (dy - \tilde{a}_1) \quad (4.13)$$

となります。self-duality(4.10) があるので、この意味するところを書いてやると、

$$\begin{aligned} \tilde{F}_5 &= -e^{\gamma} *_{9} \tilde{F}_4 \\ *_{9} \tilde{F}_5 &= e^{\gamma} \tilde{F}_4 \end{aligned}$$

の2つに分けられます。これは、2回 Hodge dual をやると、

$$*_{9} *_{9} (\cdots) = -(\cdots)$$

となるので、実は2つあるように見えて、1個しかありません。ここで重要なこととして、 $\tilde{F}_5$  が  $\tilde{C}_4$  を含んでいて、(4.12) 式と与えられているので、self-duality の condition(4.10) より

$$\begin{aligned} \tilde{F}_5 &= -e^{-\tilde{\gamma}} *_{D} \tilde{F}_4 \\ &= d\tilde{C}_4 + \cdots \end{aligned}$$

となり、9次元部分の  $\tilde{C}_4$  は他の場で与えられることが分かります。つまり、

$$\tilde{C}_4 = \underbrace{\tilde{C}_4}_{\text{これが本質的に独立でない}} + \tilde{C}_3 \wedge dy$$

となります。IIA では実は  $\tilde{C}_4$  が9次元にはいません。けれど、(4.10) の self-duality condition があるので、 $\tilde{C}_4$  は独立でないことを勘案しますと、IIA と場の対応が成り立ちます。self-duality condition は本質的には9次元に一旦落とせば解けてしまって、実は、IIB の9次元の action は書くことができます。10次元では書くことができなかったのですが、9次元では、今書いた(4.9)式の運動方程式が出るように SUGRA の action が書くことができます。今度は本当の action です。次元を落としたために場がたくさん増えてしまうので、長い action になりますが、

$$\begin{aligned} S_B = & \frac{2\pi\tilde{R}}{2\kappa_B^2} \int e^{-2\varphi} \left\{ \left[ R_9 \underset{9}{*} 1 + 4d\tilde{\varphi} \wedge \underset{9}{*} d\tilde{\varphi} - d\tilde{\gamma} \wedge \underset{9}{*} d\tilde{\gamma} - \frac{1}{2}\tilde{H}_3 \wedge \underset{9}{*} \tilde{H}_3 \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2}e^{2\tilde{\gamma}}d\tilde{b}_1 \wedge \underset{9}{*} d\tilde{b}_1 - \frac{1}{2}e^{-2\tilde{\gamma}}d\tilde{a}_1 \wedge \underset{9}{*} d\tilde{a}_1 \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}e^{-\tilde{\gamma}}d\tilde{C}_0 \wedge \underset{9}{*} d\tilde{C}_0 - \frac{1}{2}e^{\tilde{\gamma}}\tilde{F}_2 \wedge \underset{9}{*} \tilde{F}_2 - \frac{1}{2}e^{-\tilde{\gamma}}\tilde{F}_3 \wedge \underset{9}{*} \tilde{F}_3 \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}e^{\tilde{\gamma}}\tilde{F}_4 \wedge \underset{9}{*} \tilde{F}_4 - \frac{1}{2}\tilde{a}_1 \wedge \tilde{F}_4 \wedge \tilde{F}_4 - \tilde{B}_2 \wedge d\tilde{C}_2 \wedge (\tilde{F}_4 + d\tilde{B}_2 \wedge \tilde{C}_1) \right\} \quad (4.14) \\ & \text{with } \tilde{\varphi} \equiv \tilde{\phi} + \frac{1}{2}\tilde{\gamma} \end{aligned}$$

と書けます。これが IIB の9次元の action です。

### 4.3 T-duality

一方、午前中に10次元の IIA の action(3.32) も書きましたし、さっき11次元の SUGRA からの dimensional reduction で出した action(3.136) がありました。それからさらに9次元に、もう一度 dimensional reduction すれば、type IIA の9次元の action が得られます。それと(4.14)式の action を比べるということをしなないといけません。それをすると、実は、次の(4.15)式の対応があるということが分かります。どちらでも良いと思うのですが、tilde(~) がつく方が IIB で、つかない方が IIA です。identification する方法がいくつかあるのですが、あまりぐちゃぐちゃ書

くと notation が見にくくなるので、

$$\begin{aligned}
\text{IIB} & & \text{IIA} \\
\tilde{a}_1 & = & b_1 \\
\tilde{b}_1 & = & a_1 \\
\tilde{B}_2 & = & B_2 - a_1 - b_1 \\
\tilde{C}_0 & = & C_0 \\
\tilde{C}_1 & = & C_1 + C_0 a_1 \\
\tilde{C}_2 & = & -[C_2 + (C_1 + C_0 a_1) \wedge b_1] \\
\tilde{C}_3 & = & -\left[ C_3 + \frac{1}{2} C_2 \wedge a_1 + \frac{1}{2} (C_1 + C_0 a_1) \wedge B_2 \right] \\
\tilde{\gamma} & = & -\gamma \quad \left( \tilde{R} \sim \frac{\alpha'}{R} \text{ という対応と関係している} \right) \\
\tilde{\phi} & = & \phi + \gamma
\end{aligned} \tag{4.15}$$

とします。SUGRA では、お互い (4.15) 式の関係で結びついていることが分かります。こういう対応で、(4.15) 式を (4.14) 式に入れてやると、9次元の type IIA の SUGRA の action が出て、それは、午前中に与えた 10次元の type IIA の SUGRA の action(3.32) から 9次元に落としたものと一致するはずですが。

(質問) すいません、type IIB の SUGRA って、うまく補助場を入れれば covariant に self-duality condition を課す formalism があると思うんですけど。

(回答) ありましたっけ？

(質問) はい、例えば gauge 重力対応とかで IIB に dual な場の理論の相関関数計算するという方法だったと思いますが。

(回答) あの、NS5 の action じゃないですか？

(質問) 有限個の補助場を入れる formalism と無限個の補助場を入れる formalism があつたと思いますが。

(回答) 僕もちゃんと記憶してないけど、有限個の方は無かった気がします。

(質問) 確か、歴史的には何か無限個の方が先にあつて、

(回答) NS5 の action は IIB でもあります。だけど、とにかく言えることは、そう書いてもあまり便利じゃありません。とにかく、複雑になるだけです。

(質問) あ、そうですか。場の対応が見にくくなりそうですね。

(回答) だから、今の場合はむしろ、こうやって作った方が実質的には手っ取り早いと思います。本当に無限個入れてやる気は全くしません。実際に covariant な本当の action があるかどうか

かっていうのは、僕はよく知らないです。でも、本当にあるとしても、あまり知られていないということは、形式的には書けるけども便利じゃないのではないかと、guessします。大概は普通はみんなこの action を使います。何か計算しようと思うとこの 'action' の方がやりやすいんだと思います。

# 第5章 F-theory and Grand Unification

午前中に、M-theory から type IIA に落として type IIB へ持っていくという操作で F-theory を定義するというを図式的に書いて説明しました。テクニカルな面を言うと、こういう対応でお互い関係付いています。午前中にやったことは、このトーラスの volume をゼロに持っていく極限で、4次元の理論を作って F-theory を作るという話でした。

午前中に話していた F-theory の話に戻ります。6次元に  $B_6$  とうのがあって、各点の  $u$  とかいうところにトーラスがあります。このトーラスは、実は  $\tau$  という complex structure で特徴づけられています (図 5.1)。点  $u$  では  $\tau(u)$  であつたり、点  $u'$  では  $\tau(u')$  であつたりして空間を動いています。この全体 (図 5.1) を  $X_8$  とよんで、こういうものを F-theory を  $X_8$  へコンパクト化したものだと思います。

それが本題だったんですが、あんまりお話ばかりだとちょっといけないかなと思って、テクニカルな話をし始めたら本当にテクニカルになっちゃいました。

## 5.1 Torus on $B_6$

それで、トーラスの記述の仕方をちょっと変えます。まず、 $x, y$  という complex の変数を導入します ( $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ )。この  $\mathbb{C}^2$  に、constraint を次のように与えます。

$$y^2 = x^3 + fx + g. \tag{5.1}$$

これ自体が1つの complex なので、複素2次元分の  $\mathbb{C}^2$  に複素1次元分の constraint を課して、結局、複素1次元分の広がりを持った空間を記述しています。右辺は3次方程式なので、強引に  $\lambda_1$ 、

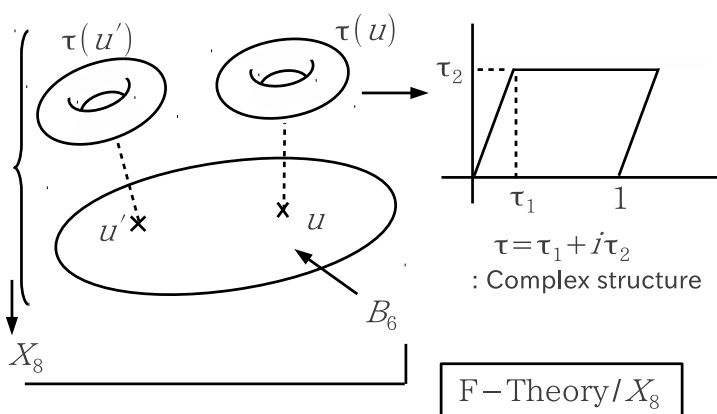


図 5.1: F-theory の概念図



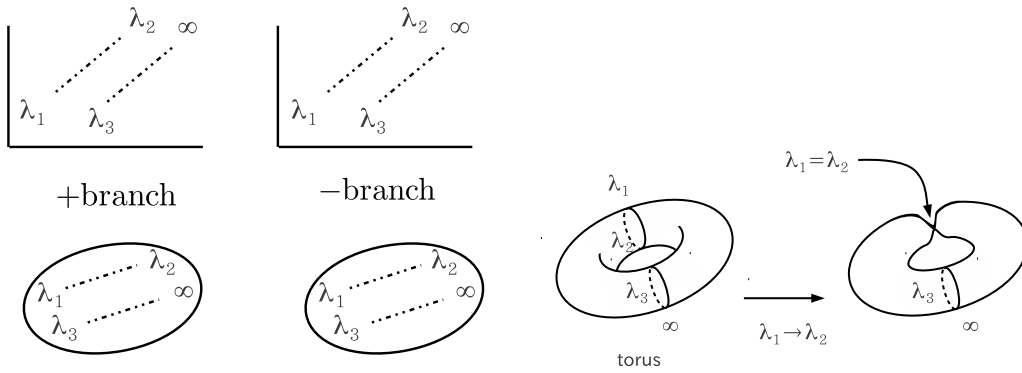


図 5.2: branch の図とそれを張り合わせて作られるトーラス

$\lambda_2, \lambda_3$  で展開して、

$$y^2 = x^3 + fx + g \tag{5.2}$$

$$= (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3). \tag{5.3}$$

$$\rightarrow y = \pm \sqrt{(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)} \tag{5.4}$$

と表します。ここで、 $y$  は一価関数ではありません。そこで、二つの patch を持ってきます。一価関数にするために、plus の branch と minus の branch の二つを用意して、無限まで入れて、図 5.2 のようになります。こうしておいて、この筋に沿って張り合わせる事により、一価関数を作れます。(これは、Riemann がやったことです。) それをすると、図 5.2 のようにトーラスが作れるので、(5.1) 式がトーラスを与えているということが分かります。例えば、 $\lambda_1$  が  $\lambda_2$  に近づいていくと、図 5.2 の一番右の図ようにつぶれたトーラスになります。これがいつ起きるかを見るために、判別式 (discriminant) というものを使います:

$$\Delta = 27g^2 + 4f^3 \tag{5.5}$$

高校の時にやった解と係数の関係を使うと、

$$\begin{aligned} \Delta &= 27g^2 + 4f^3 \\ &\propto (\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_2 - \lambda_3)^2(\lambda_3 - \lambda_1)^2. \end{aligned} \tag{5.6}$$

というように書けます。こういう事 (トーラスがつぶれる事) が起きるのは、ちょうど  $\Delta = 0$  の時で、トーラスが縮退します。

$\tau$  というものがありました。これは、 $f$  と  $g$  という係数とも関係がついています。ここで、これ自体を使ってどうのという事はあまりしないので、ここは簡単に言います。 $j$ -function と呼ばれているものがあって、それは

SL(2,  $\mathbb{Z}$ ) modular invariant  $j$ -function

$$j(\tau) = \frac{4(24f)^3}{\Delta} \tag{5.7}$$

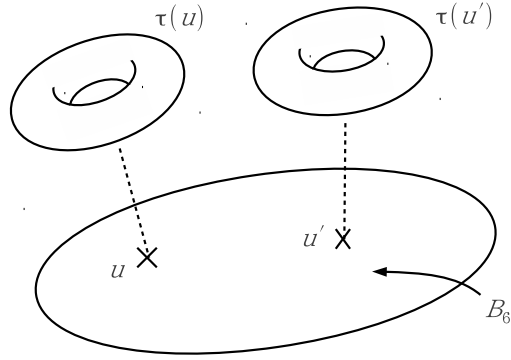


図 5.3:  $B_6$  上のトーラス

と書かれます。これによって、 $\tau$  と  $f, g$  をつなぐようなものを与えています。特に後で使いたいと思っているのは、 $\tau_2 \rightarrow \infty$  の極限で  $j(\tau)$  が、exponential 的な振る舞いをする：

$$\begin{aligned} \tau_2 \rightarrow \infty \\ j(\tau) \rightarrow e^{-2\pi i \tau} + 744 + O(e^{2\pi i \tau}) \end{aligned} \quad (5.8)$$

ということです。

これによって、トーラスの complex structure である  $\tau$  を  $B_6$  の上に fibering するためには、 $f$  とか  $g$  を  $B_6$  の座標に依らせればいいことがわかります。結局、今は図 5.3 のような状況を考えていたので、 $(u, v, z)$  を  $B_6$  の local coordinates であるとして、さっき書いた、 $f$  とか  $g$  を  $(u, v, z)$  の関数にします。そうすると、 $j(\tau)$  を通じて  $\tau(u, v, z)$  となります：

$$f, g \rightarrow \begin{cases} f(u, v, z) \\ g(u, v, z) \end{cases} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \downarrow j(\tau) \\ \tau(u, v, z) \end{aligned} \quad (5.10)$$

基本的に、

$$y^2 = x^3 + f(u, v, z)x + g(u, v, z) \quad (5.11)$$

こういう式さえ与えてやれば、 $\tau$  というやつが  $B_6$  上に fiber されている様な状況の記述になります。

## 5.2 具体例 1

おもしろい状況を考えたいので、例を考えてみましょう。例として、 $B_6$  上のある点の近く  $u \sim u_i$  で

$$\begin{cases} \Delta(u, v, z) \sim 4(u - u_i)^N \\ 24 \cdot f(u, v, z) \sim 1 \end{cases} \quad (5.12)$$

$$(5.13)$$

となるような状況を考えます。その時、 $u = u_i$  で  $\Delta = 0$  だから、トーラスがつぶれています。そこで、 $j$ -function を見ると、

$$j(\tau) = \frac{4 \cdot (24f)^3}{\Delta} \sim \frac{1}{(u - u_i)^N} \rightarrow \infty \Rightarrow \tau_2 \rightarrow \infty. \quad (5.14)$$

となっています。

すると、さっき書いた (5.8) 式の展開が使えるので  $j(\tau)$  の  $\tau_2 \rightarrow \infty$  limit を考えると、

$$j(\tau) \sim e^{-2\pi i \tau} = \frac{1}{(u - u_i)^N} \quad (5.15)$$

↓

$$\tau \underset{u \sim u_i}{\sim} \frac{N}{2\pi i} \log(u - u_i) \quad (5.16)$$

となります。IIB のコトバで、

$$\tau = C_0 + i \underbrace{e^{-\phi}}_{\sim \frac{1}{g_s}} \quad (5.17)$$

のような形をしていましたので、

$$g_s = \frac{2\pi}{N \log\left(\frac{1}{|u - u_i|}\right)} \xrightarrow{u \rightarrow u_i} 0 \quad (5.18)$$

となり  $u \rightarrow u_i$  で  $g_s \rightarrow 0$  となります。もう一つおもしろいのは、 $u = u_i$  という点のまわりを一周することです。そうすると

$$(u - u_i) \rightarrow e^{2\pi i} (u - u_i) \quad (5.19)$$

となりますから、さっきの (5.16) 式を見ますと、

$$C_0 \rightarrow C_0 + N \quad (5.20)$$

↓

$$\oint_{u=u_i} dC_0 = N \quad (5.21)$$

$\oint_{u=u_i} dC_0 = N$  は、午前中あまりちゃんと説明できなかつたんですけど、D7-brane の charge です。だから、この charge は、 $(u = u_i)$  という点に何枚 7-brane がいますかという状況を表していて、この場合は、おもしろいことに D7-brane が  $N$  枚いる状況を表しています。

実際、この singularity の部分というのは、 $\Delta(u, v, z) = 0$  というのを表していたので、これは  $B_6$  の中でこの constraint で表されている部分空間になっています。つまり、

$$\Delta(u, v, z) = 0 \subset B_6 \quad (5.22)$$

↑

これが、表している空間  $S_4$  は、実 4 次元。

左辺は複素 1 次元、つまり実で言うと 2 次元の constraint です。右辺は 6 次元ですから、全体で実 4 次元になります。ということは、type IIB の 10 次元座標が、 $x^0, x^1, \dots, x^9$  とあって、 $x^4$  か

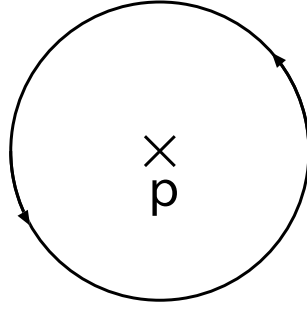


図 5.4: 点  $p$  のまわりを回転する経路

ら  $x^9$  が  $B_6$  で、この中のどこかに、 $S_4$  があって、 $x^0$  から  $x^3$  の方向は、constraint も何も課していないので、ここにも広がっています。 $S_4$  にもいますから、 $S_4$  と  $x^0$  から  $x^3$  方向を合わせると時間 1 次元で空間 7 次元に広がった object になります。

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{x^0 \ x^1 \ x^2 \ x^3}_{\text{ここにも広がっている}} \quad \underbrace{x^4 \ x^5 \ x^6 \ x^7 \ x^8 \ x^9}_{\substack{B_6 \\ \supset S_4}} \\
 \left. \begin{array}{l} \text{時間 1 次元} \\ \text{空間 7 次元} \end{array} \right\} \text{に広がった object} \leftrightarrow \text{7-brane}
 \end{array}$$

だから、これは、7-brane と consistent です。

一般に、(図 5.4) のように、

$$\Delta(p) = 0 \tag{5.23}$$

を満たす点  $p$  のまわりで、点のまわりをグルッと回転する事を考えた時に、 $\tau$  というのは

$$\begin{array}{l}
 \tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \\
 \text{with } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})
 \end{array} \tag{5.24}$$

のように、 $SL(2, \mathbb{Z})$  で変更を受けます。これは、あまりちゃんと言っていませんでしたが、type IIB string theory が持っている S-duality の一部を反映しています。

また、一般に、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - pq & p^2 \\ q^2 & 1 + pq \end{pmatrix} \tag{5.25}$$

( $q$  と  $p$  は互いに素の整数)

という振る舞いをするとき、点  $p$  に  $[p, q]$  7-brane があることが知られています。 $[p, q]$  7-brane というのは、

$$[1, 0] \text{ 7-brane} = \underbrace{\text{D7-brane}}$$

fundamental string が端を持てる。

$$(1, 0) \text{ 1-brane} = \text{fundamental string.}$$

一般に  $[p, q]$  7-brane というのは、

$$\begin{array}{c} [p, q] \text{ 7-brane} \\ \uparrow \\ (p, q)1\text{-brane} = (p, q) \text{ string が端を持てる 7-brane} \end{array}$$

何を言っているかということ type IIB の  $SL(2, \mathbb{Z})$  は、S-duality と言われている対称性と関係していて、その対称性で回すと fundamental string が、こういう  $(p, q)$  string に移ったり、 $[1, 0]$  7-brane が  $[p, q]$  7-brane に移ったりします。本当は type IIB には、こういったものがいっぱいあります。

### 5.3 具体例 2

また別の例を考えます。今度の例は

$$\begin{cases} f = f_0 \\ g = g_0 + \frac{a}{54g_0} z^{N+1} \end{cases} \\ f_0, g_0, a = \text{constants,}$$

with

$$4f_0^3 + 27g_0^2 = 0$$

とすると、 $z \sim 0$  で、

$$\Delta \sim az^{N+1} + O(z^{N+2})$$

だから、さっきの状況でいうと  $N+1$  枚  $z$  の位置にいる状況を表しています。 $z=0$  でトーラスがつぶれています。ここで、

$$x \rightarrow x - \sqrt{-\frac{f_0}{3}} \quad (5.26)$$

をしてやると、

$$y^2 \cong x^3 - \sqrt{-3f_0}x^2 + \frac{9}{27g_0}z^{N+1} + O(z^{N+2}) \quad (5.27)$$

この式は、 $y$  を右辺に持って行って、

$$F = -y^2 + x^3 - \sqrt{-3f_0}x^2 + \frac{9}{27g_0}z^{N+1} + O(z^{N+2}) \quad (5.28)$$

というものを定義すると、

$$F = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}F = \frac{\partial}{\partial y}F = \frac{\partial}{\partial z}F = 0, \quad (5.29)$$

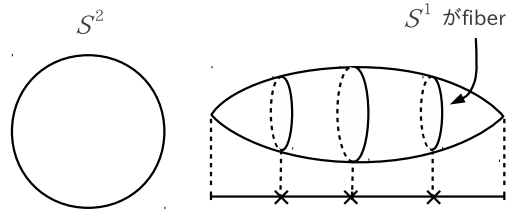


図 5.5: fiber がつぶれていても、空間全体が singular に成らない例

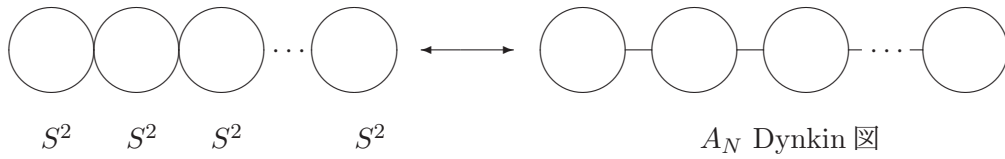


図 5.6:  $N$  コの  $S^2$  と Dynkin 図の対応

という式を  $(x, y, z) \sim (0, 0, 0)$  で満たすので  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  で、全体の空間が singularity を持っています。さっき、 $\Delta = 0$  のところで トーラス が、つぶれていると言っていました、必ずしも全体の空間が singular になっているかは別です。例えば、図 5.5 のように  $S^2$  を考えて、これを  $S^1$  fibration された空間と見ると、直線の区間上に  $S^1$  が fiber されているわけですが、両端で  $S^1$  がつぶれていても空間全体が singular な訳でも何でもありません。ただ、今の場合、(5.29) 式の 4 つが満たされると、(5.28) 式の constraint で記述される空間の次元が、他の空間に比べガクンと落ちます。よって、このところでは、本当の singularity があります。

適当に  $x, y, z$  を rescale すると、 $(x, y, z) \sim (0, 0, 0)$  のまわりで

$$x^2 + y^2 + z^{N+1} = 0 \quad (5.30)$$

という式に整理できます。これは、 $A_N$  type singularity と呼ばれていて、実はこの式は、

$$(x, y, z) \sim (0, 0, 0)$$

で、 $N$  コの  $S^2$  がならんで 1 点で接しています (図 5.6)。

この図を見ると、 $N$  コの  $S^2$  の配置が  $A_N$  型の Dynkin に対応していることがわかります。また、 $(x, y, z) \sim (0, 0, 0)$  に 7-brane がいて、その上の gauge 理論の gauge 群が  $A_N \Rightarrow SU(N+1)$  になっていることが調べるとわかります。

### $A_1$ の場合

ちよつと簡単のために、 $A_1$  の場合を考えてみます。

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad (5.31)$$

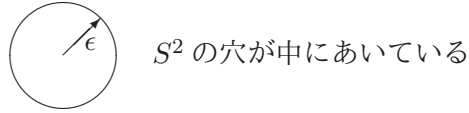


図 5.7:  $A_1$  の場合の singularity

このままだと、本当に  $S^2$  がつぶれてしまっていて見にくいので、これをちょっと変形して

$$x^2 + y^2 + z^2 = \epsilon^2 \quad (5.32)$$

$$\begin{cases} x = x_1 + iy_1 \\ y = x_2 + iy_2 \\ z = x_3 + iy_3 \end{cases} \quad (5.33)$$

というふうに書きます。(5.32) 式は、complex の式なので real に直すと 2 つの式になって

$$\begin{cases} \vec{x}^2 = \epsilon^2 + \vec{y}^2 \\ \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \end{cases} \quad (5.34)$$

これは、何を言っているのかと言いますと、ちょうど  $\vec{y} = 0$  の所で  $\vec{x}^2$  が  $\epsilon^2$  になりますから真ん中の所に半径が  $\epsilon$  分だけボコッとこういう穴が開いているのが分かります (図 5.7)。 $\epsilon$  を 0 にしちゃうとこの穴がグシャッとつぶれて、 $S^2$  がここでつぶれるという状況が分かると思います。これはちょうど  $A_1$  なので、 $S_2$  が真ん中に 1 個開いていて、それがつぶれているような状況です。

## $A_2$ の場合

$A_2$  になると、

$$x^2 + y^2 + z^3 = 0 \quad (5.35)$$

となっていますが、このままだとよく見えないので、

$$x^2 + y^2 + (z - 2\epsilon)z(z + 2\epsilon) = 0 \quad (\epsilon > 0) \quad (5.36)$$

のようにずらしてやります。それで、まずこういう状況で  $z \neq 2\epsilon$  の所を考えます。この時、 $(z - 2\epsilon) \neq 0$  だから、 $(x, y)$  をわざと  $\sqrt{z - 2\epsilon}$  だけ scale させてやます。

$$(x, y) \rightarrow \sqrt{z - 2\epsilon}(x, y) \quad (5.37)$$

すると、(5.36) 式のこの  $(z - 2\epsilon)$  部分が落ちます。ここで、

$$z = z' - \epsilon \quad (5.38)$$

とすると

$$x^2 + y^2 + (z')^2 = \epsilon^2 \quad (5.39)$$

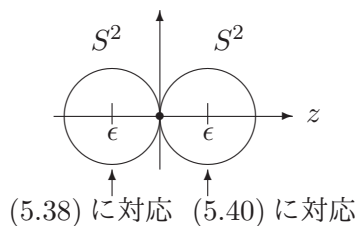


図 5.8:  $A_2$  の場合の singularity

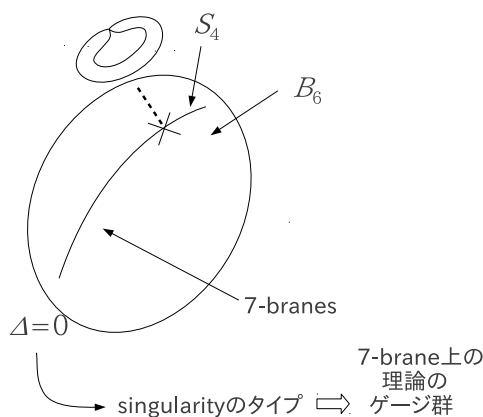


図 5.9: singularity のタイプと gauge 群の対応の概念図

この式は何を表していたかという、ちょうどさっきの (5.32) 式と同じなので、 $x$  がゼロ、 $y$  がゼロ、 $z'$  がゼロの所に  $\epsilon$  の大きさの  $S^1$  があります。 $z$  でいうと、ここの  $-\epsilon$  の所に  $\epsilon$  の大きさで球があります。これが、(5.39) 式に対応します。

もう一つは、 $z \neq -2\epsilon$  の所を考えると同じ様にできて、

$$z = z' + \epsilon \tag{5.40}$$

とすると今度は、 $z'$  がゼロなので新しい方はちょうど  $\epsilon$  の所にもう 1 個できます。すると、図 5.8 のように、 $S^2$  と  $S^2$  がちょうど一点で接しているような形の穴がポコッと真ん中に開いた様な空間を記述しているという事が分かります。これは、 $A_2$  なので  $SU(3)$  の gauge 群が D7-brane の上に乗っています。

$$A_2 \rightarrow SU(3) \text{ gauge group}$$

という様に 7-brane 上の gauge 群というのは、fiber されている singularity に対応してこういう gauge 群が入ります。

つまり、図 5.9 のように、 $B_6$  があって、 $S^4$  の上でトラスがつぶれてたわけです。そして、 $\Delta = 0$  を記述している線があります。ここに、7-brane がいて、 $\Delta = 0$  によって singularity のタイプがある訳ですが、それが実は 7-brane 上の理論の gauge 群を与えています。



## 5.4 F-theory and Grand Unification

これが、F-theory で GUT を作る話の始めの方です。要するに、F-theory での GUT というのは、 $\Delta = 0$  にある、7-brane 上の gauge 理論を用いて作られるモデルを使います。

だから

$$y^2 = x^3 + f(u)x + g(u) \quad (5.41)$$

という式を与えると、どこに 7-brane がいて、そこにどういう singularity のタイプがあるかという事が分かります。その singularity のタイプにしたがって、7-brane 上にどういう gauge 群が出てくるかということも分かります。その上での理論を使って、現象論に耐えうる様な GUT を作ろうというのが、F-theory を用いた Grand Unification の試みです。

ものすごく大雑把に言うところこういう感じです。もちろんそう言ってしまうと、Grand Unification ですから、そこからどういうふうに matter が出るのか、世代の数はどうなっているのか、湯川結合定数はどうやって計算するのかなど、色々疑問が出てくると思います。本当は、説明しないと全然おもしろくないと思いますが、それはまたテクニカルな話になって時間がかかってしまいます。

僕は他の所で講義を色々しているので、多分インターネット上にファイルが転がっていると思います。そのファイルを参考にしていただければ、テクニカルな事も含めてそこに書かれていて、もう少し詳しいことが分かると思います。この講義の与えられた時間でそこまでいくのは、僕には至難の技なので、今日はこれで終わりにします。

～ 講義終了 ～

司会者: 最後に質問か何かありますか?

(質問) (5.41) 式中  $x$  とか  $y$  というのが、何だかちょっと分かんなかったんですけど。

(回答) この  $x$  とか  $y$  は、まあトーラス方向だと思ってもらえばいいかと思います。要するに、(5.41) 式の constraint というのは、 $\mathbb{C}^2$  中の  $x$  とか  $y$  に課されていて、それが各点  $u$  上で fiber のトーラスを与えていました。

(質問)  $\tau$  と何か関係があるんですか?

(回答) この  $f$  とか  $g$  を与えると  $\tau$  が決まります。

(質問)  $\mathbb{C}^2$  というのは、どこの  $\mathbb{C}^2$  ですか?

(回答) 適当な  $\mathbb{C}^2$  です。 $\mathbb{C}^2$  自体は意味があまりなくて、そこに課された (5.41) 式の constraint で記述されたトーラスに意味があります。もっと正確には、そのトーラスの complex structure である  $\tau$  が記述したいものです。さっきの図 5.2 は、 $x$  の上で描いています。それで、 $y$  が、多価関数なので、それが多価にならないように空間を広げたヤツが、トーラスです。

(質問) それで、 $u, v, z$  というのは何ですか。

(回答) それは、 $B_6$  になりますね。 $B_6$  があって、その上に  $B_6$  上の一点 ( $u$ ) が決まると、 $f(u)$  という値と  $g(u)$  の値が決まるので、トーラスの形を決めている  $\tau$  というのが決まります。どういう形のトーラスかを表す  $\tau$  が、 $B_6$  の上で色々変わっています。

司会者: 他にありますか?

(質問)  $\Delta(p) = 0$  のまわりを  $p$  のまわりで回して  $\tau$  が、 $SL(2, \mathbb{Z})$  で変形すると思うんですけど、トーラスの fundamental region は、何に依存して変形が起こっているのでしょうか。Homotopy なのか Homology なのですか? 経路を回して、 $a\tau + b$  と  $c\tau + d$  になるんですけど。

(回答)  $\tau$  のこのような振る舞いは monodromy と呼ばれています。簡単に言えば、 $\tau$  でいうと、違う  $\tau$  に戻ってきているように見えますが、 $SL(2, \mathbb{Z})$  で移りあえる  $\tau$  同士は同じ complex structure をもつトーラスを表しているので、fundamental region だと同じ点です。この  $SL(2, \mathbb{Z})$  の変換の下で、type IIB 自体も不変になっており、 $S$ -duality と呼ばれています。理論全体はこのように  $SL(2, \mathbb{Z})$  不変ですので、spectrum 全体は不変ですが、個々の 7-brane とか string とかは、 $SL(2, \mathbb{Z})$  変換の下で違う種類の 7-brane とか string とかに移ります。

～～ 完 ～～

## 講義録作成校からの謝辞

川野輝彦助教は2008年に一度夏の学校の講師をしていただいているにも関わらず、再度依頼を快諾してくださり、丁寧でわかりやすい解説をしてくださいました。また、講義録作成にあたっては、原稿の内容を詳細にチェックしてくださいました。ここに心より感謝の意を表します。

また、2011年3月の東日本大震災に見舞われ、開催が危ぶまれましたが、会場を変更するなど、センター校の京都大学、準備校の九州大学をはじめとする、運営に関わる方々の柔軟な対応により開催することが出来ました。東北大学の講義録作成を免除していただくという案も出ましたが、前年度素粒子パート準備校東京大学の鳥居真吾氏や、講義録作成校の名古屋大学、立教大学の方々をはじめとする多くの方の多大なご協力により講義録を完成させることが出来ました。これらの方々にも深く感謝します。

2011年度原子核三者若手夏の学校の開催にあたり援助していただいた京都大学基礎物理学研究所、素粒子論グループに深く感謝します。