M-理論とブレーンの不思議

2013.1.23

細道和夫

第2次ひも革命（1995）

（私が大学院に入学した年。）

＊ ひもの双対性の発見

＊ D-ブレーンの発見

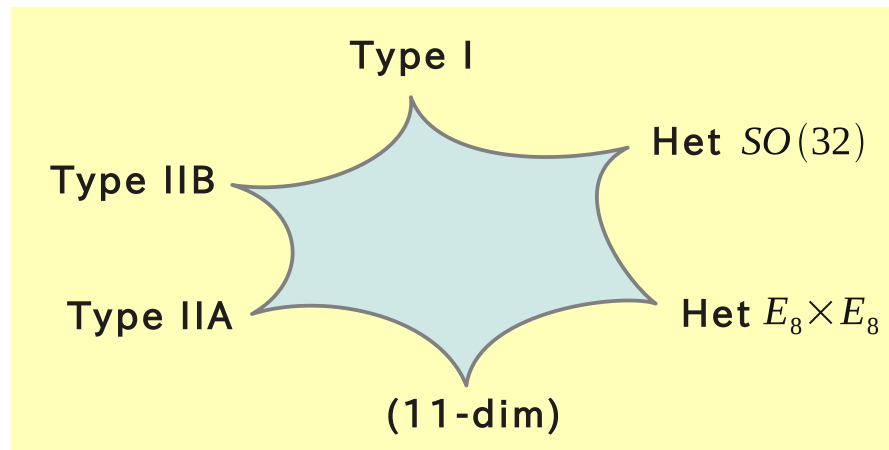
超弦理論へのアプローチが一新した。

ひもの双対性：

弱結合のひも理論 ⟷ 強結合のひも理論

表裏一体

5つの超弦理論が1つの
ネットワークにつながる。

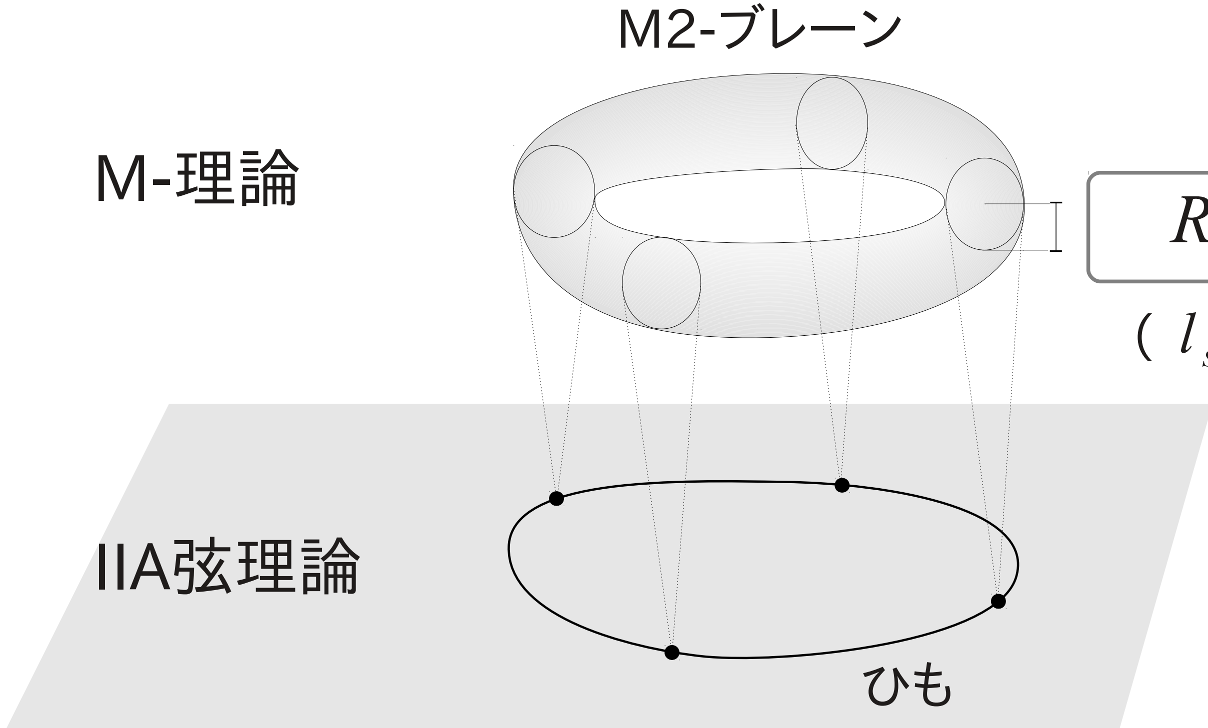


ブレーン：

高次元に拡がった膜状ソリトン物体。
双対性のもとで、ひもと役割が入れ替わる。

M-理論(Witten '95)

IIAひもの結合定数 g_s を強めてゆくと、11番目の次元が見えてくる。



$$R_{11} = g_s l_s$$

(l_s はIIAひもの基本長)

定義がない。

要請:低エネルギーで11次元超重力理論に帰着する。

M2-brane, M5-brane がある。

11次元超重力理論

$$g_{mn}, \qquad \psi_{m\alpha}, \qquad C = \frac{1}{6} C_{mnp} \mathrm{d}x^m \mathrm{d}x^n \mathrm{d}x^p \quad (\mathrm{d}C = F)$$

計量　　　　重力微子　　　　3階反対称テンソルゲージ場

$$S = \frac{1}{16\pi G} \left[\int \mathrm{d}^{11}x \sqrt{-g} R - \frac{1}{2} \int F \wedge *F - \frac{1}{6} \int C \wedge F \wedge F + \cdots \right],$$

Newton定数とPlanck長　$16\pi G = \frac{1}{2\pi} (2\pi \ell_{\mathrm{P}})^9$

無次元のパラメータが1こもない。

究極理論。

無次元のパラメータが1こもない理論。

しかし、無数の真空がある。例えば、

$\mathbb{R}^{1,9} \times \boxed{S^1}$ → 10次元の IIA 超弦理論

半径 R の円周

$$g_s = (R/\ell_{\mathrm{P}})^{3/2},$$

$$\ell_s = \ell_{\mathrm{P}}^{3/2} R^{-1/2}$$

$\mathbb{R}^{1,3} \times \boxed{\mathcal{M}_7}$ → 4次元の「素粒子模型」

Einstein方程式を満たす7次元空間

・・・選び方が無数にある。

理論の分類から幾何の分類へ

M-理論のブレーン

M2-brane (2+1次元) : $C_{(3)}$ の電荷。

M5-brane (5+1次元) : $C_{(3)}$ の磁荷。 ($\widetilde{C}_{(6)}$ の電荷。)

作用と張力

$$S_{\mathrm{M2}} = T_{\mathrm{M2}} \left\{ (\mathrm{vol}) + \int C_{(3)} \right\} \qquad T_{\mathrm{M2}} = \frac{2\pi}{(2\pi \ell_{\mathrm{P}})^3}$$

$$S_{\mathrm{M5}} = T_{\mathrm{M5}} \left\{ (\mathrm{vol}) + \int \widetilde{C}_{(6)} \right\} \qquad T_{\mathrm{M5}} = \frac{2\pi}{(2\pi \ell_{\mathrm{P}})^6}$$

cf) 相対論的荷電粒子の作用

$$S = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{x}^m \dot{x}^n g_{mn}(x)} + e \int d\tau \dot{x}^m A_m(x)$$

今日の話題:

M2-brane, M5-brane の**多体理論**における
最近の目覚ましい進展を紹介する。

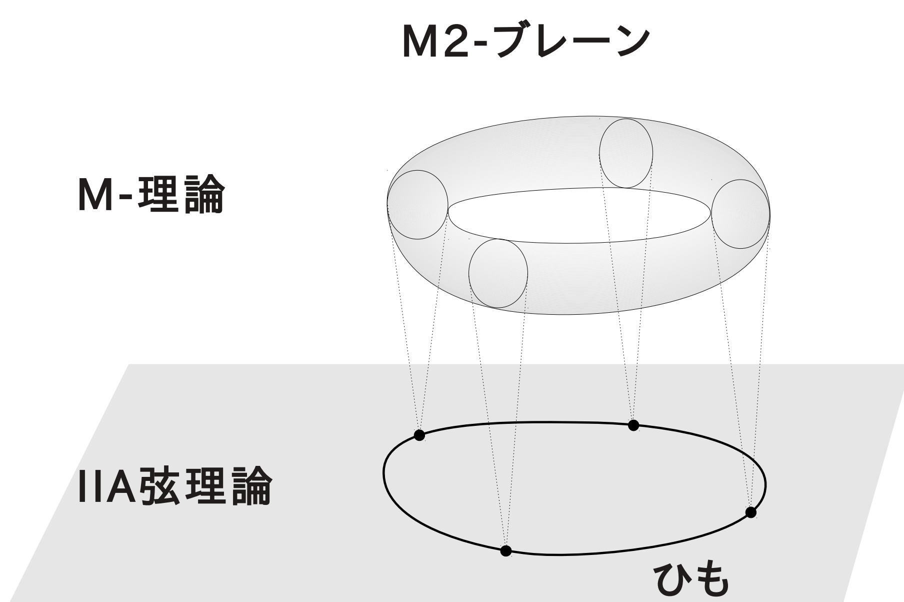
1．M2-brane 多体理論

-- BLG模型・ABJM模型 --

M2-brane：研究の動機

1．M2-brane の量子化で11次元量子重力を定義？

(cf. IIA string の量子化で10次元量子重力を定義）



もっともな取り組みだが、
このためのメンブレーンの
量子化はどうも難しすぎる。

M2-brane：研究の動機

2. ゲージ･重力対応 (Maldacena '97)

M2-brane N 枚の多体理論 （= 3次元場の理論）	=	$AdS_4 \times S^7$ 上の超重力理論 （= 4次元重力理論）

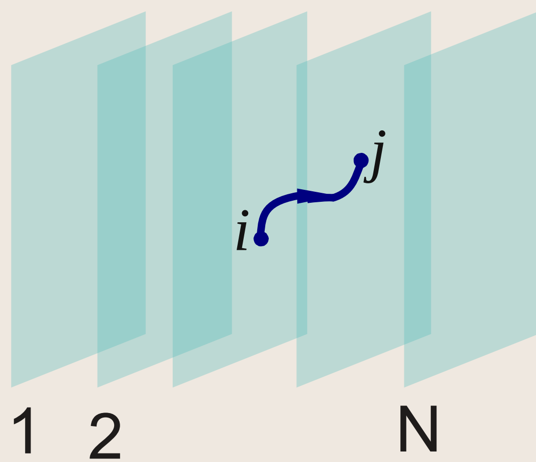
$$X_{-1}^2 + X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = \frac{L^2}{4} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^{2,3}$$

$$Y_1^2 + \cdots + Y_8^2 = L^2 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^8$$

$$(L^6 = 32\pi^2 \ell_{\mathrm{P}}^6 N, \quad N \gg 1)$$

1. より「小さい」問題だが
超弦理論からブラックホールの謎に迫ることのできる
重要な問題。

D-brane を N 枚重ねると、その上の開いたひもの運動から
非可換ゲージ対称性 U(N) が現れる。



$\Rightarrow \quad (A_\mu)_{ij}$

M2-brane を N 枚重ねると何が起こるか？
2007年の時点でほとんど手がかりなし。

M2-brane 多体理論の満たすべき性質

1. 3次元 $\mathcal{N}=8$ 超対称な共形場理論。

- Chern-Simons 型の理論？

$$S = \frac{k}{4\pi}\int \mathrm{Tr}(A\mathrm{d}A + \frac{2}{3}A^3), \quad k \in \mathbb{Z}$$

- YM相互作用、CS相互作用を含む一般の理論では $\mathcal{N}=4$ 以上の超対称性は実現できない。

2. 自由エネルギー F が計算できたとすると、$F \sim N^{3/2}$
（AdS/CFT対応からの要請）

- N x N 行列の理論ではないおそれがある。

M2-brane “ミニ革命” (2007)

$\mathcal{N}=3$ SUSYの壁を破る理論が発見され始めた。

$\boxed{\text{Bagger-Lambert(-Gustavsson) 理論}}$

$\mathcal{N}=8$ SUSY.

SO(4) C-S ゲージ場 ＋ 物質場の理論

3-代数: $[t^a, t^b, t^c] \;=\; f^{abc}{}_d t^d$

$\boxed{\text{Gaiotto-Witten 理論}}$

$\mathcal{N}=4$ SUSY.

Lie 超代数で特徴づけられる。

M2-brane “祭り” (2008)

$\mathcal{N}=3$ SUSYの壁を破る理論に多くの人が集まった。

$\boxed{\text{Bagger-Lambert(-Gustavsson) 理論}}$

$\mathcal{N}=8$ SUSY.

SO(4) C-S ゲージ場 + 物質場の理論

3-代数: $[t^a, t^b, t^c] \;=\; f^{abc}{}_d t^d$

$\boxed{\text{Gaiotto-Witten 理論}}$

$\mathcal{N}=4$ SUSY.

Lie 超代数で特徴づけられる。

Ki-Myeong Lee
（KIAS）

3-代数、というのは本質的でないような気がする。
普通のゲージ理論に書き直せたら、
ゲージ対称性をSO(4) 以外に一般化できると思うんだけれど。

Ki-Myeong Lee
（KIAS）

3-代数、というのは本質的でないような気がする。
普通のゲージ理論に書き直せたら、
ゲージ対称性をSO(4) 以外に一般化できると思うんだけれど。

皆で調べてみると、確かに普通のゲージ理論に書き直せて、
ゲージ対称性を一般化できない理由もよく分かった。
（この話は、他の人にすぐ論文を出された。）
取り敢えず、他に出来ることをまとめて最初の論文を書いた。

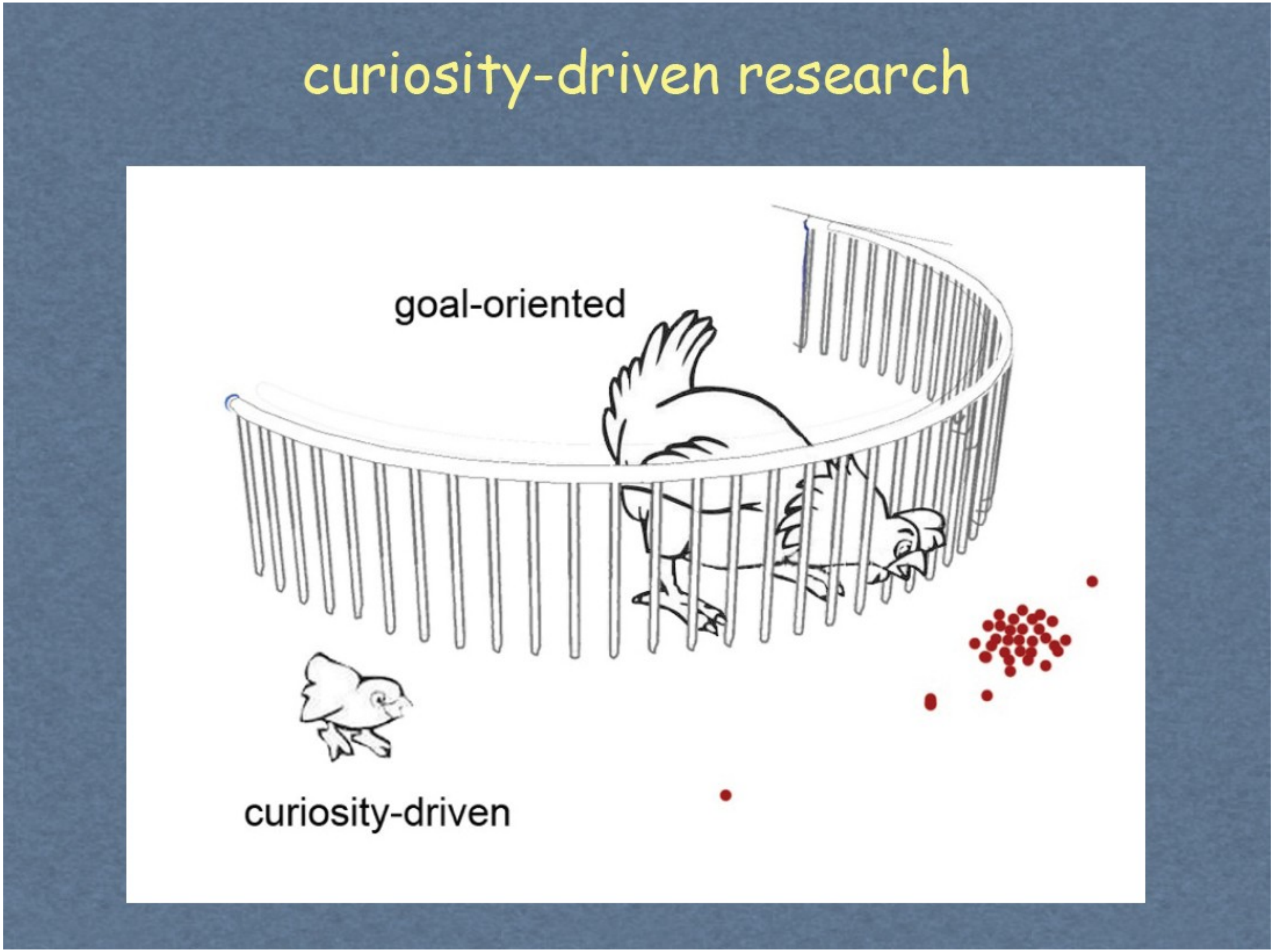
Ki-Myeong Lee
（KIAS）

教訓

1. 一見 trivial に思える計算でも、やると何か分かる。
   手を動かす時間を惜しんではいけない。

2. 祭りには、参加しなくてはならない。（楽しいから。）

KIASの談話室に当時貼ってあった絵



from Theodor W. Haensch, 2005 Nobel lecture slides

Gaiotto-Witten理論

$\mathcal{N}=4$ SUSY.　Lie 超代数で特徴づけられる。

例: Lie 超代数 U(M|N)

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$A \in U(M)$
$D \in U(N)$
B, C には反交換する数が入る。

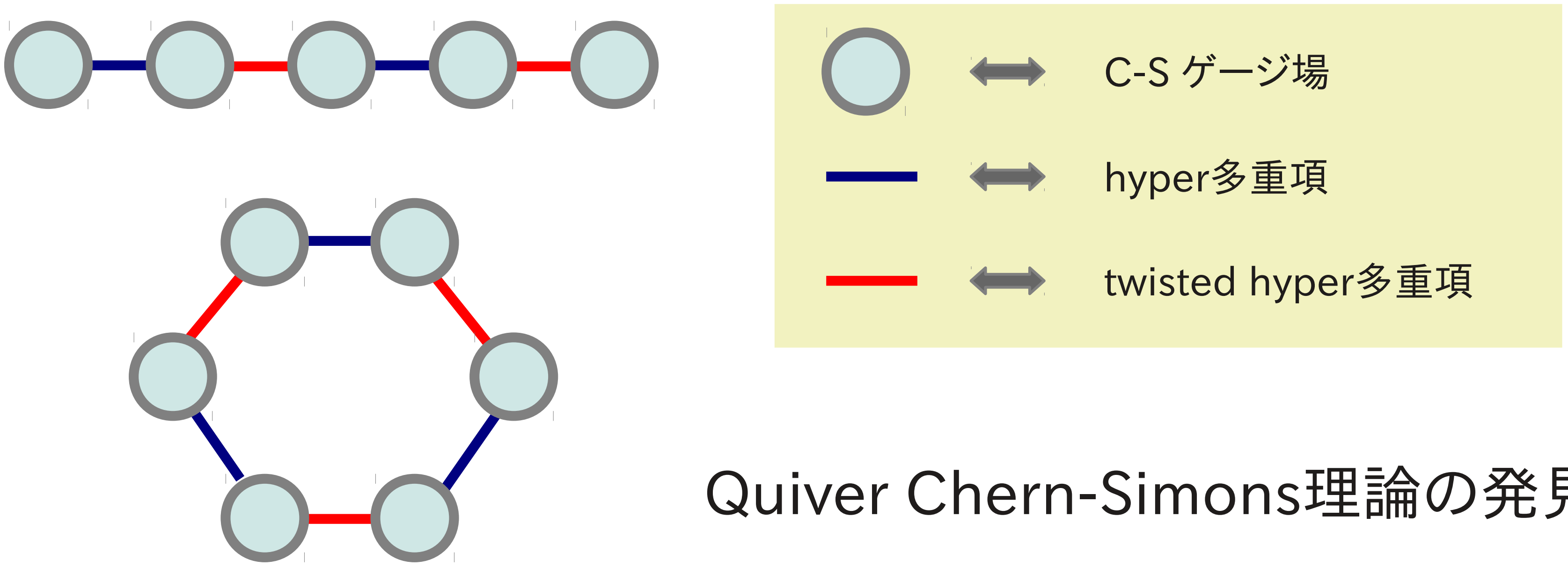
quiver図形

$\Longleftrightarrow$ C-S ゲージ場

$\Longleftrightarrow$ 物質場（hyper多重項）

Gaiotto-Witten理論は BLG理論を含んでいない。
両者を含むような拡張があるはず。

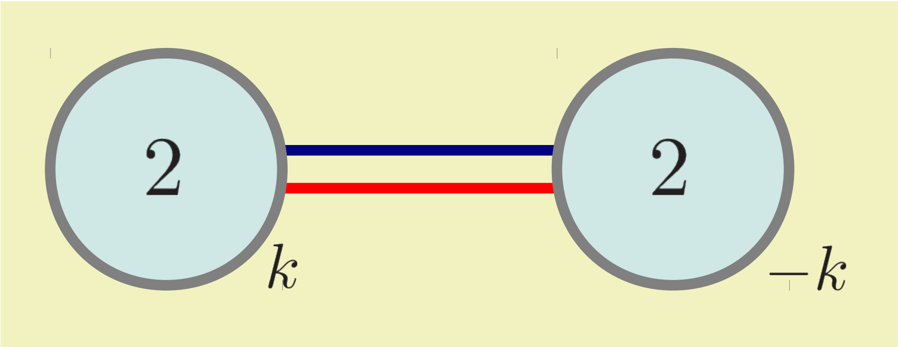
$\mathcal{N}=4$ SUSYのもとで hyper 多重項と
「鏡像」の関係にある物質場(twisted hyper多重項)を含めてみよう。



Quiver Chern-Simons理論の発見

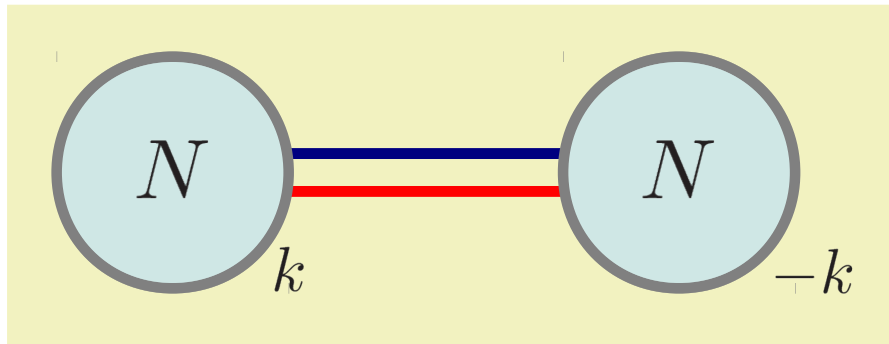
(Hosomichi-Lee-Lee-Lee-Park '09)

特別な場合：BLG模型



我々の quiver CS 理論にはBLG模型が含まれる。

特別な場合：ABJM模型 (Aharony-Bergman-Jafferis-Maldacena)



$\mathcal{N}=6$ SUSY.

オービフォルド $\mathbb{R}^{1,2}\times\mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_k$ 上のM2-brane 多体理論。

$$(z_1,z_2,z_3,z_4)\ \sim\ (\omega z_1,\omega z_2,\omega z_3,\omega z_4)\quad \omega\equiv e^{2\pi i/k}$$

$AdS_4\times(S^7/\mathbb{Z}_k)$ 上の超重力理論と対応。

M2-brane多体理論の標準的な模型になった。

M2-braneの論文 topcite100+

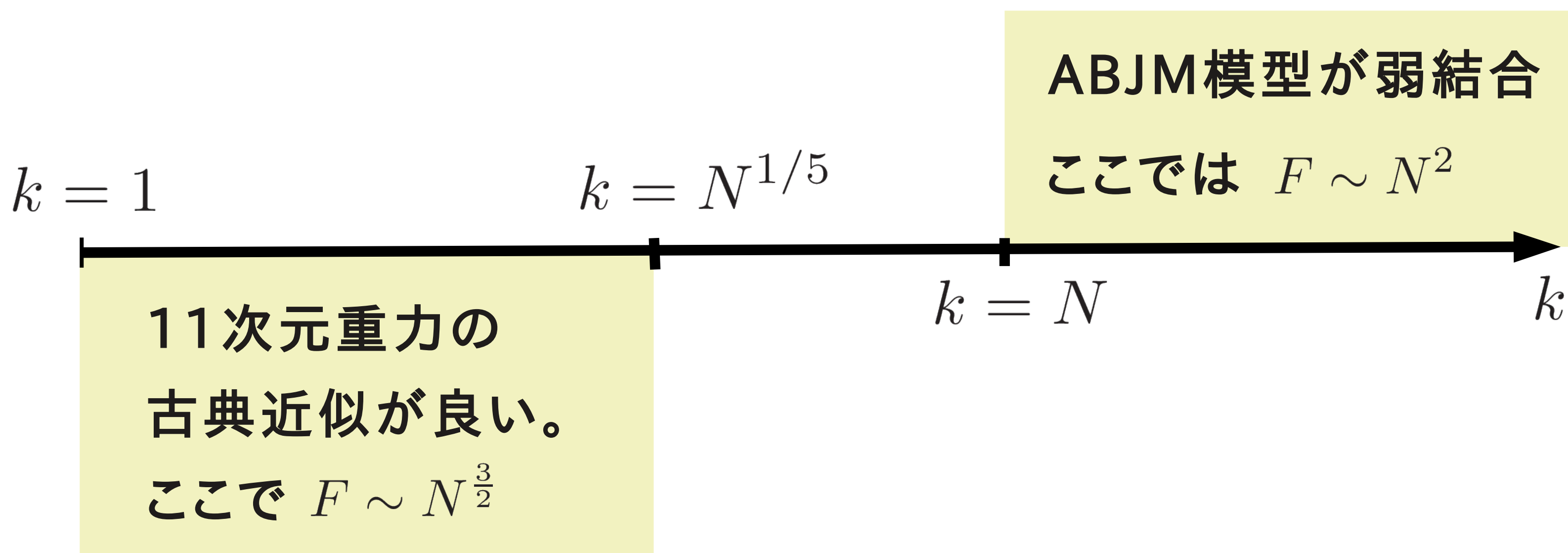
2007/11	Bagger-Lambert
-----	-----
2008/03	Van Raamsdonk
2008/04	Distler-Mukhi-Papageorgakis-Van Raamsdonk
	Lambert-Tong
	Papadopoulos
	Gaiotto-Witten
2008/05	Ho-Matsuo
	Gomis-Milanesi-Russo
	Benvenuti-Rodrigues-Gomez-Tonni-Verlinde
	Ho-Imamura-Matsuo
	Ho-Imamura-Matsuo-Shiba
	Hosomichi-Lee-Lee-Lee-Park
2008/06	Bandres-Lipstein-Schwarz
	Gomis-Rodriguez-Gomez-Van Raamsdonk-Verlinde
	Aharony-Bergman-Jafferis-Maldacena
	Benna-Klebanov-Klose-Smedback
	Nishioka-Takayanagi
	Minahan-Zarembo
	Gaiotto-Giombi-Yin
	Grignani-Harmark-Orselli
	Hosomichi-Lee-Lee-Lee-Park
2008/07	Bagger-Lambert
	Gromov-Vieira
	Gomis-Rodriguez-Gomez-Van Raamsdonk-Verlinde
	Bak-Rey-Song
	Krishnan
	Aharony-Bergman-Jafferis
2008/08	Martelli-Sparks
	Hanany-Zaffaroni
-----	------
2009/09	Kapustin-Willett-Yaakov
2010/07	Drukker-Marino-Putrov

“祭り”

自由エネルギーの謎

ABJM模型は$N \times N$行列の場の理論。

この自由エネルギーがなぜ$F \sim N^{3/2}$と振る舞うかというと、



指数が減るのはABJM模型の強結合の効果。

ここで自由エネルギーを厳密に計算できるか。

分配関数の厳密公式 (Kapustin-Willett-Yaakov '09)

3次元球面上なら、**局所化定理**を用いて
超対称ゲージ理論の経路積分を行列積分に簡単化できる。

ABJM模型の分配関数の厳密公式

$$e^{-F} = \int \prod_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\mu_i}{2\pi} \frac{\mathrm{d}\nu_i}{2\pi} e^{\frac{ik}{4\pi}\sum_i(\mu_i^2-\nu_i^2)} \frac{\prod_{i<j} 4\sinh^2\frac{\mu_i-\mu_j}{2} \cdot 4\sinh^2\frac{\nu_i-\nu_j}{2}}{\prod_{i,j} 4\cosh^2\frac{\mu_i-\nu_j}{2}}$$

これに large N 行列積分の伝統的手法を適用すると、

$$F \simeq \frac{\sqrt{2}\pi}{3} k^{\frac{1}{2}} N^{\frac{3}{2}}$$

(Drukker-Marino-Putrov '10)

まとめ: M2-brane 多体理論の発展

* 新しい3次元ゲージ理論の発見
* 分配関数の厳密公式を用いた、
  AdS/CFT対応の精密な検証

2. M5-brane 多体理論

-- 6次元 $\mathcal{N}=(2,0)$ 理論 --

(2,0)-理論

* Lagrangian を書けない、非自明な6次元CFT。
* M5-braneの数 N だけでラベルされる。
* コンパクト化により、低次元の多様なゲージ理論を生じる。

重力を含まない究極理論。

(2,0)-理論のコンパクト化の例:

$\mathbb{R}^{1,4} \times S^1$ $\longrightarrow$ 5次元 $\mathcal{N}=2$ SYM理論

半径 R_1 結合定数 $g_{(5)}^2 = 8\pi^2 R_1$

(2,0)-理論のコンパクト化の例：

$\mathbb{R}^{1,4} \times S^1 \longrightarrow$ 5次元 $\mathcal{N}=2$ SYM理論

半径 R_1

結合定数 $g_{(5)}^2 = 8\pi^2 R_1$

$\mathbb{R}^{1,3} \times S^1 \times S^1 \longrightarrow$ 4次元 $\mathcal{N}=4$ SYM理論

半径 R_1, R_2

結合定数 $\dfrac{1}{g_{(4)}^2} = \dfrac{2\pi R_2}{g_{(5)}^2} = \dfrac{R_2}{4\pi R_1}$

(2,0)-理論のコンパクト化の例:

$\mathbb{R}^{1,3} \times S^1 \times S^1$ → 4次元 $\mathcal{N}=4$ SYM理論

半径 R_1, R_2

結合定数 $\dfrac{1}{g_{(4)}^2} = \dfrac{2\pi R_2}{g_{(5)}^2} = \dfrac{R_2}{4\pi R_1}$

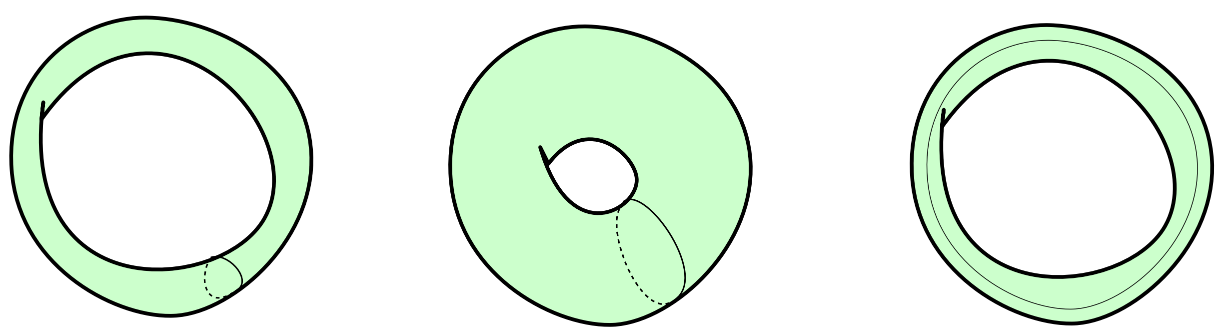
＊ コンパクト化の順序を入れ替えると、結合定数 $\dfrac{1}{g_{(4)}^2} = \dfrac{R_1}{4\pi R_2}$

結合定数の値が違うが、実は双対な（同じ）理論。

別の言い方：

結合定数　$$\frac{1}{g_{(4)}^2} = \frac{R_2}{4\pi R_1}$$

M5-brane の巻きつくトーラスの形を変形するにつれて、
ゲージ結合がどう変わるか。



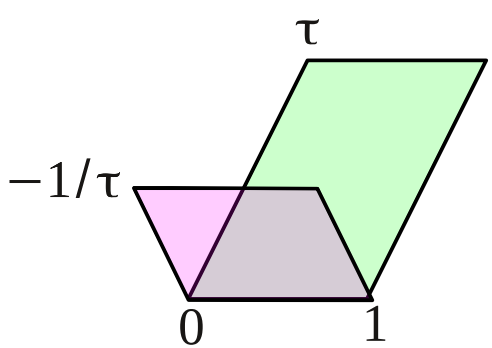
$R_1 \ll R_2$　　$R_1 \sim R_2$　　$R_1 \gg R_2$

弱結合 → **強結合** → **弱結合**
（双対な記述での）

(2,0)-理論のコンパクト化の例：

$\mathbb{R}^{1,3} \times T^2$ → 4次元 $\mathcal{N}=4$ SYM理論

形 τ **複素結合定数** $\tau = \dfrac{\theta}{2\pi} + \dfrac{4\pi i}{g^2}$



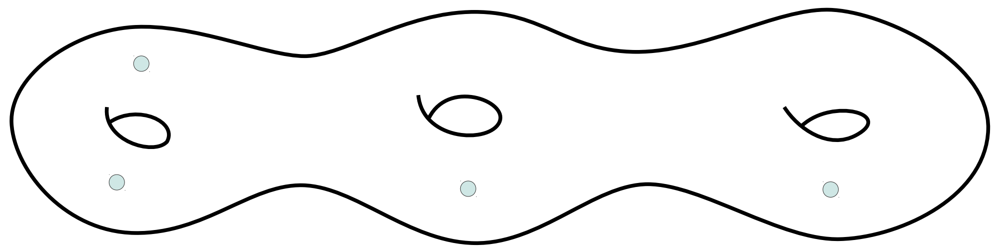
Montonen-Olive の双対性

結合定数 τ の理論と $-1/\tau$ の理論は同じ。

ラグランジアンのない「理由」：

もし(2,0)理論のラグランジアンが書けたとすると、
Montonen-Oliveの双対性がラグランジアンを書いて
説明できてしまう。

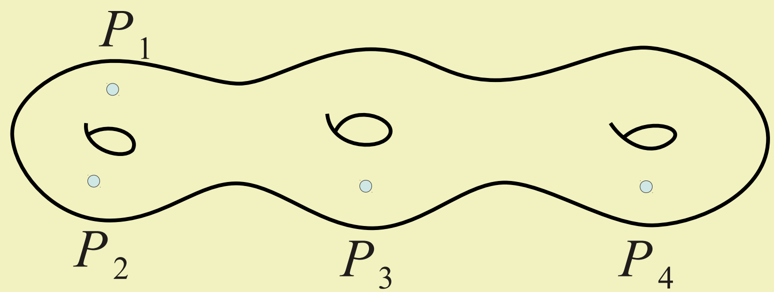
Gaiotto の発見(2009):



N 枚の M5-brane を点つきリーマン面に巻きつけて得られる
4次元の場の理論を調べた。

2枚のときで充分面白いので、以下 N=2 の話に限る。

Gaiotto の発見(2009):



形(点の位置座標を含む): τ

点 P_a の尖りぐあい: m_a

点つきリーマン面 Σ

M5-brane を2枚巻きつけると

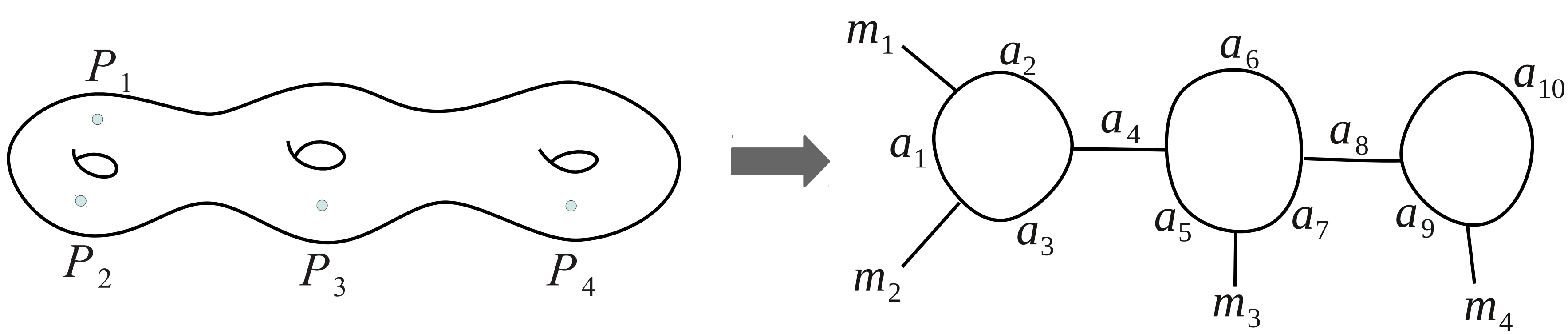
Gaiotto のゲージ理論 $T(\Sigma)$

4次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称なゲージ理論。

τ : 複素結合定数

m_a : 物質場の質量

ゲージ理論の読み取り方：



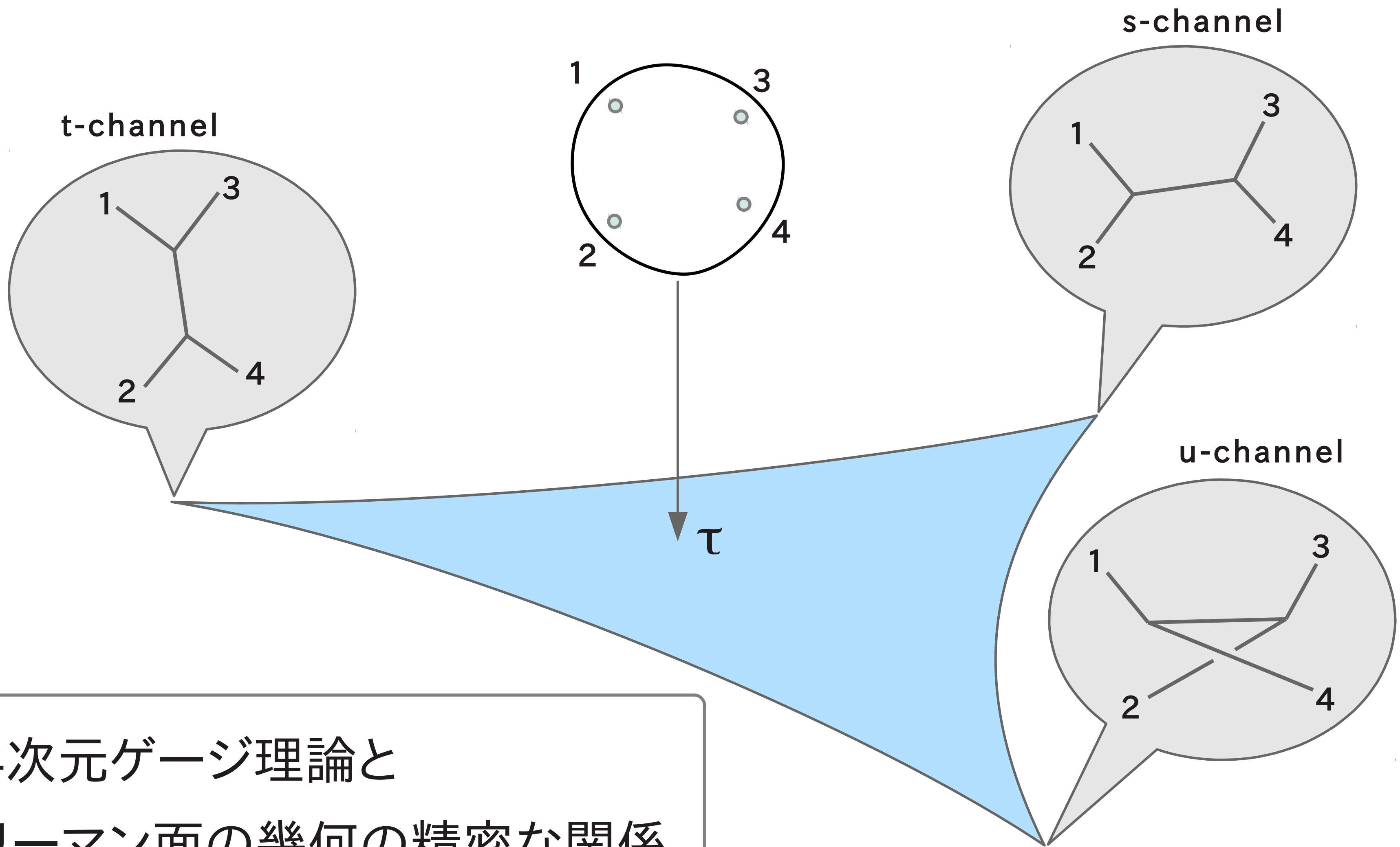
リーマン面の形を変形して、細い管の構造物に退化させる。
＝ ゲージ結合を弱くする。

上の例では、10本の細い管に2枚ずつ M5-brane が巻きついている。
弱結合の $SU(2)^{10}$ ゲージ理論。

リーマン面の退化のさせ方は一通りでない。

例えば4点つき球面の場合は、

異なる極限操作から3通りのゲージ理論が得られる。



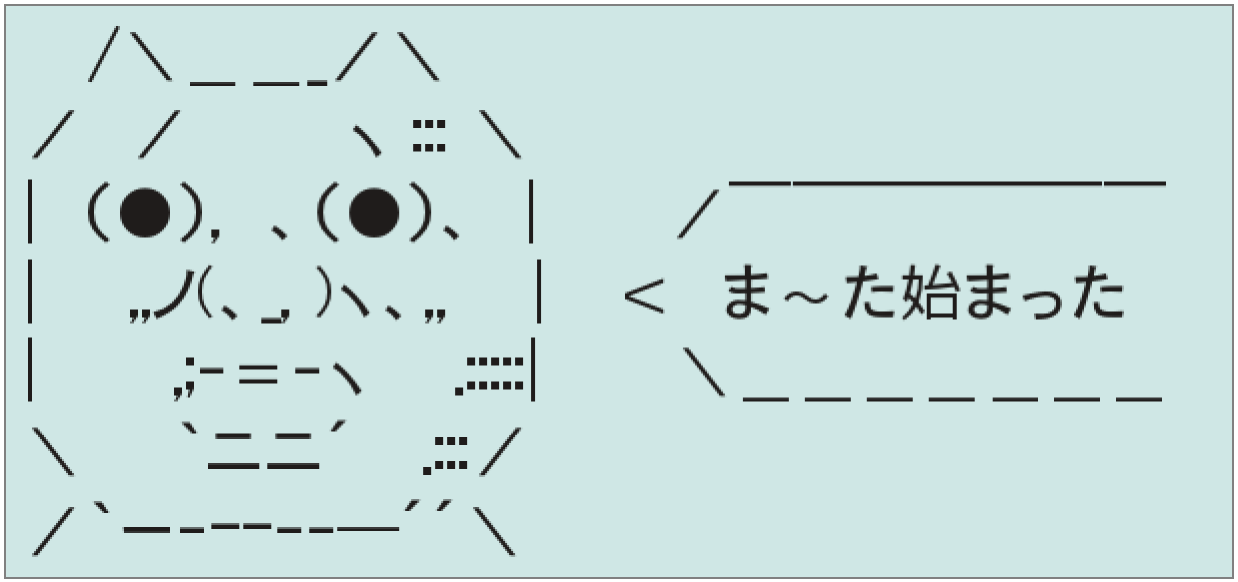
4次元ゲージ理論と

リーマン面の幾何の精密な関係

AGT関係式 (Alday-Gaiotto-Tachikawa '09)

4次元ゲージ理論の 分配関数	＝	2次元リウビルCFTの 相関関数

「謎の一致」



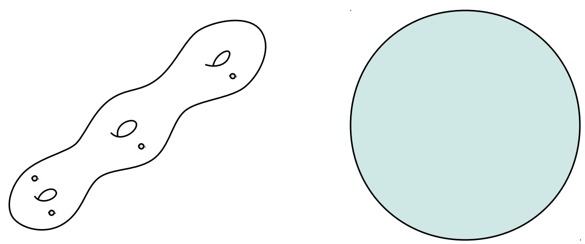
Gaiotto はこの年奇抜なアイデアを次々に発表していたので、
ちょっと辟易していた。

AGT関係式: なぜ成り立つのか

$Z_{S^4}(m_a, \tau) \ = \ $ 4次元ゲージ理論 $T(\Sigma)$ の球面上の分配関数

(cf. Pestun '07)

$= \ \Sigma \times S^4$ に巻きついた M5-brane 2枚の分配関数



球面に先に巻きつけたと思うと、

$=$ 2次元場の理論の、Σ 上の相関関数

答えがリーマン面 Σ の形 τ にしか依らないので、
CFTのはず。

2次元リウビル理論

結合定数:　b

作用関数:　$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + e^{2b\phi}$

演算子:　$V_m = e^{(b+b^{-1}+2im)\phi}$

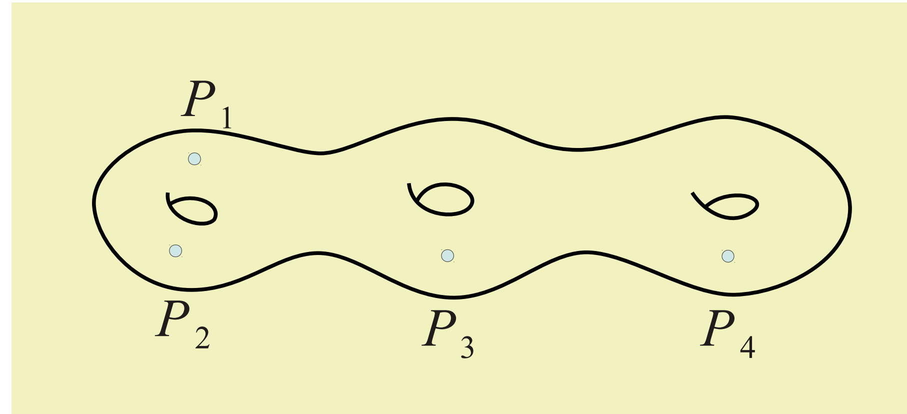
S^4 上の2枚のM5-brane　=　リウビル理論 (b=1)

リウビル理論は、弦理論の多くの場面で現れる重要なCFT。
が、まさか M5-brane から出てくるとは!

リウビル理論は自分の専門と思っていたので
あせった。

リウビル相関関数

$$\left\langle \prod_a V_{m_a}(P_a) \right\rangle_{\tau,\bar{\tau}}$$



考えてみると、相関関数の計算法をよく知っているのは
形 $(\tau, \bar{\tau})$ への依存性が自明な場合だけだった。

→ （球面上の2点、3点関数）

そのような場合も m_a への依存性は非自明。
「DOZZ公式」
Dorn-Otto-Zamolodchikov-Zamolodchikov

リウビル相関関数

一般の相関関数を書き下すためには、、、

Conformal block 関数 $F_\alpha(m_a, \tau)$

共形不変性から従う Ward 恒等式（τ の正則線形微分方程式）の解。

α ： 独立解をラベルするパラメータ。

$$\boxed{\left\langle \prod_a V_{m_a}(P_a) \right\rangle_{\tau,\bar\tau} = \int \mathrm{d}\nu(\alpha) \Big| F_\alpha(m_a, \tau) \Big|^2}$$

DOZZ公式から
決まる部分

Conformal block のことを勉強しなければならない。

、、と思っていたら、東工大（今村さん・伊藤さん）から
集中講義の依頼が来た。

Alexei Zamolodchikov (1952 -- 2007)

Alexei Zamolodchikov (1952 -- 2007)

リウビル理論の開拓者。

2001年に基研の客員教授をされた。

リウビル理論の境界問題について書いた短い論文を、すごく褒めてくださった。

Alexei Zamolodchikov (1952 -- 2007)

1984年から、conformal block 関数の研究に取り組まれた。

「**Zamolodchikovの漸化式**」は、

AGT関係式の技術的証明にも応用されている。

係数 $r_{m,n}$ の話

Zamolodchikovの漸化式の中に、解析的な導出の説明されていない係数 $r_{m,n}$ があった。1984年の文献からくまなく探したが、当時の論文にはどこにも説明は見つからなかった。

係数 $r_{m,n}$ の話

あるとき、別の話題についての 2003年の論文の中に導出を見つけた。

We are looking for the following ratio

$$r_{m,n} = 2\frac{U_{p,q}(\tilde{\alpha}_{m,n})}{U_{p,q}(\alpha_{m,n})}B_{m,n} \tag{7.3}$$

It is easy to see that the prefactor in equation (7.1) exactly cancels out in the ratio so that it does not depend on (p,q) and

$$\frac{U_{1,1}(\tilde{\alpha}_{m,n})}{U_{1,1}(\alpha_{m,n})} = \frac{(\pi\mu\gamma(b^2))^{-n}}{(mb^{-2}-n)\,\gamma(m-nb^2)}\prod_{k=-n}^{n}(mb^{-2}+k)\prod_{l=-m+1}^{m-1}(l+nb^2) \tag{7.4}$$

Multiplying this by $2B_{m,n}$ from (5.17) we obtain an expression

$$r_{m,n} = 2\prod_{\substack{k=1-n \\ l=1-m \\ (k,l)\neq(0,0)}}^{\substack{m \\ n}}(lb^{-1}+kb) \tag{7.5}$$

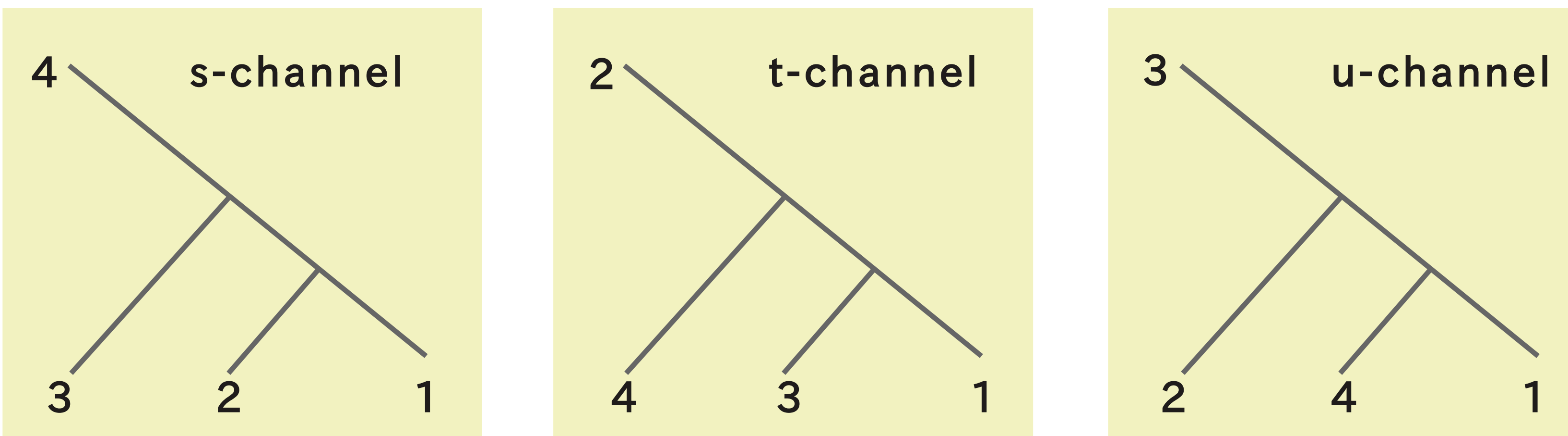
which generalizes the manual results (6.2). It seems relevant to compare this product with the denominator in eq.(7.10) of ref.[5].

(Zamolodchikov の漸化式)

Conformal block の完全系（基底）の取り方

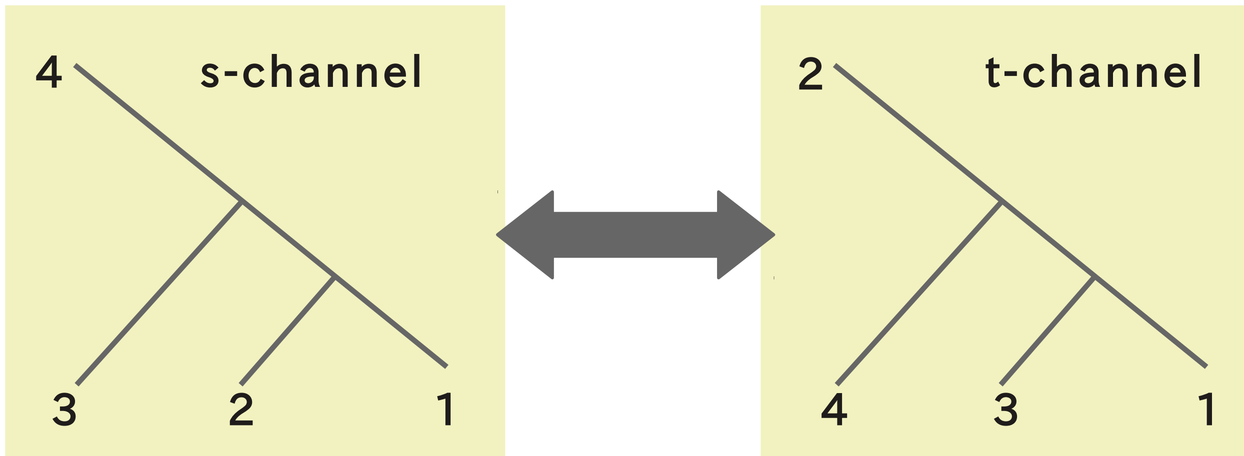
演算子積 $\prod_a V_{m_a}(P_a)$ を展開する時の、

掛け算の順序に応じて存在する。



異なる基底に移る = ゲージ理論の双対性

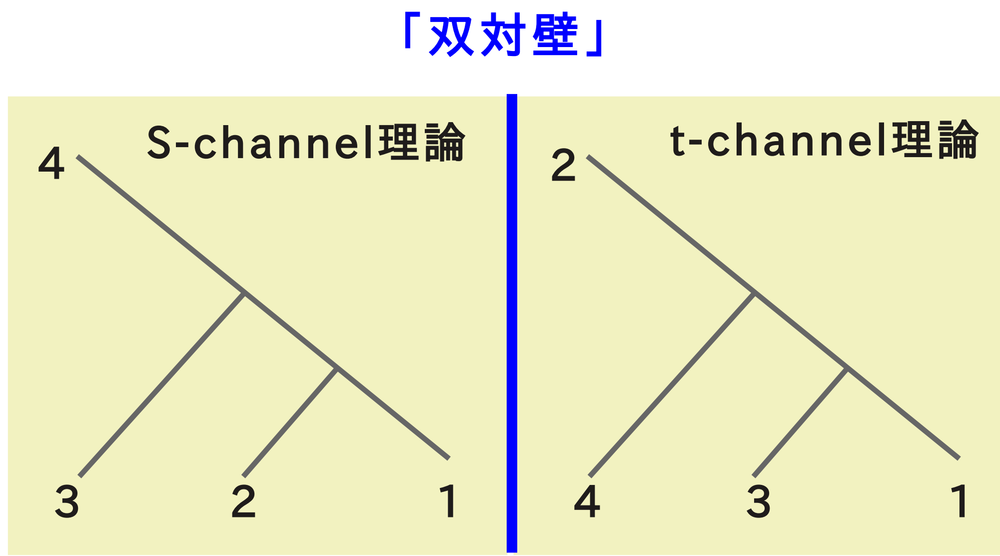
基底変換



$$F_{\alpha}^{(s)}(m,\tau) \; = \; \int \mathrm{d}\nu(\beta) \underline{K(\alpha,\beta,m)} F_{\beta}^{(t)}(m,\tau)$$

この変換係数は、実はある3次元ゲージ理論の
分配関数に対応すると予想。

AGT関係式の3次元版



$$F_{\alpha}^{(s)}(m,\tau) \;=\; \int \mathrm{d}\nu(\beta)\underline{K(\alpha,\beta,m)}F_{\beta}^{(t)}(m,\tau)$$

2つの互いに双対なゲージ理論を3次元面で貼り合わせると、

面上に3次元ゲージ理論が現れる。

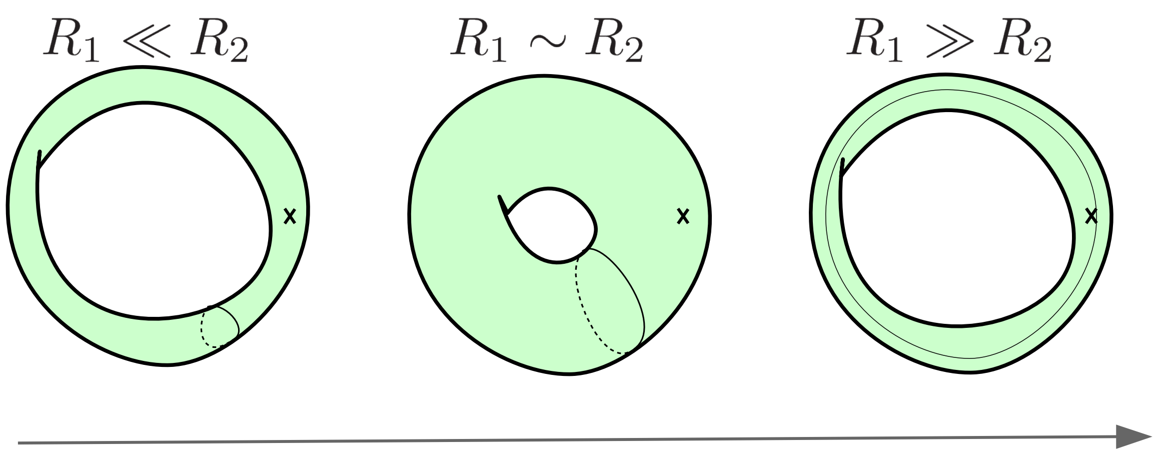
$K(\alpha,\beta,m)$ ＝（双対壁理論のS^3分配関数）

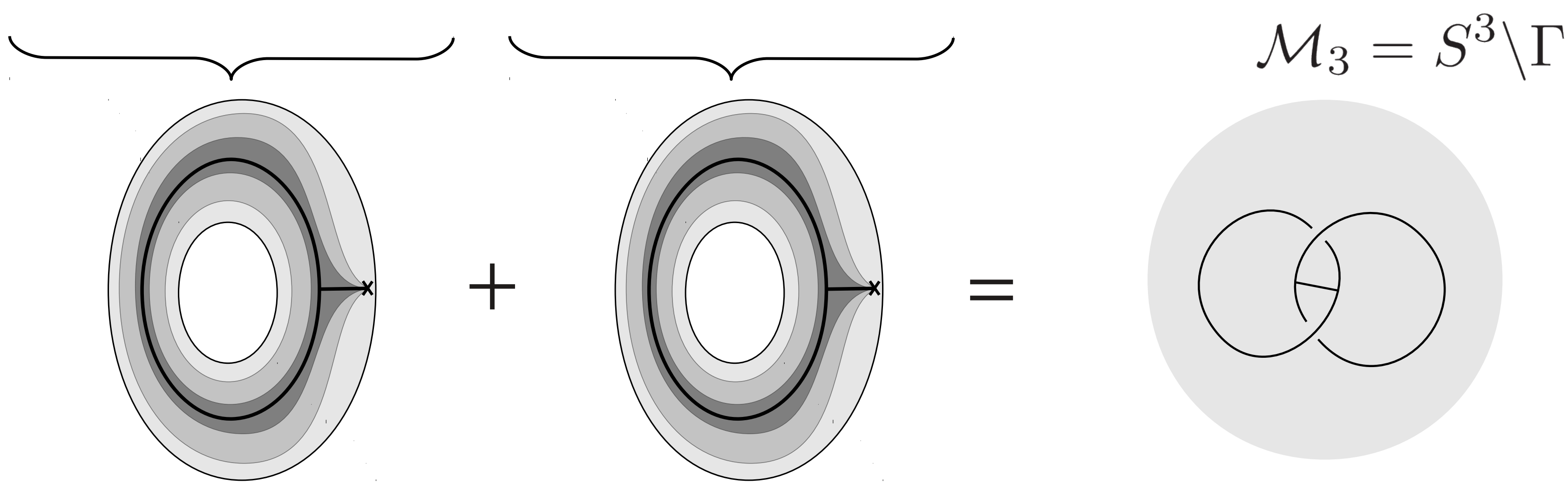
AGT関係式の3次元版

最近では、M5-brane を $S^3 \times \underline{\mathcal{M}_3}$ に巻きつける話に発展している。

（3次元双曲多様体）

例: 一点つきトーラス





歪んだ球面への拡張

これまでの話:

球面(S^3, S^4)上のゲージ理論 → リウビル理論 (b=1)

Q:　一般の b を持つリウビル理論を再現するにはどうすれば良いか?

SUSY を損なわないで、丸い計量を歪ませることができるか?

歪んだ球面上でも、分配関数の厳密計算ができるか?

リウビル理論

結合定数:　b

作用関数:　$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + e^{2b\phi}$

歪んだ球面への拡張

これまでの話:

球面 (S^3, S^4) 上のゲージ理論 → リウビル理論 (b=1)

Q: 一般の b を持つリウビル理論を再現するにはどうすれば良いか?

SUSY を損なわないで、丸い計量を歪ませることができるか?

歪んだ球面上でも、分配関数の厳密計算ができるか?

A:

$$S_b^3 \ : \quad b^2(X_1^2 + X_2^2) + b^{-2}(X_3^2 + X_4^2) = 1$$

$$S_b^4 \ : \quad b^2(X_1^2 + X_2^2) + b^{-2}(X_3^2 + X_4^2) + c^2 X_5^2 = 1$$ （c は任意）

* ただし、計量以外の背景場を同時に立ち上げる必要ある。

Hama-Hosomichi-Lee '11, Hama-Hosomichi '12

まとめ: M5-brane 多体理論の発展

* 場の理論と幾何のあいだの精密な関係
  ゲージ理論の双対性の精密な理解
* 分配関数などの厳密公式を手がかりとした、
  いろいろな場の理論の間の次元をまたいだ関係の発見
* まだ面白い発見がありそう。

今後の展望

球面上のゲージ理論の分配関数、およびその拡張
＝　ゲージ理論を特徴づける新しいタイプの物理量

局所化原理を用いた厳密計算のテクニックの発展、
既存の手法（摂動論、繰り込み群、、）と融合

共同研究者の皆さん

基研の皆さん

GCOEの皆さん

「学術創成」研究の皆さん

江口先生

有難うございました。

今後ともよろしくお願いいたします。