数値シミュレーションによる超対称ゲージ理論の非摂動的研究とゲージ／重力対応

第９回木村利栄理論物理学賞受賞記念講演

2016.1.20　京都大学基礎物理学研究所

西村　淳　（KEK理論センター ＆ 総研大）

0. はじめに

- 重力の量子論

  宇宙の始まりや成り立ちを解明する上で必要不可欠
  通常の場の理論の枠内ではくりこみ不可能

- 超弦理論

  紫外発散がない

  閉じた弦　　スピン2のゼロ質量粒子（重力子）
  開いた弦　　スピン1のゼロ質量粒子（ゲージ粒子）

  非摂動的定式化
  （場の理論における格子ゲージ理論に相当するもの）
  が確立していない

超弦理論の非摂動的定式化に関する進展

(string field theory以外)

- ラージNゲージ理論における1/N展開

  弦の摂動論との関係 ('t Hooft, 1974)

- ラージNゲージ理論における時空の創発

  江口・川合模型 (Eguchi-Kawai, 1982)

- 行列模型による非臨界弦の非摂動的定式化

  double scaling limit (Brezin-Kazakov, Douglas-Shenker, Gross-Migdal , 1990)

- 行列模型による臨界弦の非摂動的定式化（予想）

  BFSS, IKKT行列模型 (Banks et al. 1996, Ishibashi et al., 1997)

- ラージNゲージ理論 = AdS時空上の弦理論（予想）

  ゲージ／重力対応 (Maldacena, 1998)

⇒ N×Nの行列を基本的な自由度と考えることにより、超弦理論を非摂動的に定式化する

ラージNゲージ理論や行列模型
　～　超弦理論における``格子ゲージ理論"

- QCDのときと同様、超弦理論においても、
  数値シミュレーションが重要な研究手段。

- 今のところ「予想」にすぎない
  BFSS, IKKT行列模型　や　ゲージ／重力対応　を検証

- （予想が正しければ）　これらの理論を用いて、
  宇宙の始まり、ブラックホールの熱力学・蒸発
  といった　量子重力にまつわる難しい問題を解明

- 技術的な困難　：　ラージN、　超対称性、　符号問題

花田氏との共著論文リスト

KOMABA2007（米谷さん還暦記念の研究会）
2007年2月10日（土）、11日（日）

1. Masanori Hanada, Jun Nishimura, Shingo Takeuchi,
Non-lattice simulation for supersymmetric gauge theories in one dimension
Phys.Rev.Lett. 99 (2007) 161602, arXiv:0706.1647 [hep-lat]

2. Konstantinos N. Anagnostopoulos, Masanori Hanada, Jun Nishimura, Shingo Takeuchi,
Monte Carlo studies of supersymmetric matrix quantum mechanics with sixteen supercharges at finite temperature
Phys.Rev.Lett. 100 (2008) 021601, arXiv:0707.4454 [hep-th]

3. Masanori Hanada, Akitsugu Miwa, Jun Nishimura, Shingo Takeuchi,
Schwarzschild radius from Monte Carlo calculation of the Wilson loop in supersymmetric matrix quantum mechanics
Phys.Rev.Lett. 102 (2009) 181602, arXiv:0811.2081 [hep-th]

4. Masanori Hanada, Yoshifumi Hyakutake, Jun Nishimura, Shingo Takeuchi,
Higher derivative corrections to black hole thermodynamics from supersymmetric matrix quantum mechanics
Phys.Rev.Lett. 102 (2009) 191602, arXiv:0811.3102 [hep-th]

5. Masanori Hanada, Jun Nishimura, Yasuhiro Sekino, Tamiaki Yoneya,
Monte Carlo studies of Matrix theory correlation functions
Phys.Rev.Lett. 104 (2010) 151601, arXiv:0911.1623 [hep-th]

6. Masanori Hanada, So Matsuura, Jun Nishimura, Daniel Robles-Llana,
Nonperturbative studies of supersymmetric matrix quantum mechanics with 4 and 8 supercharges at finite temperature
JHEP 1102 (2011) 060, arXiv:1012.2913 [hep-th]

7. Masanori Hanada, Jun Nishimura, Yasuhiro Sekino, Tamiaki Yoneya,
Direct test of the gauge-gravity correspondence for Matrix theory correlation functions,
JHEP 1112 (2011) 020, arXiv:1108.5153 [hep-th]

8. Masanori Hanada, Masazumi Honda, Yoshinori Honma, Jun Nishimura, Shotaro Shiba, Yutaka Yoshida
Numerical studies of the ABJM theory for arbitrary N at arbitrary coupling constant
JHEP 1205 (2012) 121, arXiv:1202.5300 [hep-th]

9. Masanori Hanada, Yoshifumi Hyakutake, Goro Ishiki, Jun Nishimura,
Holographic description of a quantum black hole on a computer,
Science 344 (2014) 882-885, arXiv:1311.5607 [hep-th]

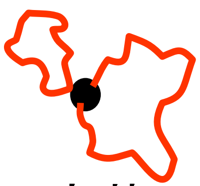
目次

1. ゲージ／重力対応の直観的描像

超弦理論におけるソリトン 「Dブレーン」

p 次元の超平面状に弦が凝縮したような状態

$p=0$

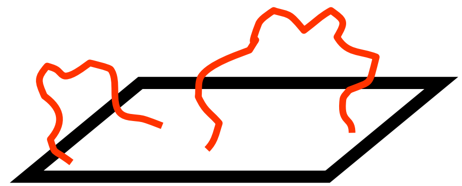


点状

$p=1$

ひも状

$p=2 \cdots$



膜状
mem<u>brane</u>

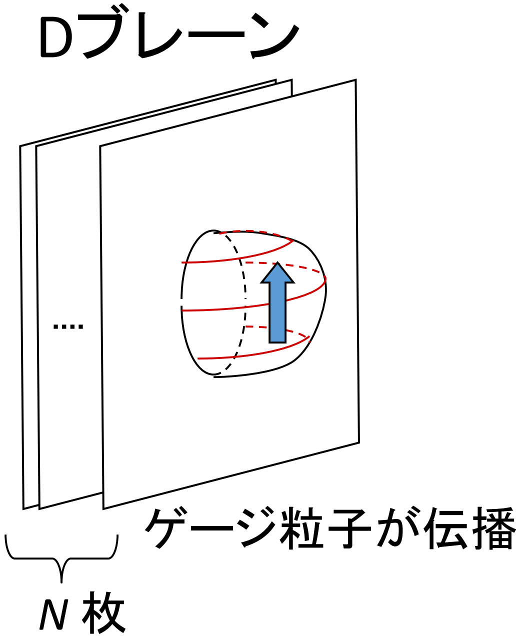
総称してブレーン

ポルチンスキー (1995)

開いた弦の両端で、<u>D</u>irichlet境界条件を課すことに相当。 → Dブレーン

N枚のDブレーン上に励起した開いた弦の低エネルギー有効理論

$(p+1)$ 次元の広がりを持つ

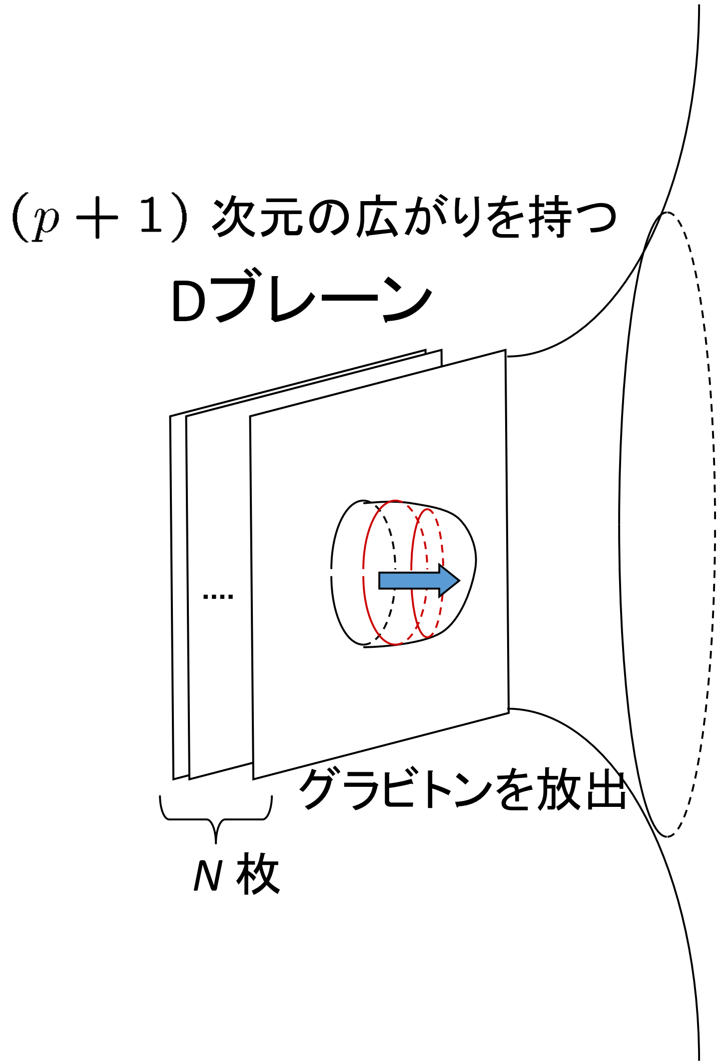


i 番目のブレーンと j 番目のブレーンに端を持つ開いた弦から現れるゲージ粒子

$$A_\mu{}^{ij}(x) \qquad \begin{array}{c} \mu = 0, \cdots, p \\ i, j = 1, \cdots, N \\ x \in \mathbf{R}^{(p+1)} \end{array}$$

(p+1)次元 超対称 U(N) ゲージ理論

N枚のDブレーンは開いた紐の源にもなっており、時空を曲げる



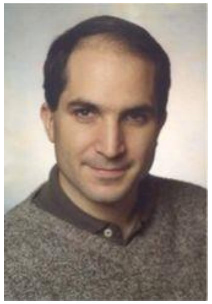
閉じた弦の低エネルギー有効理論
（10次元の超重力理論）

ブラック p-ブレーン解

(p+1)次元の並進対称性を持つ
超重力理論の古典解

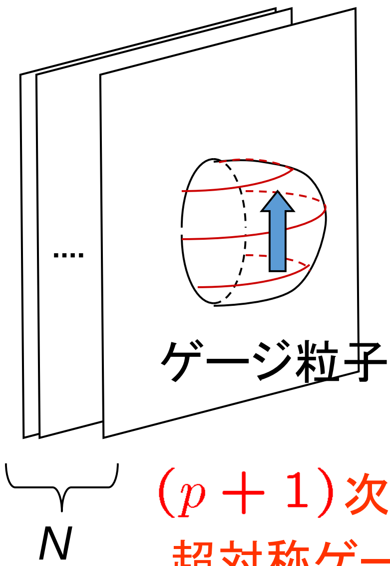
ゲージ／重力対応（予想）

マルダセナ (1997)

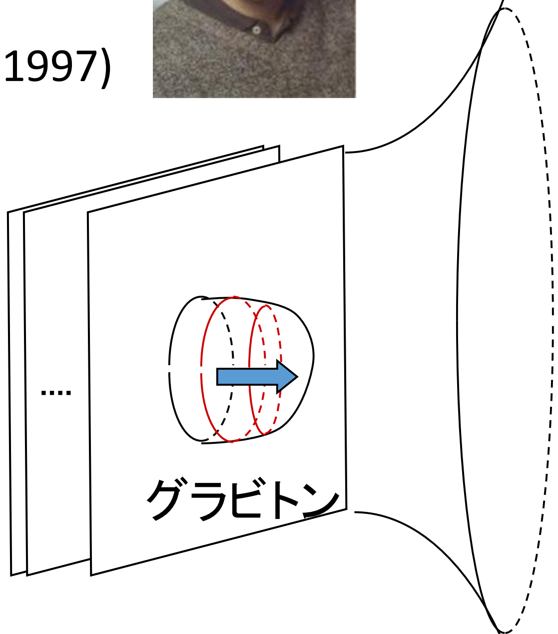


$(p+1)$ 次元の広がりを持つ

Dブレーン



Dブレーンに対する
2つの見方



$(p+1)$次元 U(N)
超対称ゲージ理論

＝

ブラック p-ブレーン解

10次元超重力理論の古典解

’t Hooft 極限

$\lambda = g_{\rm YM}^2 N$ を固定して
$N \to \infty$ の極限をとる

→ 弦のループ効果が無視できる

さらに、強結合極限（$\lambda \to \infty$）

→ 弦の広がりの効果が無視できる
（α' 補正）

ゲージ／重力対応（予想）の意義

- ’t Hooft (1974)のアイディアの具体的な実現

ラージNゲージ理論の1/N展開 と 弦の摂動論の関係

但し、10次元の曲がった時空上の弦理論

超弦理論の非摂動的定式化を与える可能性

- (p+1)次元の場の内部自由度から、(9-p)次元分が創発

ホログラフィック原理 (’t Hooft 1993, Susskind 1995) の具体的実現

時空の創発 (emergent space-time) ～「時空はfundamentalでない」

- ブラック p-ブレーン解とゲージ理論の対応

ブラックホール熱力学の微視的起源の理解

- 様々なゲージ理論における強結合領域の研究に応用

酒井・杉本模型、QGPや物性系、エンタングルメント・エントロピー etc.

- 但し、これまでになされた検証のほとんどが、 $N \to \infty \quad \lambda \to \infty$

超対称性を利用

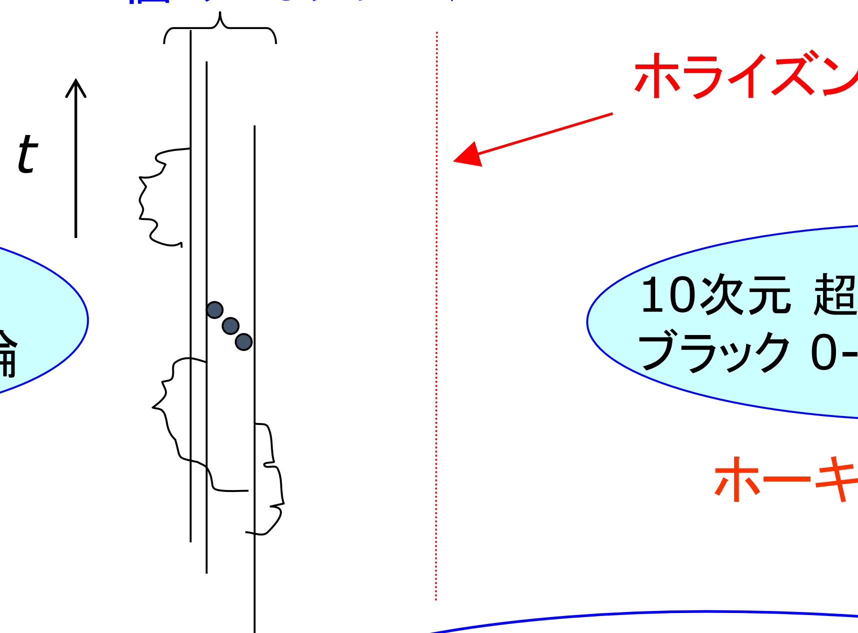
２．１次元 超対称 U(N) ゲージ理論の数値シミュレーション

Anagnostopoulos-Hanada- J.N.-Takeuchi,
PRL 100 (’08) 021601 [arXiv:0707.4454]

ゲージ／重力対応の検証
（D0-ブレーンの場合）

Itzhaki-Maldacena-Sonnenschein
-Yankielowicz ('98)

N 個のD0ブレーン



1次元 超対称
U(*N*) ゲージ理論

有限温度 *T*

10次元 超重力理論における
ブラック 0-ブレーン解

ホーキング温度 *T*

ブレーンに局在した開弦の自由度と
ホライズンの外側に広がった開弦の自由度が
decoupleするような低エネルギー極限をとる。

ブラック 0-ブレーン解の
熱力学的性質を再現
できるか？

（decoupling 極限）

10次元 超重力理論のブラック 0-ブレーン解（重力側）

decoupling 極限をとった後、

$$U \equiv \frac{r}{\alpha'} \quad , \quad \lambda \equiv g_s N {\alpha'}^{-3/2} \quad \text{(fixed)}$$

$$ds^2 = \alpha' \left\{ f(U) dt^2 + \frac{1}{f(U)} dU^2 + \sqrt{\lambda} U^{-3/2} d\Omega_{(8)}^2 \right\}$$

$$f(U) \equiv \frac{U^{7/2}}{\sqrt{\lambda}} \left\{ 1 - \left(\frac{U_0}{U} \right)^7 \right\}$$

超重力理論が有効である領域： $N^{-10/21} \ll \left(\frac{U}{\lambda^{1/3}} \right)^{5/2} \ll 1$

弦のループ効果が無視できる

弦の広がり（α' 補正）が無視できる

ブラック 0-ブレーン解の熱力学的性質 （重力側）

Hawking 温度 ：
$$\frac{T}{\lambda^{1/3}} = \frac{7}{16\sqrt{15}\pi^{7/2}} \left(\frac{U_0}{\lambda^{1/3}}\right)^{5/2}$$

Bekenstein-Hawking エントロピー ：
$$\mathcal{S} = \frac{1}{28\sqrt{15}\pi^{7/2}} N^2 \left(\frac{U_0}{\lambda^{1/3}}\right)^{9/2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{N^2}\frac{E}{\lambda^{1/3}} = \underbrace{\frac{9}{14}\left\{4^{13}15^2\left(\frac{\pi}{7}\right)^{14}\right\}^{1/5}}_{7.41} \left(\frac{T}{\lambda^{1/3}}\right)^{14/5}$$

Klebanov-Tseytlin (1996)

超重力理論が有効である領域 ： $N^{-10/21} \ll \frac{T}{\lambda^{1/3}} \ll 1$

弦のループ効果
が無視できる

弦の広がり（α’ 補正）
が無視できる

D0-ブレーンの低エネルギー有効理論（ゲージ理論側）

1次元超対称 U(N) ゲージ理論

$$D = \partial_t - i\,[A(t),\ \cdot\ ]$$

$$S_{\mathrm{b}} = \frac{1}{g^2}\int_0^\beta dt\ \mathrm{tr}\left\{\frac{1}{2}(DX_i(t))^2 - \frac{1}{4}[X_i(t), X_j(t)]^2\right\}$$

$$S_{\mathrm{f}} = \frac{1}{g^2}\int_0^\beta dt\ \mathrm{tr}\left\{\frac{1}{2}\Psi_\alpha D\Psi_\alpha - \frac{1}{2}\Psi_\alpha(\gamma_i)_{\alpha\beta}[X_i, \Psi_\beta]\right\}$$

N ×N のエルミート行列

$$\begin{cases} X_j(t) & (j = 1, \cdots, 9) \\ \Psi_\alpha(t) & (\alpha = 1, \cdots, 16) \end{cases}$$

周期的境界条件

反周期的境界条件

$T = \beta^{-1}$　温度

$\lambda = g^2 N$　't Hooft　結合定数

$$\lambda_{\mathrm{eff}} = \frac{\lambda}{T^3}$$

λ を fix して考える場合、

- 低温（T小） ⇒ 強結合　　重力側でα' 補正が無視できる領域
- 高温（T大） ⇒ 弱結合　　高温展開で扱える領域

Kawahara-J.N.-Takeuchi ('07)

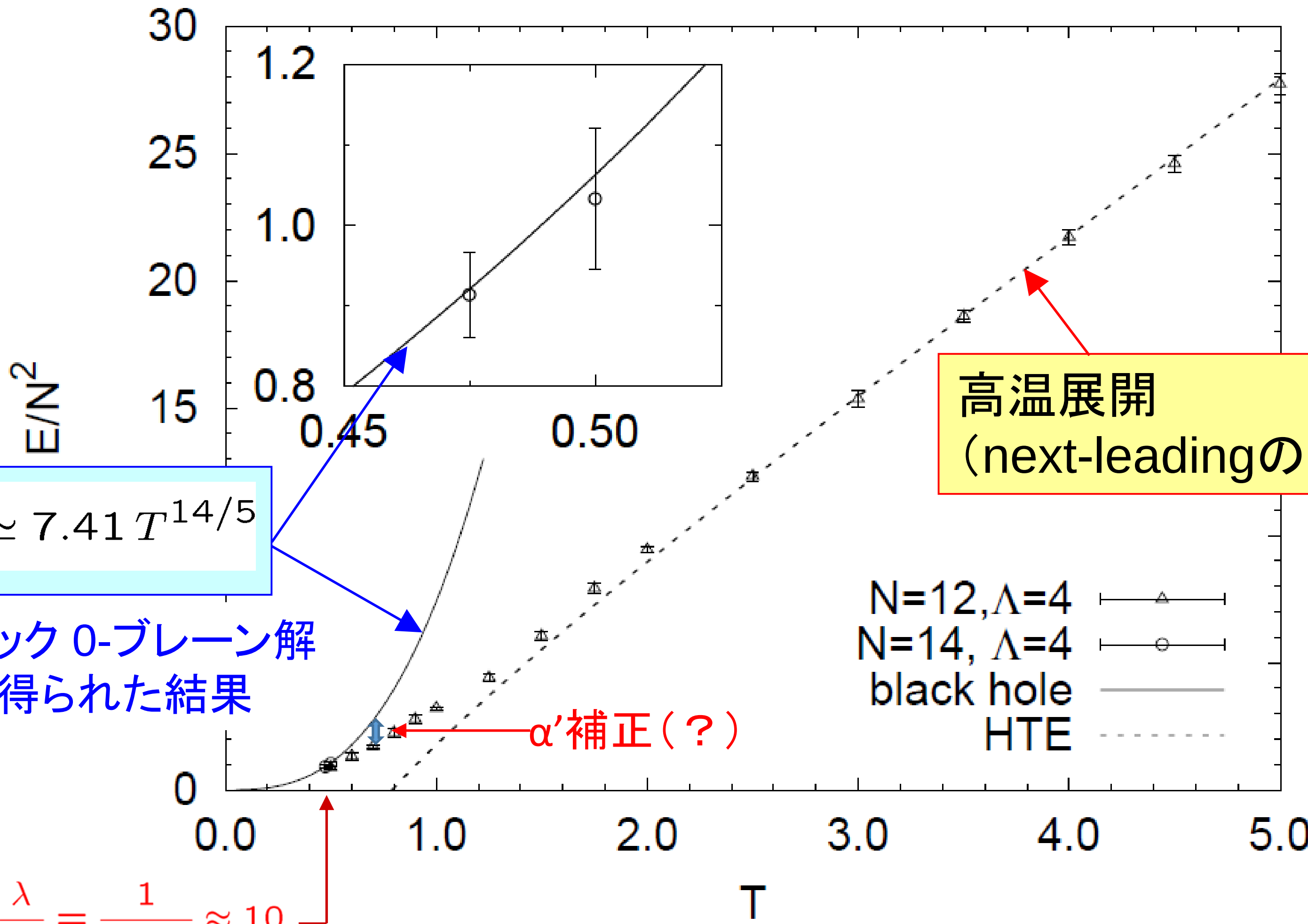
内部エネルギー（ゲージ理論側）

$$E = \frac{\partial}{\partial \beta}(\beta \mathcal{F})$$

自由エネルギー

$\lambda = 1$　としした

Anagnostopoulos-Hanada- J.N.-Takeuchi,
PRL 100 ('08) 021601 [arXiv:0707.4454]



$$\frac{E}{N^2} \simeq 7.41\, T^{14/5}$$

ブラック 0-ブレーン解
から得られた結果

高温展開
（next-leadingの次数を含む)

α'補正（？）

$$\lambda_{\rm eff} = \frac{\lambda}{T^3} = \frac{1}{0.46^3} \approx 10$$

３．ゲージ／重力対応の検証（α’補正）

Hanada-Hyakutake-J.N.-Takeuchi, PRL 102 ('09) 191602

ブラック 0-ブレーン解の熱力学に対する α' 補正

ブラック 0-ブレーン解　：超重力理論の古典解

$$\mathcal{S}_{(0)} = \frac{1}{16\pi G_{\mathrm{N}}} \int d^{10}x\sqrt{-g}\left\{ \mathrm{e}^{-2\phi}(R + 4\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi) - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} \right\}$$

$$G_{\mathrm{N}} \sim \alpha'^4 g_s^2$$

超弦理論の低エネルギー有効作用における $O(\alpha'^0)$ の項として得られる

ゼロ質量のモードに対する散乱振幅（treeレベル）の計算

- 2点 および 3点の散乱振幅の計算 ⇨ $\mathcal{S}_{(1)} = \mathcal{S}_{(2)} = 0$
- 4点の散乱振幅 ⇨ $\mathcal{S}_{(3)} = \frac{\alpha'^3}{16\pi G_{\mathrm{N}}} \int d^{10}x\sqrt{-g}\left\{ \mathrm{e}^{-2\phi}\mathcal{R}^4 + \cdots \right\}$

完全にわかっていない

ブラック 0-ブレーン解に対する　α’ 補正を計算して、熱力学的性質を調べればよい

α’ の3乗から始まるという事実だけを使って、次元解析的な議論

ブラック 0-ブレーンの熱力学に対する α' 補正（つづき）

- ホライズン付近における時空の曲率半径 $\rho^2 \sim \left(\frac{\lambda^{1/3}}{U_0}\right)^{3/2} \alpha'$

- α' 補正の現れ方 ：

$$\frac{\alpha'}{\rho^2} \sim \left(\frac{U_0}{\lambda^{1/3}}\right)^{3/2} \sim \left(\frac{T}{\lambda^{1/3}}\right)^{3/5}$$

$$\frac{T}{\lambda^{1/3}} \sim \left(\frac{U_0}{\lambda^{1/3}}\right)^{5/2}$$

- α'^3 次のオーダーの補正

$$\begin{aligned}\frac{1}{N^2}\frac{E}{\lambda^{1/3}} &= 7.41 \left(\frac{T}{\lambda^{1/3}}\right)^{14/5} \left\{1 + c\left(\frac{T}{\lambda^{1/3}}\right)^{9/5}\right\} \\ &= 7.41 \left(\frac{T}{\lambda^{1/3}}\right)^{14/5} - C\left(\frac{T}{\lambda^{1/3}}\right)^{23/5}\end{aligned}$$

Hanada-Hyakutake-J.N.-Takeuchi, PRL 102 ('09) 191602

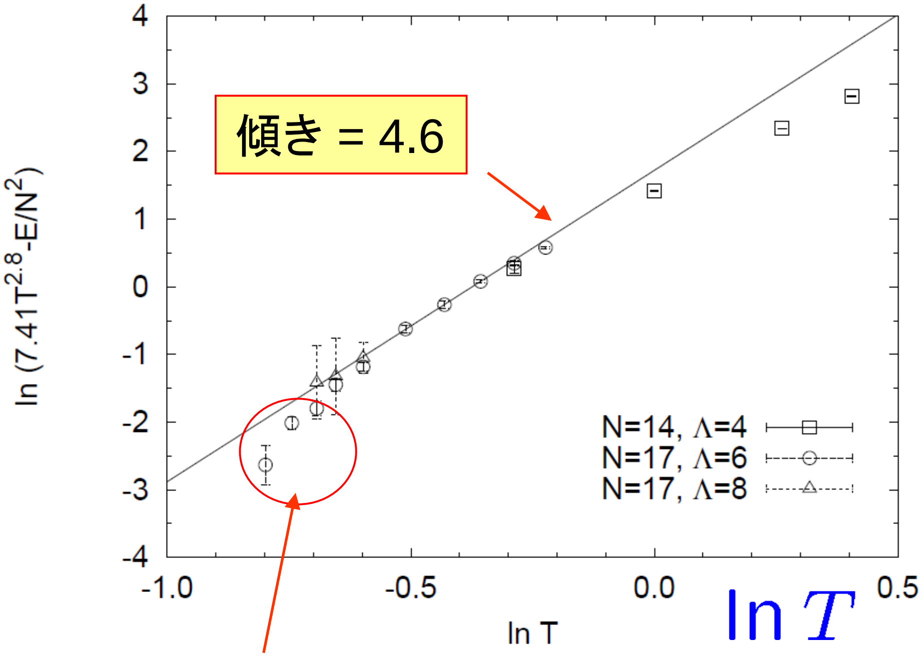
α'補正を含めて、ゲージ／重力対応を検証

Hanada-Hyakutake-J.N.-Takeuchi,
PRL 102 ('09) 191602 [arXiv:0811.3102]

$$\frac{E}{N^2} = 7.41\,T^{14/5} - C\,T^{23/5}$$

α' 補正

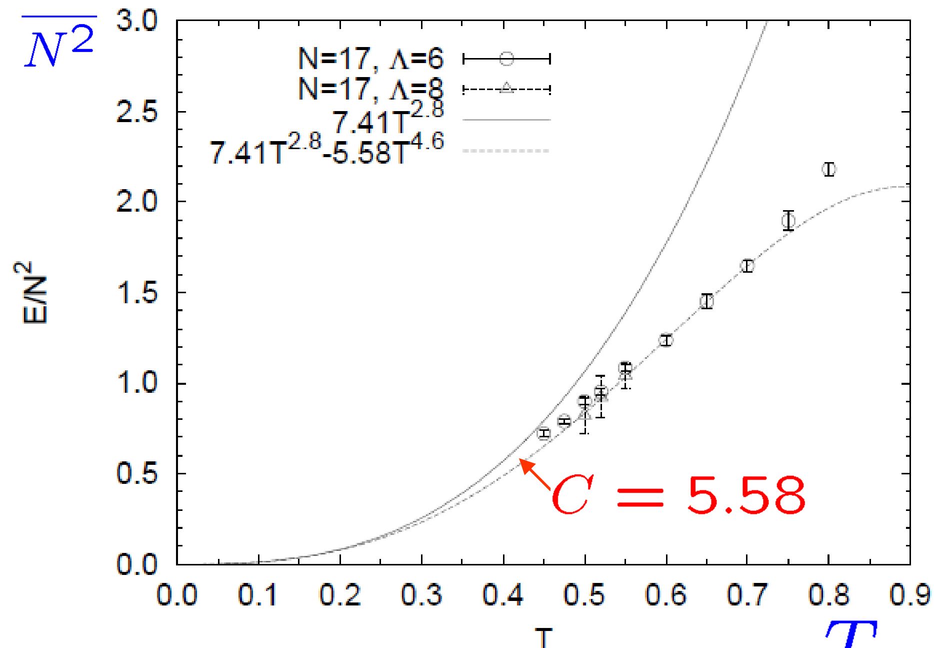
$\ln\left(7.41\,T^{14/5} - \frac{E}{N^2}\right)$



$\ln T$

有限のカットオフの効果

$\frac{E}{N^2}$



T

$T \lesssim 0.7$ のデータ点は
$C = 5.58$ で良くフィットできる

４. ゲージ／重力対応の検証
（弦のループ補正）

Hanada-Hyakutake-Ishiki-J.N., Science 344 (2014) 882-885

ブラック 0-ブレーンの熱力学に対する弦のループ補正

タイプIIA超弦理論からわかる

1ループ $g_{\mathrm{str}}{}^2 \left(\frac{\alpha'}{\rho^2}\right)^{3} \sim \frac{1}{N^2}\left(\frac{T}{\lambda^{1/3}}\right)^{-12/5}$

Bern, Rozowsky, Yan

2ループ $g_{\mathrm{str}}{}^4 \left(\frac{\alpha'}{\rho^2}\right)^{5} \sim \frac{1}{N^4}\left(\frac{T}{\lambda^{1/3}}\right)^{-27/5}$

Bern, Dixon, Dunbar, Perelstein, Rozowsky

SYMの振幅に対する関係式 Kawai-Lewellen-Tye を用いる

$$g_{\mathrm{str}} \sim \frac{1}{N}\left(\frac{T}{\lambda^{1/3}}\right)^{-21/10} \qquad \frac{\alpha'}{\rho^2} \sim \left(\frac{T}{\lambda^{1/3}}\right)^{3/5}$$

$$\frac{1}{N^2}\frac{E}{\lambda^{1/3}} = 7.41\left(\frac{T}{\lambda^{1/3}}\right)^{14/5}\left\{1+\frac{a}{N^2}\left(\frac{T}{\lambda^{1/3}}\right)^{-12/5}+\frac{b}{N^4}\left(\frac{T}{\lambda^{1/3}}\right)^{-27/5}\right\}$$

$$\sim 7.41\left(\frac{T}{\lambda^{1/3}}\right)^{14/5}+\frac{A}{N^2}\left(\frac{T}{\lambda^{1/3}}\right)^{2/5}+\frac{B}{N^4}\left(\frac{T}{\lambda^{1/3}}\right)^{-13/5}$$

$A = -5.77$ (Hyakutake, PTEP (2014) 033B04)

N が小さく、十分低温の領域を調べれば、これを検証できる

有限のNにおける不安定性の問題

- N個のD0-ブレーンの低エネルギー有効理論

$$S_{\mathrm{b}} = \frac{1}{g^2}\int_0^\beta dt\ \mathrm{tr}\left\{\frac{1}{2}(DX_i(t))^2 - \frac{1}{4}[X_i(t), X_j(t)]^2\right\}$$

$$S_{\mathrm{f}} = \frac{1}{g^2}\int_0^\beta dt\ \mathrm{tr}\left\{\frac{1}{2}\Psi_\alpha D\Psi_\alpha - \frac{1}{2}\Psi_\alpha(\gamma_i)_{\alpha\beta}[X_i, \Psi_\beta]\right\}$$

$X_i(t)$ に対するポテンシャル

$[X_i(t), X_i(t)] = 0$　であるような配位に対しては、ゼロ！

ポテンシャルが平坦な方向（flat directions）を持っている

- 量子力学系と見なして状態の時間発展を考えると、D0-ブレーンの束縛状態がラージNでのみ安定化。

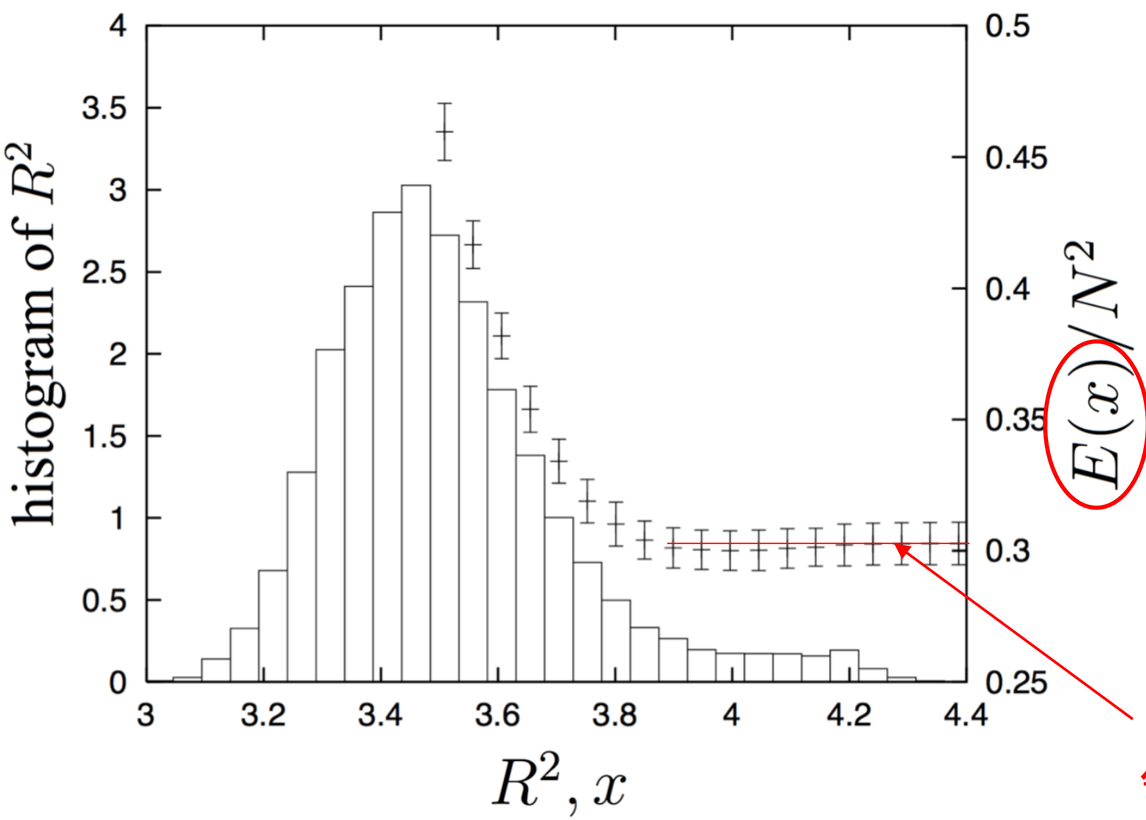
⇒ 有限のNでは、束縛状態が準安定的にしか存在しない。

（数値シミュレーションの結果に基づく予測）

⇒ いったん、D0-ブレーンの広がりに対してカットオフを導入して計算。計算結果がカットオフに依存しないような領域を見つけて答えを出す。

準安定な束縛状態の同定と内部エネルギーの測定

D0-ブレーンの広がり ： $R^2 = \dfrac{1}{N\beta}\displaystyle\int_0^\beta dt\ \mathrm{tr}X_i(t)^2$



ヒストグラムにピークあり

⇩

準安定な束縛状態の存在

$R^2 < x$ に制限して測定したエネルギー

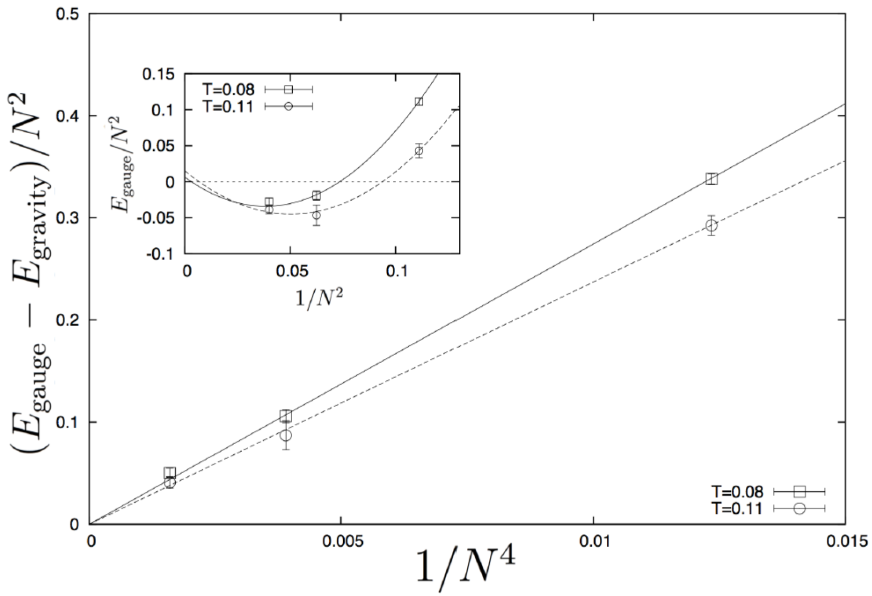
x に依らなくなっている領域でエネルギーを評価

弦のループ補正を含めたゲージ／重力対応の検証

Hanada-Hyakutake-Ishiki-J.N., Science 344 (2014) 882

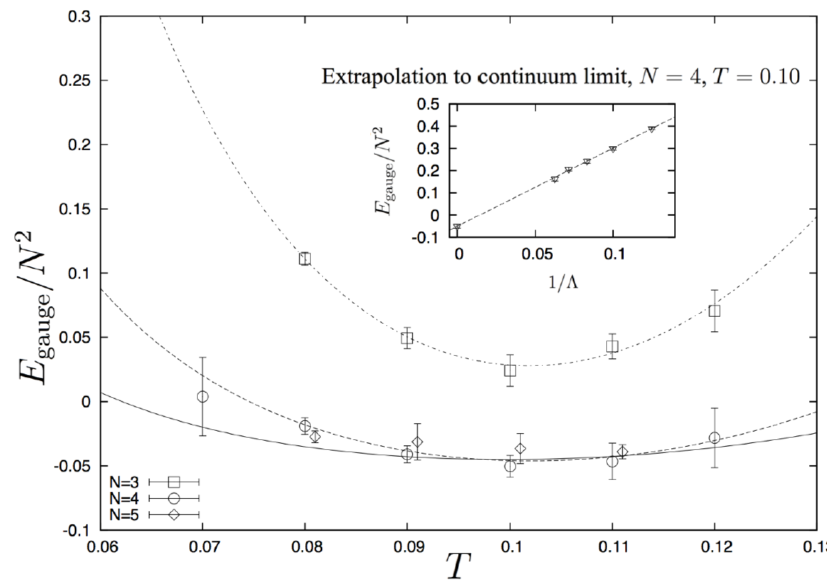
$$\frac{1}{N^2}E_{\text{gravity}} = 7.41\,T^{2.8} - 5.77\,T^{0.4}\frac{1}{N^2}$$

$\frac{1}{N^2}\left(E_{\text{gauge}} - E_{\text{gravity}}\right)$



$1/N^4$

$\frac{1}{N^2}E_{\text{gauge}}$



T

数値シミュレーションの結果は、弦のループ補正とconsistent

5．まとめと展望

まとめ

- ゲージ／重力対応

  超弦理論の非摂動的定式化の研究において重要
  1/N展開、時空の創発 etc.

- 我々の研究：D0-ブレーンの場合について、
  数値シミュレーションを用いて検証

  ブラック 0-ブレーンの熱力学
  他にも、ウィルソン・ループ、相関関数 etc.

- 解析的になされた検証に比べて、はるかに非自明な
  状況で、ゲージ／重力対応の成立を示唆

  有限温度（超対称性を破る）
  α'補正、弦のループ補正

今後の展望

- M理論の領域を調べる

  さらに低温の領域では、重力側でGregory-Laflamme転移が起こり、
  11次元のシュバルツシルト・ブラックホールが現れると予想。
  ゲージ理論側で再現できるか。

- Dp-ブレーン（p=1,2,3）への拡張

  既に、p=1 と p=3 については、研究が進められている。
  連続極限で超対称性を回復できるか、Nを大きくできるか。

- 大規模並列計算

  ポスト京での計算に向けて、新しいプログラムを開発。
  より低温、大きなN、p=1,2,3の計算が可能に。

- 超弦理論の非摂動的定式化の研究

  ラージNゲージ理論、行列模型の数値シミュレーションによって、
  新しいフェーズに入ることを期待。