

2010.1.22(金) 基礎物理学研究所
木村利栄理論物理学賞 受賞記念講演

高次元の世界を観る

京都大学理学研究科

早田次郎

低次元からの教訓

Abbott 1884

3次元が存在するならば
4次元も存在するのでは
ないか？

スクウェア氏

フラットランド

あり得ない！

スフィア氏

スペースランド

4次元から高次元へ

4次元アインシュタイン重力
(一般相対性理論 1915)

リーマン幾何学 1854

4次元ローレンツ多様体

埋め込まれている空間は必要ない
という正しい？理解に到達

膨張する宇宙はどこかにひろがっているのではなく、intrinsic
な幾何学量だけで記述される

Nordstrom 1914

Kaluza 1921

アインシュタイン+マックスウェル=5次元アインシュタイン

Klein 1926

5次元めは小さくまるまっていて(コンパクト化)
ゼロモード以外は excite されない(見えない)

4次元アインシュタイン重力



高次元重力+コンパクト化

誰も疑わない高次元の世界

現実の世界

$U(1)$ 対称性

対称性の自発的な破れ

ミクロの世界

$SU(2) \otimes U(1)$ 対称性

ワインバーグ・サラム理論

繰りこみ可能な弱い相互作用の理論をつくるために
高い対称性とその破れが必要であった

誰もが疑う高次元の世界

現実の世界

4次元の時空

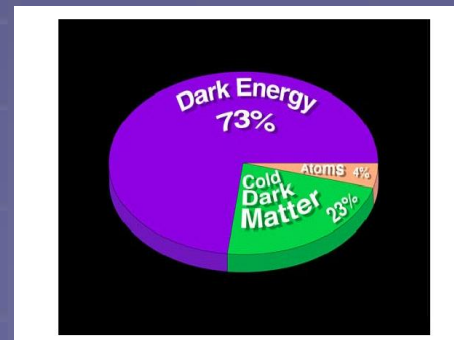
自発的コンパクト化

ミクロの世界

高次元の時空

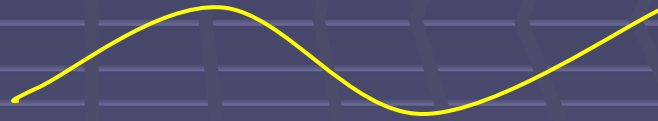
宇宙論の3つの謎

- Dark matter ?
- Dark energy ?
- Inflaton ?



高次元を考える一つの動機

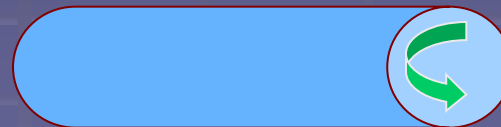
ストリング理論



- 重力を含む
 - 紫外発散がない
 - 10次元
- 唯一の無矛盾な量子重力理論
- 理論の欠点か偉大な予言か？

↓
4次元世界

Kaluza-Klein
コンパクト化



内部空間

←→
我々の世界

Superstring Theory, M-theory and Gravitation

京大 総人

早 田 次 郎

1998. 1. 14

< Weak coupling heterotic string theory >

$$S_{\text{eff}} = \int d^4x \sqrt{g} e^{-2\phi} \left(\frac{4}{(\alpha')^4} R + \frac{1}{(\alpha')^3} \text{tr} F^2 + \dots \right)$$

↓ compactification

$$S_{\text{eff}} = \int d^4x \sqrt{g} e^{-2\phi} \underbrace{V}_{\text{volume of Calabi-Yau manifold}} \left(\frac{4}{(\alpha')^4} R + \frac{1}{(\alpha')^3} \text{tr} F^2 + \dots \right)$$

$$G_N = \frac{e^{2\phi} (\alpha')^4}{64\pi V}, \quad \alpha_{\text{GUT}} = \frac{e^{2\phi} (\alpha')^3}{16\pi V}$$

$$\downarrow$$

$$G_N = \frac{\alpha_{\text{GUT}} \alpha'}{4}$$

$$\alpha_{\text{GUT}} \sim \frac{1}{25}$$

weak coupling limit $e^{2\phi} \leq 1$

$$V \leq \frac{(\alpha')^3}{\alpha_{\text{GUT}}} \Rightarrow G_N \geq \frac{\alpha_{\text{GUT}}^{\frac{4}{3}}}{M_{\text{GUT}}^2}$$

$$V^{\frac{1}{6}} \sim M_{\text{GUT}}^{-1}$$

$$M_{\text{GUT}} \sim 2 \times 10^{16} \text{ GeV}$$

too big !!

< M-theory >

$E_8 \times E_8$ heterotic string $\xrightarrow{\text{low energy}}$ X

strong coupling

$R^{10} \times S^1 / \mathbb{Z}_2$ compactified M-theory $\xrightarrow{\text{low energy}}$ 11-d super gravity

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{M^{11}} d^{11}x \sqrt{|g|} R + \sum_i \frac{1}{8\pi (4\pi\alpha')^{3/2}} \int_{M^{11}} d^{11}x \sqrt{|g|} \text{tr} F_i^2$$

$$G_{11} = \frac{\kappa^2}{16\pi^2 G_8 V_P}, \quad \alpha_{\text{dual}} = \frac{(4\pi\alpha')^{3/2}}{2V}$$

$$\Downarrow$$

$$4\pi\alpha' = (2\alpha_{\text{dual}} V)^{2/3} = M_{11}^{-9} \leftarrow \text{M-theory scale}$$

$$\frac{1}{P} = \frac{16\pi^2 G_8 V}{\kappa^2} \sim \frac{1}{\alpha_{\text{dual}}} M_{11}^3 M_P^{-2}$$


$$M_{11} \sim M_G \sim 2 \times 10^{16} \text{ GeV}$$


$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{P} \approx 10^{12} \text{ GeV} \\ V^{-1/6} \approx 1.3 \times 10^{16} \text{ GeV} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{5-d space-time}$$

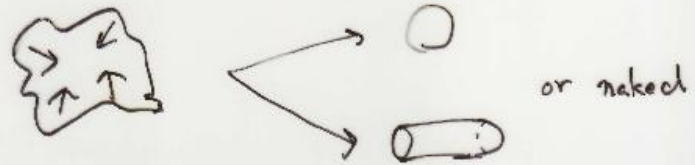
$$11-d \rightarrow 5-d \rightarrow 4-d$$

< 5-d space-time >

① Gravitational collapse

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\bar{M}}{r^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{\bar{M}}{r^2}} + r^2 d\Omega_3^2$$


$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega_2^2 + dz^2$$




② COBE 5次元が見えるか?

5次元重力波 — 自由度5

③ M-theory 5次元 Inflation 起こるか?

- Thermal History
- Topological defects
- ↳ LSS

arXiv:hep-th/9905012, Non-conventional cosmology from a brane-universe , P. Binetruy, C. Deffayet , D. Langlois

arXiv:hep-ph/9905221, A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension , L. Randall, R. Sundrum

arXiv:hep-th/9906064, An Alternative to Compactification , L. Randall, R. Sundrum

arXiv:hep-ph/9906523, Cosmological Expansion in the Presence of an Extra Dimension , J.M. Cline, C. Grojean, G. Servant

arXiv:gr-qc/9910076 , The Einstein Equations on the 3-Brane World , T. Shiromizu, K. Maeda, M. Sasaki

arXiv:hep-th/9910219, Brane cosmological evolution in a bulk with cosmological constant , P. Binetruy et al.

arXiv:hep-th/9911055, Gravity in the Randall-Sundrum Brane World , J. Garriga, T. Tanaka

arXiv:hep-th/9911165, Brane-world solutions, standard cosmology, and dark radiation , S. Mukohyama

arXiv:gr-qc/9912002, Brane-world cosmology, D. Ida

arXiv:hep-th/0005239, Evolution of Cosmological Perturbations in the Brane World , K. Koyama, J. Soda

arXiv:hep-th/0009160, Quantum Fluctuations of Bulk Inflaton in Inflationary Brane World, S. Kobayashi, K. Koyama, J. Soda

arXiv:hep-th/0205188, Brane World Effective Action at Low Energies and AdS/CFT Correspondence , S. Kanno, J. Soda

arXiv:hep-th/0207029, Radion and Holographic Brane Gravity, S. Kanno, J. Soda

arXiv:0803.1371, Stability of Five-dimensional Myers-Perry Black Holes with Equal Angular Momenta, K. Murata, J. Soda

話の流れ

- ブレーン世界
- 宇宙論的摂動理論
- 微分展開法
- ブラックホールの安定性
- 展望

ブレイン世界

フラットランドへの回帰

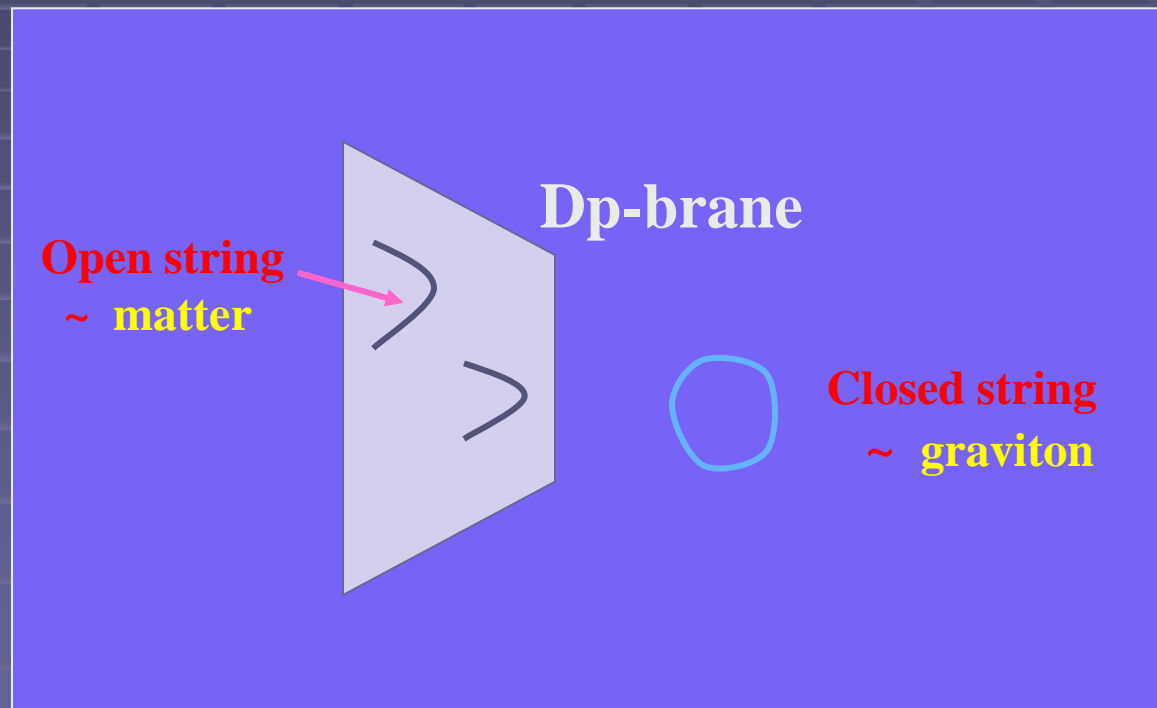
Dブレーン

Polchinski 1995

■ D-brane in Superstring Theory

高次元のバルクには
重力子だけ

ブレーン(膜)上には
標準モデルの粒子
つまり、我々が棲む



Horava-Witten 1996

ブレーション世界

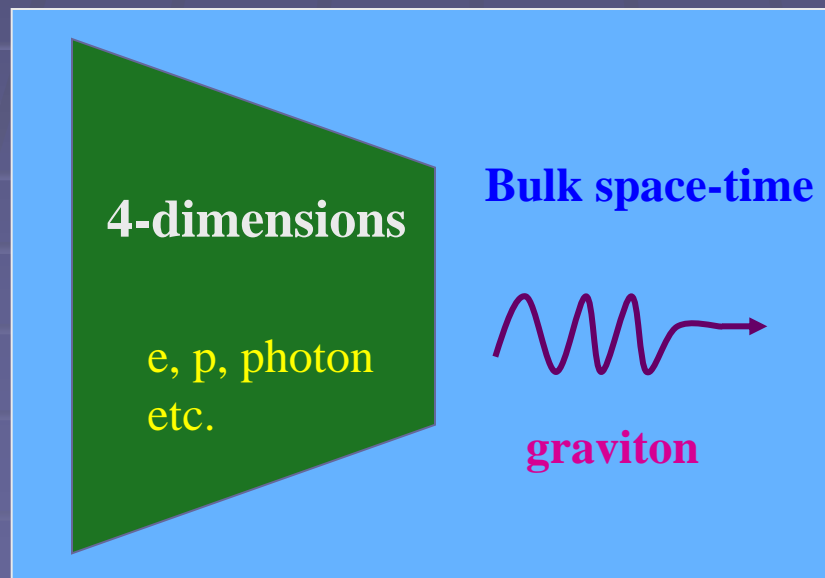
Akama 1982

Rubakov & Shaposhnikov 1983

Antoniadis et al. 1998

Nima Arkani-Hamed et al. 1998

- **4-d (mem)brane** is embedded in higher-dimensions
- **Matter** on the brane
- **Gravity** in the bulk



階層性問題

- 電弱相互作用 1TeV
- 統一理論 10^{16} TeV

16桁の開きがなぜあるか？

ニュートン力 $F \approx \frac{G_{n+4}M}{r^{n+2}} \approx \left(\frac{G_{n+4}}{L^n} \right) \frac{M}{r^2}$

(4+d) 次元重力定数

4次元重力定数 =

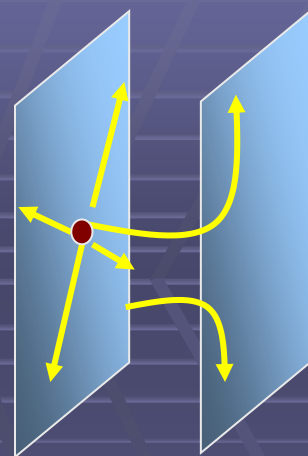
内部空間の体積

L=1mm、d=2 → 1TeV で重力の量子効果

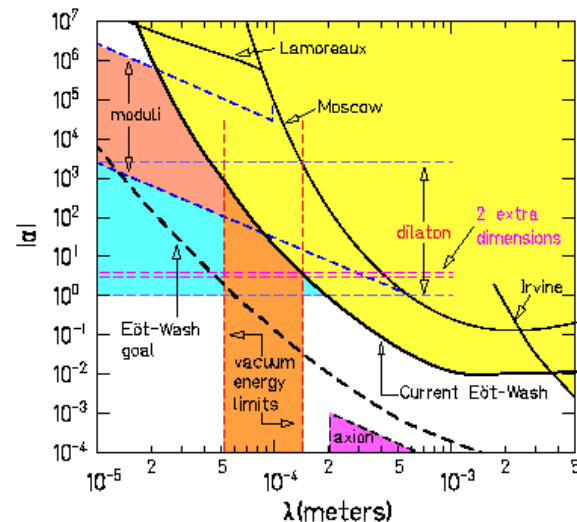
↑ ↓
新たな階層問題？

階層性問題の解決

$$10^{-16} \text{ mm} \approx 1 \text{ TeV}^{-1}$$



重力実験



$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} (1 + \alpha e^{-r/\lambda})$$

ワープコンパクト化

Randall & Sundrum (1999)

$$\Lambda = \frac{6}{L^2}$$

deSitter 時空

$$ds^2 = -d\tau^2 + e^{2\frac{\tau}{L}} \left[dw^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j \right]$$

$$\Lambda = -\frac{6}{\ell^2}$$

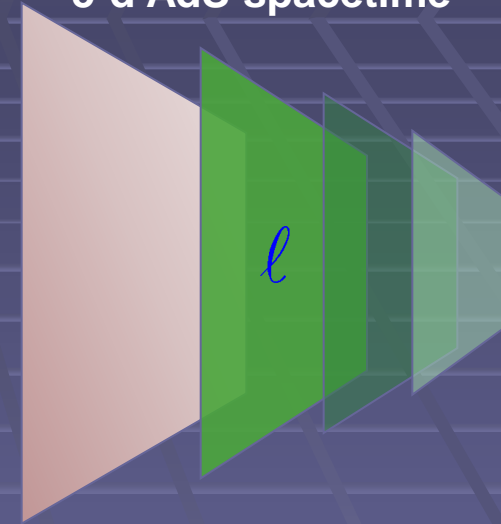
$$L \rightarrow i\ell \quad \tau \rightarrow -iy \quad w \rightarrow it$$

anti-deSitter 時空

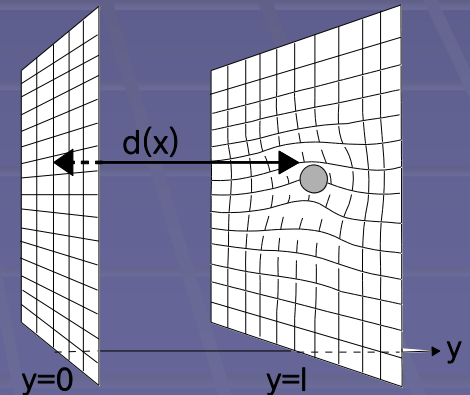
$$ds^2 = dy^2 + e^{-2\frac{y}{\ell}} \underbrace{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}_{\text{Minkowski 時空}}$$

y が無限に伸びても体積は有限

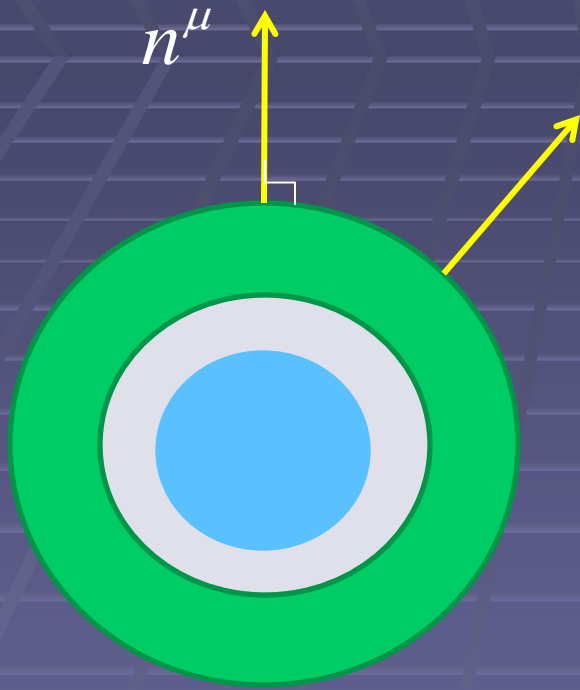
5-d AdS spacetime



Two-brane を考えるとワープ因子 $\Omega = e^{-\frac{y}{\ell}}$
 分だけのスケールのヒエラルヒーを作り出すことができる

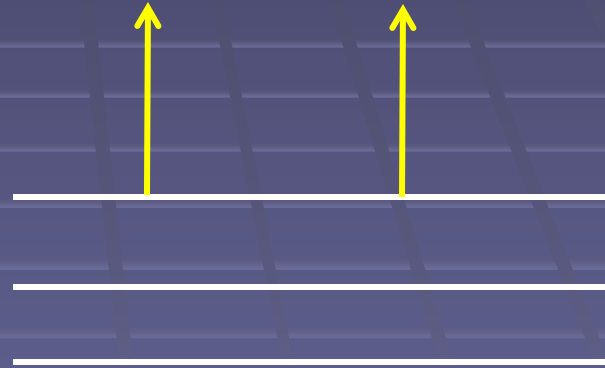


外部曲率



$$ds^2 = dy^2 + g_{\mu\nu}(y, x^\mu) dx^\mu dx^\nu$$

$$K_{\mu\nu} = \nabla_\mu n_\nu = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} g_{\mu\nu}$$



$$ds^2 = dy^2 + e^{-2\frac{y}{\ell}} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{\ell} \eta_{\mu\nu}$$

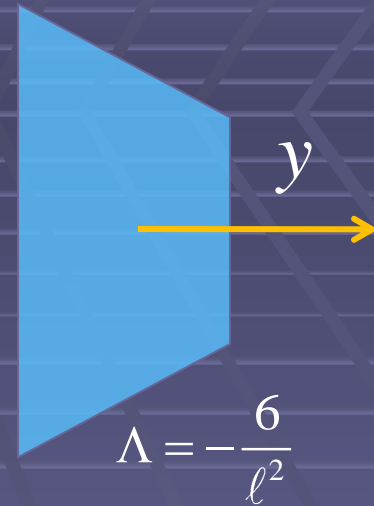
有効アインシュタイン方程式

Shiromizu, Maeda, Sasaki 2000

ガウス・コダッチ方程式 $R \approx \overset{(5)}{R} + \overset{(4)}{K^{\mu\nu} K_{\mu\nu}} - K^2$

$$\overset{(5)}{G}_{\mu\nu} \approx \overset{(5)}{G}_{\mu\nu} + \underline{K_{\mu\nu,y}} + K_{\mu}^{\lambda} K_{\lambda\nu} \approx -\Lambda g_{\mu\nu} + \underline{\tilde{T}_{\mu\nu} \delta(y)}$$

Junction condition $K_{\mu\nu} \approx \tilde{T}_{\mu\nu}$



$$G_{\mu\nu} \approx -\Lambda g_{\mu\nu} + K_{\mu\nu,y} + \tilde{T}_{\mu}^{\lambda} \tilde{T}_{\lambda\nu} \quad \tilde{T}_{\mu\nu} = -\sigma g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}$$

$$G_{\mu\nu} \approx \left(\frac{3}{\ell^2} - \frac{\kappa^4 \sigma^2}{12} \right) g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu} + T_{\mu}^{\lambda} T_{\lambda\nu} - C_{y\mu y\nu}$$

Bulk Effect

Undetermined!

$$\longrightarrow H^2 = \frac{\kappa^4 \sigma}{36} - \frac{1}{\ell^2} + \frac{\kappa^4 \sigma}{18} \rho + \frac{\kappa^4}{36} \rho^2 + \frac{C}{a^4}$$

High Energy Effect *Bulk Effect*

宇宙論的摂動理論

動く境界のある時空の摂動

RS ブレーンとインフレーション

brane tension

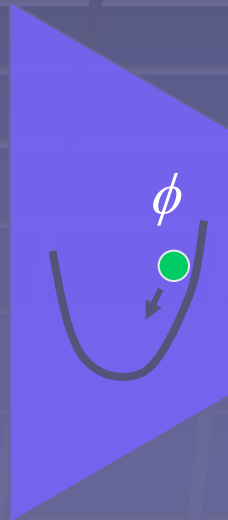
bulk cosmological constant < 0

$$H^2 = \frac{\kappa^4 \sigma^2}{36} + \frac{\Lambda}{6} + \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\kappa^4}{36} \rho^2 + \frac{C}{a^4}$$

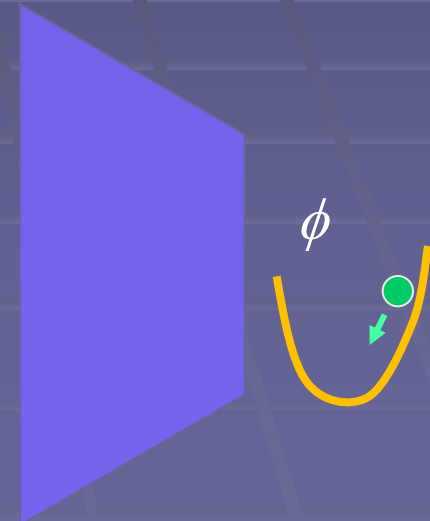
High Energy Effect *Bulk Effect*

Kobayashi, Koyama, Soda 2001
Himemoto, Sasaki 2001

inflaton
on the **Brane**

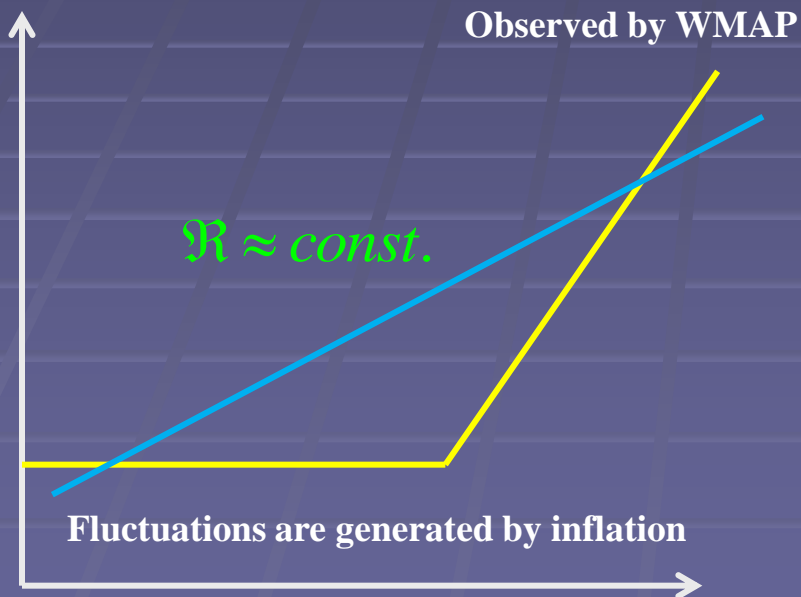


inflaton
in the **bulk**

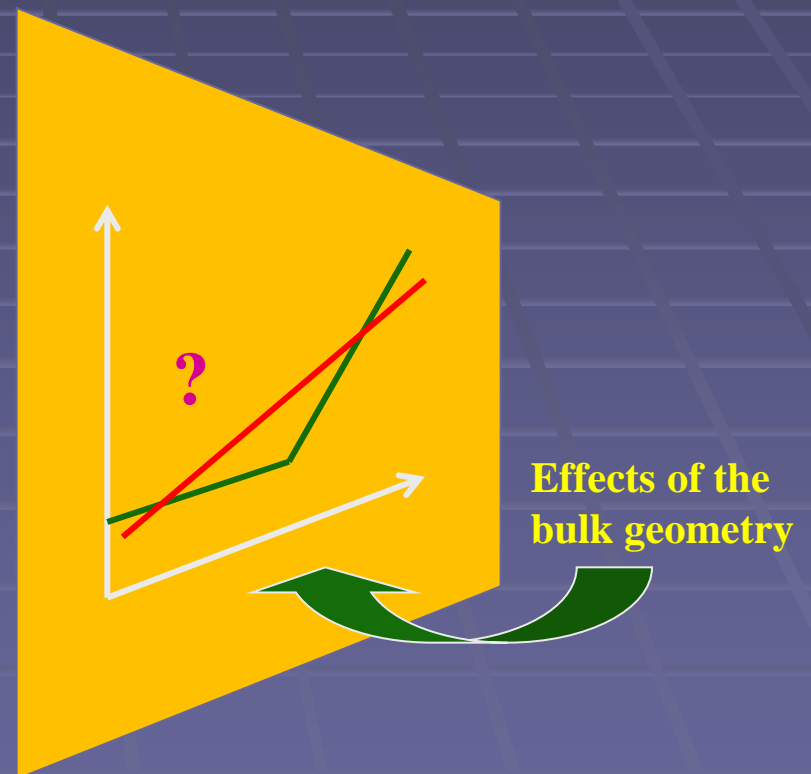


新たなパラダイムか？

Conventional picture of the evolution of cosmological structure.



How the evolution of cosmological structure is modified in the **braneworld picture**?



宇宙膨張はAdS時空上の運動で決まる

$$ds^2 = -n^2(t, z)dt^2 + b^2(t, z)dz^2 + a^2(t, z)\delta_{ij}dx^i dx^j$$

解析的には困難

$$\delta G_{\mu\nu} = \kappa^2 \delta T_{\mu\nu}$$

Koyama & Soda における着眼点

$$ds^2 = dy^2 + e^{-2\frac{y}{\ell}} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$y = \text{const.}$ はMinkowski brane

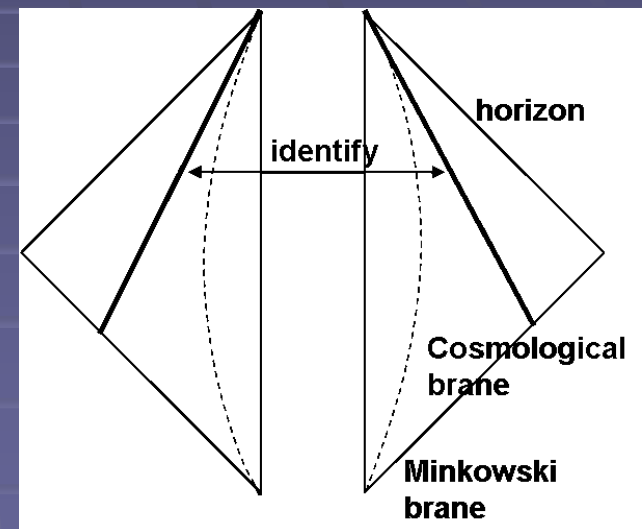
運動しているブレーンの軌跡

$$y = f(t, z) \quad \tau = g(t, z)$$

$y = \text{無限大}$ から y が負の方向へ運動すると

Friedman 方程式

$$H^2 = \frac{\kappa^4 \sigma}{36} - \frac{1}{\ell^2} + \frac{\kappa^4 \sigma}{18} \rho + \frac{\kappa^4}{36} \rho^2$$



宇宙論的摂動理論

Koyama & Soda 2000

$$ds^2 = dy^2 + e^{-2\frac{y}{\ell}} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$\delta G_{\mu\nu} = \kappa^2 \delta T_{\mu\nu}$$

Bulk では解ける

座標変換

$$y = f(t, z)$$

$$\tau = g(t, z)$$

+

ゲージ変換



Junction condition からブレーン上の揺らぎを決定

世界で初めて摂動理論の具体的な解析を行い低エネルギーの極限でアインシュタイン理論に帰着することを明確に示した。また、アインシュタイン理論にたいする補正項を求めた

微分展開法

非線形重力の解析

微分展開法

Kanno & Soda 2002

Energy density on the brane
 \ll brane tension

$$\varepsilon \equiv \frac{\rho}{\sigma} \approx R\ell^2 = \left(\frac{\ell}{L}\right)^2 \ll 1$$

$$\varepsilon \rightarrow 0$$

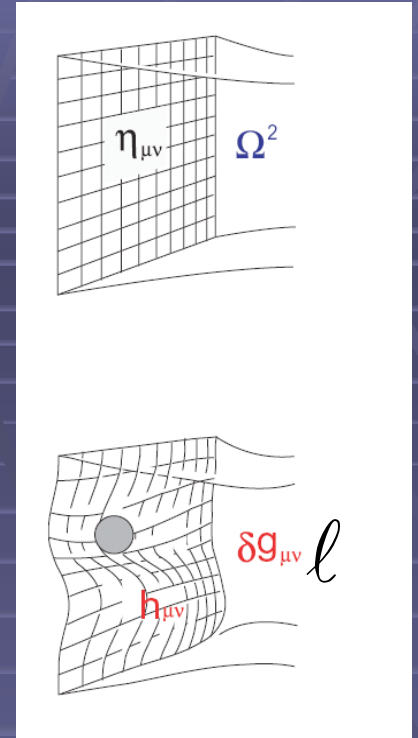
AdS 時空

$$ds^2 = dy^2 + e^{-2y/\ell} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

物質があると \downarrow $O(\varepsilon)$ ずれる

$$ds^2 = dy^2 + e^{-2y/\ell} h_{\mu\nu}(x^\mu) dx^\mu dx^\nu$$

もはや解ではなくなる!



バルクの解が変更される

$$\delta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + O(\varepsilon) \approx h_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}(h) + \chi_{\mu\nu}$$

$$\chi^\mu{}_\mu = \chi^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$$

これ以上は境界条件が
 与えられないと決まらない

Junction condition Z_2 symmetry $\left[\delta K^\mu{}_\nu - \delta^\mu{}_\nu \delta K \right]_{y=0} = \frac{\kappa^2}{2} T^\mu{}_\nu$

$$\longrightarrow G^\mu{}_\nu = \frac{\kappa^2}{\ell} T^\mu{}_\nu - \chi^\mu{}_\nu$$

Dark Radiation

Two-brane systems

Kanno & Soda 2002

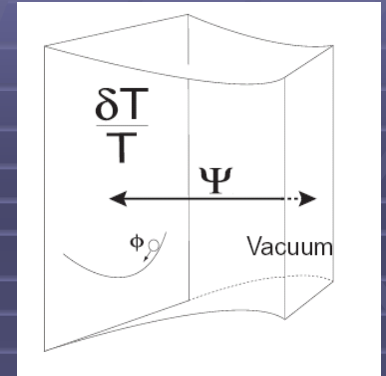
Einstein Eq. on the positive tension brane

$$G_{\nu}^{\mu}(h_{\mu\nu}) = \frac{\kappa^2}{\ell} T_{\nu}^{\oplus\mu} - \chi_{\nu}^{\mu}$$

Einstein Eq. on the negative tension brane

$$G_{\nu}^{\mu}(\Omega^2 h_{\mu\nu}) = -\frac{\kappa^2}{\ell} T_{\nu}^{\ominus\mu} - \frac{\chi_{\nu}^{\mu}}{\Omega^4(x^{\mu})}$$

↑
Warp factor



Radion $\Psi = 1 - \Omega^2$

$$S = \frac{\ell}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-h} \left[\Psi R - \frac{3}{2(1-\Psi)} \Psi^{|\alpha} \Psi_{|\alpha} \right] + \int d^4x \sqrt{-h} \overset{\oplus}{L} + \int d^4x \sqrt{-h} (1-\Psi)^2 \overset{\ominus}{L}$$

↓ $\Psi = 1 - \phi^2$

$$S = \frac{6\ell}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-h} \left[\frac{1}{12} R - \frac{1}{2} \phi^{|\alpha} \phi_{|\alpha} - \frac{1}{12} \phi^2 R + V_{eff}(\phi) + \dots \right]$$

Conformally coupled scalar

何が分かったか？

- AdS/CFT 対応とRSモデルの関係を明らかにした
- Shiromizu-Maeda-Sasaki 方程式の未決定項の計算が可能になった
- ブレーンモデルにおけるCMB揺らぎへの具体的な予言が可能になった
- 他のモデルにも適用可能な定式化である
- Dブレーンインフレーションモデルの問題点が簡単に分かる

CMB の揺らぎへの予言へと発展

Koyama 2003

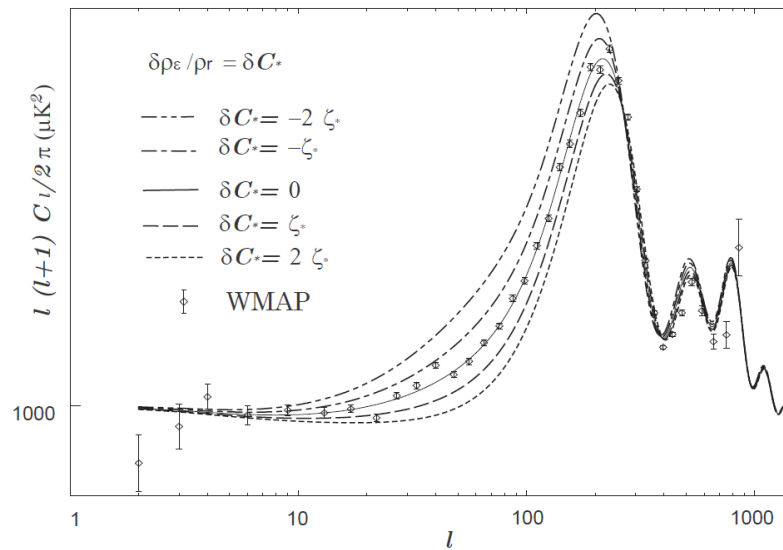
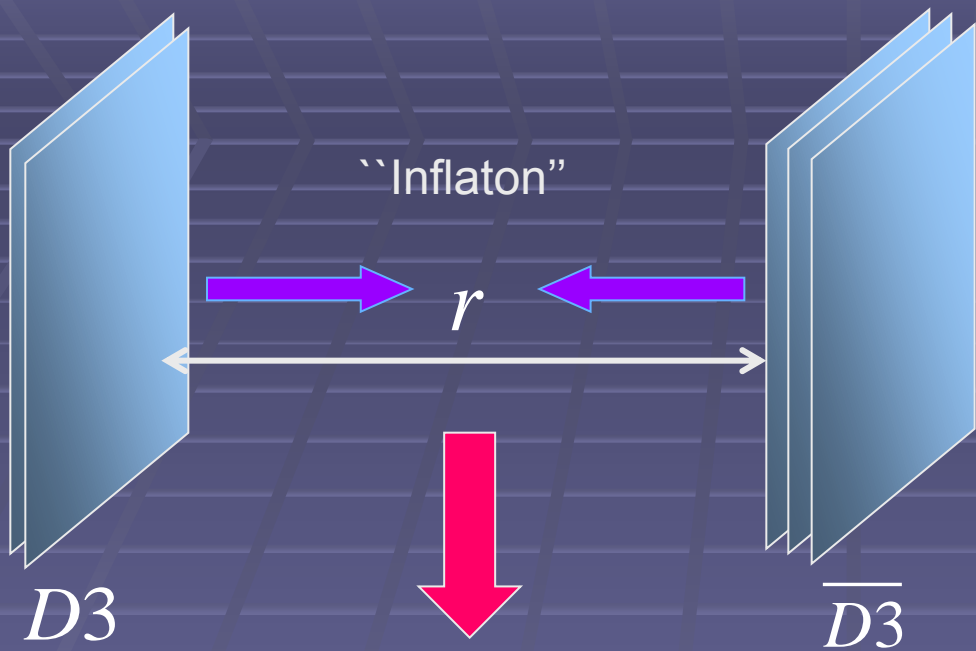


FIG. 1: CMB angular power spectrum for various δC_* . ζ_* is appropriately normalized. We take $\Omega_0 = 0.26, \Omega_\Lambda = 0.70, \Omega_b = 0.04, h = 0.72$ and $n = 1$. The observational data was taken from WMAP [2] and the spectrum was calculated by modifying CMBEASY which is based on CMBFAST [14].

Brane Inflation

Dvali & Tye 1999

インフレーションの幾何学化



$$V = 2T_3 \left(1 - \frac{A}{r^4} \right)$$

Tension drives the inflation!



End of inflation

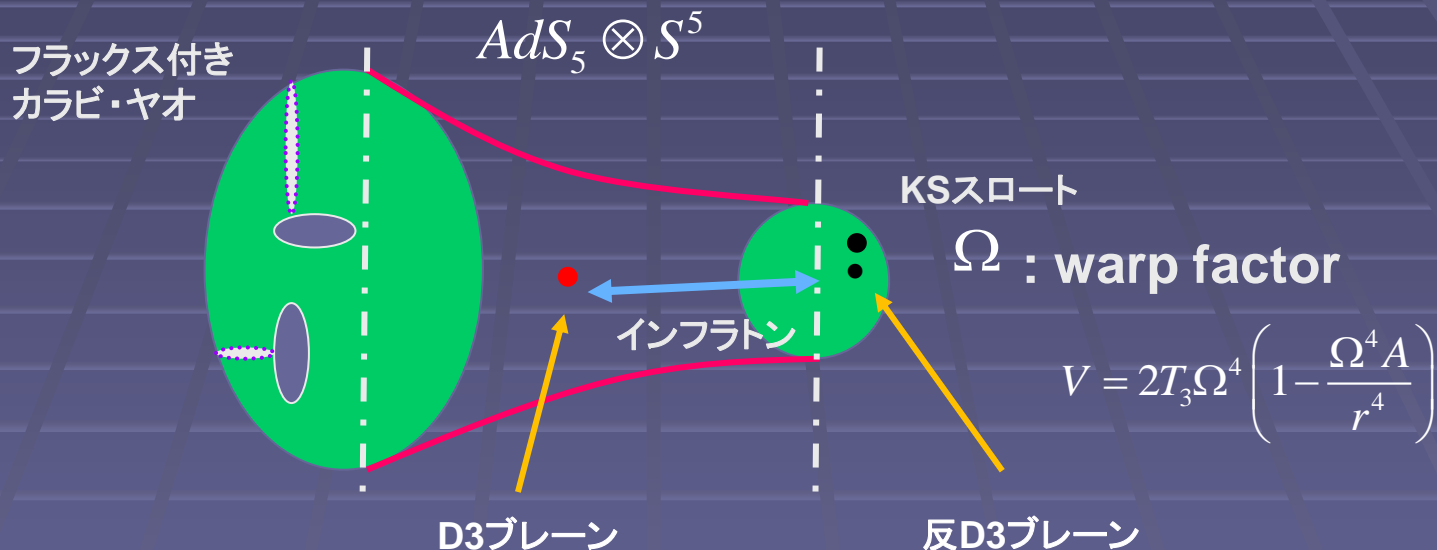
annihilation



$\overline{D3}$

Warped brane Inflation

Kachuru et al (KKLMMT 2003)



eta problem

$$S = \frac{6\ell}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-h} \left[\frac{1}{12} R - \frac{1}{2} \varphi^{|\alpha} \varphi_{|\alpha} - \underbrace{\frac{1}{12} \varphi^2 R}_{H^2 \varphi^2} - V_{\text{eff}}(\varphi) \right]$$

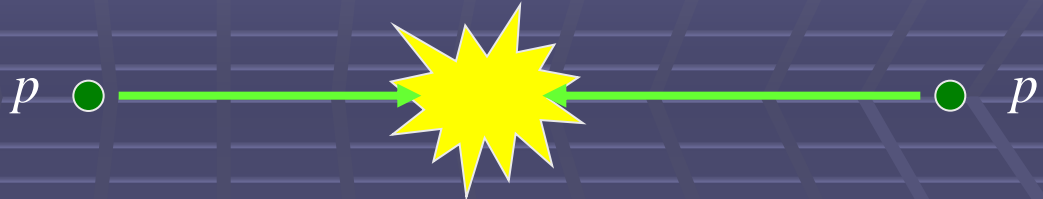
ブラックホールの安定性

多様性をコントロールする

大きな余剰次元とブラックホール

4次元理論の場合

陽子 - 陽子衝突



$$1\text{TeV} \approx 10^{-17} \text{cm}^{-1}$$

陽子の重力半径

$$10^{-52} \text{cm}$$

$$\therefore r_g = \frac{1}{M_{pl}} \frac{M}{M_{pl}}$$

$$\approx 10^{-33} \left(\frac{M}{10^{-5} \text{g}} \right) \text{cm}$$

高次元ブラックホール

$$ds^2 = - \left(1 - \left(\frac{r_g}{r} \right)^{n+1} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \left(\frac{r_g}{r} \right)^{n+1} \right)} + r^2 d\Omega_{n+2}^2$$

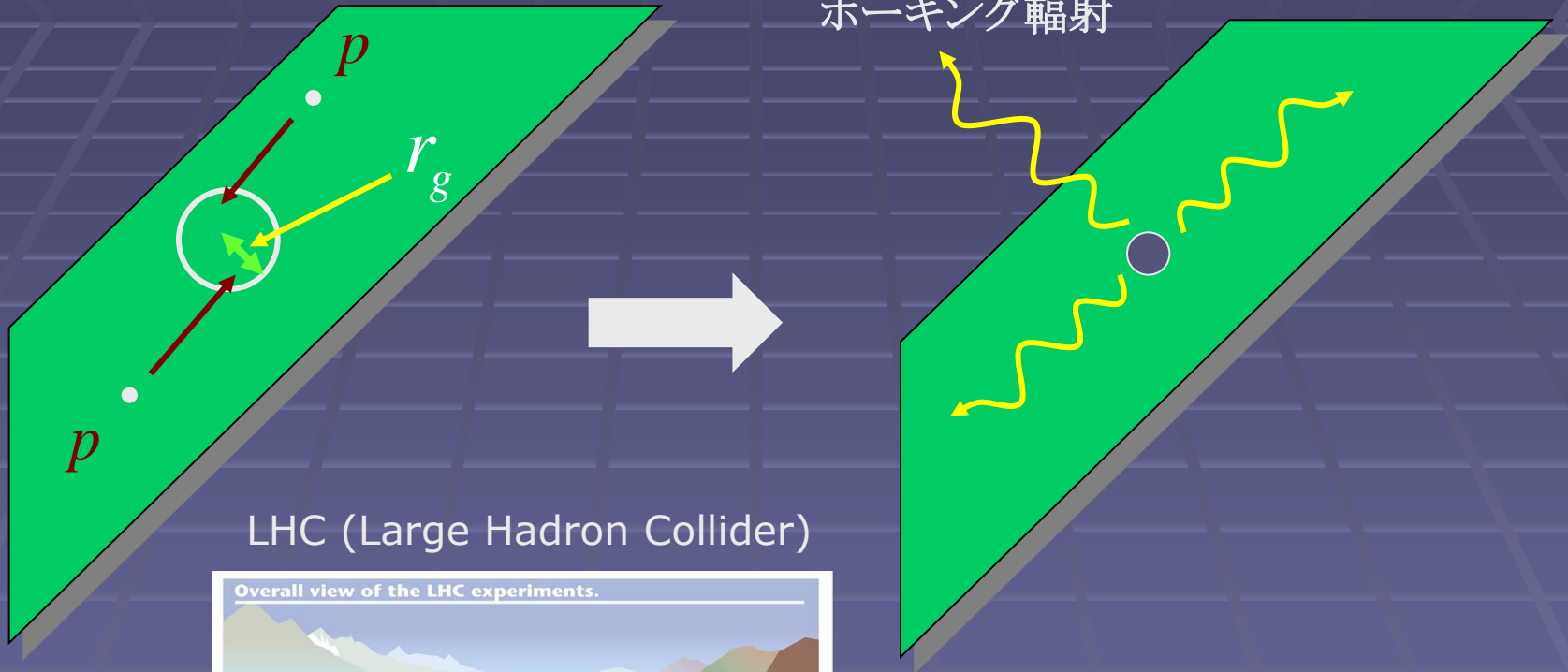
$$r_g \approx \frac{1}{M_*} \left(\frac{M}{M_*} \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$M_* = 1\text{TeV} \approx 10^{-17} \text{cm}^{-1}$$

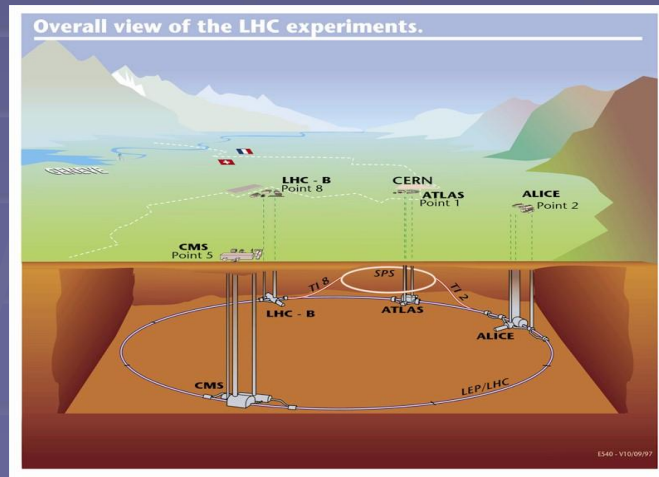
ならば加速器で十分到達可能！

加速器でブラックホールをつくる

Giddings & Thomas 2002



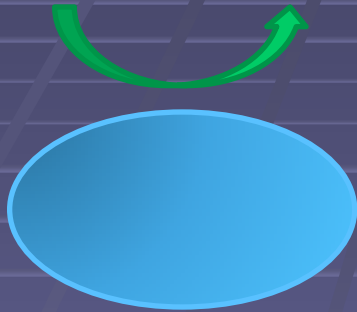
LHC (Large Hadron Collider)



5-d Myers-Perry black holes

Murata & Soda 2008

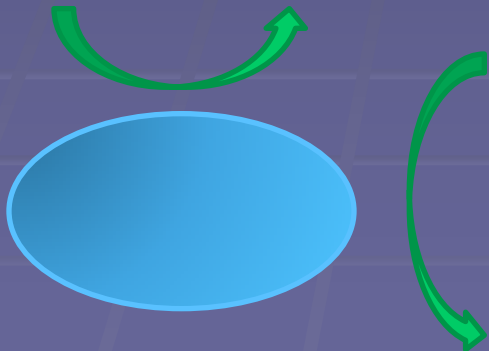
General 5-d Myers-Perry black holes



5-d Black ring



2方向の角運動量が等しい場合



対称性が高くなる

安定性を示すことができた

現在まで、唯一、安定性を解析的に示した例となっている

展望

as of 2010.1.22

宇宙論の難問は解決したか？

- 特異点問題

AdS/CFT 対応

- ダークエネルギー

DGP brane model

- ダークマター

KK particles

- インフレーション

Brane inflation

高次元宇宙論は、まだ始まったばかり
今後の方向性は？

宇宙、素粒子で高次元の世界を観る

$$ds^2 = f^{-1/2}(r)g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + f^{1/2}(r)(dr^2 + ds_{X_5}^2)$$

CMBの物理



内部空間の幾何学

Cosmic inversion



LHCの物理



4次元有効理論を越えた理論的枠組みが必要

物性で高次元の世界を観る

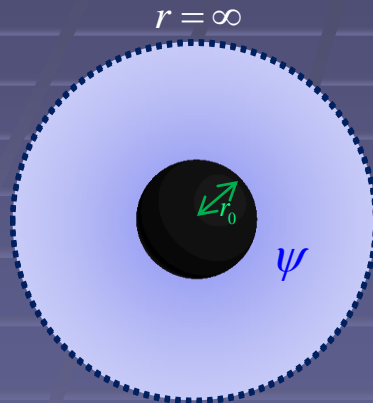
AdS/CFT 対応

異なる次元の物理を結び付ける

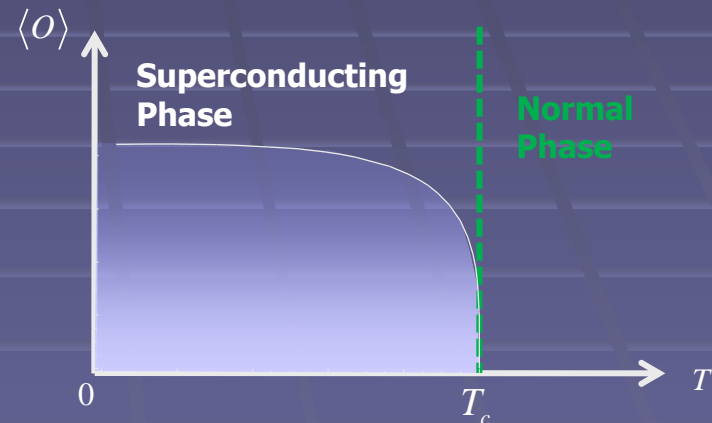
高次元重力

Hartnoll et al. 2008

高温超伝導



Hairy (RN) AdS BH



表現方法の拡がり

AdS/CFT 対応を宇宙論の理論的な記述方法として積極的に取り入れることが重要になるに違いない

ご清聴ありがとうございました