

# 超弦理論 による ハドロン の記述

杉本 茂樹 (IPMU)

based on:

酒井忠勝 氏(茨城大) との共著論文

hep-th/0412141, PTP 113 (2005) 843-882

“ Low energy hadron physics in holographic QCD ”

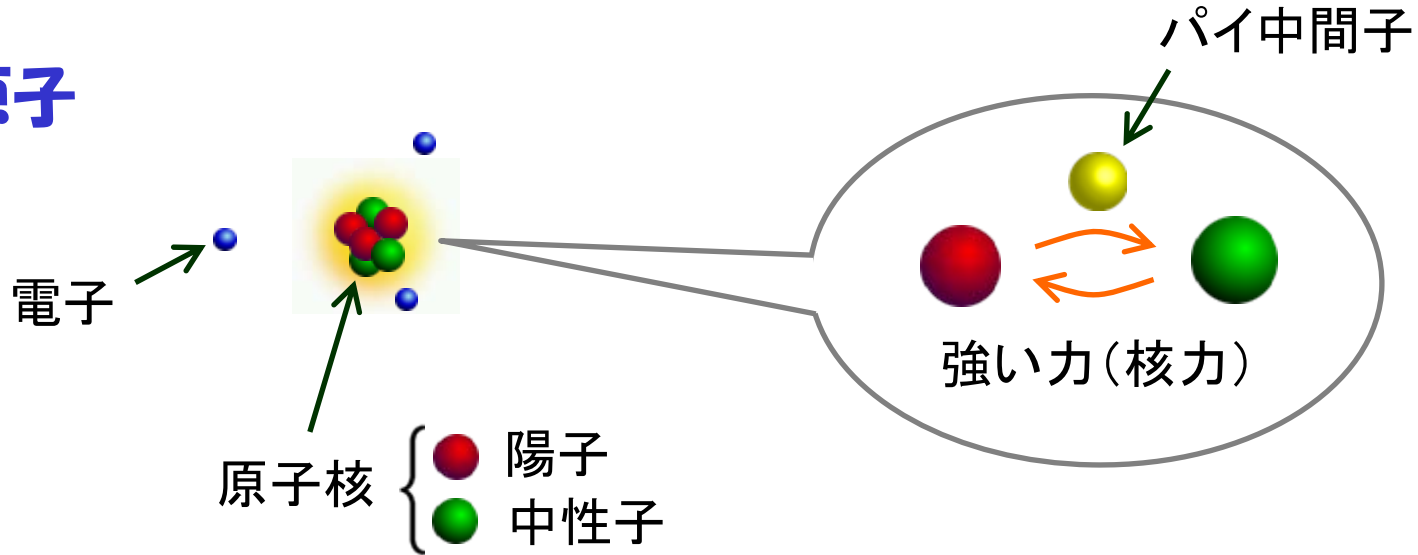
hep-th/0507073, PTP 114 (2005) 1083-1118

“ More on holographic dual of QCD ”

# 1 Introduction

## ★ ハドロン とは？

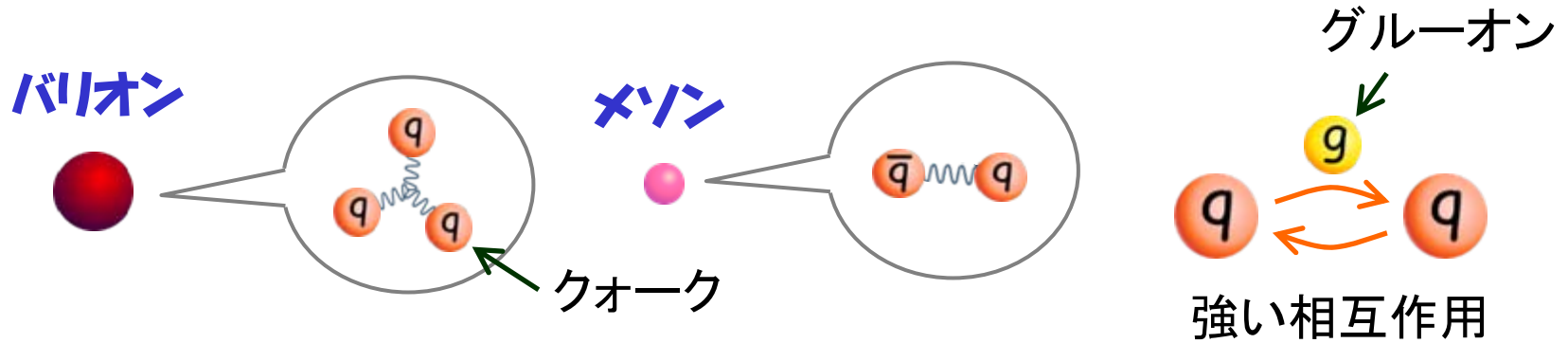
原子



このように強い力を感じる粒子を**ハドロン**と呼ぶ。

ハドロン	{	バリオン (fermion)	●	●	●	●	●	etc.
		$p$	$n$	$\Lambda$	$\Sigma$	$\Delta$		
		メソン (boson)	●	●	●	●	●	etc.
		$\pi$	$K$	$\eta$	$\rho$	$\omega$		

# クォーク モデル と QCD



## QCD

$SU(N_c)$  ゲージ理論 ( $N_c = 3$ )

$A_\mu$

$g$

(gluon)

$\psi^i$

$q$

(quark)

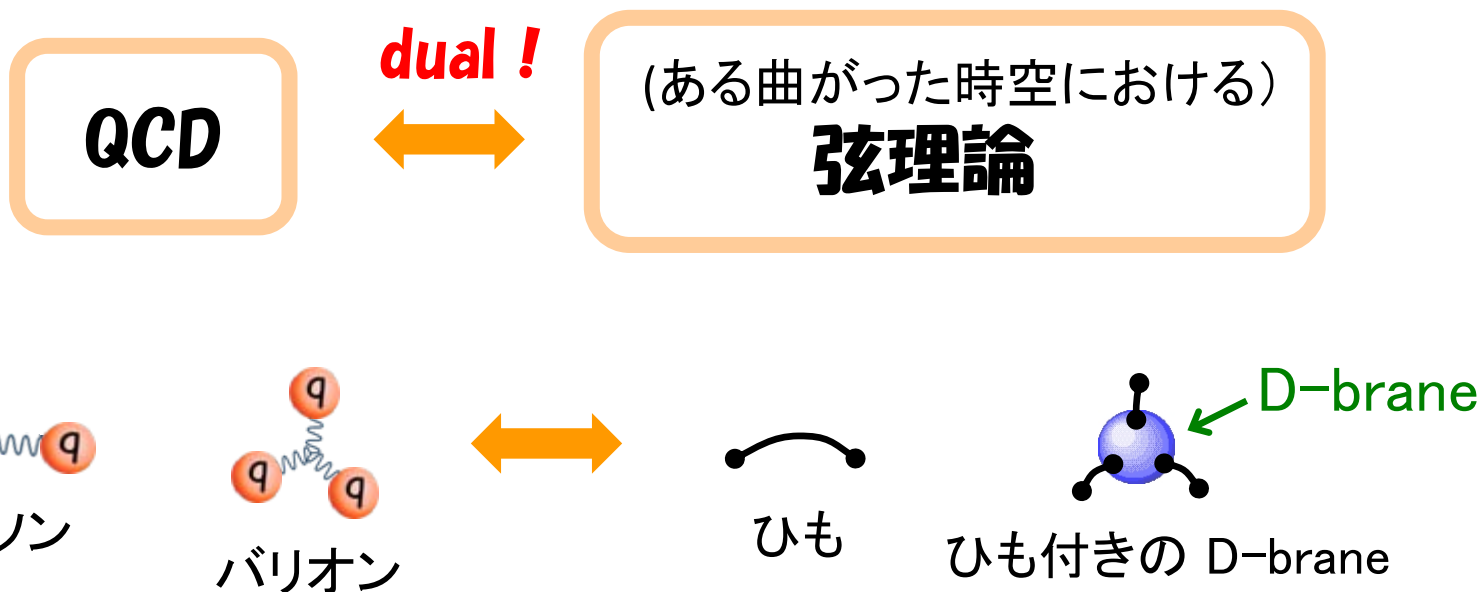
$i = 1, 2, \dots, N_f$

( $u$   $d$   $s$   $\dots$ )

- ハドロンを記述する基礎理論と考えられている。
- 相互作用が強いため、一般に解析は大変難しい。

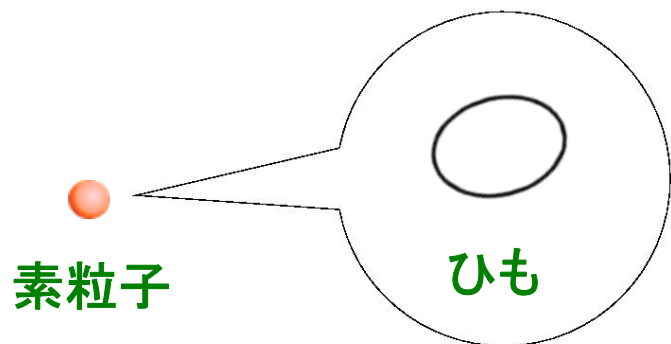
# 主張：

弦理論を用いることによって、クォークを用いない新しいハドロンの記述法が得られる！



- QCD ではだめというわけではなく、両者が等価であると主張

# ★ 弦理論とは？



- 様々な種類の粒子が一つのひもの振動モードとして表される。
  - もともとはハドロンの理論として誕生。 [Nambu 1970 etc.]
  - 実際やってみると、**重力子**を含むことが示せる。  
[Yoneya 1974, Schrerck-Schwarz 1974]
  - しかも、奇跡的に発散がキャンセルする。
- ➔ ハドロンの理論というより、**量子重力理論** とみなされるようになった。

# ★ String revolutions

## ◆ 1<sup>st</sup> revolution (1984年頃～) [Green-Schwarz 1984 ~]

重力のみならず、**大統一理論**が弦理論の枠内に含まれ得ることが見出された。

→ **量子重力**を含む**究極の統一理論**の候補と呼ばれるようになった。

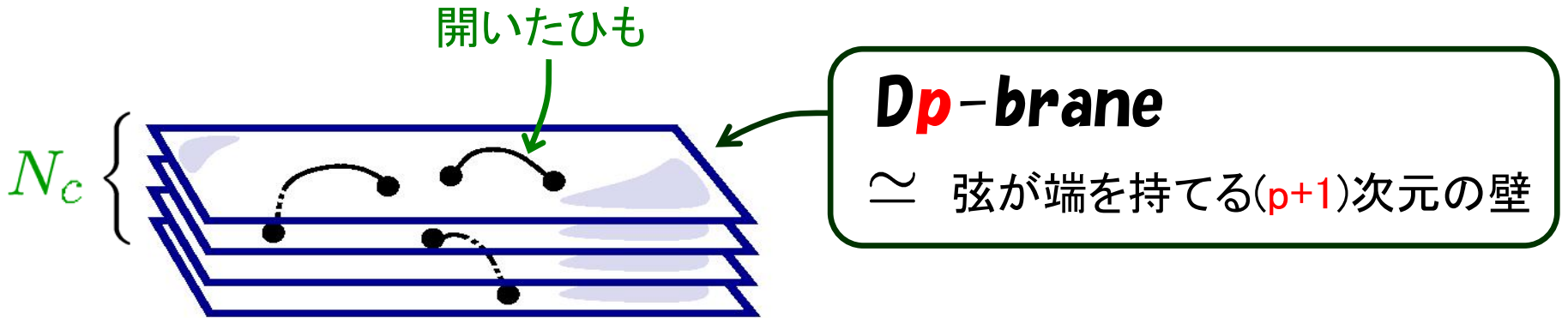
## ◆ 2<sup>nd</sup> revolution (1994年頃～) [Polchinski 1995, Witten 1995 ~]


**D-brane** の発見などを契機に弦理論の非摂動的な性質の理解が飛躍的に進んだ。

→ **Gauge/string duality** など、様々なゲージ理論に対する弦理論による全く新しい解析法が見出された。

# ★ D-brane とは？

10次元時空に埋め込まれた (p+1) 次元の壁を考える。



$a$    $b$   
 $a, b = 1 \sim N_c$



スピン1 で質量 0 の粒子 (ゲージ場) がでる。

$(A_\mu)^a_b : U(N_c)$  ゲージ場

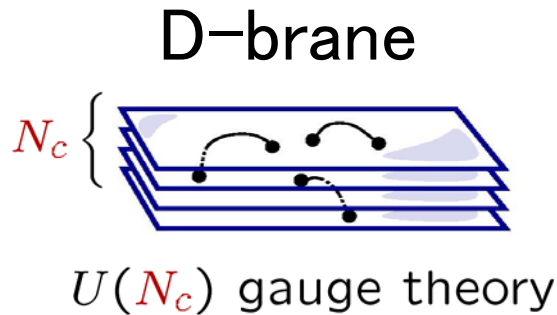


**(p+1)次元  $U(N_c)$  ゲージ理論**

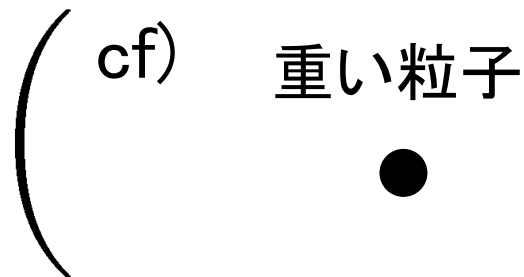
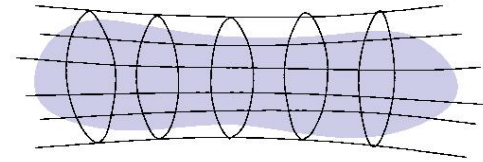
が brane の上に実現される！

# ★ Gauge / String duality

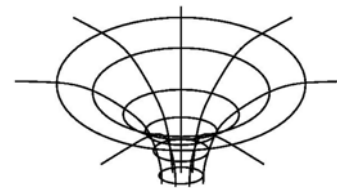
[Maldacena 1997 ~]



超重力理論の解



Einstein eq の解.



## Conjecture

ゲージ理論 **等価!** 曲がった時空における弦理論

large  $N_c$ , large  $\lambda$  **等価!** 超重力理論の近似が良い

( $\lambda \equiv g_{\text{YM}}^2 N_c$ ) (超弦理論の低エネルギー有効理論)



# ★ このアイデアを **QCD** に応用したい！

## 何がうれしいか？

- **Gauge / String duality を実験的に検証できる。**

ゲージ理論側の計算をサボっても、弦理論の結果を直接実験値と比較することで、正しさを検証できる。

- **ハドロン物理の全く新しい解析法を与える。**

さまざまな量が、いとも簡単にさくさく計算できる。

- **QCDのさまざまな性質の幾何学的理解が得られる。**

閉じ込め、カイラル対称性の破れ、ハドロンの質量の起源などが背景のトポロジーから理解できる。

- **新しい物質観が得られる。**

クォークを用いない究極の物質像がありうる！

- **弦理論の古くて新しい可能性が拓かれる。**

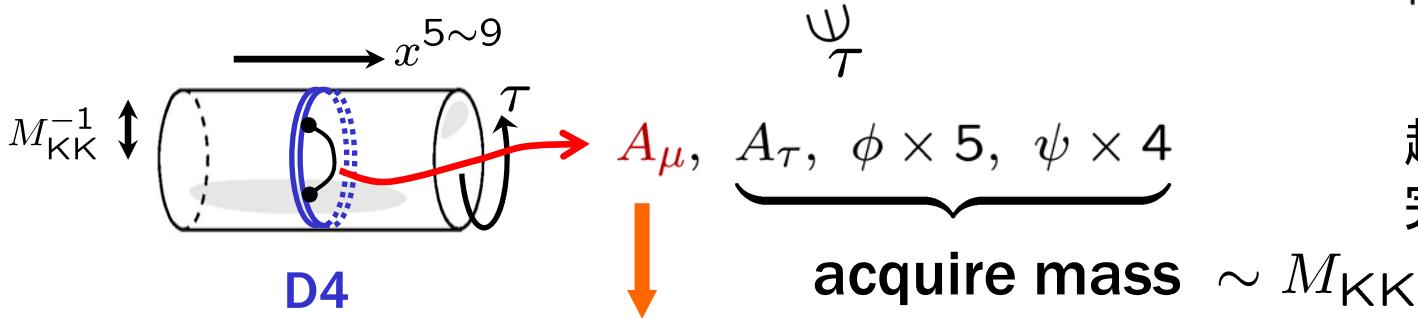
弦理論が誕生したころ(40年前)のアイデアは本質的に正しかった！  
この方向で、究極の統一理論に到達できるか？

# 目次

- ✓ ① Introduction
- ② QCD の構成
- ③ 様々な結果
- ④ まとめと展望

## 2 QCD の構成

- D4-brane  $\times N_c$  on  $S^1$  with  $\psi(x^\mu, \tau + 2\pi M_{\text{KK}}^{-1}) = -\psi(x^\mu, \tau)$

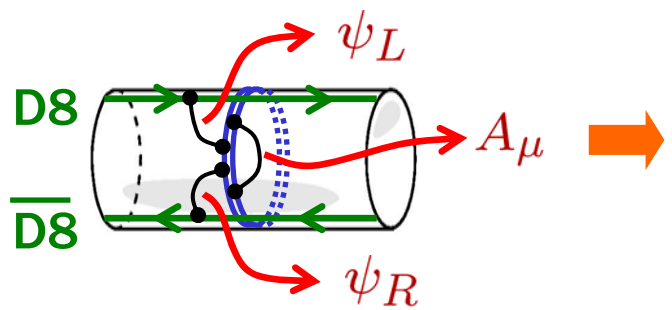


[Witten 1998]

超対称性は  
完全に破れる

4 dim pure Yang-Mills (at low energy)

- 上の D4-brane 系 + D8- $\overline{\text{D8}}$  pair  $\times N_f$  [Sakai-S.S. 2004]



	D4	D8	$\overline{\text{D8}}$
	$U(N_c)$	$U(N_f)_L$	$U(N_f)_R$
$A_\mu$	adjoint	1	1
$\psi_L$	$N_c$	$N_f$	1
$\psi_R$	$N_c$	1	$N_f$

← gluon  
} ← quark

QCD with  $N_f$  massless quarks

(at low energy)

# ★ pure Yang-Mills の超重力理論による記述

[Witten 1998]

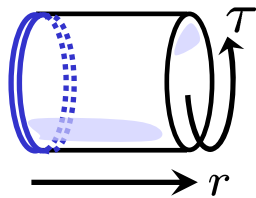
D4-brane on  $S^1$

(with  $\psi(x^\mu, \tau + 2\pi) = -\psi(x^\mu, \tau)$ )

この D4 に対応する曲がった時空  
における弦理論

$$\sim \mathbf{R}^{1,3} \times \mathbf{R}^2 \times S^4$$

D4

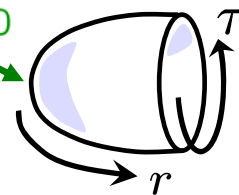


( $x^{5\sim 9}$  の動径方向)

pure Yang-Mills

(at low energy)

$r = r_0$



r に下限が生じる  
( $r_0 \leq r$ )

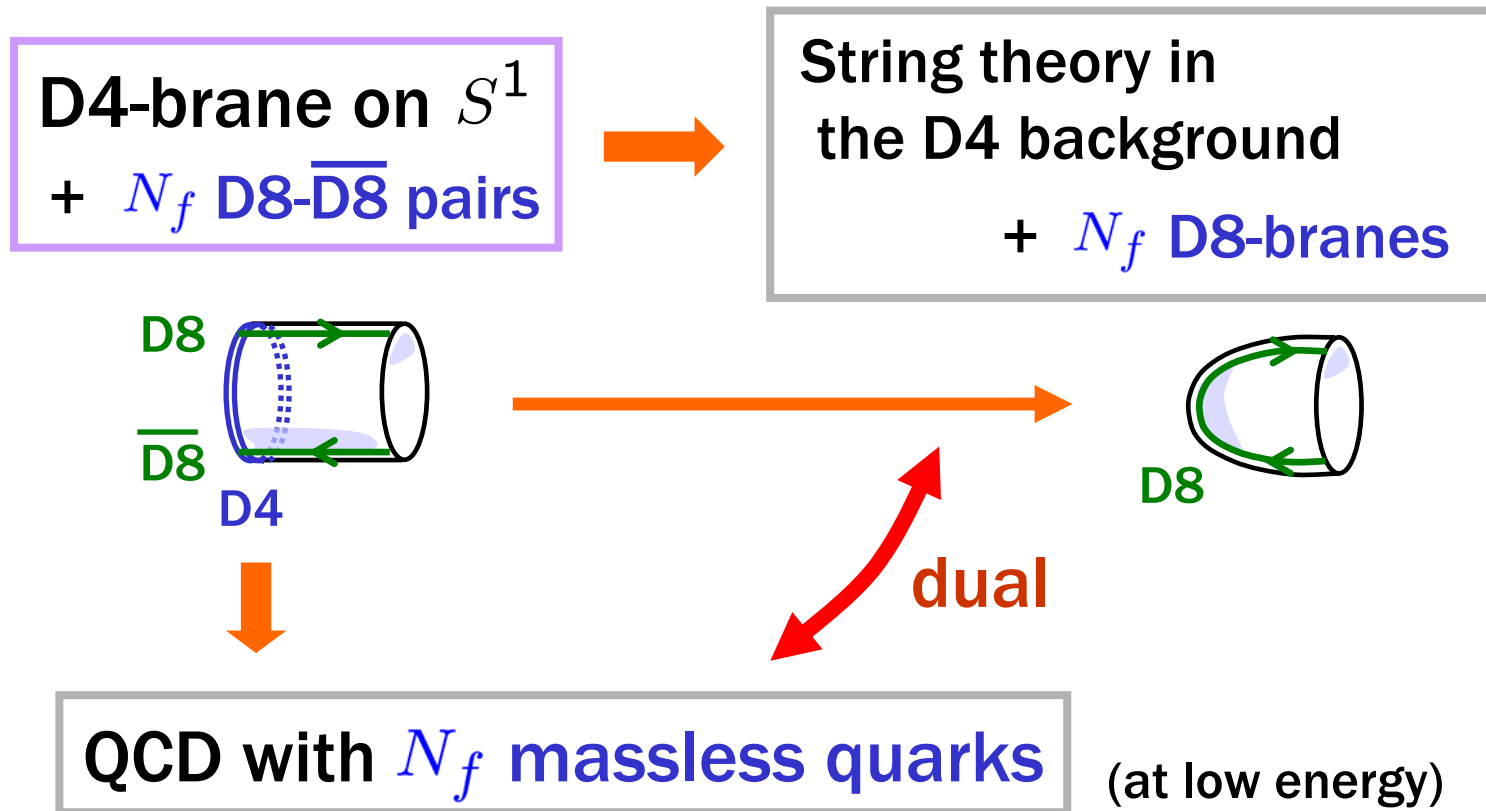
dual

# ★ Adding quarks [Sakai-S.S. 2004]

- ここで  $N_c \gg N_f$  を仮定し、“probe 近似” を用いる。

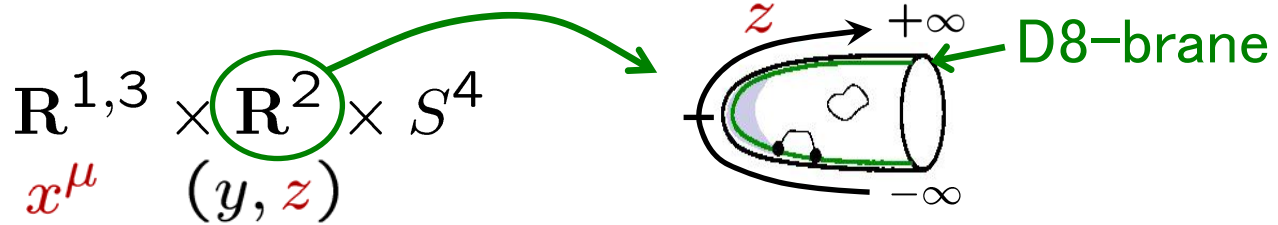
[Karch-Katz 2002]

- D4-brane をさっき用いた解に置き換える。
- Quark を加えるために導入した D8-brane は brane のまま扱う。



# ● Hadrons in the model

◆ 今の背景のトポロジーは



D8-branes は  $(x^\mu, z) \times S^4$  の方向にひろがっている

◆ この系に含まれる粒子

● 閉弦



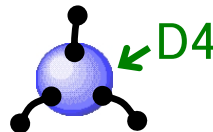
↔ グルーボール

● D8 にくっついた 開弦



↔ メソン 

●  $S^4$  に巻きついた D4



↔ バリオン 

これを用いて、ハドロンに関するさまざまな計算ができる！

### 3 様々な結果

#### ★ 警告！

- ◆ 現実の QCD と比較する時、以下の点に注意する必要がある。
  - $m_q = 0$  を仮定している。
  - $N_c \gg N_f$  を仮定している。(現実には  $N_c = 3, N_f = 2$ )
  - $M_{KK}$  より十分高いエネルギー・スケールでは 5次元の。
  - 本当は  $M_{KK} \rightarrow \infty$  としたいが、それをやるには超重力理論による近似を超えた計算をしないといけない。



至る所に数十% のエラーがあり得ることを覚悟すべき。  
オーダーが合えば、とりあえずは成功と考える。

実際にやってみると、期待以上に良く合う！

# ★ カイラル対称性の破れ

D4-brane を対応する超重力理論の解に置き換えると



D8 と  $\overline{D8}$  は、つながって一つになる。

➡ これは chiral symmetry breaking と解釈される！

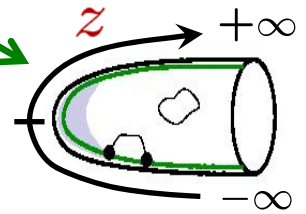
$$\begin{array}{ccc} U(N_f)_L \times U(N_f)_R & \rightarrow & U(N_f)_V \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \text{D8} & & \overline{\text{D8}} \end{array} \quad \begin{array}{c} \updownarrow \\ \text{connected D8} \end{array}$$

- 温度を上げていくと、Yang-Mills の conf./deconf. の転移点で chiral symmetry が回復することも示せる。



# ★ メソンの有効作用

$$N_f \text{ D8-branes} : (x^\mu, z) \times S^4 \subset \mathbf{R}^{1,3} \times \mathbf{R}^2 \times S^4$$



↓ ← 低エネルギー

9 dim  $U(N_f)$  ゲージ理論

↓ ← Reducing  $S^4$  ( $SO(5)$  の作用で不変な状態だけに注目)

5 dim  $U(N_f)$  Yang-Mills-Chern-Simons 理論

$A_\mu(x^\nu, z), A_z(x^\nu, z)$   
 $\mu, \nu = 0 \sim 3$   
 5 dim ゲージ場

$$S_{5\text{dim}} \simeq S_{\text{YM}} + S_{\text{CS}}$$

$$S_{\text{YM}} = \kappa \int d^4 x dz \text{Tr} \left( \frac{1}{2} h(z) F_{\mu\nu}^2 + k(z) F_{\mu z}^2 \right) \quad S_{\text{CS}} = \frac{N_c}{24\pi^2} \int_5 \omega_5(A)$$

$\kappa = \frac{\lambda N_c}{216\pi^3}$        $h(z) = (1+z^2)^{-1/3}$        $k(z) = 1+z^2$       CS5-form

( $M_{\text{KK}} = 1$  unit)

パラメータは  $\kappa$  と  $M_{\text{KK}}$  の2つのみ。

[See also, Son-Stephanov 2003]

**主張:** この5次元理論がメソンを記述する！

# ● 伝統的なメソンの有効作用

$$\begin{aligned}
 S_{4\text{dim}} = & \int d^4x \left[ \frac{f^2}{4} \text{tr}[D_\mu U^\dagger D^\mu U] \right. \\
 & + L_1 (\text{tr}[D_\mu U^\dagger D U])^2 + L_2 \text{tr}[D_\mu U^\dagger D_\nu U] \text{tr}[D^\mu U^\dagger D^\nu U] \\
 & + L_3 \text{tr}[D_\mu U^\dagger D^\mu U D^\nu U^\dagger D^\nu U] \\
 & \left. - iL_9 \text{tr}[F_{\mu\nu}^L D^\mu U^\dagger D^\nu U + F_{\mu\nu}^R D^\mu U^\dagger D^\nu U] + L_{10} \text{tr}[U^\dagger F_{\mu\nu}^L U F^{R\mu\nu}] \right] \quad \left. \vphantom{\int d^4x} \right\} \text{ pion} \\
 & + \frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu}^v F^{v\mu\nu} + m_\rho^2 \text{tr}[(v_\mu - g^{-1}\beta_\mu)^2] \quad \leftarrow \rho \text{ meson} \\
 & - \frac{N_c}{24\pi^2} \int_{4\text{dim}} \left[ \begin{array}{l} \text{Tr}[(A_R dA_R + dA_R A_R + A_R^3)(U^{-1} A_L U + U^{-1} dU) - \text{p.c.}] \\ + \text{Tr}[dA_L dU^{-1} A_L U - \text{p.c.}] + \text{Tr}[A_R (dU^{-1} U)^3 - \text{p.c.}] \\ + \frac{1}{2} \text{Tr}[(A_R dU^{-1} U)^2 - \text{p.c.}] + \text{Tr}[U A_R U^{-1} A_L dU dU^{-1} - \text{p.c.}] \\ - \text{Tr}[A_R dU^{-1} U A_R U^{-1} A_L U - \text{p.c.}] + \frac{1}{2} \text{Tr}[(A_R U^{-1} A_L U)^2] \end{array} \right. \\
 & \left. + C_1 \text{tr}[\alpha_L^3 \alpha_R - \alpha_R^3 \alpha_L] + C_2 \text{tr}[\alpha_L \alpha_R \alpha_L \alpha_R] \right. \\
 & \left. + C_3 \text{tr}[F^v \alpha_L \alpha_R \alpha_L \alpha_R] \right. \\
 & \left. + C_4 \text{tr}[F^L (\alpha_L \alpha_R - \alpha_R \alpha_L) - F^R (\alpha_R \alpha_L - \alpha_L \alpha_R)] \right] \\
 & - \frac{N_c}{240\pi^2} \int_{5\text{dim}} \text{Tr}(g d g^{-1})^5 \quad \leftarrow \text{WZW term} \\
 & + (\text{much more !!})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_\mu U &= \partial_\mu U - i A_\mu^L U + i U A_\mu^R \\
 U &= \xi_L^\dagger \xi_R \\
 \beta_\mu &= \frac{1}{2i} (\partial_\mu \xi_R \cdot \xi_L^\dagger + \partial_\mu \xi_L \cdot \xi_R^\dagger) \\
 D_\mu \xi_L &= \partial_\mu \xi_L - i g v_\mu \xi_L + i \xi_L A_\mu^L \\
 D_\mu \xi_R &= \partial_\mu \xi_R - i g v_\mu \xi_R + i \xi_R A_\mu^R \\
 \alpha_{L\mu} &= \frac{1}{i} D_\mu \xi_L \cdot \xi_L^\dagger, \quad \alpha_{R\mu} = \frac{1}{i} D_\mu \xi_R \cdot \xi_R^\dagger
 \end{aligned}$$

- 非常に複雑。
- 対称性では決まらないパラメータがたくさん。

● さっきの5次元作用から、これらが全部自動的に出てくる！

● しかも、出てくるパラメータは、実験とうまく合う形で出てくる！

# mode expansion

ある完全系

$$A_\mu(x^\mu, z) = \sum_n B_\mu^{(n)}(x^\mu) \psi_n(z), \quad A_z(x^\mu, z) = \sum_n \varphi^{(n)}(x^\mu) \phi_n(z)$$

$\downarrow$  vector meson                       $\downarrow$  scalar meson

- ゲージ変換 (簡単のため、 $N_f = 1$  の場合でやる。)

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda, \quad \delta A_z = \partial_z \Lambda, \quad \Lambda(x^\mu, z) = \sum_n \Lambda^{(n)}(x^\mu) \psi_n(z)$$

$\phi_n = \partial_z \psi_n$ , ( $n \geq 1$ ) とおくと相性が良い。

→  $\delta B_\mu^{(n)} = \partial_\mu \Lambda^{(n)}$ ,  $\delta \varphi^{(n)} = \Lambda^{(n)}$

→  $\varphi^{(n)}$  はゲージ変換で吸収され、 $B_\mu^{(n)}$  は massive になる。

- 実は、もう一つ  $\phi_0$  を入れて初めて完全系。 $\varphi^{(0)}$  は吸収されない。

物理的な自由度:  $\varphi^{(0)}$ ,  $B_\mu^{(1)}$ ,  $B_\mu^{(2)}$ , ...

現実のメソン:  $\pi$ ,  $\rho$ ,  $a_1$ , ... のように対応!

**種類の異なるメソンが5次元ゲージ場に統一された!**

# ★ $J^{PC}$ と質量

- パリティ、荷電共役に対する変換性も正しくでる。

	$\varphi^{(0)}$	$B_{\mu}^{(\text{odd})}$	$B_{\mu}^{(\text{even})}$
$J^{PC}$	$0^{-+}$	$1^{--}$	$1^{++}$
	pseudo-scalar	vector	axial-vector

↑  
 $\pi$

↑  
 $\rho$

↑  
 $a_1$

- vector meson と axial vector meson が交互に出ることを予言。

$1^{--}$	$\rho(770)$	$\rho(1450)$	$\rho(1700)$	$\rho(1900)^{\Delta}$	$\rho(2150)^{\Delta}$
$1^{++}$	$a_1(1260)$	$a_1(1640)^{\Delta}$			

( $\Delta$  ... not established)

- 質量の比較

	$\rho$	$a_1$	$\rho'$	$a_1'^{\Delta}$	$\rho''$
exp.(MeV)	776	1230	1465	(1640)	1720
our model	[776]	1189	1607	2023	2435
ratio	[1]	1.03	0.911	(0.811)	0.706

↑  
input

# ★ 相互作用項

## ● パイ中間子の相互作用項

$$S_{5\text{dim}} \sim \int d^4x \left[ \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr}(U^{-1} \partial_\mu U)^2 + \frac{1}{32e_S^2} \text{Tr}[U^{-1} \partial_\mu U, U^{-1} \partial_\nu U]^2 \right] + \dots$$

## ● $\rho$ meson を含む相互作用

$$U(x) = e^{2i\pi(x)/f_\pi}$$

$$S_{5\text{dim}} \sim \int dx^4 \left[ \dots + 2g_{\rho\pi\pi} \text{Tr}(\rho_\mu [\pi, \partial^\mu \pi]) - 2g_\rho \text{Tr}(\rho_\mu Q) A_\mu^{\text{em}} + \dots \right]$$

$$\rho_\mu = B_\mu^{(1)}$$

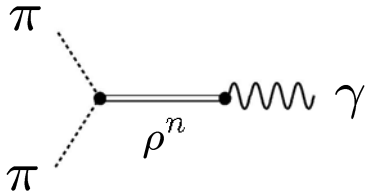
$$Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

for  $N_f = 2$

coupling		fitting $m_\rho$ and $f_\pi$	experiment
$f_\pi$	$1.13 \cdot \kappa^{1/2} M_{\text{KK}}$	[92.4 MeV]	92.4 MeV
$L_1$	$0.0785 \cdot \kappa$	$0.584 \times 10^{-3}$	$(0.1 \sim 0.7) \times 10^{-3}$
$L_2$	$0.157 \cdot \kappa$	$1.17 \times 10^{-3}$	$(1.1 \sim 1.7) \times 10^{-3}$
$L_3$	$-0.471 \cdot \kappa$	$-3.51 \times 10^{-3}$	$-(2.4 \sim 4.6) \times 10^{-3}$
$L_9$	$1.17 \cdot \kappa$	$8.74 \times 10^{-3}$	$(6.2 \sim 7.6) \times 10^{-3}$
$L_{10}$	$-1.17 \cdot \kappa$	$-8.74 \times 10^{-3}$	$-(4.8 \sim 6.3) \times 10^{-3}$
$g_{\rho\pi\pi}$	$0.415 \cdot \kappa^{-1/2}$	4.81	5.99
$g_\rho$	$2.11 \cdot \kappa^{1/2} M_{\text{KK}}^2$	0.164 GeV <sup>2</sup>	0.121 GeV <sup>2</sup>
$g_{a_1\rho\pi}$	$0.421 \cdot \kappa^{-1/2} M_{\text{KK}}$	4.63 GeV	2.8 ~ 4.2 GeV

# ★ pion form factor

## ● パイオン形状因子



$$F_\pi(k^2) = \sum_{n \geq 1} \frac{g_{\rho^n} g_{\rho^n \pi \pi}}{k^2 + m_{\rho^n}^2}$$

vector meson を介した  
グラフしかない。

“vector meson dominance”

[Gell-Mann -Zachariasen 1961]

[Sakurai 1969]

## ● 荷電半径

$$F_\pi(k^2) \simeq 1 - \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle^{\pi^\pm} k^2 + \dots$$

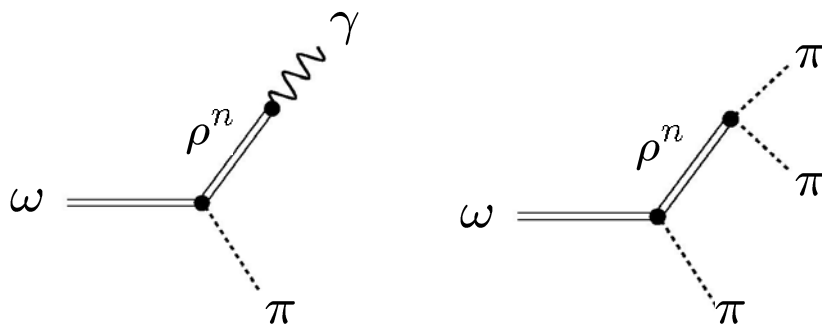
$$\Rightarrow \langle r^2 \rangle^{\pi^\pm} = 6 \sum_{n \geq 1} \frac{g_{\rho^n} g_{\rho^n \pi \pi}}{m_{\rho^n}^4} \simeq 11.0 M_{\text{KK}}^{-2}$$

$M_{\text{KK}}$  を  $\rho$  の質量から決めた値にとると、

$$\langle r^2 \rangle^{\pi^\pm} \simeq (0.690 \text{ fm})^2 \quad (\text{our model})$$

$$\simeq (0.672 \text{ fm})^2 \quad (\text{experiment})$$

★  $\omega \rightarrow \pi^0 \gamma$  and  $\omega \rightarrow \pi^0 \pi^+ \pi^-$



$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega + \rho^0) & \rho^+ \\ \rho^- & \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega - \rho^0) \end{pmatrix}$$

vector meson を介した  
グラフしかない。

➡ **GSW model と同じ!** [Gell-Mann -Sharp-Wagner 1962]

● さらに、

$$\Gamma(\omega \rightarrow \pi^0 \gamma) = \frac{N_c^2}{3} \frac{\alpha}{64\pi^4 f_\pi^2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{1,2n-1} g_{\rho^n}}{m_{\rho^n}^2} \right)^2 |\mathbf{p}_\pi|^3 = \frac{N_c^2}{3} \frac{\alpha}{64\pi^4 f_\pi^2} g_{\rho\pi\pi}^2 |\mathbf{p}_\pi|^3$$

➡ **Fujiwara et. al. と同じ!**

[Fujiwara-Kugo-Terao-Uehara-Yamawaki 1985]

# ★ その他の話題

- Wess-Zumino-Witten 項を完全に再現！
- $U(1)_A$  アノマリーも再現！
- $\eta'$  メソンの質量

Witten-Veneziano 公式

$$m_{\eta'}^2 = \frac{2N_f}{f_\pi^2} \chi_g$$

を再現！

$$\left( \chi_g \equiv \frac{1}{(16\pi^2)^2} \int d^4x \langle \text{Tr} F \tilde{F}(x) \text{Tr} F \tilde{F}(0) \rangle \right) \text{Topological susceptibility}$$

## ● バリオン

Skyrmion

$\simeq$

“Instanton” in 5 dim

$\simeq$

D4 wrapped on  $S^4$

最近、この描像に基づいて、  
バリオンの荷電半径や  
磁気モーメントなどが計算された。  
これがまた実験と良く合う！

Hashimoto-Sakai-S.S.  
arXiv:0806.3122 より



	our result	exp.
$\langle r^2 \rangle_{I=0}^{1/2}$	0.742 fm	0.806 fm
$\langle r^2 \rangle_{I=1}^{1/2}$	0.742 fm	0.939 fm
$\langle r^2 \rangle_A^{1/2}$	0.537 fm	0.674 fm
$g_{I=0}$	1.68	1.76
$g_{I=1}$	7.03	9.41
$g_A$	0.734	1.27



## 4 まとめと展望

- Gauge/String duality のアイデアを QCD に応用し、ハドロンの弦理論による記述を得た。
- メソンの有効理論は、曲がった時空における 5次元の YM-CS 理論で与えられる。
- ハドロンのスペクトルや結合定数などが簡単な計算で求まり、実験にも期待以上に良く合う。
- より精密な議論をするには、曲がった時空における弦理論の取り扱いを開発する必要がある。
- クォークを用いない、弦理論によるハドロンの記述が可能であると言っている。10次元の理論で4次元の物理を記述できると言っている。究極の物質像を探る上でも、常識を覆す新たな可能性を示唆している。