

$O(N \log N)$ でスケールする 衝突系N体コードの開発

総合研究大学院大学
天文科学専攻
博士後期課程3年
押野翔一

概要

- 計算量が $O(N \log N)$ でスケールする衝突系N体スキームを開発。
- このスキームを惑星形成過程に適用し、十分な精度が得られることを示した。
- これにより、衝突系ではいままで出来なかった粒子数100万体を越える計算が可能となる。

構成

1. 導入
2. 手法
3. 結果
4. まとめ

構成

1. 導入

- ・ 衝突系と無衝突系
- ・ 本研究で計算可能となる天体現象の例

2. 手法

3. 結果

4. まとめ

衝突系と無衝突系

- 二体緩和によって熱平衡状態に移行するタイムスケール。

$$t_{relax} \approx \frac{v^3}{Gnm^2 \ln \Lambda}$$

- 無衝突系
 - 銀河: $t_{relax} >$ 宇宙年齢
- 衝突系
 - 球状星団: $t_{relax} \approx 10\text{Gyr}$
 - 惑星形成: $t_{relax} \approx 10^4 \sim 10^6\text{yr}$

緩和時間が短い

→ 近接遭遇が系の進化に影響を与える。

本研究で計算可能となる天体現象の例

- ・ 惑星形成
 - ・ Kokubo & Ida 2002 : N体計算
 - ・ 粒子数 10^4 、粒子半径は数百キロメートル。
- ・ 一方、初期の微惑星サイズはもっと小さい可能性がある。(Weidenschilling 1997, Goldreich & Ward 1973)

衝突系では $O(N^2)$ のスキームが主流。

→新たに $O(N \log N)$ のスキームを開発した。

構成

1. 導入

2. 手法

- ・ 先行研究
- ・ Particle-Particle Particle-Tree (PPPT)
- ・ 粒子間重力の分割

3. 結果

4. まとめ

先行研究

Tree法(Barnes & Hut 1986) :

N log Nでスケールするが、近接遭遇を解くのが困難。

Hybrid法(Chambers 1999) :

近接遭遇を高速に解けるが、計算量は $O(N^2)$

これらの利点を組み合わせる。

→ **Particle-Particle Particle-Tree**

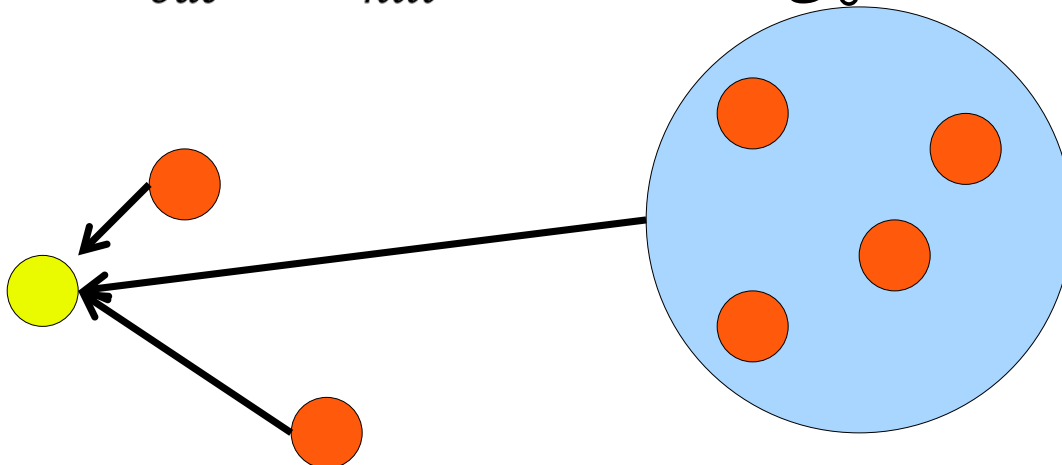
Particle-Particle Particle-Tree

遠距離にある粒子からの重力は近くの粒子に比べ小さいので近似できる。

-粒子間重力の計算を距離で分け、近距離のものは直接計算。遠距離のものはツリー法で計算する。

$$r_{hill} = \sqrt[3]{\frac{m}{3M}} a$$
$$r_{cut} = C r_{hill}$$

惑星系の場合、この程度の距離で重力の取扱いを切り替える。

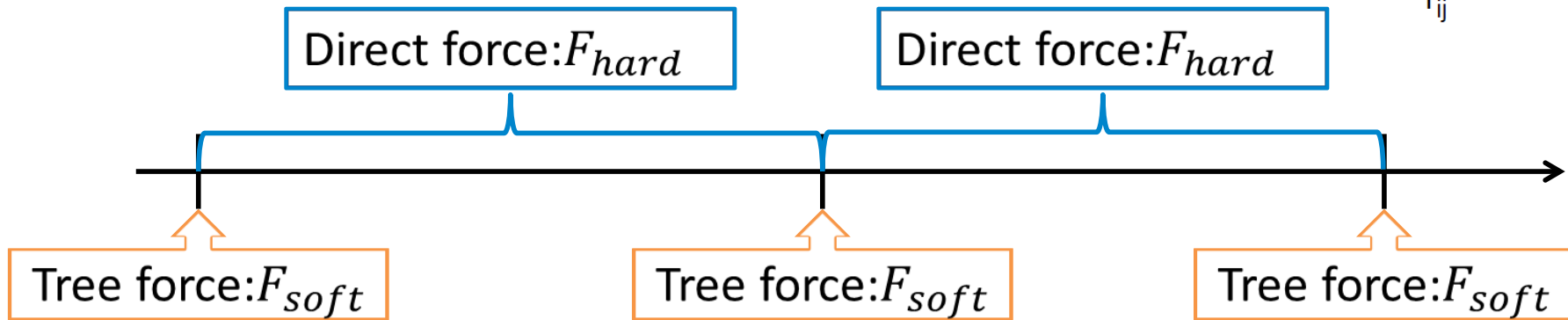
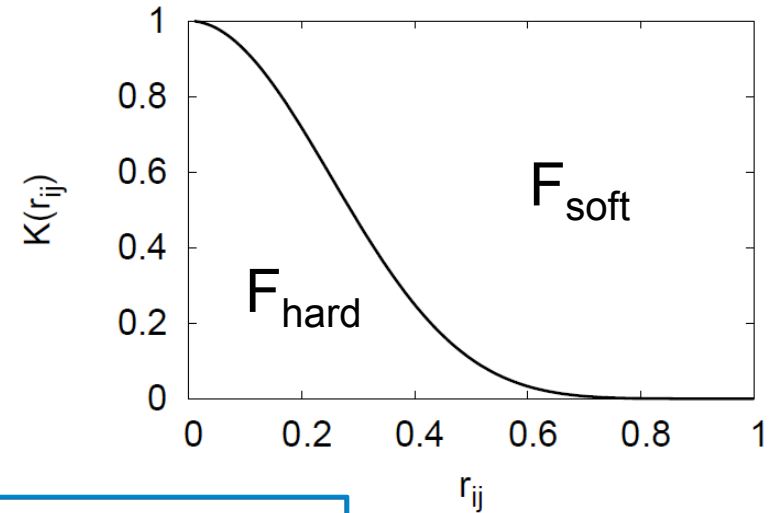


粒子間重力の分割

$$F = F_{soft} + F_{hard}$$

$$F_{soft} = - \sum_{i \neq j}^N \frac{Gm_j r_{ij}}{|r_{ij}|^3} \times [1 - K(r_{ij})]$$

$$F_{hard} = - \sum_{i \neq j}^N \frac{Gm_j r_{ij}}{|r_{ij}|^3} \times K(r_{ij})$$



| | 粒子数 | 重力 | 積分法 | 時間刻み |
|------------|-----|----|---------|------|
| F_{soft} | 多い | 近似 | リープフロッグ | 固定 |
| F_{hard} | 少ない | 直接 | 4次エルミート | 可変 |

構成

1. 導入

2. 手法

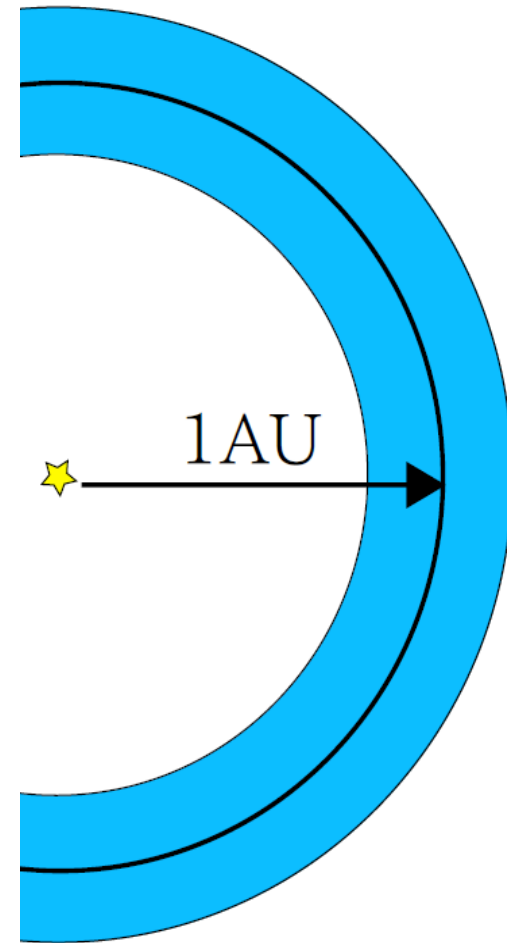
3. 結果

- ・ 初期条件
- ・ 結果

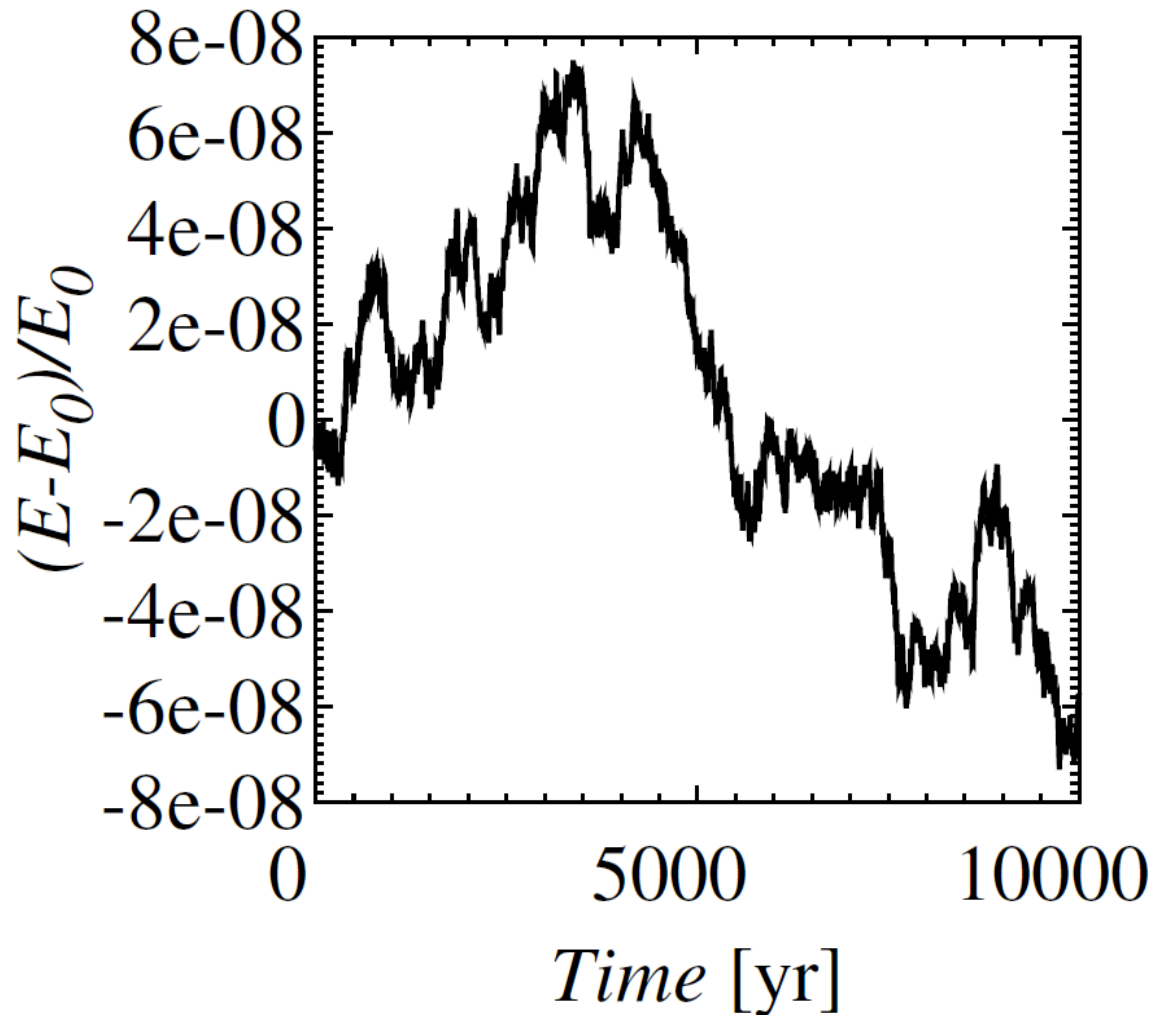
4. まとめ

初期条件

- 粒子数: 1万個
- 粒子質量: $1.45 \times 10^{23} \text{g}$
- 中心星は太陽質量
- 領域: 0.95-1.05AU
- $\langle e^2 \rangle^{1/2} = 2 \langle i^2 \rangle^{1/2} = 5r_{\text{hill}}$
のレイリー分布

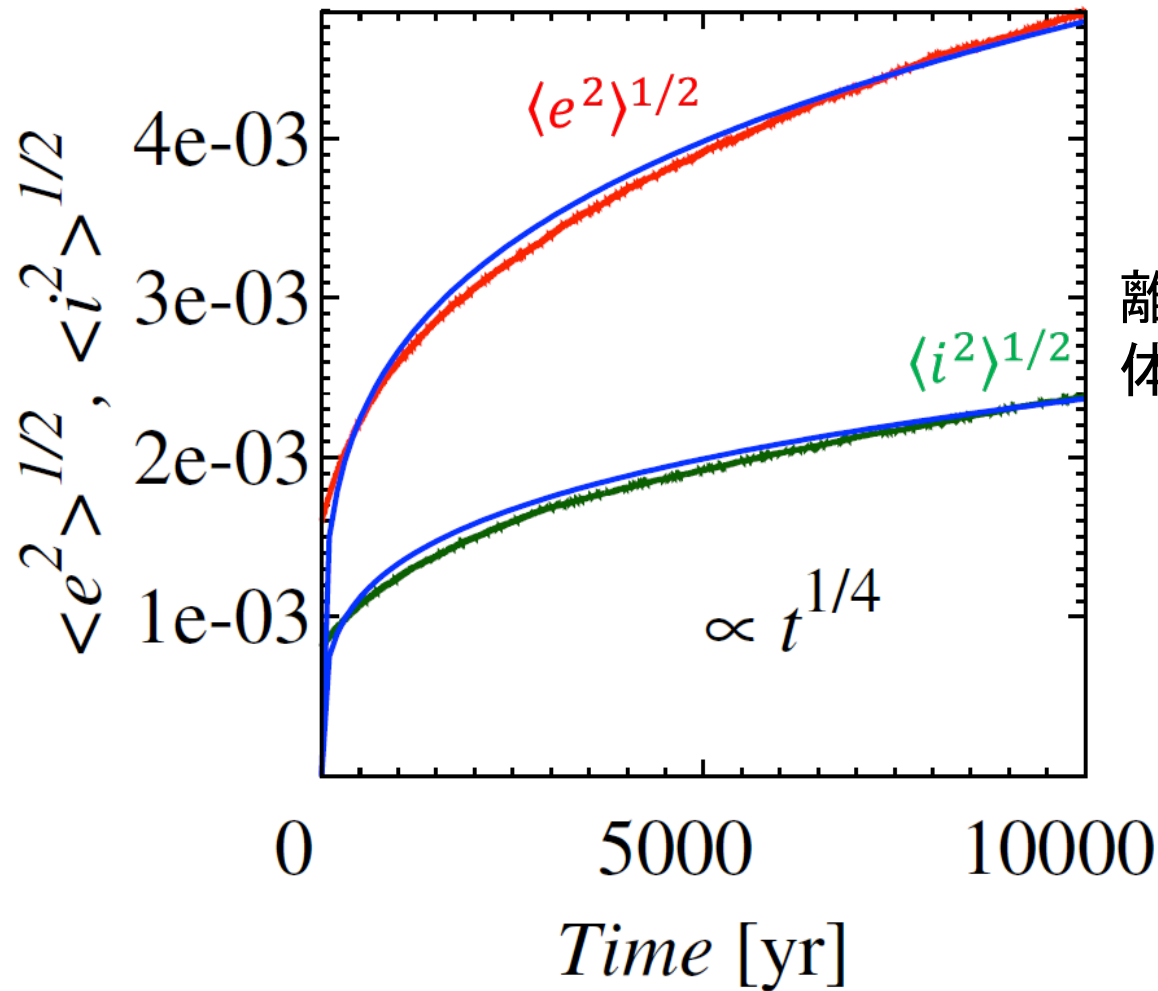


長時間のエネルギー誤差



エネルギー誤差は主にTree法によるランダムな変化となっているので長時間の計算でも誤差が抑えられている。

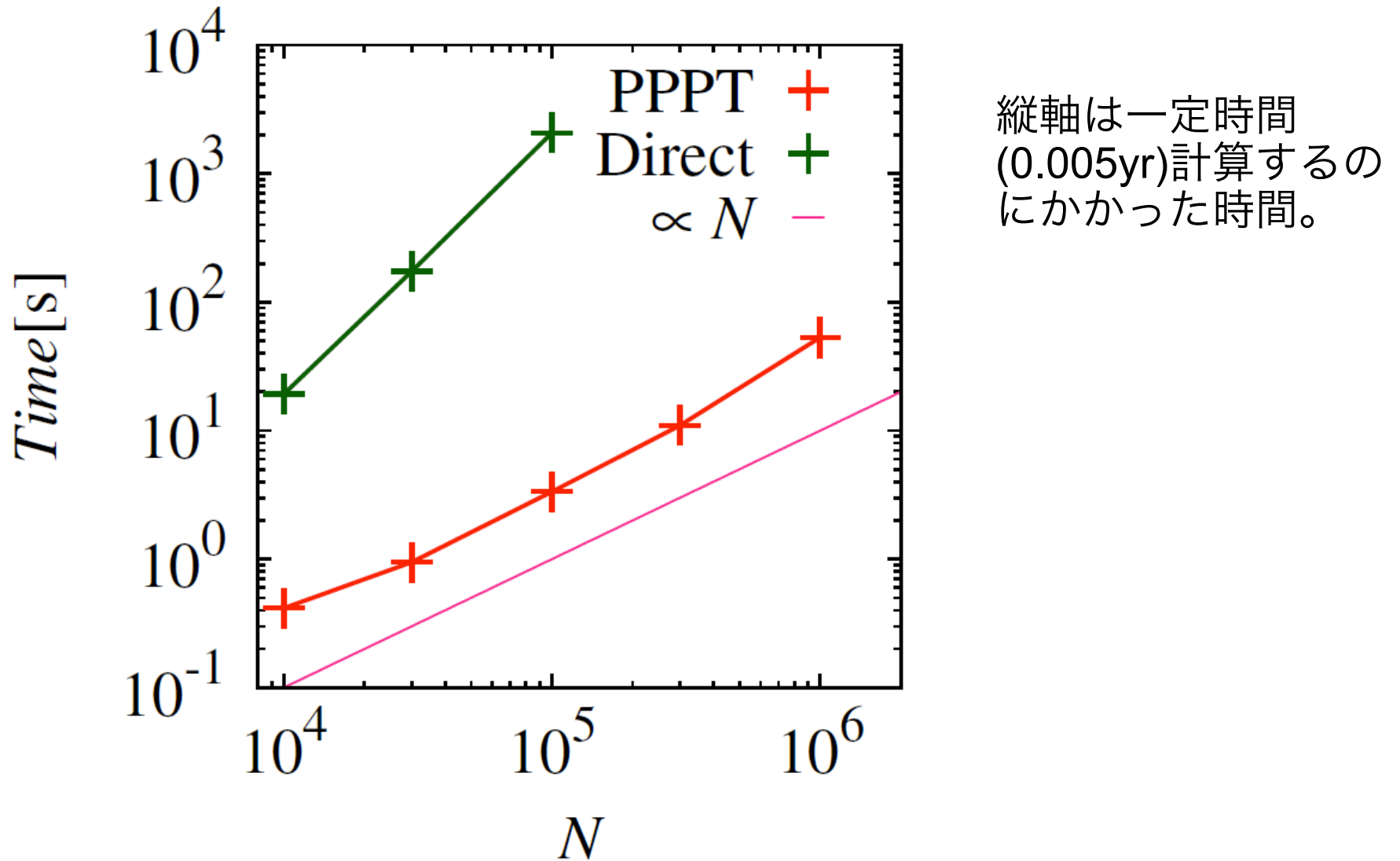
eとiのRMSの時間進化



離心率と軌道傾斜角は二
体緩和によって進化する。

Ida & Makino (1992)と consistent

計算時間のスケールリング



N log Nでスケールしている。

4.まとめ

- $O(N \log N)$ でスケールする衝突系N体計算スキームを開発した。
- 惑星形成過程の計算にこのスキームを使い、長時間の計算でもエネルギー誤差が抑えられていることを示した。
- 本研究により、惑星系での大粒子数を用いた計算が可能となった。

今後の予定

- 現在このプログラムをMPIを用いた並列化を行っている。
- これにより、大粒子数での計算が可能となる。
- またこのスキームを球状星団、銀河中心など他の衝突系に適用することも行っている。

先行研究

- Individual timestep (Aarseth 1963)
 - Direct
 - GRAPE (Sugimoto et al. 1990, Makino et al. 2003)
 - 並列化(Nitadori et al. 2007)
 - Phantom-grape (Nitadori et al. 2006)

$O(N^2)$ でスケールする計算

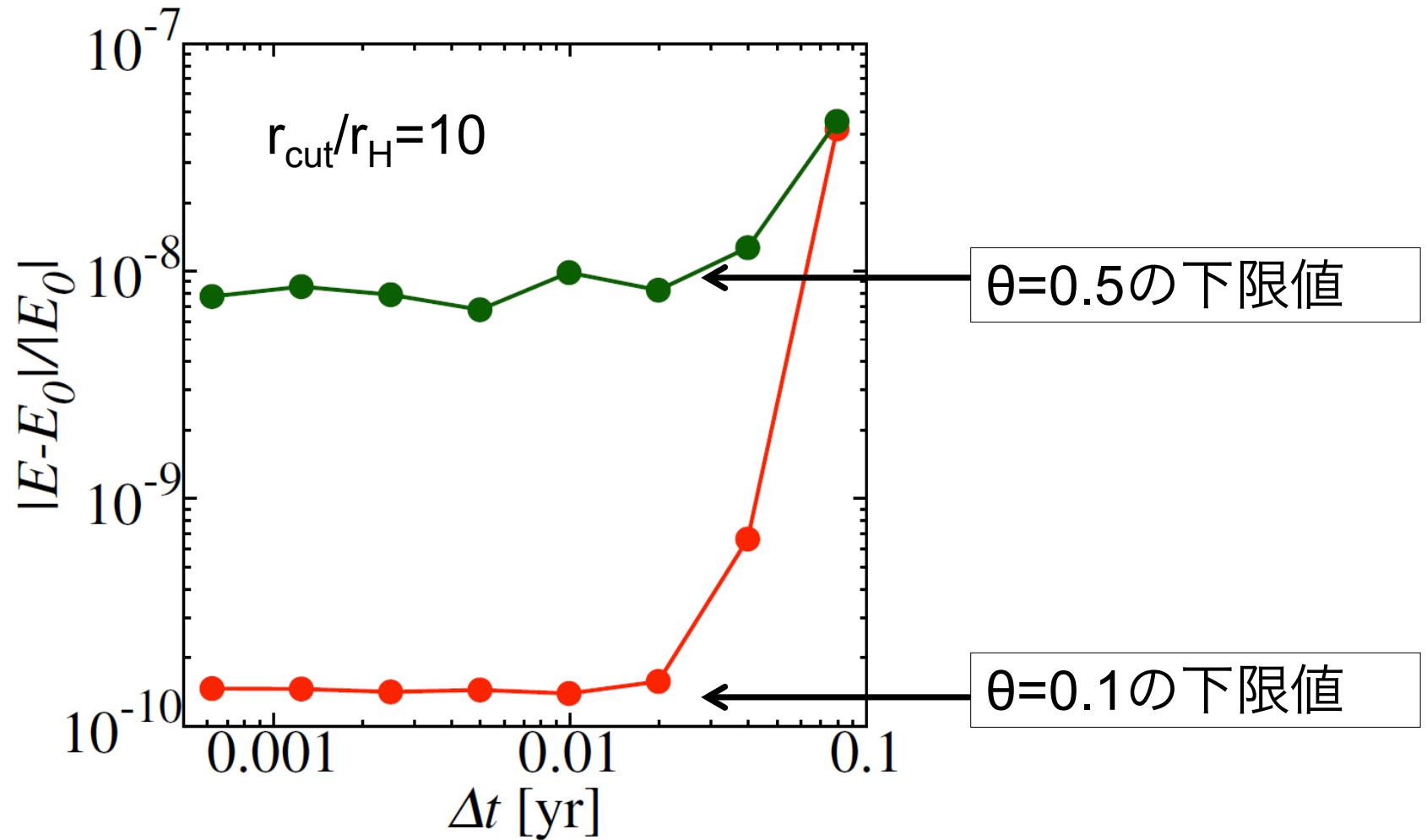
- Tree
 - Hernquist & Katz 1989
 - McMillan & Aarseth 1993
- 近接遭遇時に計算量が増大する、並列化が困難

本研究について

- 直接計算とTree法を組み合わせることにより、計算量が $O(N \log N)$ でスケールする計算法となる。
- 直接計算：4次のエルミート法, individual timestep
 - 近接遭遇時に計算量を抑える。
- Tree法：リープフロッグ法
 - シンプレクティック性を保つ。

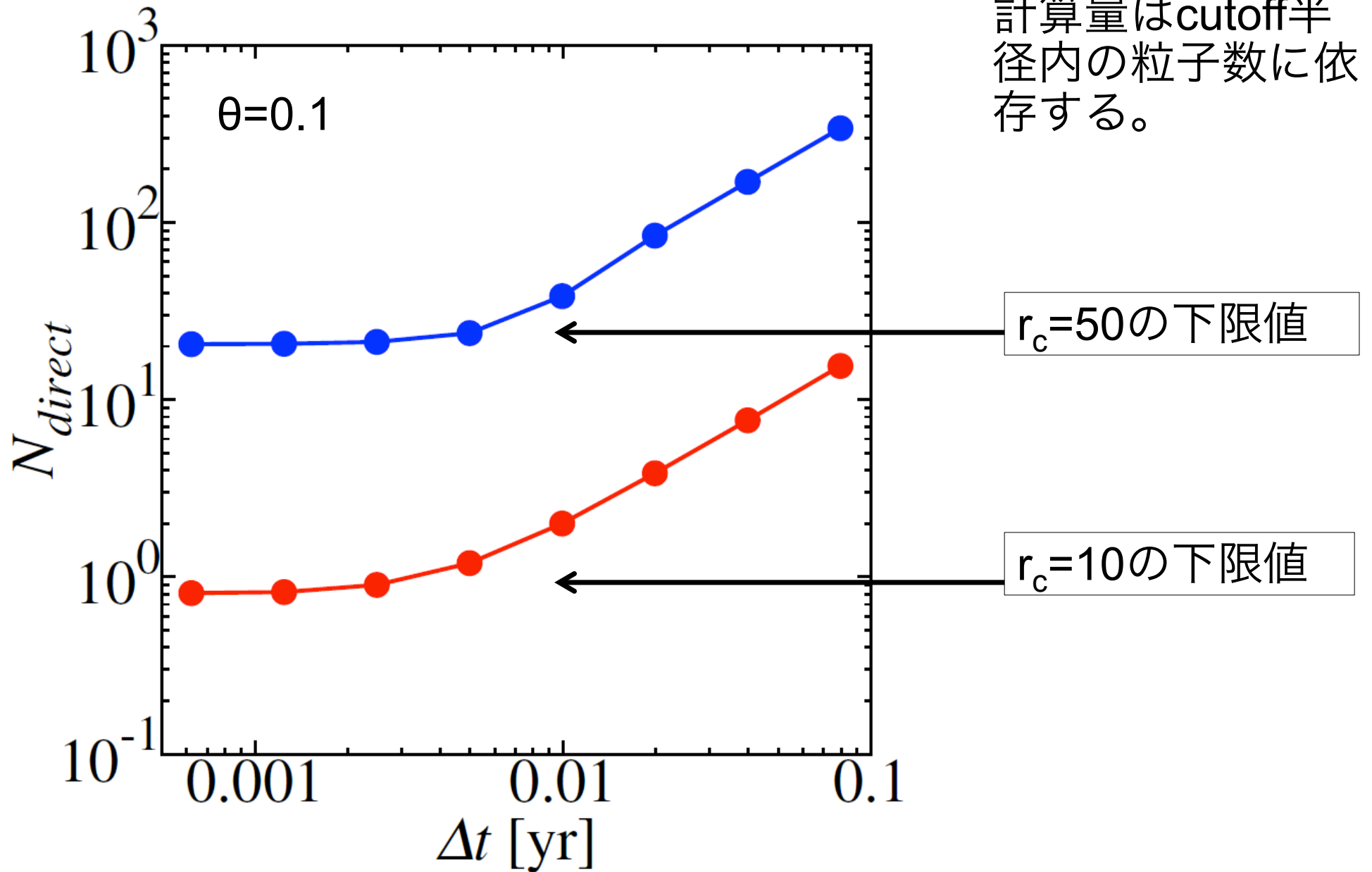
Particle-Particle Particle-Tree (以後PPPT)

時間刻みとエネルギー誤差の関係

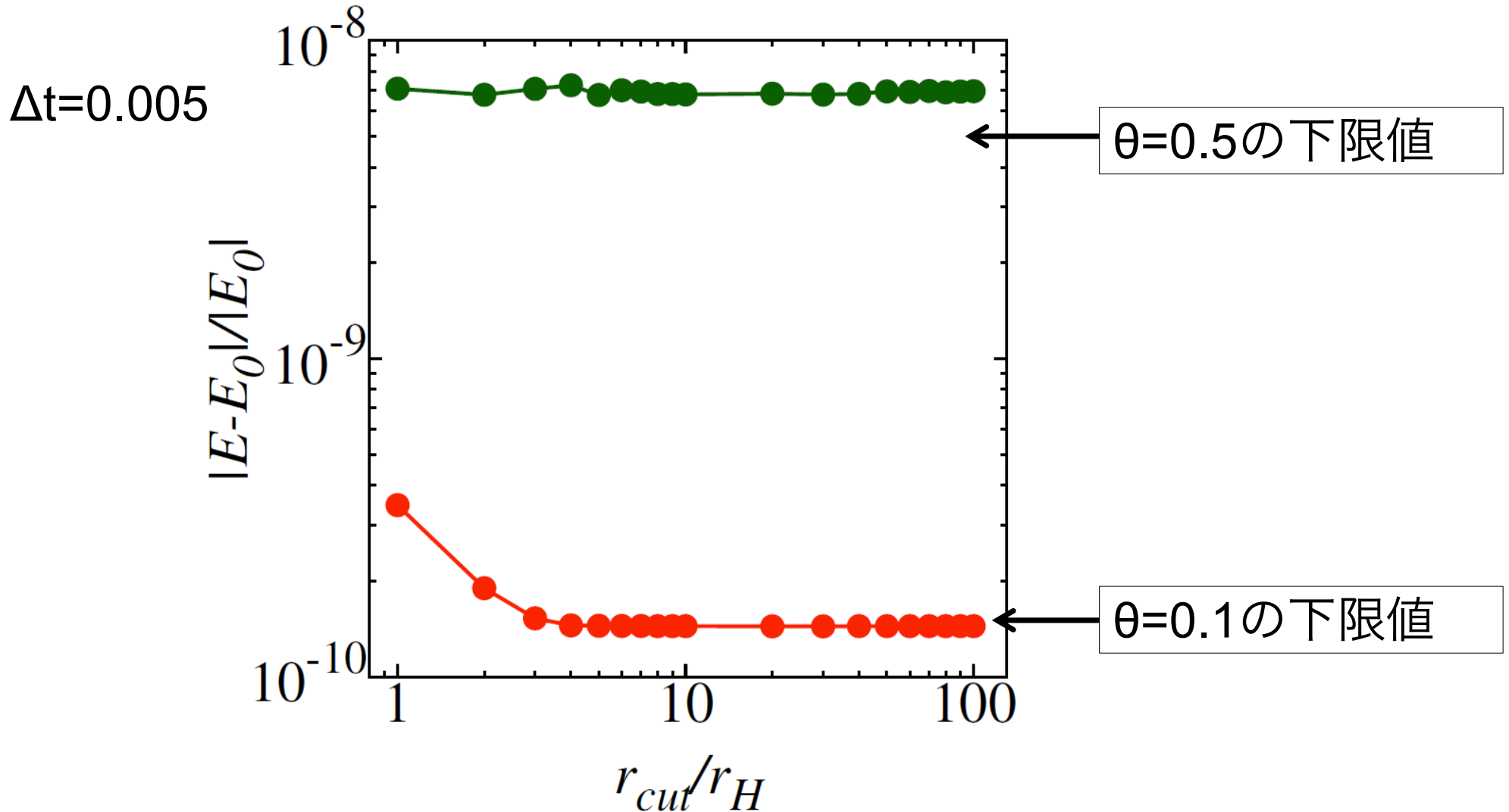


Tree法による誤差の下限值が存在する。

時間刻みと計算量の関係

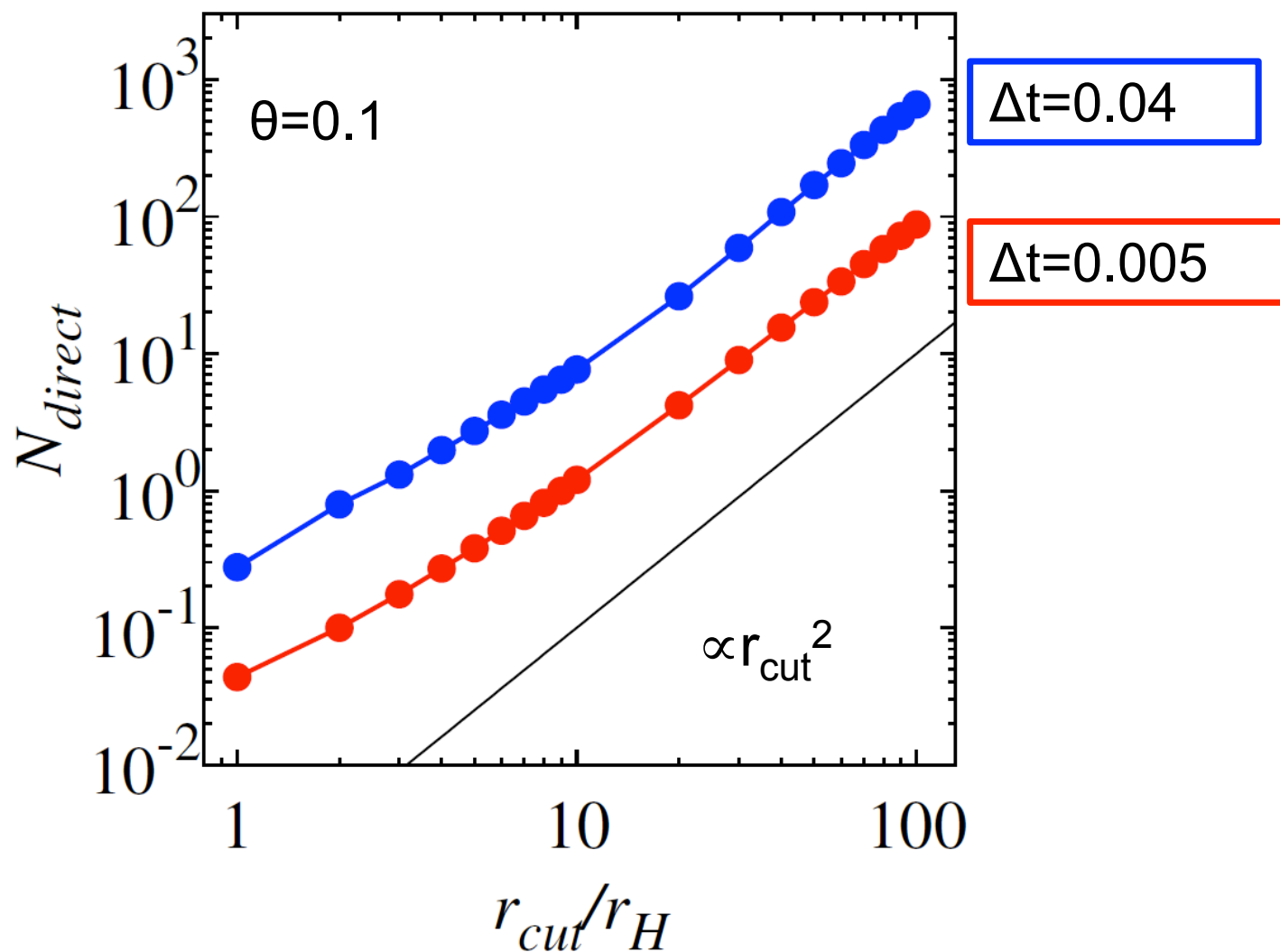


cutoff半径とエネルギー誤差の関係



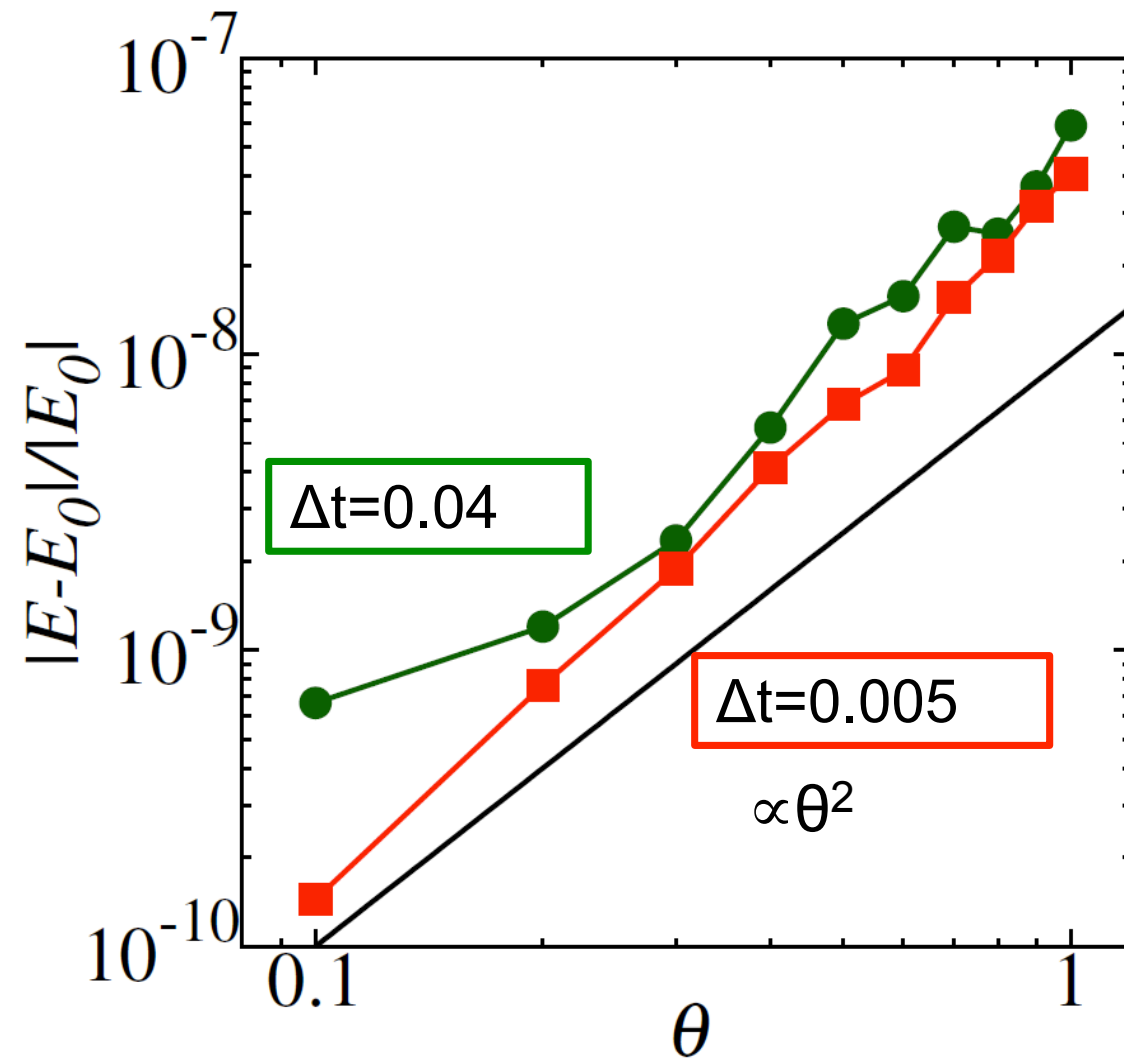
$r_{cut} > 3$ で近接遭遇をきちんと計算できる。

cutoff半径と計算量の関係



初期条件で用いている円盤はz方向の厚みが数hill程度なので、計算量はcutoff半径の2乗で増加する。

Opening angleとエネルギー誤差の関係

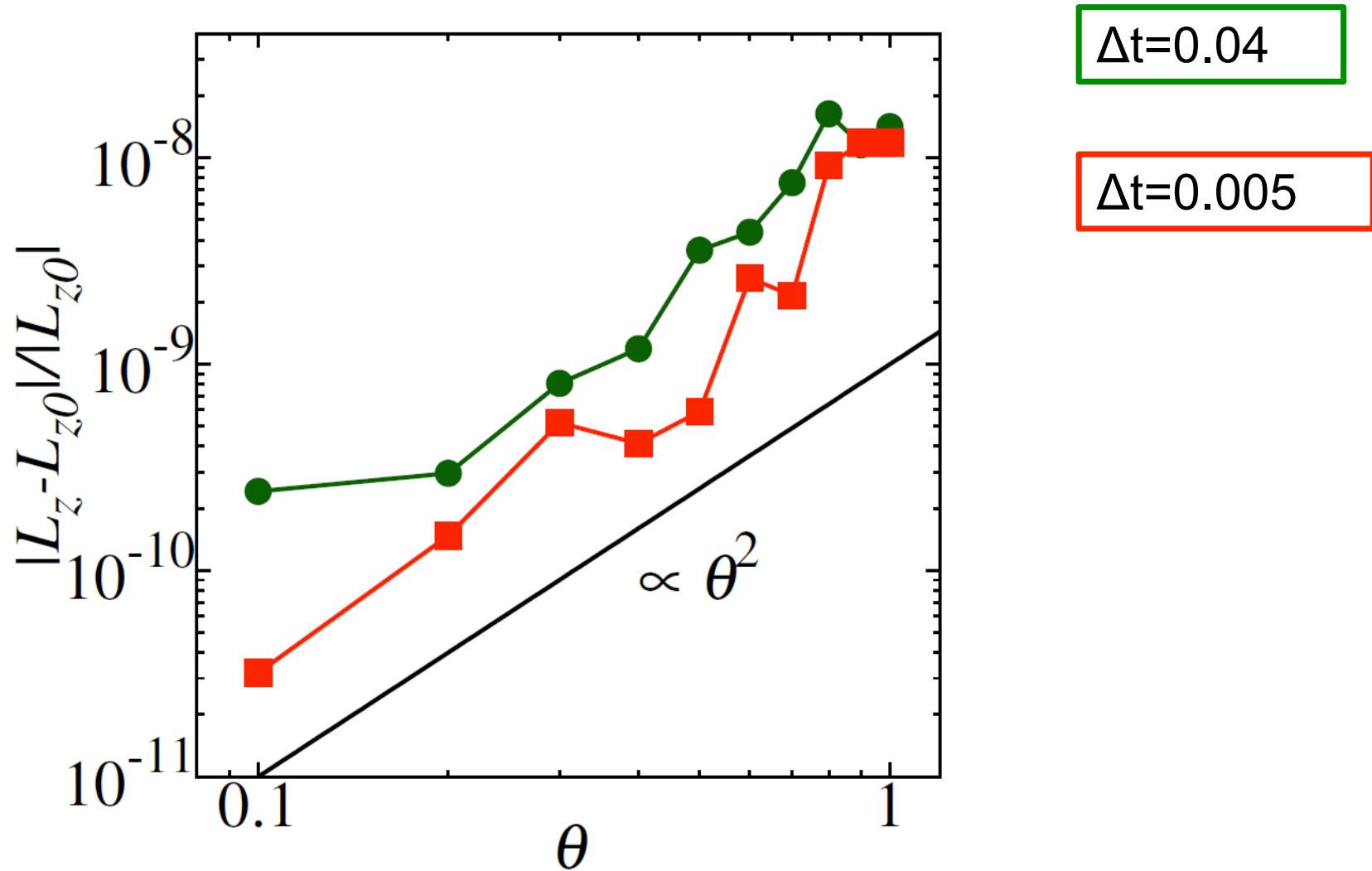


θ を小さくしていくと時間刻みによる誤差の下限が見えてくる。

Opening angleと角運動量の関係

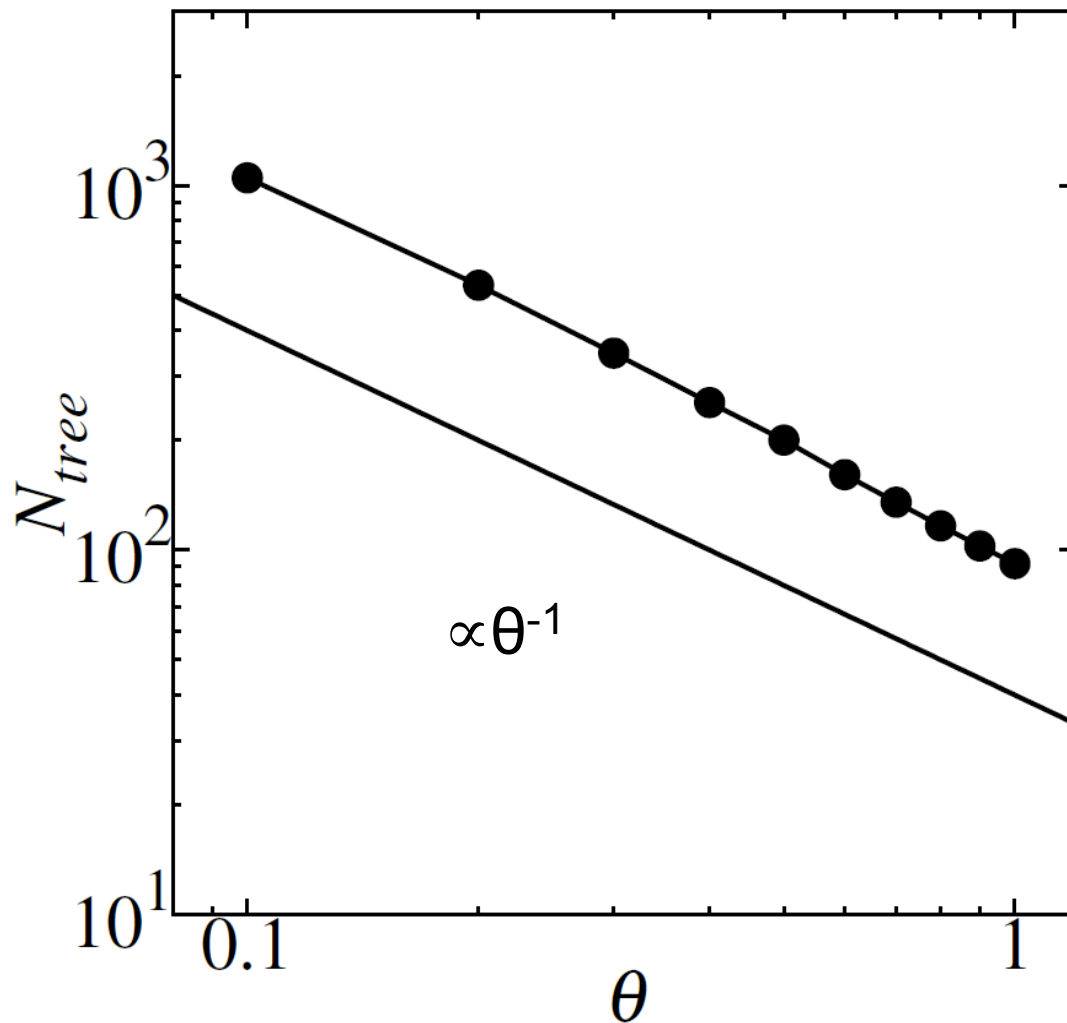
- 系の角運動量はほとんどz成分(xyより5桁大きい)。
- L_z の保存についてのみ示す。
 - L_z :z方向の系全体の角運動量
 - L_{z0} : $t=0$ での L_z

Opening angleと角運動量の関係



角運動量もエネルギー誤差と同程度で保存している。

Opening angleと計算量の関係



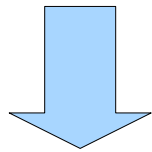
系全体から見た粒子は円盤状に分布しており、さらに半径方向にも狭い領域となっている。そのため計算量の増加は θ^{-1} となっている。

可変時間刻み

エルミート法で使用しているAarseth のtimestep criterion を変える。

$$\Delta t = \eta \sqrt{\frac{|a| |a^{(2)}| + |\dot{a}|^2}{|a| |a^{(3)}| + |a^{(2)}|^2}}$$

Makino & Aarseth 1992,
Aarseth 2003

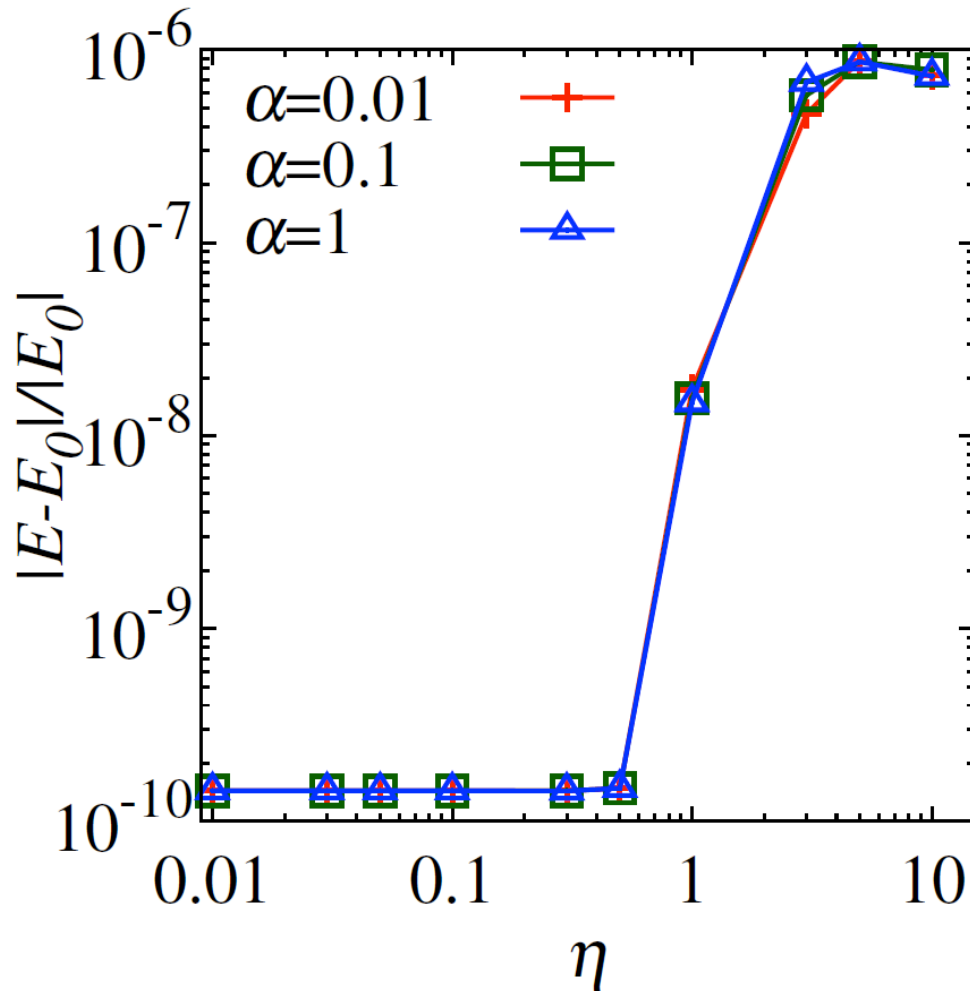


$$\Delta t = \eta \sqrt{\frac{|\sqrt{a^2 + a_0^2}| |a^{(2)}| + |\dot{a}|^2}{|a| |a^{(3)}| + |a^{(2)}|^2}}$$

$$a_0 = \alpha^2 \frac{Gm_i}{r_H^2}$$

定数項 a_0 を加える、これにより時間刻みが不必要に小さくなることを防ぐ。

Accuracy parameterとエネルギー誤差の関係



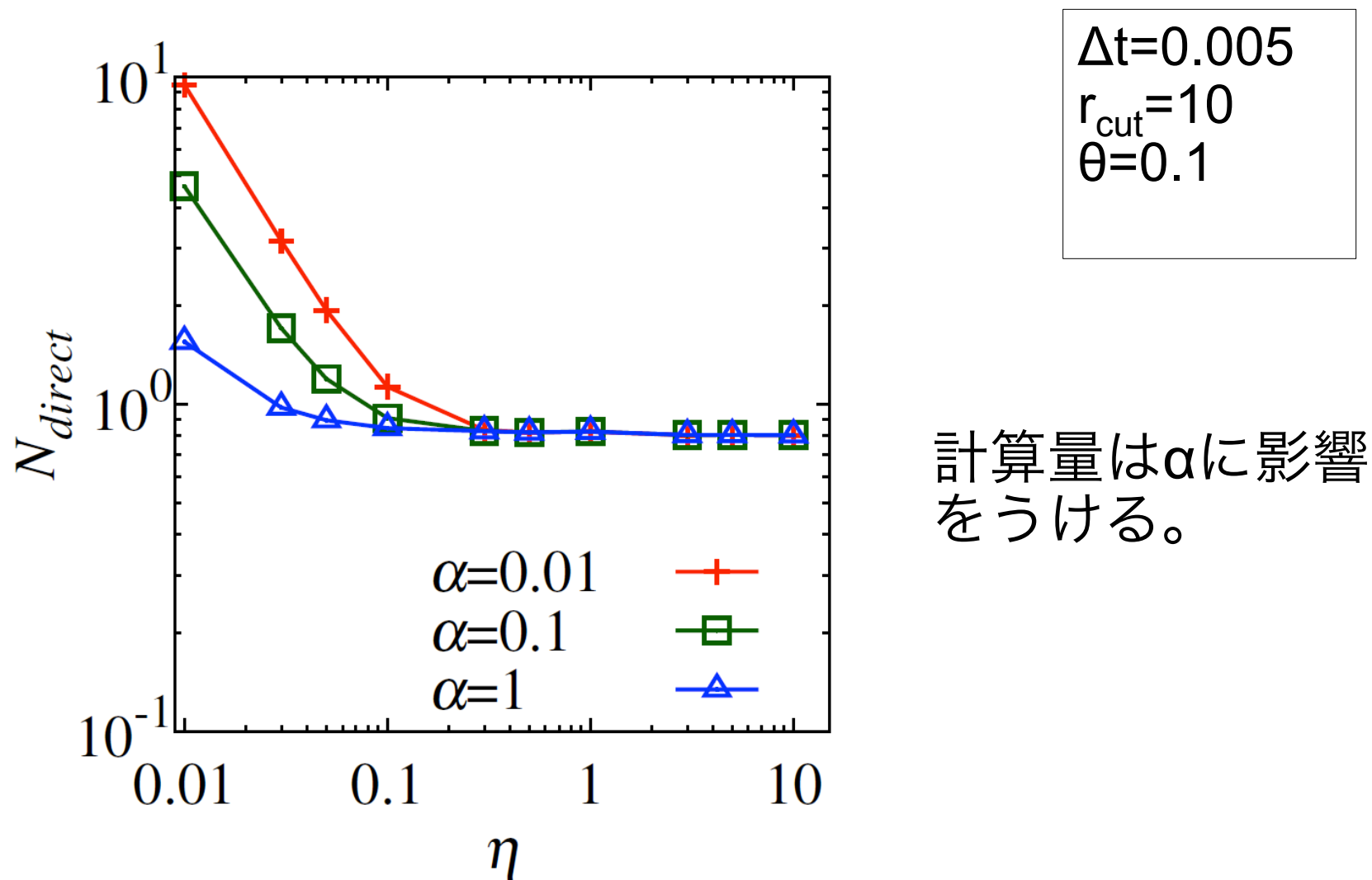
$\Delta t = 0.005$
 $r_{\text{cut}} = 10$
 $\theta = 0.1$

α の値によらない。

$$\Delta t = \eta \sqrt{\frac{|\sqrt{a^2 + a_0^2}| |a^{(2)}| + |a|^2}{|a| |a^{(3)}| + |a^{(2)}|^2}}$$

$\eta < 0.5$ であればよい。

Accuracy parameterと計算量の関係



エネルギー誤差との関係から $0.05 < \eta < 0.5$ とする。

衝突が起きるタイムスケール

平均粒子間距離

$$r = \sqrt{\frac{1.05^2 - 0.95^2}{10000}} \approx 4.47 \times 10^{-3} \quad [\text{AU}]$$

粒子が平面に分布していると仮定する。

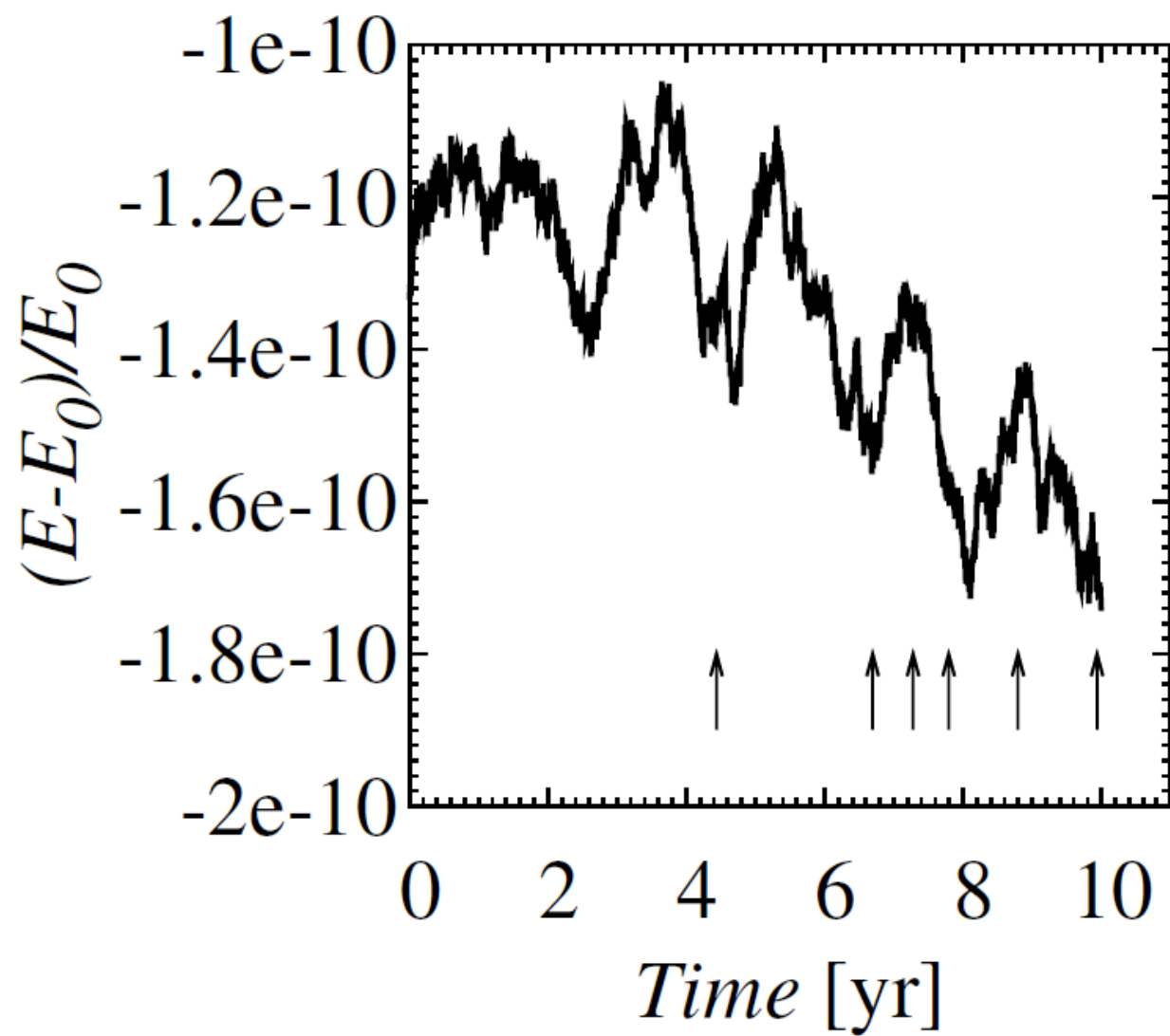
相対速度

$$v \approx \sqrt{e^2 + i^2} v_K \approx 0.0100 \quad [\text{AU/yr}]$$

v_K はケプラー速度

よって衝突が起こるタイムスケールは

$$\frac{r}{v} = 0.447 \quad [\text{yr}]$$



衝突によるエネルギーの補正量：
 $3.0e-11$

MVS(Mixed Variable Symplectic)法

惑星軌道の長期間変化を調べるためにleapfrog法を改良して開発した。

太陽重力については、ケプラー方程式を解析的に解く。一方、惑星間重力は摂動として数値的に解く。

従来より時間刻みを大きくとることができ、高速化できる。

$$\begin{aligned}v_{1/2} &= v_0 + \frac{1}{2}dta_0 \\x_0 &\rightarrow (\text{Keplermotion}) \rightarrow x_1 \\v_{1/2} &\rightarrow (\text{Keplermotion}) \rightarrow v'_{1/2} \\v_1 &= v'_{1/2} + \frac{1}{2}dta_1\end{aligned}$$

問題点：近接遭遇があると計算が破綻する。

Hybrid法

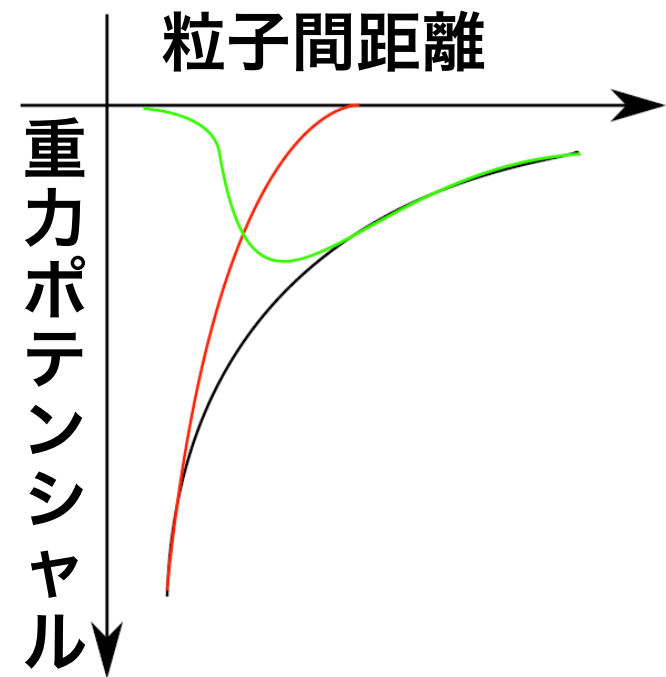
近接遭遇時には粒子同士の重力相互作用が中心天体からの重力に近づくため誤差が増加する。

増加した重力相互作用項を中心天体の重力に繰り込み、数値的に解く。

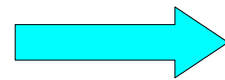
$$H = H_{\text{int}}$$

$$H_{\text{int}} = -\sum_{i<j}^N \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} \times [1 - K(r_{ij})]$$

$$H_{\text{Kep}} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m_i} - \frac{Gm_0 m_i}{r_i} \right) - \sum_{i<j}^N \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} \times K(r_{ij})$$



本質的には $O(N^2)$ の計算。



大粒子数の計算には時間がかかる。

Tree法

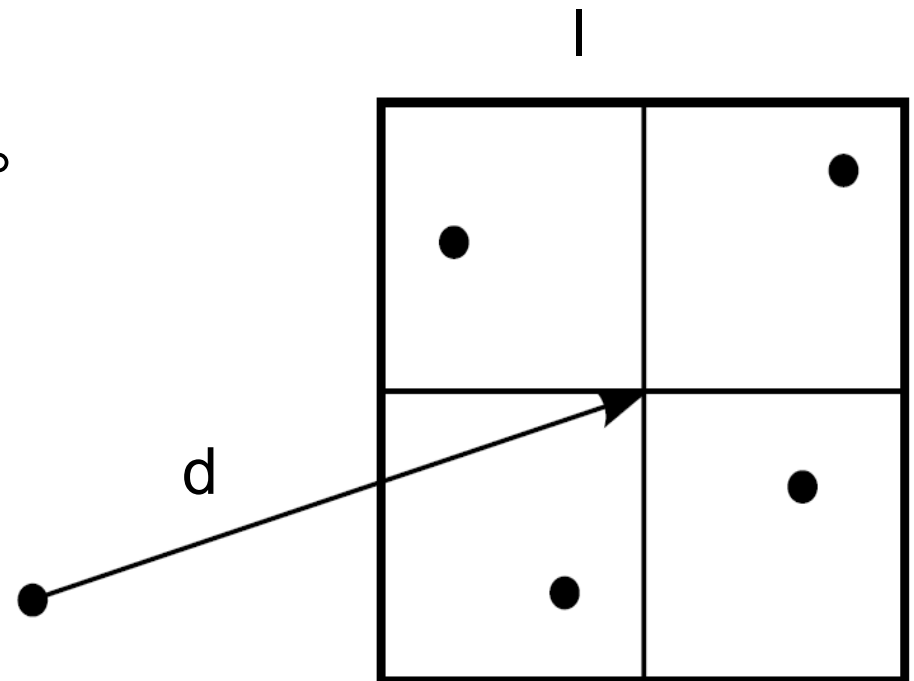
遠方の粒子をまとめてそこから重力を計算することで計算量を $O(N \log N)$ にできる。

パラメータ θ で粒子をまとめるか決める。

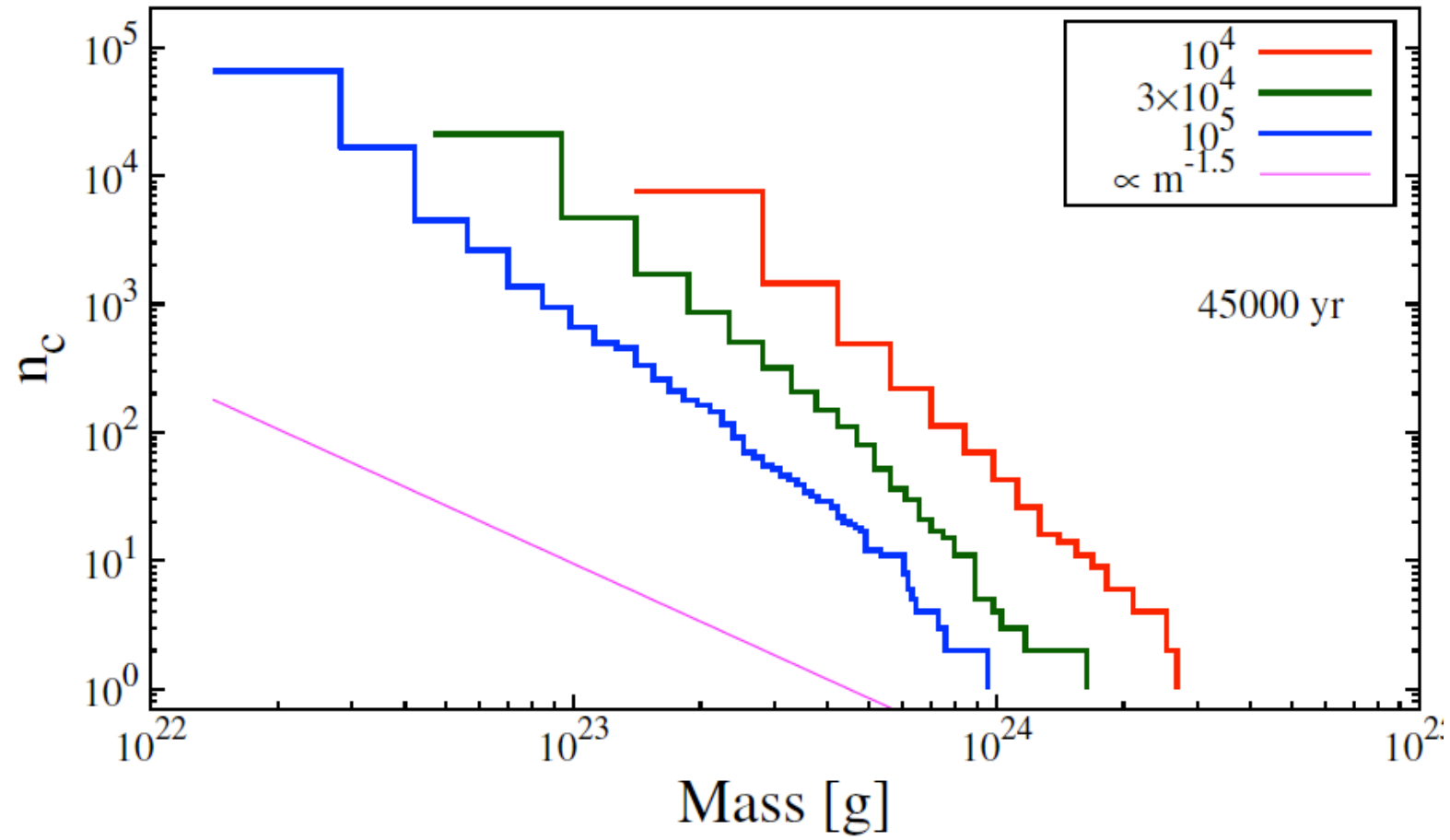
$$\frac{l}{d} < \theta$$

であれば粒子をまとめて計算する。

独立時間刻みと組み合わせるのが難しく、近接遭遇の計算が困難。



累積個数分布



速度分散

