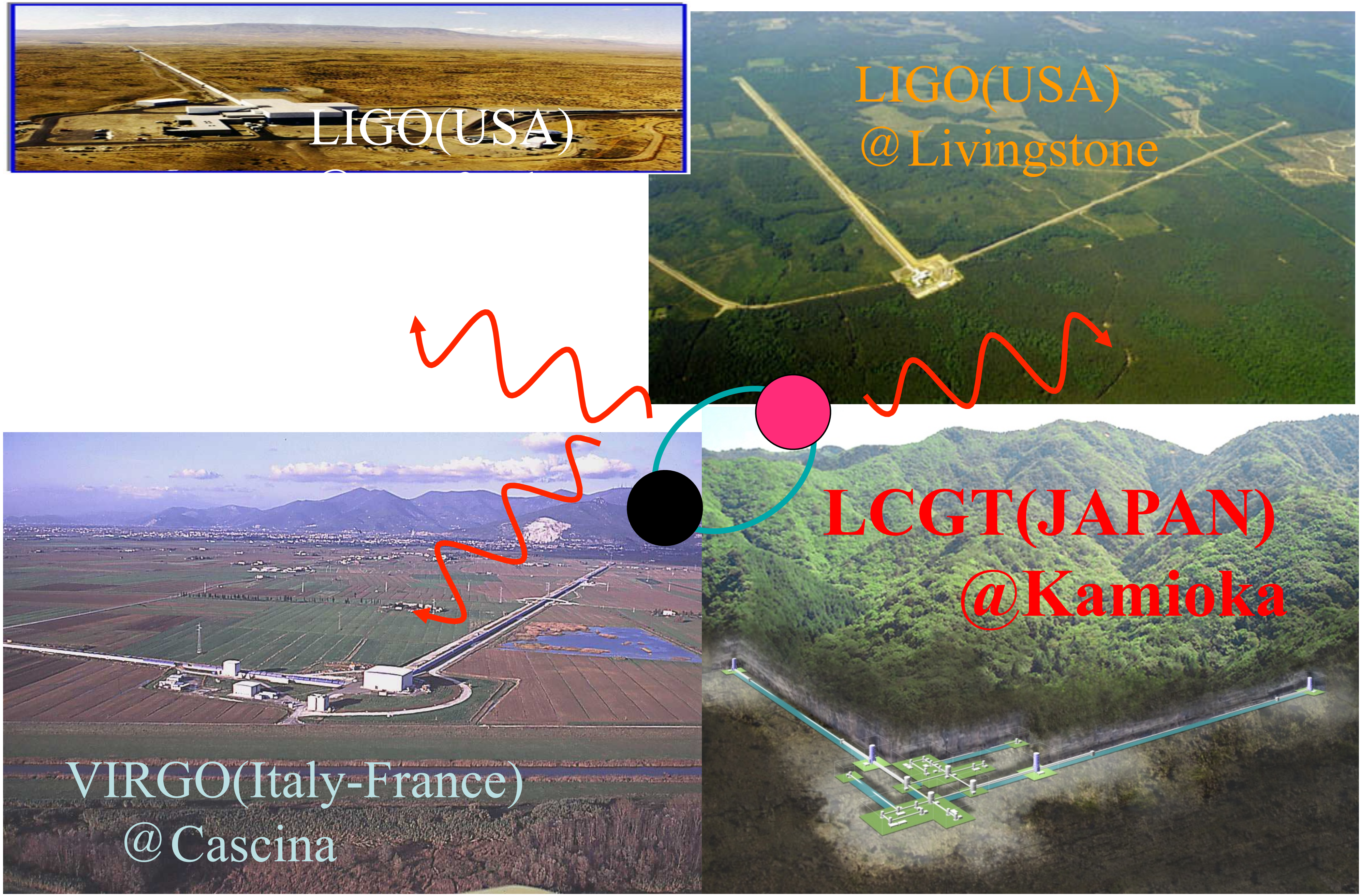
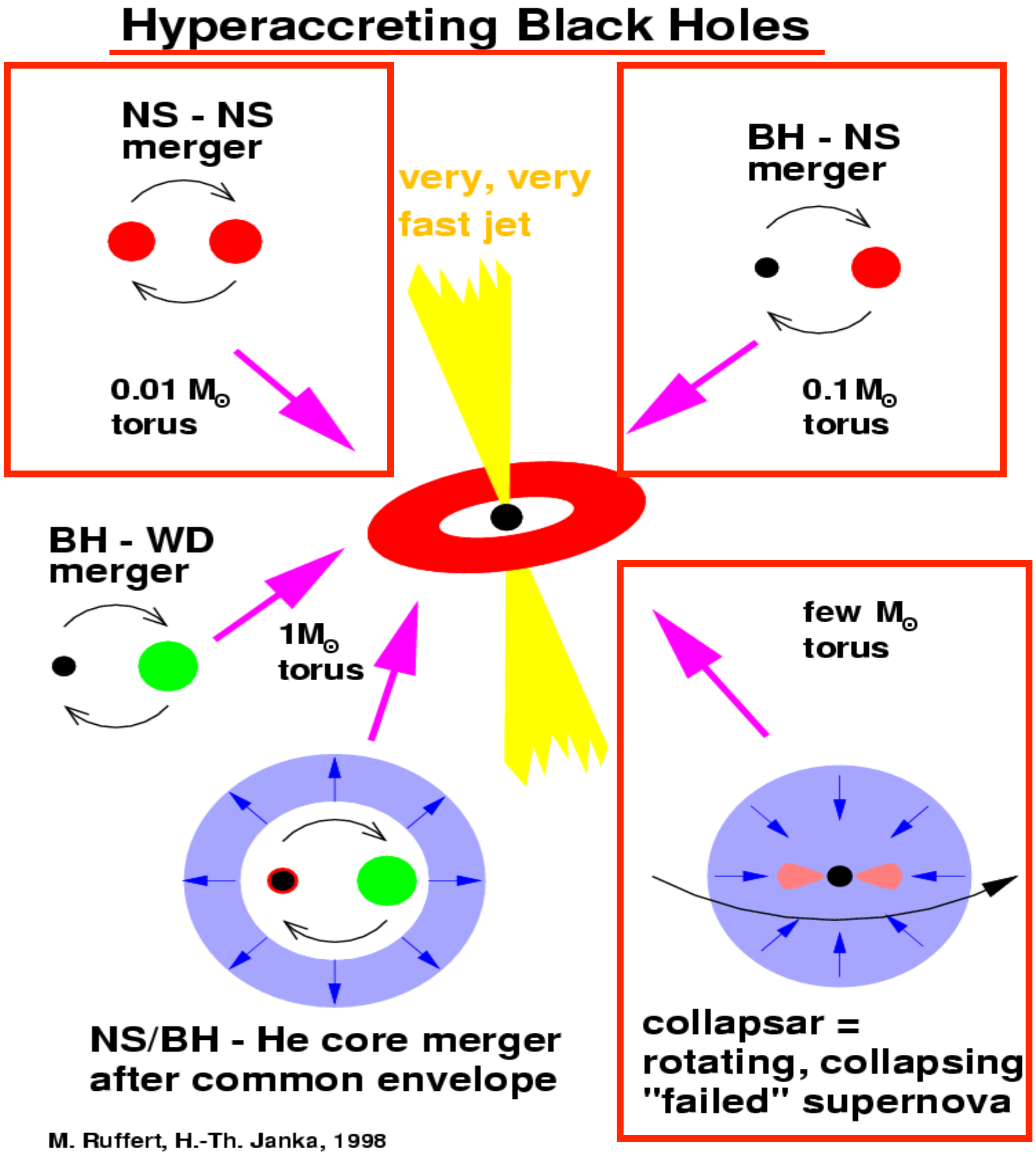
日本の数値相対論

柴田　大

京都大学　基礎物理学研究所

Gravitational wave detectors





高エネルギー
天体物理学
(井岡君の話)

GRB
~
BH + torus
magnetar

どう形成
されるか？

内容：日本の数値相対論の歴史

1. 1970年代〜80年代前半の数値相対論:
   黎明期、フロンティアの時代、4人組
2. 1980年代後半〜1990年代後半:
   停滞期、悪戦苦闘の時代。
   ただしBSSN形式が誕生
3. 1999年〜:ブレークスルーの時代
4. 2010年代以降:成果を得る時代
   誰でも出来る数値相対論の時代。
   数値相対論＝Mathematica の時代。

結論：フェーズ1-3で日本人は十分に貢献した。
フェーズ4でも貢献して行くだろう。

①　1970～80年代：黎明期

- 相対論的天体現象、相対論的2体問題などを理論的に調べたい:
  全く理解されていなかった

⇒　アインシュタイン方程式を解く必要がある

⇒　対称性を仮定しない、一般的な問題に対しては、解析的にはとても無理

⇒　数値相対論しかない

- 60年代:球対称重力崩壊計算(Lagrange座標)
  (Misner-Sharp 64, May-White 66, …)

・次の目標は軸対称時空(より一般的手法が必要)

70年後半～80年前半の2つの重要問題

1. 2体ブラックホールの正面衝突
2. 回転星の重力崩壊

2BH、真空：L. Smarr を中心にUSで発展。
当時としてはすごい計算がなされた。
8th-Texas sympo, 1977年
Smarr談: 学位を取るのが起爆剤になった

<u>回転重力崩壊：林研の４人組みによる成功</u>

注：当時、連星の合体を重力波源と考えていない
（考えるのは無理だった：観測事実が乏しかった）

4人組


佐々木節さん
(自称永遠の青年)
観山正見さん(59)

問題山済み、先駆者ほぼなし

- どうやってアインシュタイン方程式を解くか？
  ADM形式はあった(1962年)。しかし、極めて一般的な形式にすぎない。どう修正するのか？
  ⇒　特に、軸対称の場合、どう定式化？
- ゲージ条件(座標条件)は？特に回転のある系で
- ブラックホールはどう見つける？
- ブラックホールの特異点をどう避ける？
- 流体力学方程式をどう定式化し、どう解く?
- 4元速度の規格化(u^t の導出)

当時挑戦した理由と可能だった理由 (JGRG20/物理学会誌の中村さんの話より)

- In my undergraduate time, I had one unusual experience. I took the course of lectures on Lebesgue Integral by professor **Mizohata**. In the end of his last lecture he said " I will retire this March so that this is the final lecture. Now I would like to say something to you. **Suppose that there is a problem in mathematics that you cannot solve. In this situation there are two attitudes to the problem. The first one is; You are bad. You should study harder to solve the problem. However there is another attitude; The problem is bad. You had better arrange the problem which you can solve.**
- I had never considered the second attitude. I had never considered that the problem is bad so far. **I supposed that this second attitude should be the research. I could understand what professor Mizohata wanted to say although I could not understand Lebesgue Integral itself almost everywhere.**

- **When I was in master course, over doctor problem became severe.** Here the over doctor problem (=Japanese English?) means that many graduate students can not find permanent positions even after they received Ph.D. (At this time, the job meant the permanent position in Japan.) **I wondered what would happen when I would receive Ph.D five years later. Then Professor Humitaka Sato in YITP said to me that the problem would be resolved when I would receive Ph.D..**
- In my graduate student age, I first wrote papers on density wave theory of spiral arms with S. Ikeuchi and F. Takahara and the restoration of broken symmetry in astrophysical situation with K. Sato. However around the age of 26 or so, the over doctor problem became more severe **since even K. Sato and K. Nomoto could not find permanent positions. I was deeply disappointed since K.Sato and K.Nomoto were already famous in the world.**
- **One day in such disappointed days, professor Hayashi came into the graduate student room and said to me " What will happen when two rocks collide is a very important problem in relation to the formation theory of planets. Can you study this problem with us?"**

- **I answered " Thank you and I will consider the problem for a while." However I could neither find reference papers for this problem nor imagine what to do.** Later I went to his office and said "I decline to study what will happen when two rocks collide since I could not find any reference papers. **Then professor Hayashi said "A problem with no or little reference papers is a good problem. If there are many reference papers on the problem, that means that your contribution to the field will be very small ."** This was completely unexpected statement for me. Usually graduate students like to study the problem with many references. **What Professor Hayashi said is , however, in reality correct. He himself did study the problems with no or little references such as stellar evolution in 1960s and the origin of solar system in1980s.**
- To overcome over doctor problem, I thought that I should do something big. **For this purpose I combine the statements of professors Mizohata and Hayashi as ; Find the solvable problem for the important theme with no or little reference papers.**

前田さんのコメント(物理学会誌)

- 重要だが、reference がほとんどないテーマ、というだけではなく、当時の天体核研究室の最も得意とする分野である一般相対論と数値シミュレーションをテーマに取り入れれば、現実的に解ける問題をつくることが、可能そうに思えてきた
- 境界条件(環境；熱浴？)が重要で、林先生はそれを用意していた。
- ちなみに前田さんは「僕にとってOD問題は、さほど問題ではなく、この環境がすばらしかった」と語っている。

- 若い人：人のやらないことをやる。できそうでできないことをやる。
- 教員：そのための環境を作る

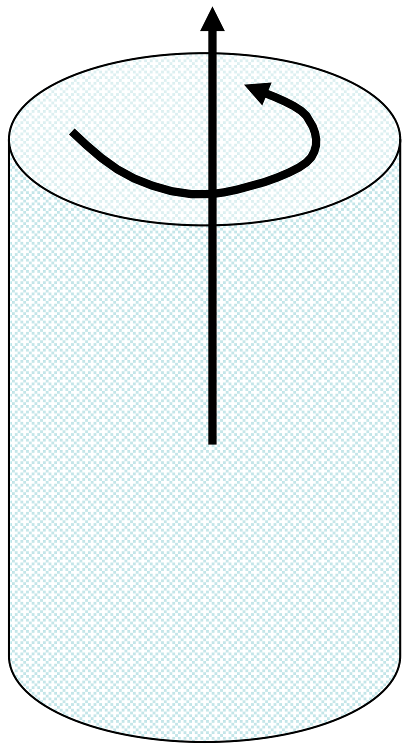
ことが必要である。

４人組みの達成したこと

- 数値計算で使う定式化を独自に考案した:
  物理数学的側面(相対論をよく知っていた)
- 曲線座標特有の座標特異点でのテンソル量の数値的取り扱い法を独自に編み出した:
  技術的側面
- 実際に、信用に値する数値計算を実行した:
  当時のコンピュータの性能で、結果が出せる問題をうまく選んだ:
  物理センス側面

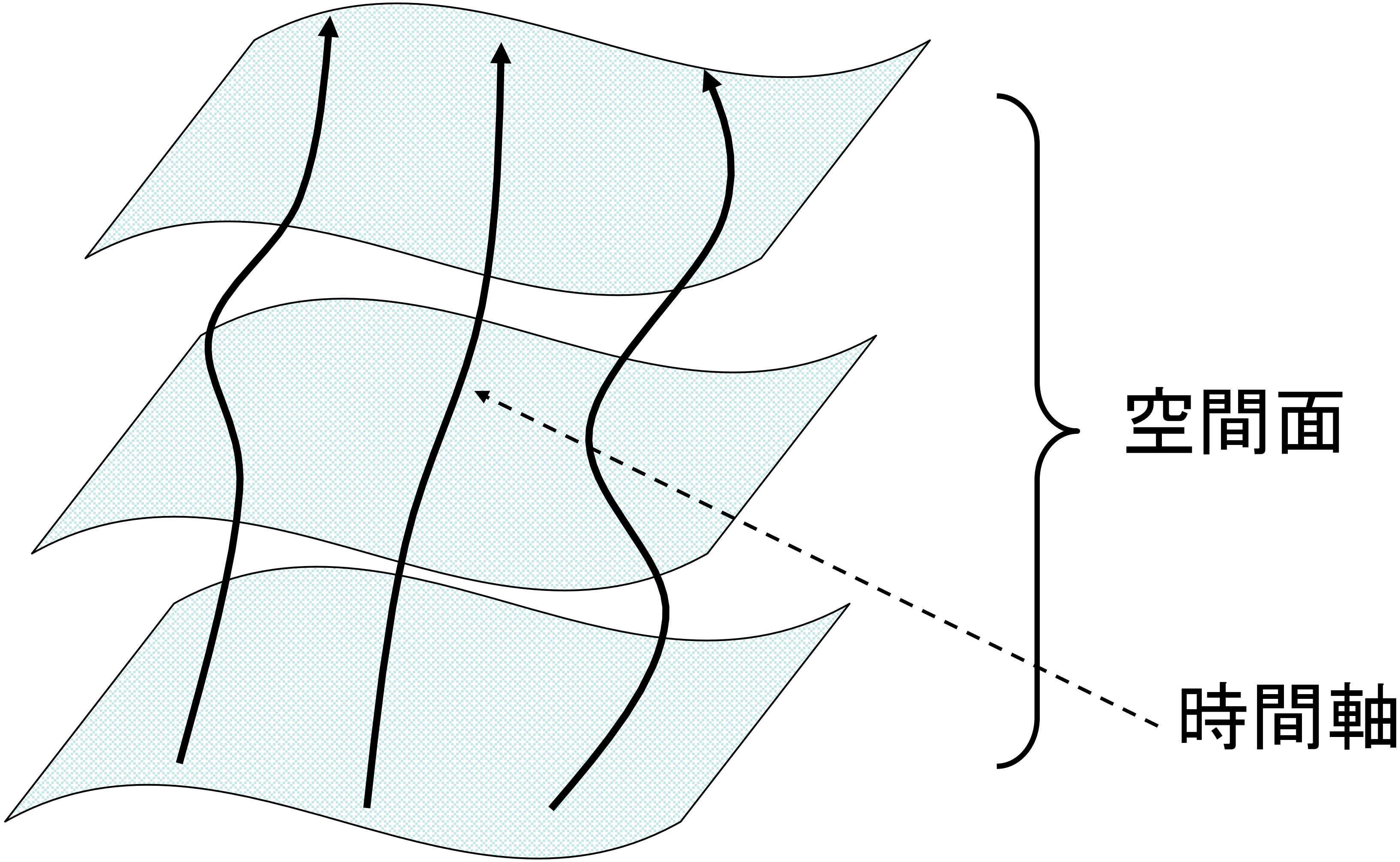
2+1+1 formalism

- 数値相対論は通常3+1形式で行う:
空間3次元、時間1次元に切り分け
- 2＋1＋1**形式**:空間に対称性がある場合、まず対称性のない３次元と対称性のある１次元方向に分ける(今の場合、ϕ方向に対称性）：Geroch formalism
- その後、残る3次元時空を2+1分解
⇒ 2+1アインシュタイン方程式
＋ 電磁場的式 (cf. Kaluza-Klein)



数学的に美しい定式化(前田+ 1980)

3+1 形式 → (2＋1)＋1形式に



発展するのは、見かけ上、2次元空間量のみ

正則化：技術的面　(何故か佐々木さん)

- 曲線座標を用いると、座標特異点が存在。
- 座標特異点では、テンソルの成分同士で非自明な関係が成立する
- 右のような項がリーマンテンソルに実際に現れる　⇒　関係を保証しなくてはならない

$$\gamma_{RR} - \frac{\gamma_{\varphi\varphi}}{R^2} = O\left(R^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma_{RR} - \dfrac{\gamma_{\varphi\varphi}}{R^2}}{R^2} \text{は正則}$$

対処法：
正則量を基礎変数として用いる

実際に計算して、物理を引き出した
(中村+、1980~)

1. ブラックホールの形成条件: $q = cJ/GM^2 < 1$
   → Super Kerr BH は形成されない
2. Prolate 形状の重力崩壊 ⇒ 対称軸上に裸の特異点が形成しうる (Shapiro-Teukolsky '91 以前にこういう計算があった。)

- これらはその後のより高分解能計算でも、再確認: 正しかった
- グリッド数(R, z)=(28,28), (42, 42) : 設定が巧みなので、こんなグリッド数で正しい物理が導けた。

②　1980年代後半～1990年代

- 連星中性子星の合体が、重力波源になりうることが指摘され始めた(Hulse-Taylor に続く、2、3例目のNS-NS連星の発見(1990年)、及び統計的解析)
- 空間3次元のシミュレーションが不可欠

⇒　定式化はADM形式でよいか？
ゲージはどう取る？その他もろもろ

⇒　3D数値相対論を最初に切り拓いたのが中村さん

標準的3＋1形式の問題点

- アインシュタイン方程式の構造

$$K_{ij} \sim -\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{ij}$$

$$^{(3)}R_{ij} \sim \frac{1}{2}\left[-\Delta\gamma_{ij} + \gamma^{kl}\left(\gamma_{ik,lj} + \gamma_{jk,li} - \partial_{ij}\gamma_{kl}\right)\right]$$

Linearize: $\gamma_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{h}_{ij} \sim \Delta h_{ij} - \left(h_{ik,kj} + h_{jk,ki} - \partial_{ij}h_{kk}\right)$$

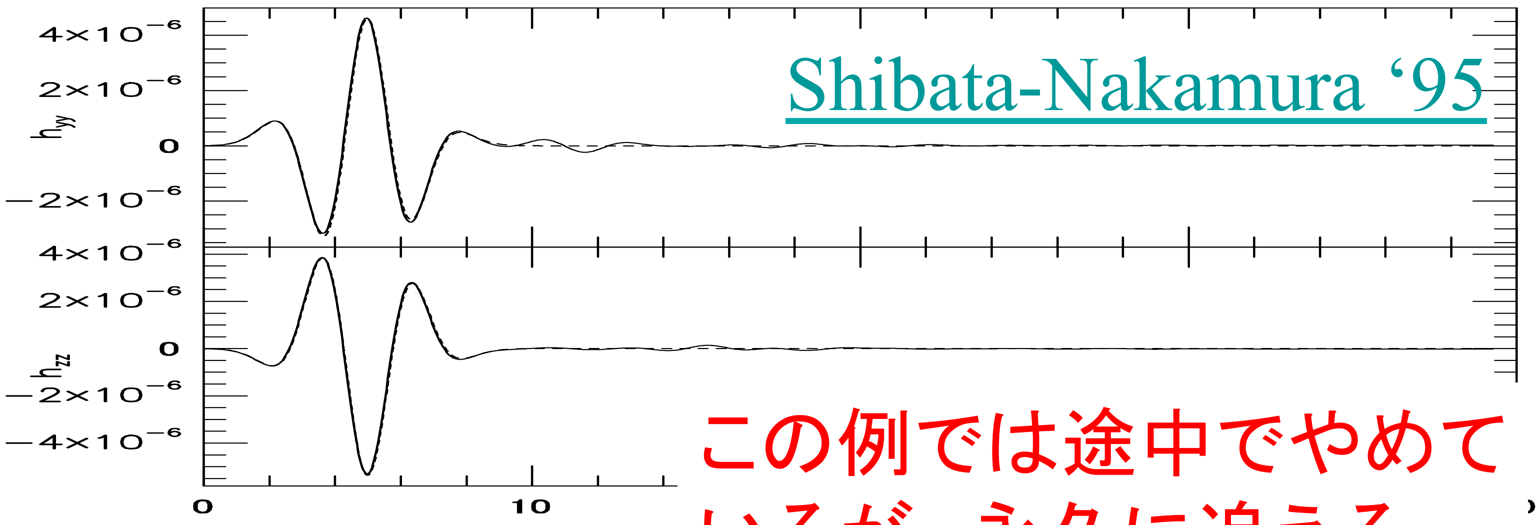
波動方程式だが、余分な項が存在

→　トラブルの根源

中村さんのアイデア

- ３＋１形式は、そもそも拘束条件を含む系。
  つまり、方程式の数が変数よりも多い
- この際、さらに変数を増やしてもよいだろう
  (この考え方は、その後どの形式にも用いられる) 例：　$\gamma = det(\gamma_{ij})$ を新たな独立変数に取ると、この定義式自体が新たな拘束条件
- 変数を増やすことによって、式の問題点を解消する。具体的には、5成分新たに増やす
  ⇒　BSSN形式の本質的原型(PTPS90, 1987)
- 特に重要なのが、$F_i = \gamma_{ij,j}$: (後に定義が変化)

線形重力波の伝播



この例では途中でやめているが、永久に追える。
定式化に問題があるとこんなに長く追えない

この時代、要求の本質的変化があった

- BHの2体衝突、星のBHへの重力崩壊:
  いわば、瞬間芸的シミュレーションでよい:
  定式化が完全でなくても、ダイナミカル時間追えれば満足(<~ $100GM/c^2$)
- 連星中性子星/連星ブラックホールの合体:
  長時間時間積分が必要:>~$1000GM/c^2$

→長時間安定にかつ精度よく動くコード(および　そのための定式化とゲージ)が必要；　重力波テンプレート　←　高精度要求

→数値相対論の質が変わった：最初の相転移、　新しいフロンティアの開拓

1990年代のたくさんの課題

- どのゲージがよいのか？(回転運動のある系で)
- ブラックホールが誕生する場合は?
- 優れた流体(MHD)コードは?
- 重力波の抽出法?
- Apparent horizon をどう見つける?
- 波動帯までどうやってグリッドを張る?
  → Adaptive mesh refinement 法の確立
- 現実的初期条件

スパコンの性能が追いつかず、アイデアがあっても、テストがままならなかったのが一因

地道な課題解決
(青は日本人独自にも解決)

- どのゲージがよいのか?
- ブラックホールが誕生する場合は? → 2005
- 優れた流体(MHD)コードは?
- 重力波の抽出法?
- Apparent horizon をどう見つける?
- 重力波帯までどうやってグリッドを張る?
  → Adaptive mesh refinement → 2004
- 現実的初期条件(NS-NS連星に関して瓜生君)

◆天文台VPP300が使用可能になり、R&Dが無料で可能になったのが大きい(観山さんのおかげ)。

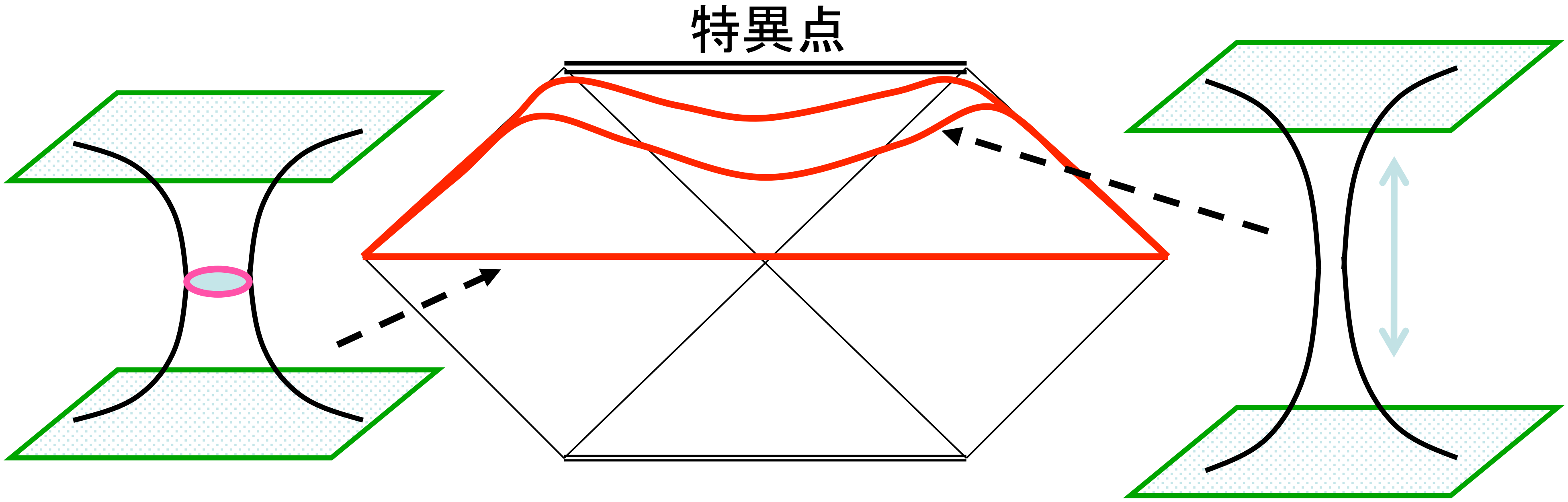
◆若手Bでも買えるパソコンの性能も向上したことも

③ 1999年～: 日本発のbreak through

- R&Dを繰り返し、必要最低限の道具が1999年までに揃った。また瓜生君が初期条件を作成可能にした
→1999年にNS-NSシミュレーションが、初めて可能になった(柴田−瓜生、純日本チームで)
- 初期のNS-NS計算以降も、
高速回転中性子星のバー不安定、
超大質量星からの超巨大ブラックホール形成、
NS-NS合体のEOS依存性、
BH-NS合体、
GR大質量星の重力崩壊＋重力波計算、
フルGRMHDでBH形成
で我々が最初の仕事(2000～2005)

2004年当時の残された課題

- それは、ブラックホール時空の計算法



- 特異点を避けなくてはならない
- しかし、特異点を避けると地平線内の空間が無限に伸びる(数値計算で分解できなくなる)

- 当時、多くの人はBSSN形式＋ブラックホールの切り取り法を使った手法の開発に、完全に気を取られていた(われわれも)　→　部分的成功。
- そんなときにPretorius氏が独自の路線で成功、発表@UCLA meeting：5月GW中
何から何まで独自に開発：
一般化されたハーモニックゲージ形式
(PN計算でよく使う形式に類似)
＋BH切り取り法、空間差分は4次精度、AMR法

- さらに、Campanelli et al. & NASA による計算：
改良されたBSSN＋切り取らない方法
(実行切り取り法)＋時間・空間4次精度、AMR法

大きな後悔：我々はしつこくなかった？

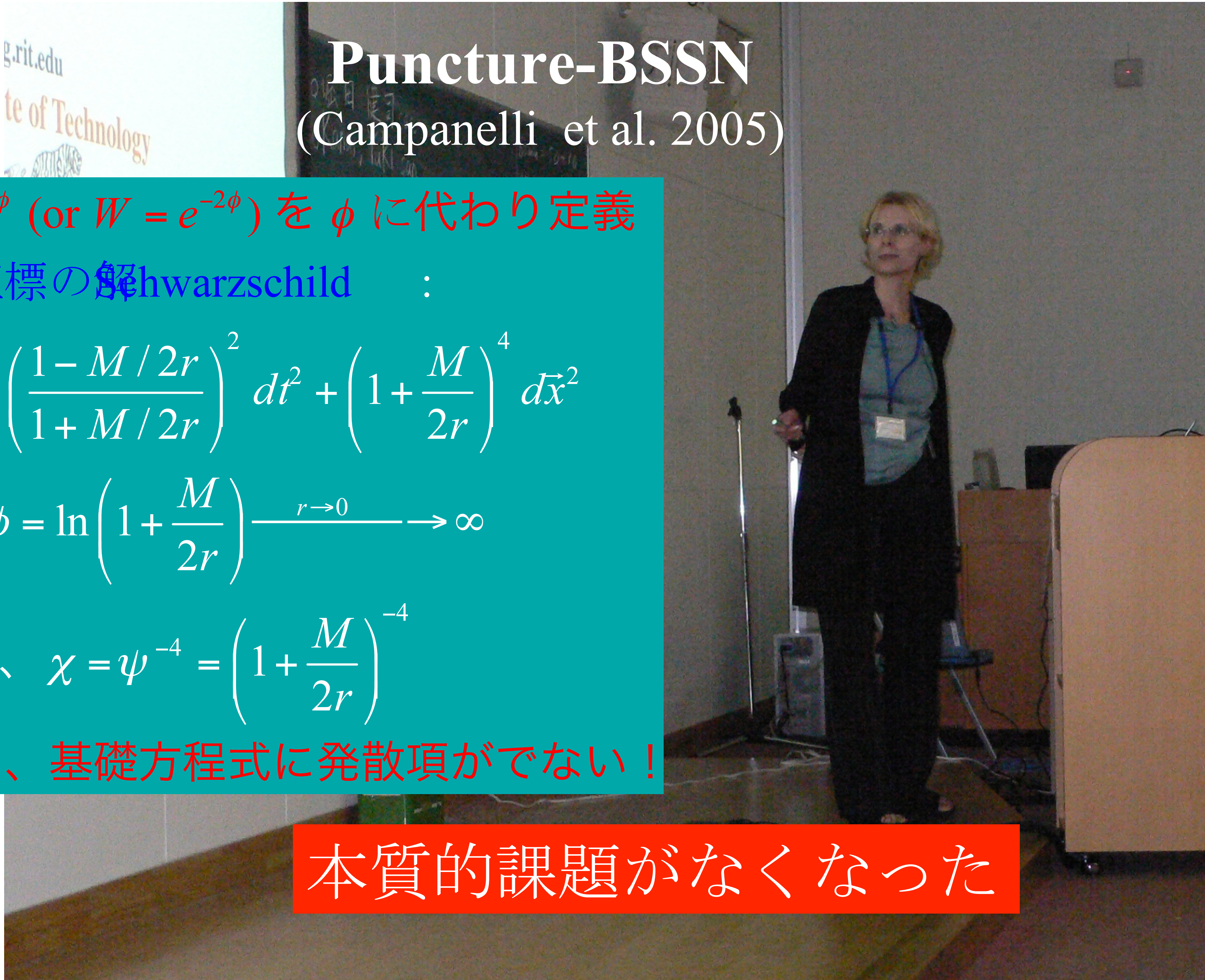
- 1995年の柴田・中村論文の形式を、ほんのちょっと変更すれば、BH時空のシミュレーションが可能だった(ただし4次精度の差分は必要)

$$\left(\gamma_{ij}, K_{ij}\right) \Rightarrow \left(\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{A}_{ij}, \phi, K, F_i\right)$$

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}_{ij} = e^{-4\phi}\gamma_{ij}, \qquad e^{12\phi} = \det\left(\gamma_{ij}\right) \longleftarrow \text{これ} \\ \tilde{A}_{ij} = e^{-4\phi}\left(K_{ij} - \dfrac{1}{3}\gamma_{ij}K\right) \\ K = \mathrm{trace}\left(K_{ij}\right) = \gamma^{ij}K_{ij} \\ F_i = \tilde{\gamma}_{ij,j} \end{cases}$$

$$\tilde{\gamma}_{ij} = \chi^4\gamma_{ij}$$

反省：こだわりが足りなかった



Puncture-BSSN

(Campanelli et al. 2005)

$\chi = e^{-4\phi}$ (or $W = e^{-2\phi}$) を ϕ に代わり定義

等方座標のSchwarzschild解：

$$ds^2 = -\left(\frac{1 - M/2r}{1 + M/2r}\right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^4 d\vec{x}^2$$

$$\phi = \ln\left(1 + \frac{M}{2r}\right) \xrightarrow{r \to 0} \infty$$

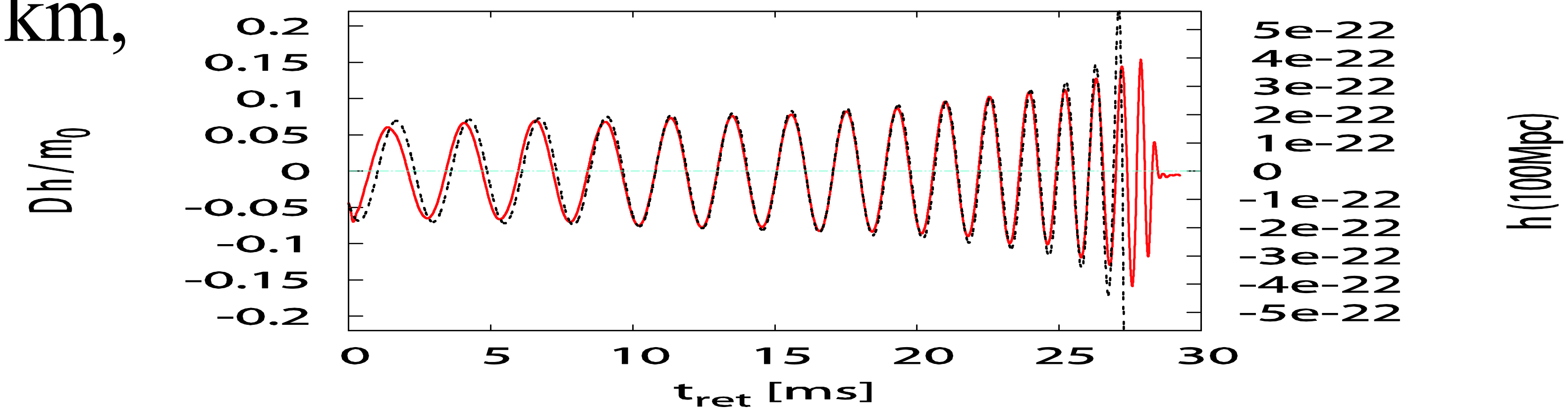
ここで、$\chi = \psi^{-4} = \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^{-4}$

すると、基礎方程式に発散項がでない！

本質的課題がなくなった

いくつかの最新の日本発計算例

- Black-hole neutron-star binary
  file:H_q5_M135.a75.gif (久徳ら)
  $M_{\rm BH}$=6.75$M_{\rm sun}$, a=0.75, $M_{\rm NS}$=1.35$M_{\rm sun}$, R=12.3 km,



- 有限温度のEOS、ニュートリノ輻射入りの連星中性子星の合体 (関口ら) file
- Stellar core collapse to BH + disk (関口) (10,000*GM*シミュレーション):前の講演

④　　2010年代の展望　Ⅰ

- 果実を得る時代：フロンティアの時代は終わった　(但し、GR輻射流体コード開発は残る)
- われわれの当面の興味：
  現実的宇宙物理学シミュレーション ＆ 重力波

1. NS連星・BH-NS連星の合体
   (有限温度EOS＋ニュートリノ輻射/磁場入りで)：GRB、電磁波カウンターパート
2. 大質量星の重力崩壊：BH+円盤、GRB
3. 超新星爆発への応用：輻射効果の導入
4. 重力波テンプレート作成→データ解析に応用
5. 重力波のEMカウンターパート

2010年代の展望　II

- だれでも出来る数値相対論の時代(推移):
  数値相対論＝Mathematica時代;
  相対論を知らなくてもコードが作れる!
  公開も促進される：どこかで拾ってもよい！
- 今後の予想される展開:
  ① テンプレート作成のため、高速化・高精度化の時代(コンピュータに強い人が必要な時代)
  ② 問題設定に物理センスが問われる時代
- 一方、つまらない/あやしい仕事も多数登場?
  困った輩も出るだろう
  (間違った結果を平然と出す輩が増える？)

天体核の教訓

- 数値計算はやった後に、物理(本質)を引き出す仕事が重要である。
- ３行で説明できないような計算結果は安易に信じては行けない。

→ 計算結果を得た場合、３行で説明できるように熟考し、物理的説明を加えて論文にせよ。

林忠四郎先生のご冥福を
祈りながら、
これで研究会はおしまいです

よいお年を！

純テンソル以外に着目

$$\ddot{h}_{ii} \sim 2\Delta h_{ii} - 2h_{ij,ij}$$

トレース部分

$$\ddot{h}_{ij,ij} \sim \Delta\left[\Delta h_{ii} - h_{ij,ij}\right]$$

発散部分

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_t^2\left[\Delta h_{ii} - 2h_{ij,ij}\right] = 0 \\ \partial_t^2\left[\Delta h_{ii} - h_{ij,ij}\right] = \Delta\left[\Delta h_{ii} - h_{ij,ij}\right] \end{cases}$$

実は後者はHamiltonian constraint の発展方程式

前者はおかしな式:制御が効かない式

→間違った計算がいったん進むとどんどんおかしくなる