

トポロジカル欠陥に支配される 非平衡物理

小林未知数（東大総合文化）

共同研究者：佐々真一（東大総合文化）

2011年8月18日 基研研究会
非平衡系の物理 - ミクロとマクロの架け橋 -

発表内容

1. トポロジカル欠陥とは？
2. 固体中のトポロジカル欠陥とその解析
3. 欠陥の非可換性とダイナミクス
4. トポロジカル欠陥と統計力学、固体ダイナミクスへの影響
5. トポロジカル欠陥の今後

トポロジカル欠陥とは？

トポロジカル欠陥とは？

自発的対称性の破れを伴う相転移によって生じ、
破れた対称性によって保護されている欠陥

凝縮系物理で現れるトポロジカル欠陥

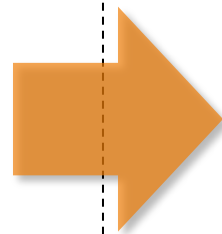
トポロジカル欠陥	現れる物質	欠陥の次元
domain wall	磁性体等	2
<u>dislocation</u>	<u>固体</u>	<u>1</u>
<u>disclination</u>	<u>固体・液晶</u>	<u>1</u>
monopole	ネマティック液晶	0
quantized vortex	超伝導・超流動	1

その他：baby skyrmion, skyrmion, instantonなど

自発的対称性の破れ（固体の場合）

液体→固体の相転移（自発的対称性の破れ）

液体



固体

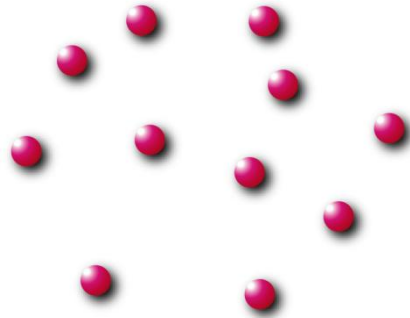
並進・回転対称性（ユークリッド変換対称性）の破れ

- 系全体を回転させても自由エネルギーは変わらない
- 系全体を並進・回転させても状態が変わらない
- 系を局所的に並進・回転させても周囲はほとんど影響を受けない

- 系全体を回転させても自由エネルギーは変わらない
- 系全体を並進・回転させると状態が変わる
- 系を局所的に並進・回転させると周囲も変化する

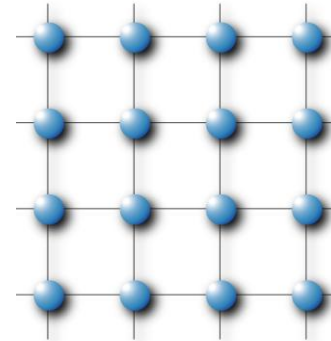
自発的対称性の破れ（固体の場合）

液体



原子の位置・配向は他の原子からの影響を（ほとんど）受けない

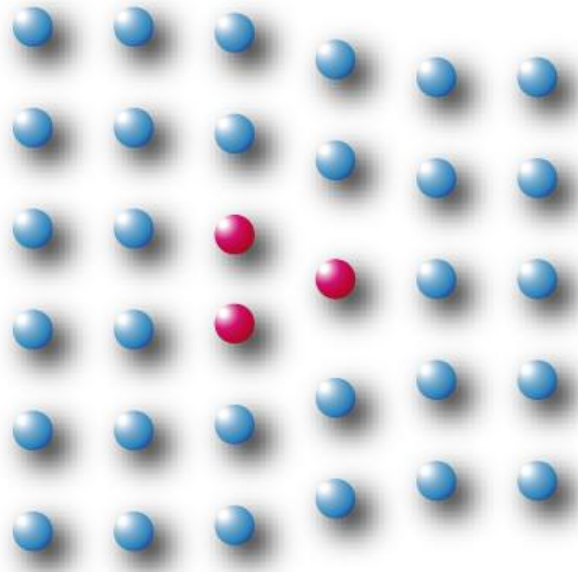
結晶



原子の位置・配向が、他の原子の影響を受け、ある決まった位置・配向を持つ。しかし、具体的な位置・配向は自由エネルギーからは決まらない（自発的回転・並進対称性の破れ）

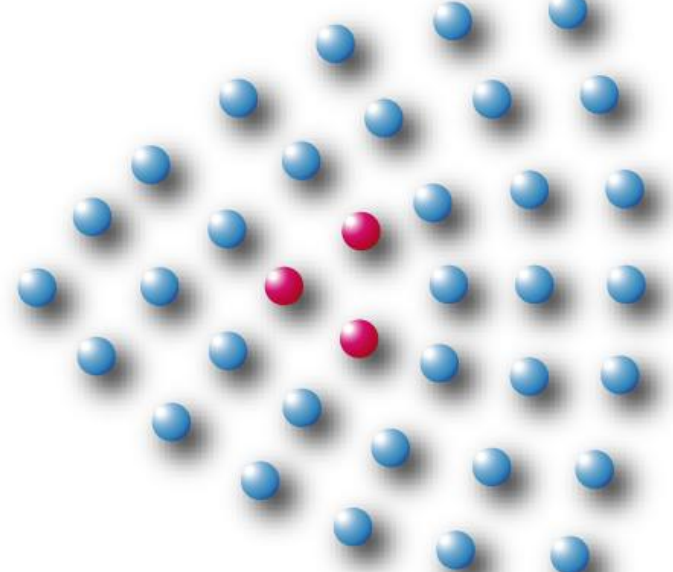
トポロジカル欠陥（固体の場合）

dislocation



並進対称性の破れに対応した
トポロジカル欠陥

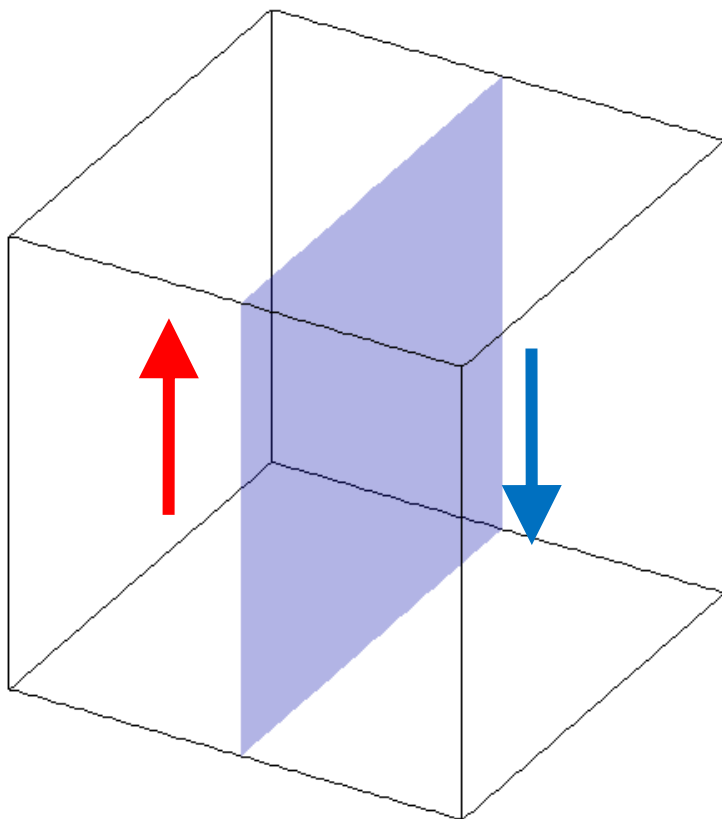
disclination



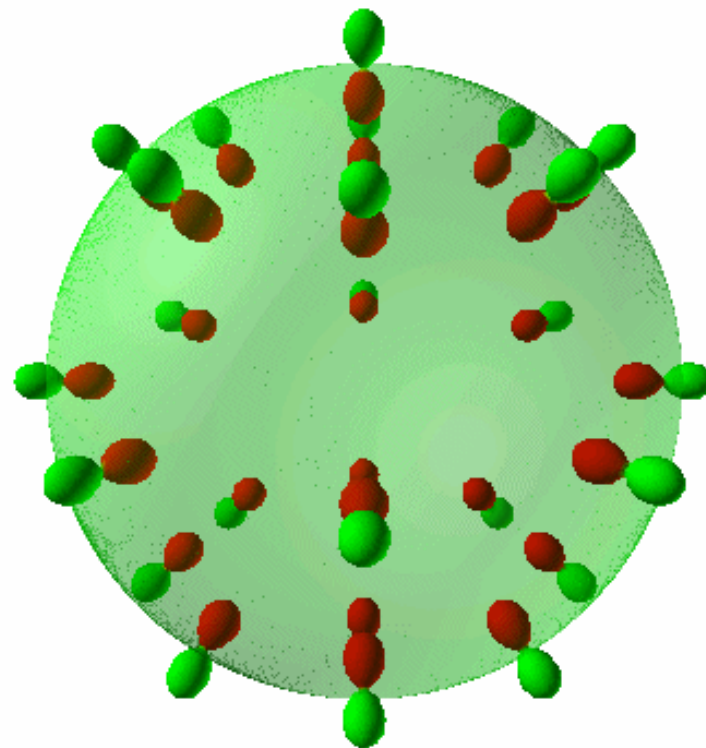
回転対称性の破れに対応した
トポロジカル欠陥

3次元系ではどちらも線欠陥

その他のトポロジカル欠陥



ドメインウォール（面欠陥）：
離散対称性が破れたときに出現



モノポール（点欠陥）：
液晶などに出現

統計力学モデルで現れるトポロジカル欠陥

モデル	破れる対称性	欠陥
Ising模型	\mathbb{Z}_2	面欠陥
XY模型	$S^1 \simeq SO(2)$	線欠陥
Heisenberg模型	S^2	点欠陥

固体中のトポロジカル欠陥と その解析

トポロジカル欠陥のダイナミクス

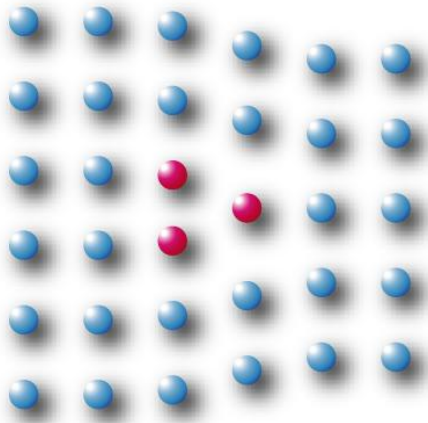
トポロジカル欠陥は相転移による対称性の破れを起源とし、その定義にはオーダーパラメーターの概念を必要とする（少数の原子分子で定義できない）。

→トポロジカル欠陥自体もそのダイナミクスもメソスコピック（あるいはマクロ）なスケールで起こり、観測スケールとの分離が不可能な現象である。

このようなトポロジカル欠陥の興味深いダイナミクスとして色々なものが研究されているが、今回は固体中のトポロジカル欠陥に焦点を当てて、興味深いと思える物理を再考する。

固体中のトポロジカル欠陥

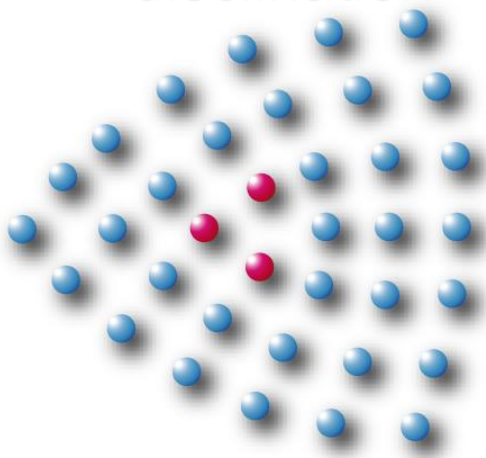
dislocation



固体中のトポロジカル欠陥は固体の塑性変形等のダイナミクス的一端を担う現象として長く研究されている



disclination



今回はトポロジカル欠陥の「トポロジー」に着目し、今まであまり着目されてこなかった物理を考える。

キーワード：トポロジカル欠陥の非可換性

並進・回転対称性の破れ

破れる対称性： $\mathbb{R}^3 \times O(3)$

\mathbb{R}^3 ：並進対称性の破れ

$O(3)$ ：回転+鏡映対称性の破れ

ID.3

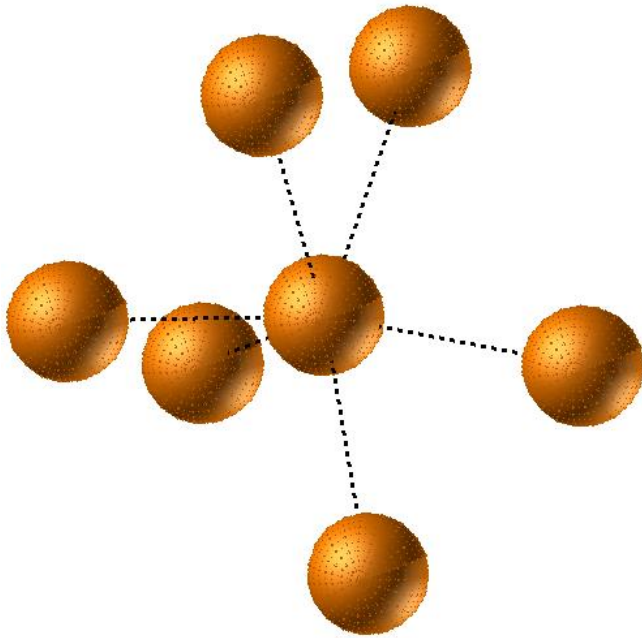
両方一気に考えるのは大変なので、本発表では回転の対称性の破れと、それに伴うdisclinationに焦点を当てて考える。

dislocation：
離散的な並進対称性に伴う欠陥

disclination：
離散的な回転対称性に伴う欠陥

回転対称性の破れを特徴づけるオーダーパラメータ： q^l ベクトル

ある粒子の最近接粒子すべてに対して、方向によって決まる球面調和関数の和



$$q_m^l(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=\text{N.N.}} Y_m^l(\theta_{i,j}, \phi_{i,j})$$

回転対称性の破れを特徴づけるオーダーパラメータ： q^l ベクトル

密度場に内部自由度を導入した拡張密度場を定義する

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$



最近接の粒子がどこにいるか？

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, \theta(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})) &= \sum_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \sum_{j=\text{N.N.}} \frac{\delta(\theta - \theta_{i,j}) \delta(\phi - \phi_{i,j})}{\sin \theta} \\ &= \sum_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \sum_l \sum_{m=-l}^l q_l^m(\mathbf{x}) (Y_m^l)^*(\theta, \phi) \end{aligned}$$

$$q_l^m(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=\text{N.N.}} Y_l^m(\theta_{i,j}, \phi_{i,j})$$

回転対称性の破れを特徴づけるオーダーパラメータ： q^l ベクトル

拡張密度場 $\rho(\mathbf{x}, \theta(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x}))$ は回転対称性の破れを特徴づけるオーダーパラメータになる

$$\langle \rho(\mathbf{x}, \theta(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})) \rangle_{\text{fixed B.C.}} \begin{cases} = 0 & T > T_c \\ \neq 0 & T < T_c \end{cases}$$

回転対称性の破れを特徴づけるオーダパラメータ： q^l ベクトル

特定の l への制限を考える

$$\rho(\mathbf{x}, \{\theta(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})\}) = \sum_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \sum_l \sum_{m=-l}^l q_m^l(\mathbf{x}) (Y_m^l)^*(\theta, \phi)$$



$$\rho_l(\mathbf{x}, \{\theta, \phi\}) = \sum_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \sum_{m=-l}^l q_m^l(\mathbf{x}) (Y_m^l)^*(\theta, \phi)$$

ある離散回転対称性を残している状態に対して拡張密度場を計算すると、その離散対称性を表現できる q^l ベクトルのみで構成される

うまく l を指定することにより、破れずに残っている離散的な回転対称性を持つ状態を表現することができる。

q^l ベクトルが持つ離散対称性

$SO(3)$ の離散部分群に対するまとめ

l	C_2	C_3	C_4	C_6	D_1	D_2	D_3	D_4	D_6	T	O	Y
1	×	×	×	×	○	×	×	×	×	×	×	×
2	×	×	×	×	○	○	×	×	×	×	×	×
3	○	○	×	×	○	○	○	×	×	○	×	×
4	○	×	×	×	○	○	○	○	×	×	○	×
5	○	○	○	×	○	○	○	○	×	×	×	×
6	○	○	×	×	○	○	○	○	○	○	○	○

C_n : odd $l \geq n$, even $l \geq 2n$ D_n : $l \geq n$ T : $l \geq 3$ except $l = 4, 5, 8$

O : $l \geq 4$ except $l = 5, 7, 11$ Y : $l = 6, 10, 12$ and $l \geq 14$ except $l = 17, 19, 23, 29$

C_n : cyclic group, D_n : dihedral group, T : tetrahedral group,
 O : octahedral group, Y ; icosahedral group

q^l ベクトルが持つ離散対称性

$SO(3)$ の離散部分群に対するまとめ

l	C_2	C_3	C_4	C_6	D_1	D_2	D_3	D_4	D_6	T	O	Y
1	×	×	×	×	○	×	×	×	×	×	×	×
2	×	×	×	×	○	○	×	×	×	×	×	×
3	○	○	×	×	○	○	○	×	×	○	×	×
4	○	×	×	×	○	○	○	○	×	×	○	×
5	○	○	○	×	○	○	○	○	×	×	×	×
6	○	○	×	×	○	○	○	○	○	○	○	○

結晶系との関係

単斜晶系： C_2, D_1

斜方晶系： D_2

正方晶系： C_4, D_4

三方晶系： C_3, D_3

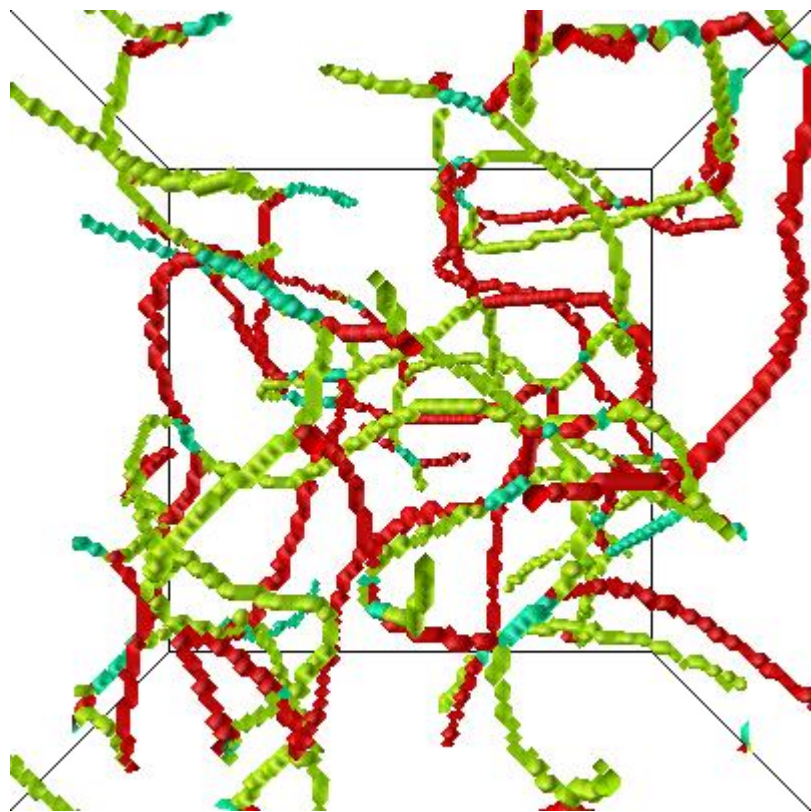
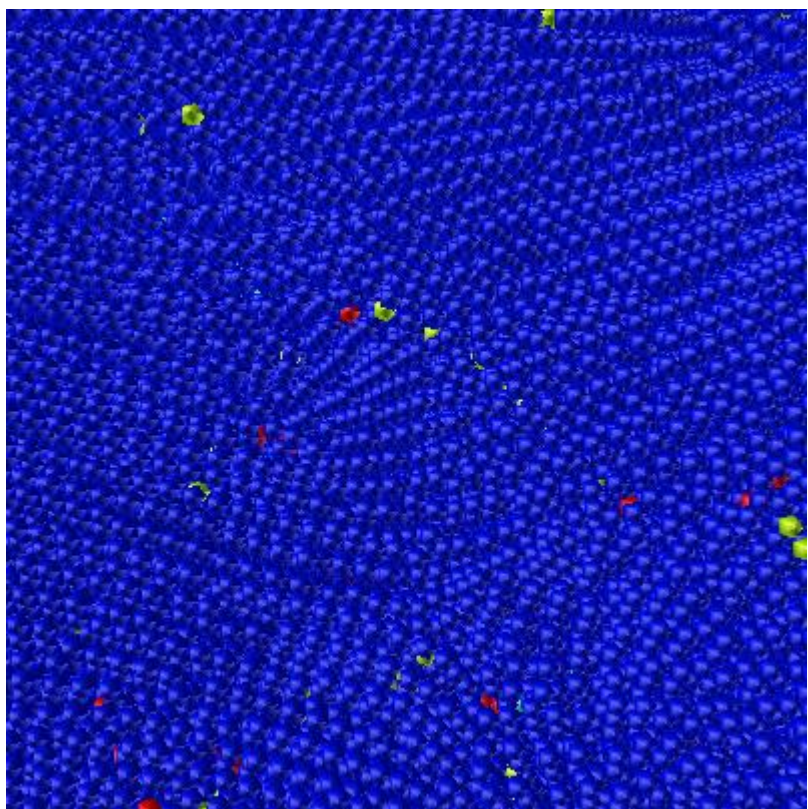
六方晶系： C_6, D_6

立方晶系： T, O

C_n : cyclic group, D_n : dihedral group, T : tetrahedral group,
 O : octahedral group, Y ; icosahedral group

q^l ベクトルの特異点からdisclinationの位置が分かる

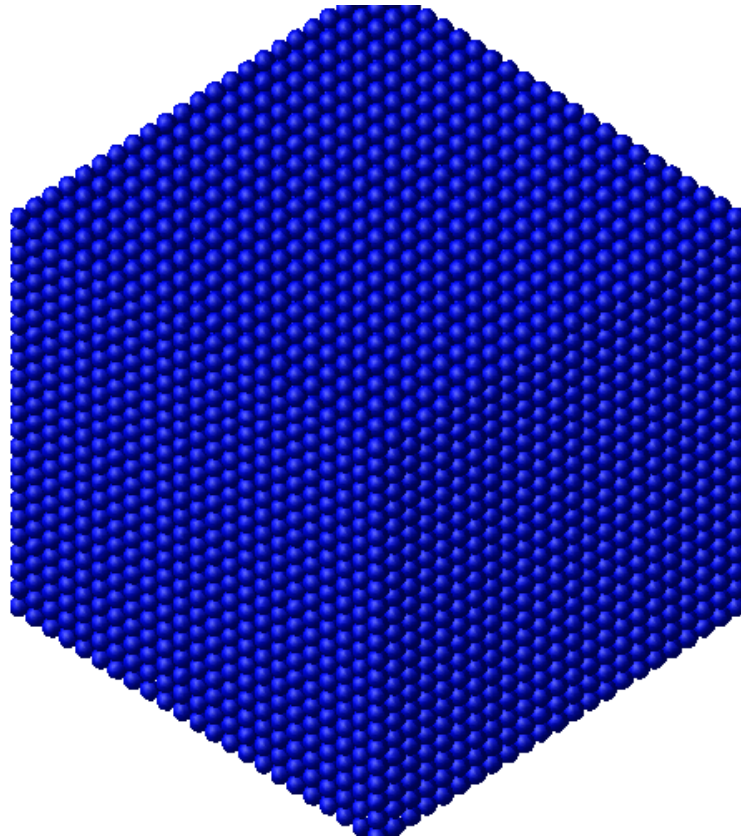
粒子配置 \rightarrow q^l ベクトルの計算 \rightarrow 連続場に拡張 \rightarrow 特異点の計算
 \rightarrow disclinationの位置が分かる



並進対称性に拡張すればdislocationの位置も分かる

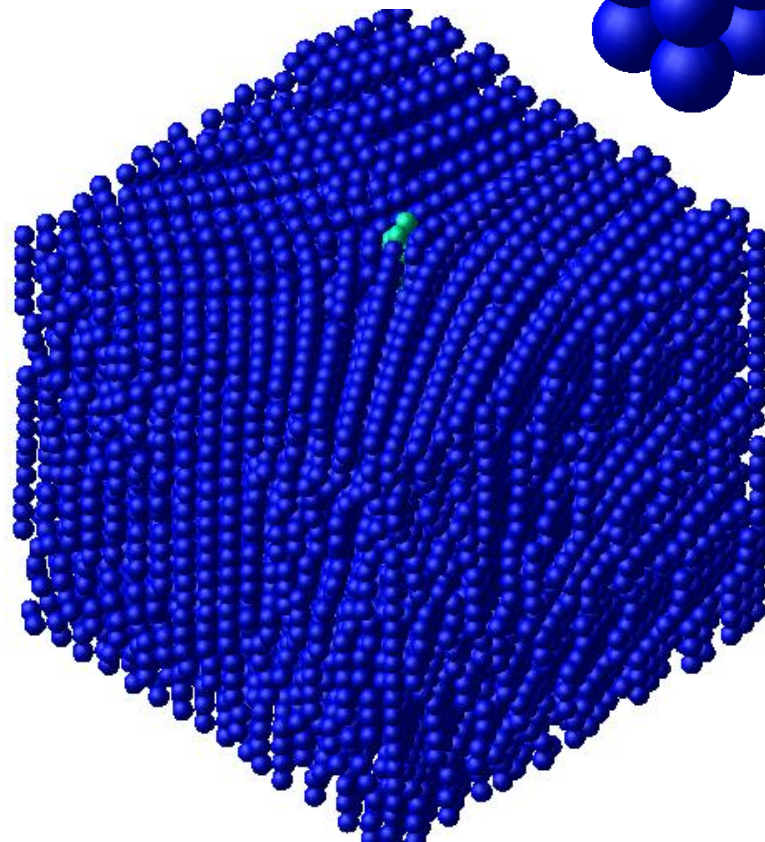
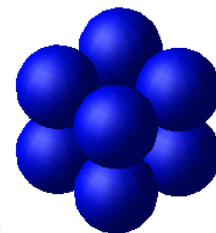
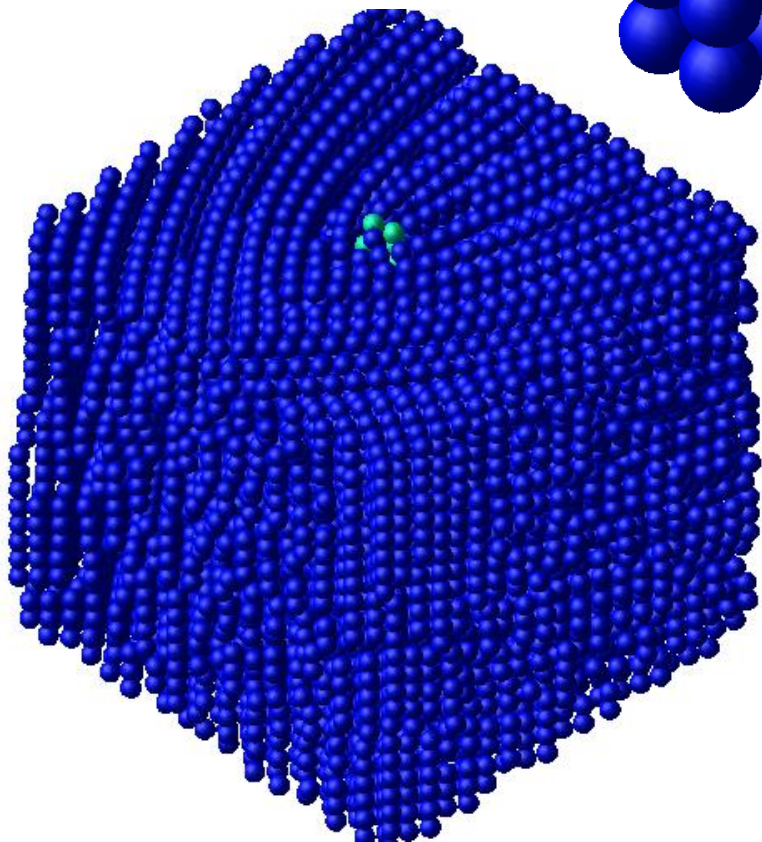
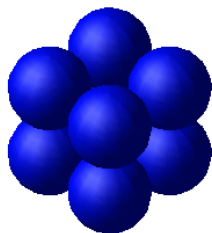
固体中のdisclination

基本：完全立方格子



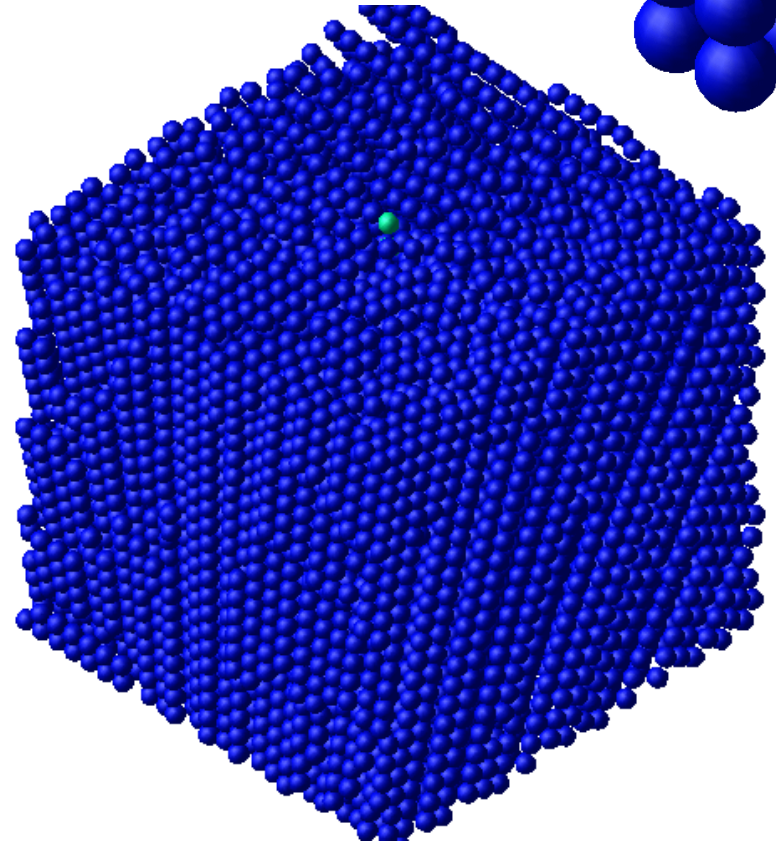
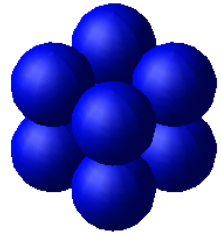
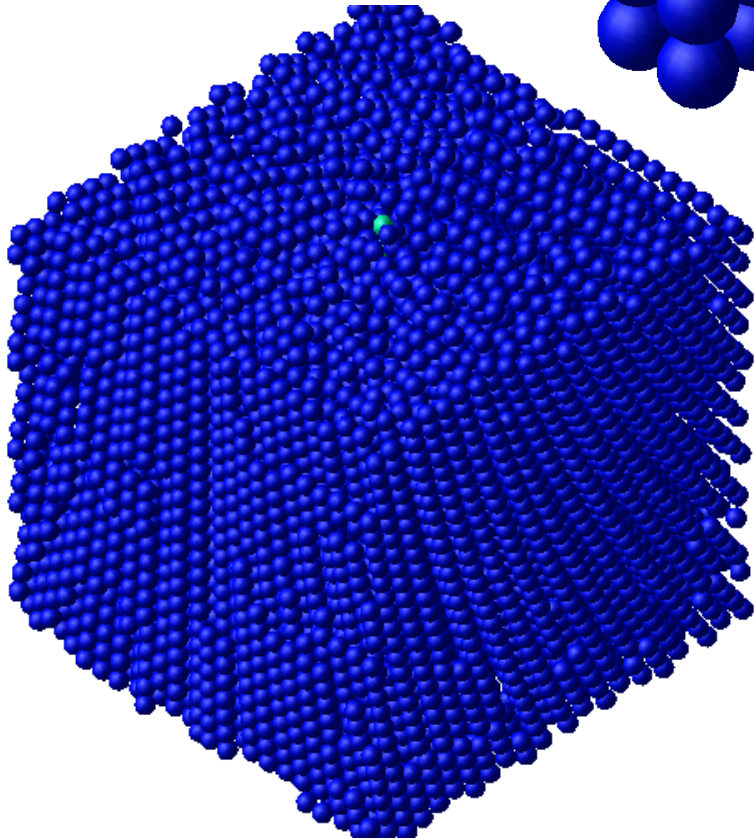
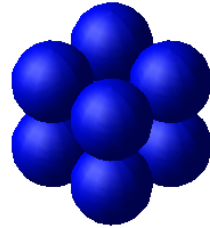
固体中のdisclination

wedge disclination



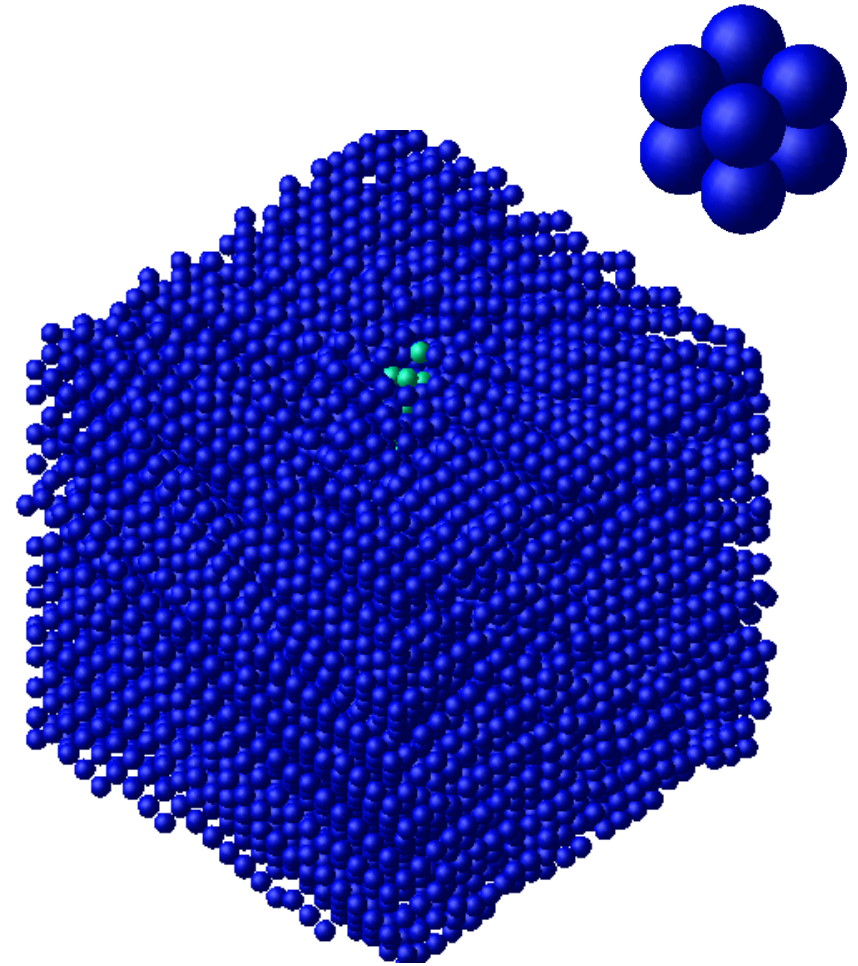
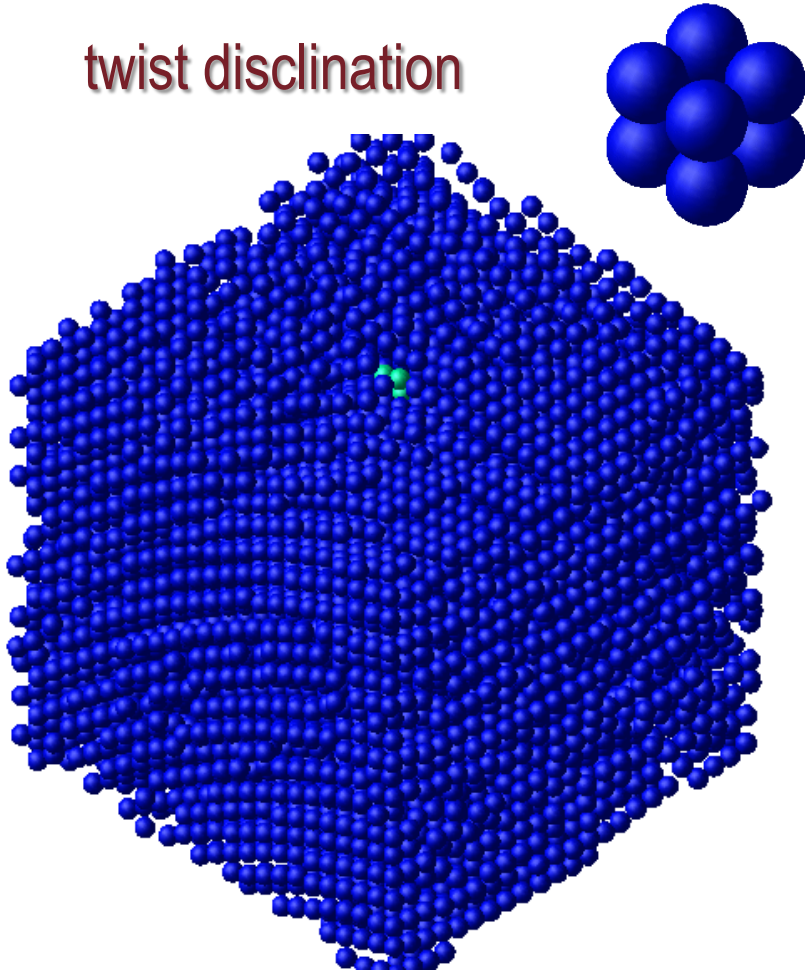
固体中のdisclination

twist disclination



固体中のdisclination

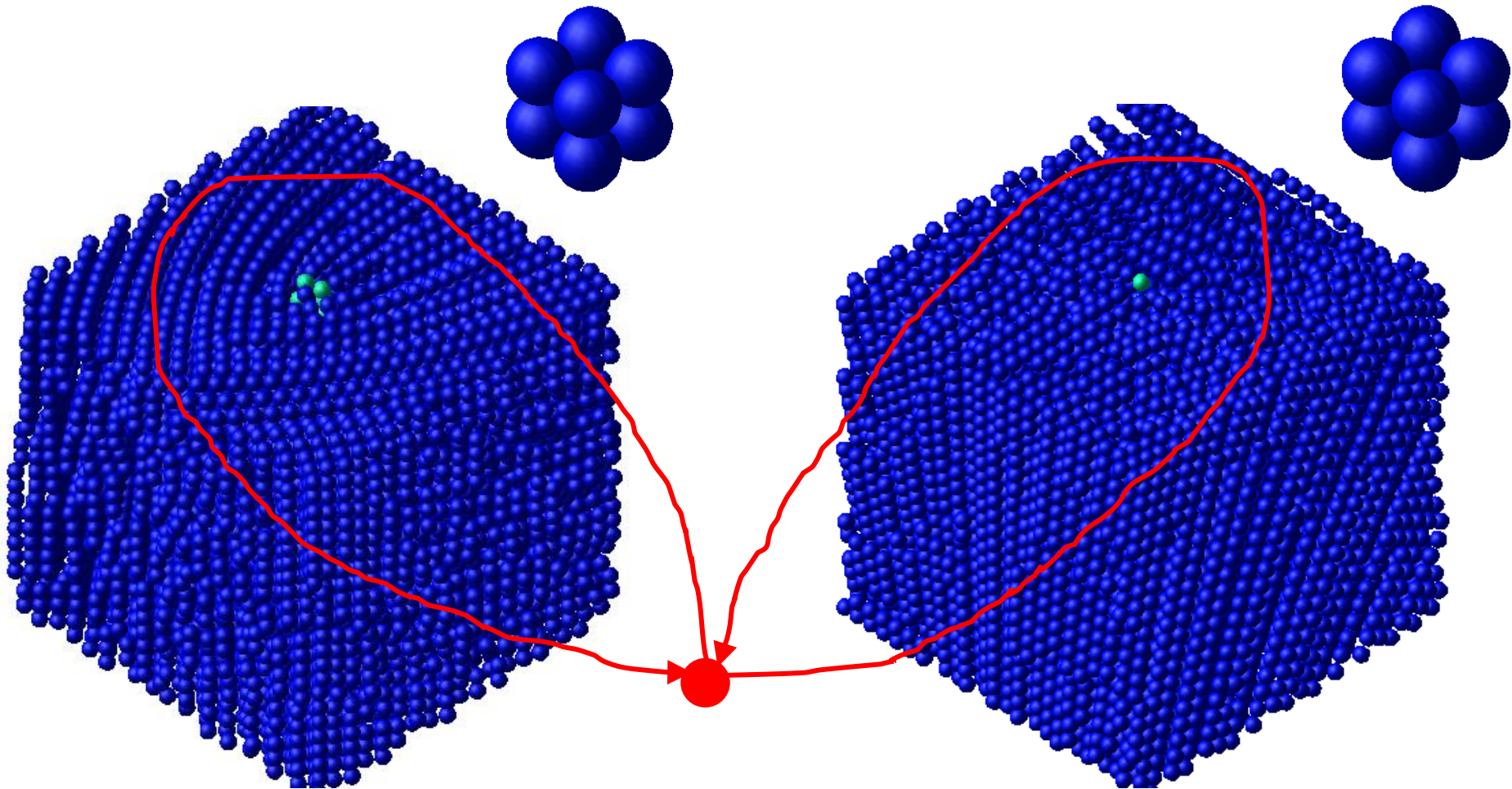
twist disclination



欠陥の非可換性とダイナミクス

欠陥の非可換性

固体中の、異なる軸で回転する2本の欠陥はほぼ非可換である。



欠陥のダイナミクス

欠陥の可換・非可換性は欠陥同士の相互作用およびダイナミクスを大きく変える

固体変形のシミュレーションから直接に調べることもできるが、今回は欠陥の性質を抜き出して調べるという目的から、 q^l ベクトルの有効理論を構成し、そのダイナミクスを調べた。

$(2l+1)$ 次元 $O(3)$ 線型シグマモデル

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{m=-l}^l |\dot{\mathbf{q}}_m^l|^2 + c_0 \sum_{m=-l}^l |\nabla \mathbf{q}_m^l|^2 + c_1 \left(\sum_{m=-l}^l |\mathbf{q}_m^l|^2 - 1 \right)^2$$
$$+ \sum_{L=2}^{2l} d_L \sum_{M=-L}^L \sum_{m=-l}^l \left| C_{l,m;l,M-m}^{L,M} \mathbf{q}_m^l \mathbf{q}_{M-m}^l \right|^2$$

\mathbf{q}^l ベクトルは $(2l+1)$ 次元実ベクトルと等価なので、
 $(2l+1)$ 次元球形模型 (S^{2l+1} 模型) を構成する。

(2l+1)次元 O(3) 線型シグマモデル

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{m=-l}^l |\dot{\mathbf{q}}_m^l|^2 + c_0 \sum_{m=-l}^l |\nabla \mathbf{q}_m^l|^2 + c_1 \left(\sum_{m=-l}^l |\mathbf{q}_m^l|^2 - 1 \right)^2$$
$$+ \sum_{L=2}^{2l} d_L \sum_{M=-L}^L \sum_{m=-l}^l \left| C_{l,m;l,M-m}^{L,M} \mathbf{q}_m^l \mathbf{q}_{M-m}^l \right|^2$$

$C_{l,m;l,M-m}^{L,M} \equiv \langle l, m; l, M - m | L, M \rangle$: Clebsch-Gordan 係数

この項は $O(3)$ 対称性しか持っていないので、ハミルトニアン の対称性は $O(3)$ となり、低温において $O(3)$ 対称性の破れが実現する。

(2l+1)次元 O(3) 線型シグマモデル

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{m=-l}^l |\dot{\mathbf{q}}_m^l|^2 + c_0 \sum_{m=-l}^l |\nabla \mathbf{q}_m^l|^2 + c_1 \left(\sum_{m=-l}^l |\mathbf{q}_m^l|^2 - 1 \right)^2$$
$$+ \sum_{L=2}^{2l} d_L^l \sum_{M=-L}^L \sum_{m=-l}^l \left| C_{l,m;l,M-m}^{L,M} \mathbf{q}_m^l \mathbf{q}_{M-m}^l \right|^2$$

このモデルで欠陥が現れるのは $l \geq 3$ のとき

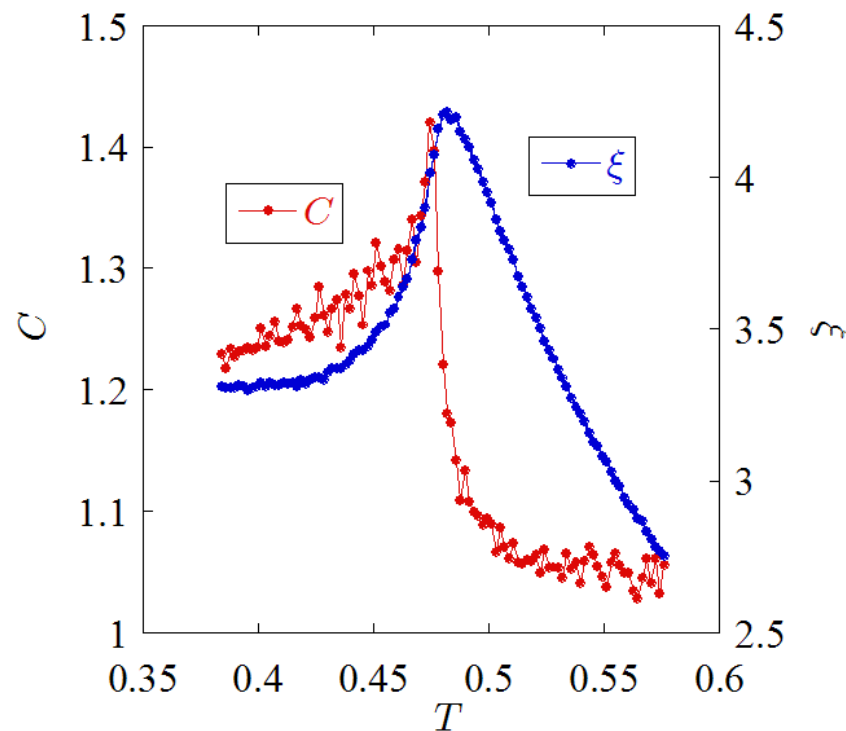
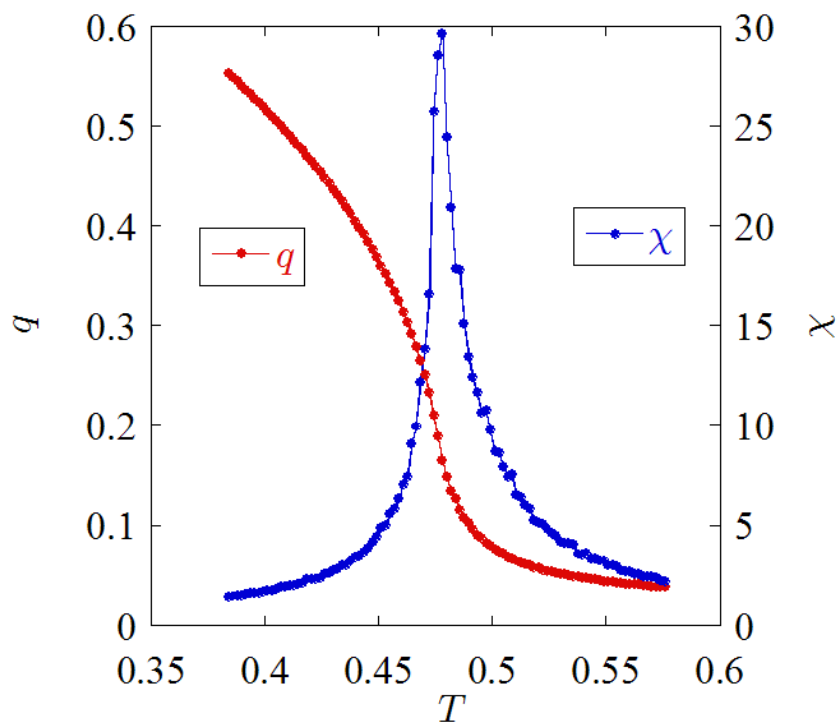
$d_2^3 > 0 : T$ (立方晶系) $d_2^3 < 0 : D_3$ (三方晶系)

$d_2^4 > 0 : O$ (立方晶系) $d_2^4 < 0 : D_4$ (正方晶系)

用いるダイナミクス： \mathcal{H} から得られるランジュバン方程式

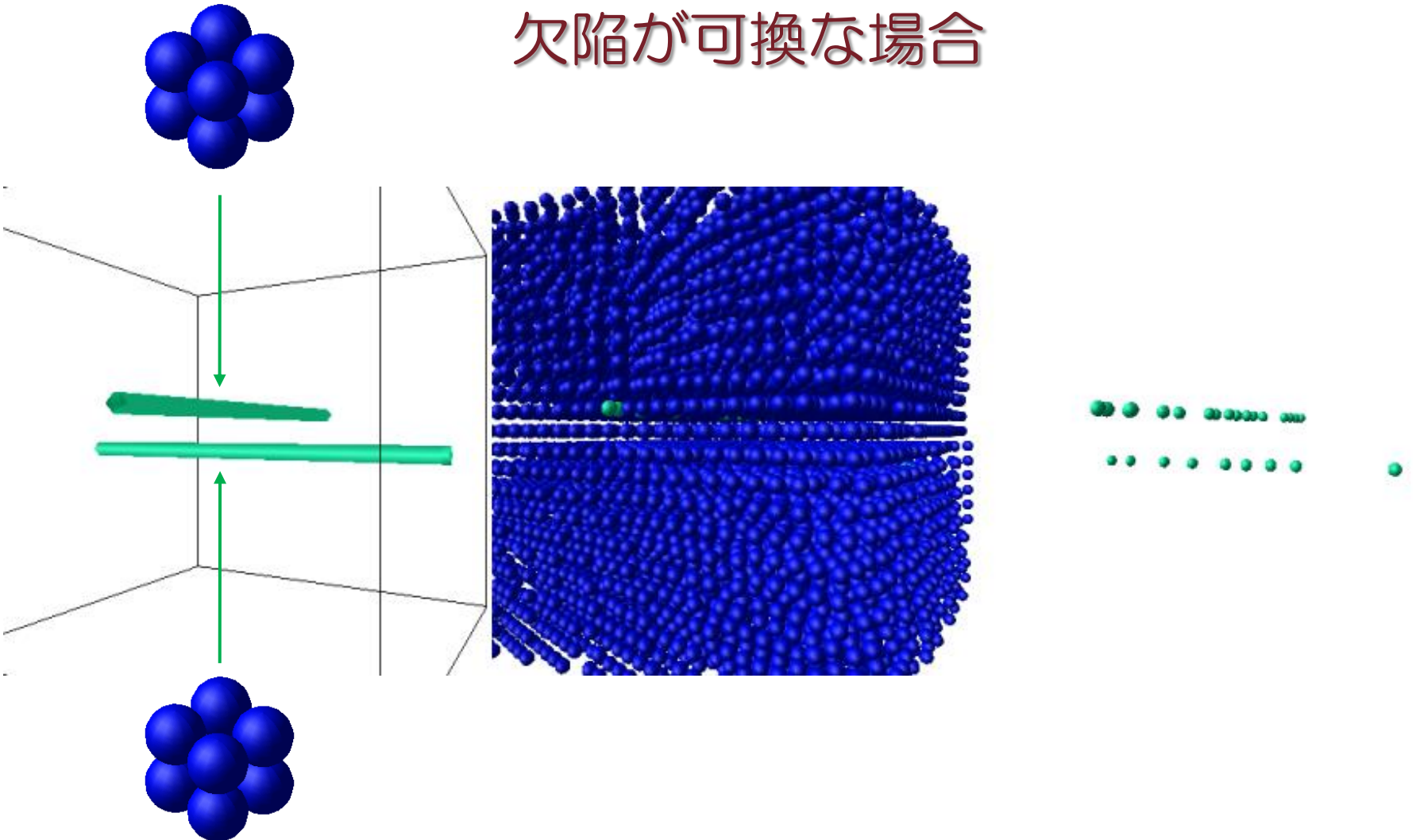
(2l+1)次元O(3)線型シグマモデル

このモデルは2次相転移を示すので、現実の固体を再現するモデルとは言い難いが、欠陥のダイナミクスを大まかに調べるには十分である



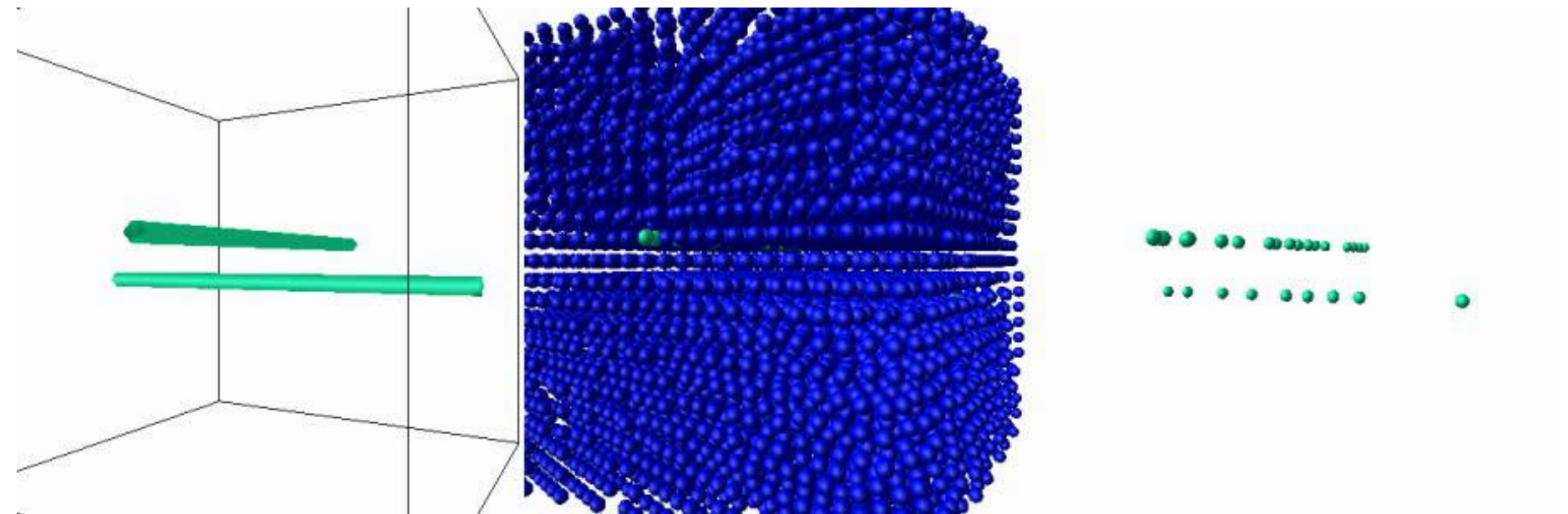
欠陥の衝突ダイナミクス

欠陥が可換な場合



欠陥の衝突ダイナミクス

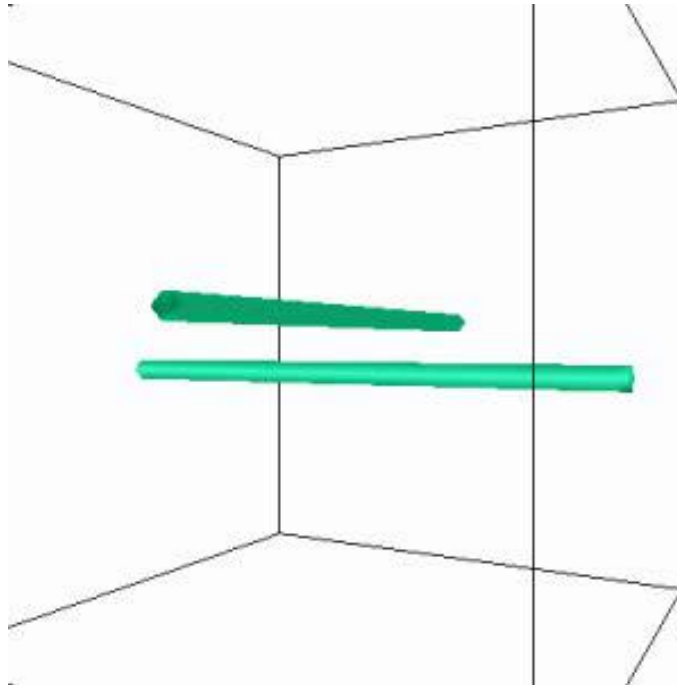
欠陥が可換な場合



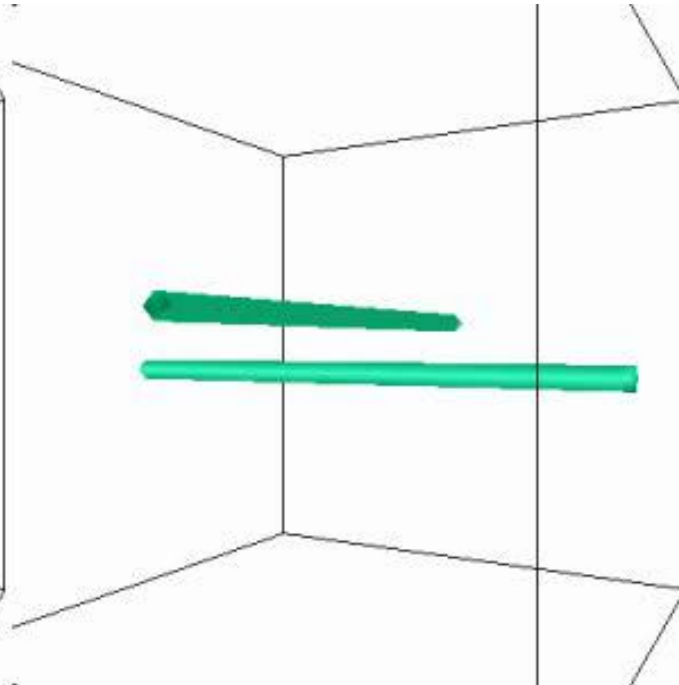
欠陥の衝突ダイナミクス

欠陥が可換な場合

$T = 0.2 T_c$

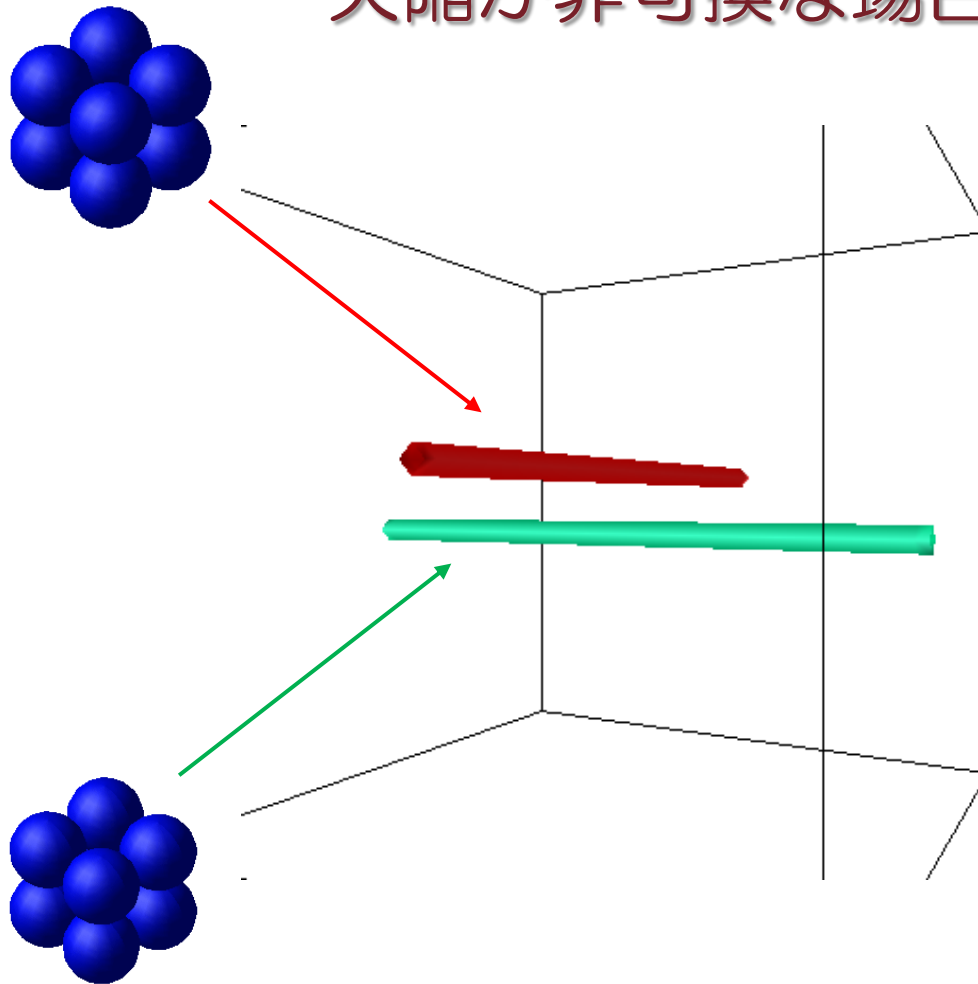


$T = 0.01 T_c$



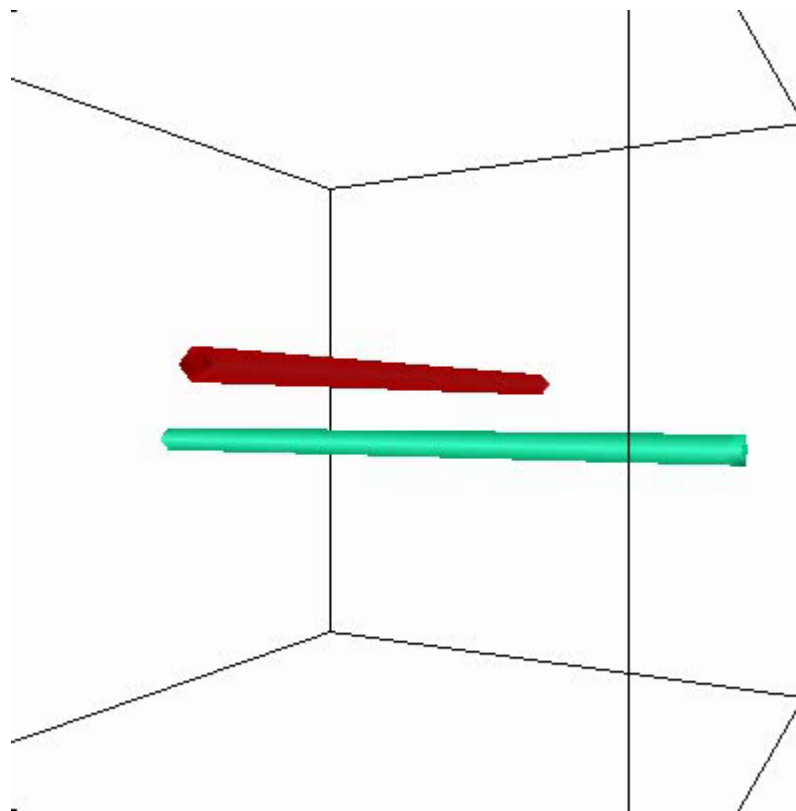
欠陥の衝突ダイナミクス

欠陥が非可換な場合

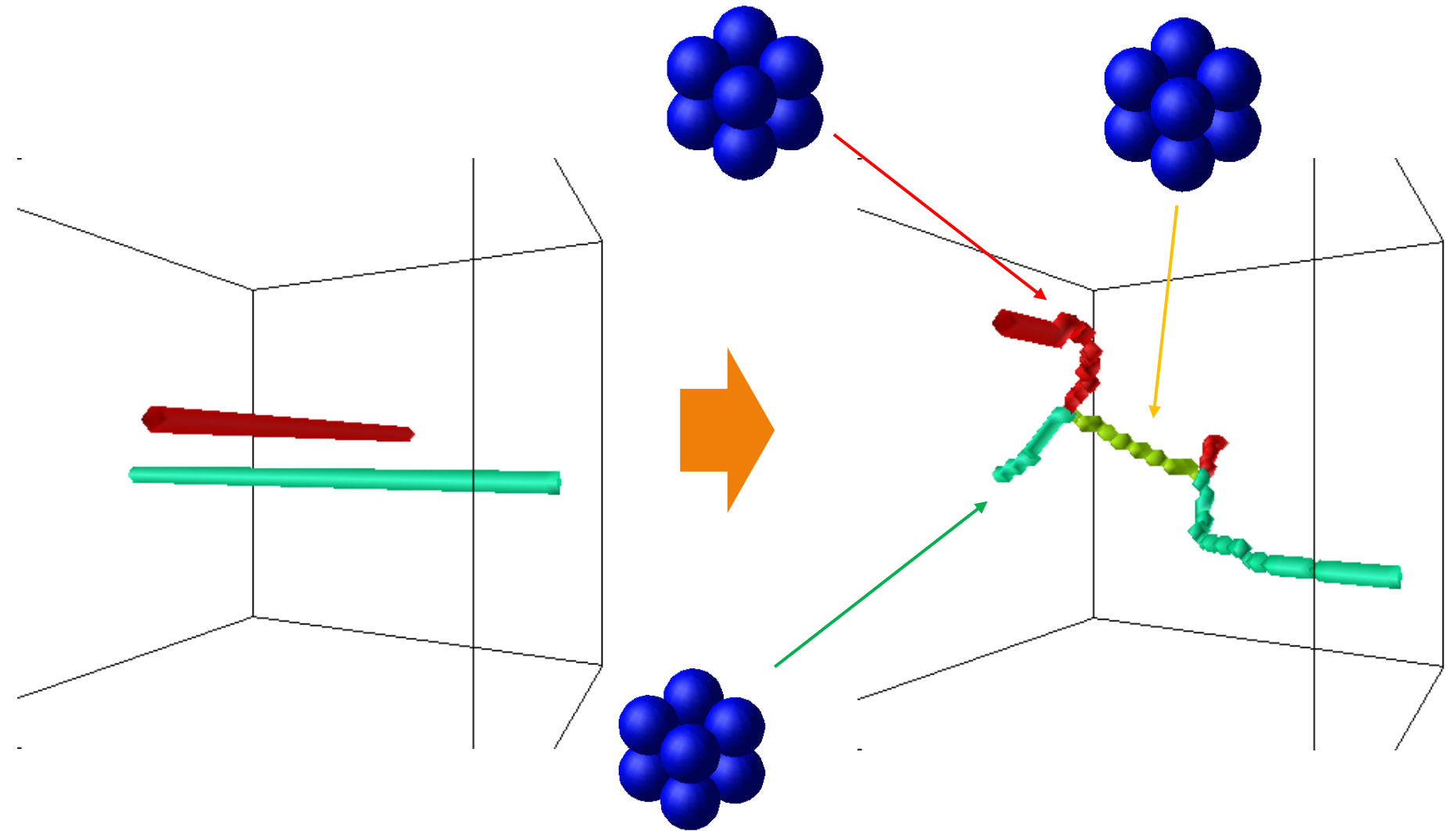


欠陥の衝突ダイナミクス

欠陥が非可換な場合

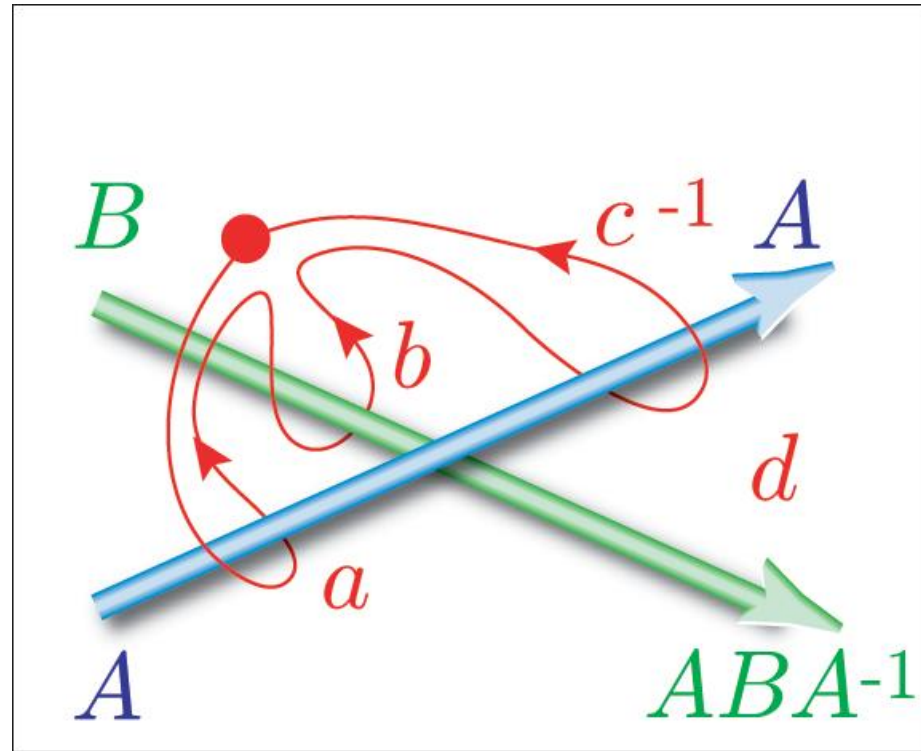


欠陥の衝突ダイナミクス



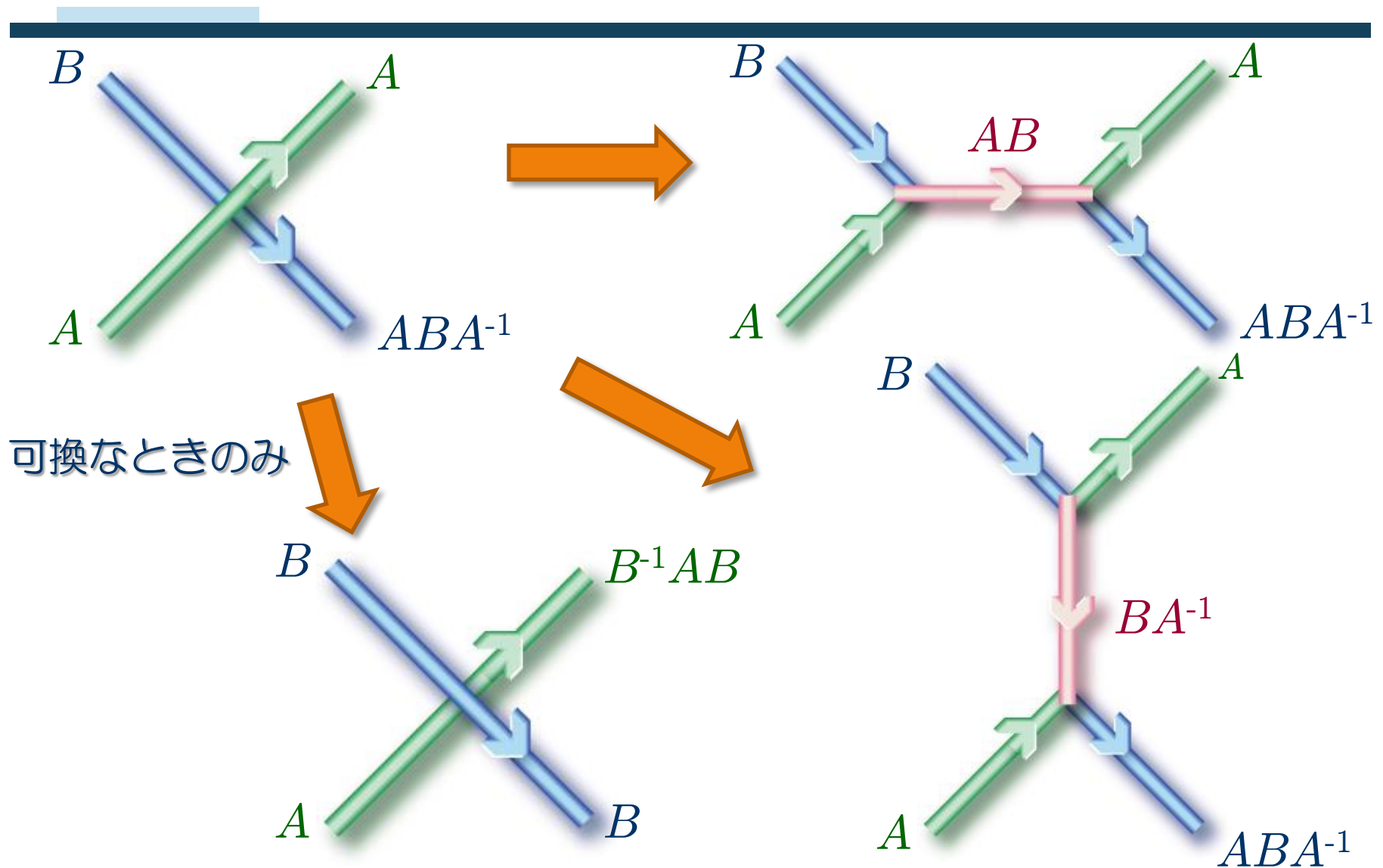
衝突ダイナミクスのトポロジー

A, B : 回転の演算
 a, b, c, d : 閉経路

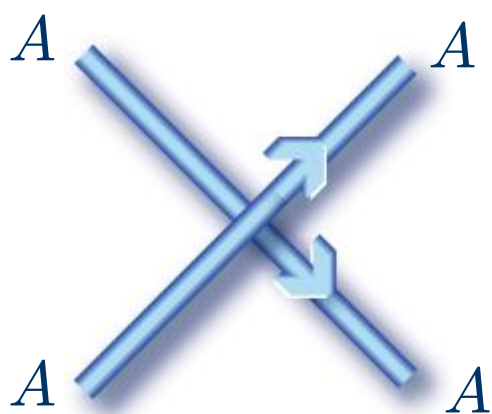


経路 d は欠陥 B を ABA^{-1} とみなす

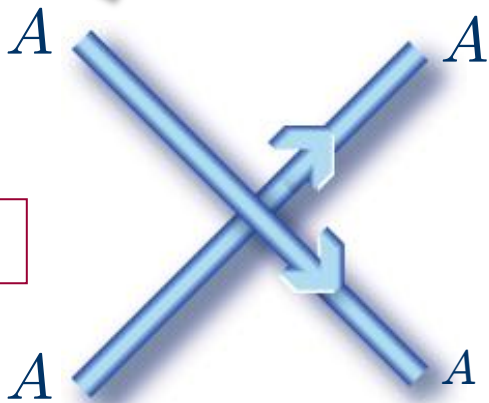
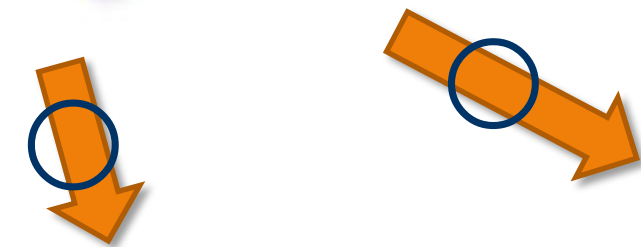
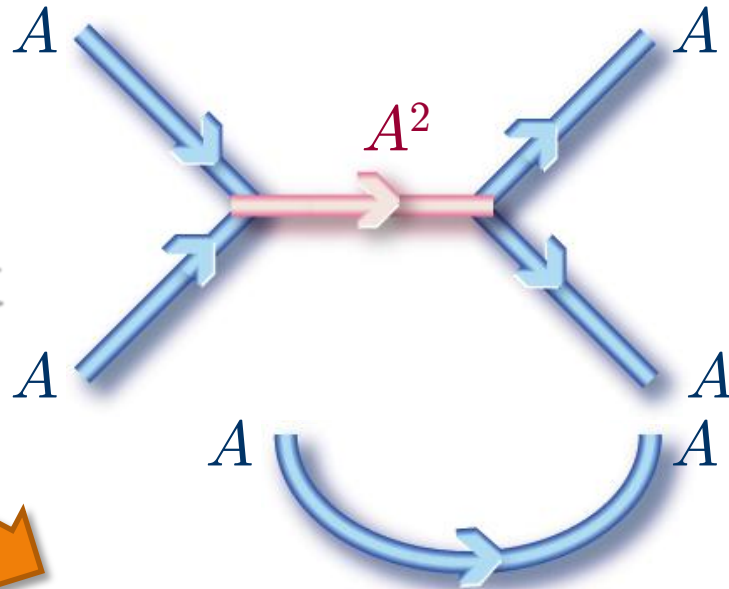
トポロジカル欠陥の衝突



同種の欠陥の場合

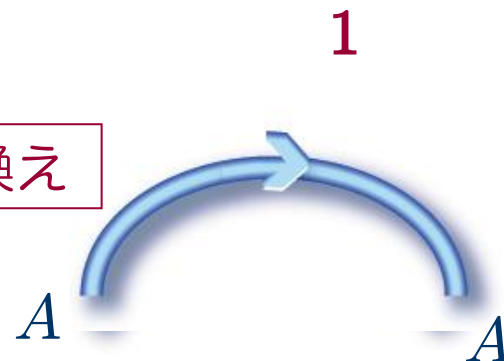



エネルギー的に不利

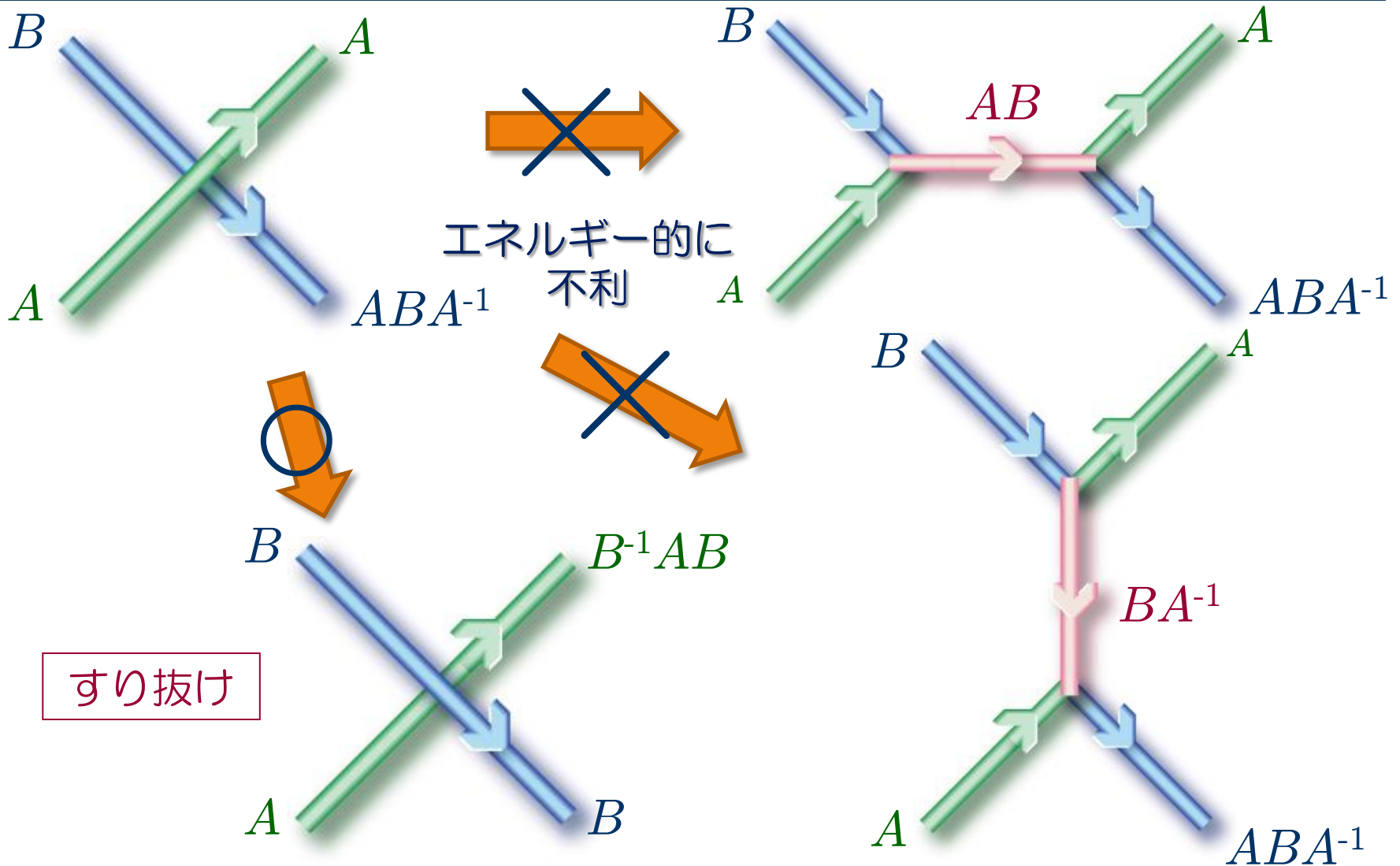


すり抜け

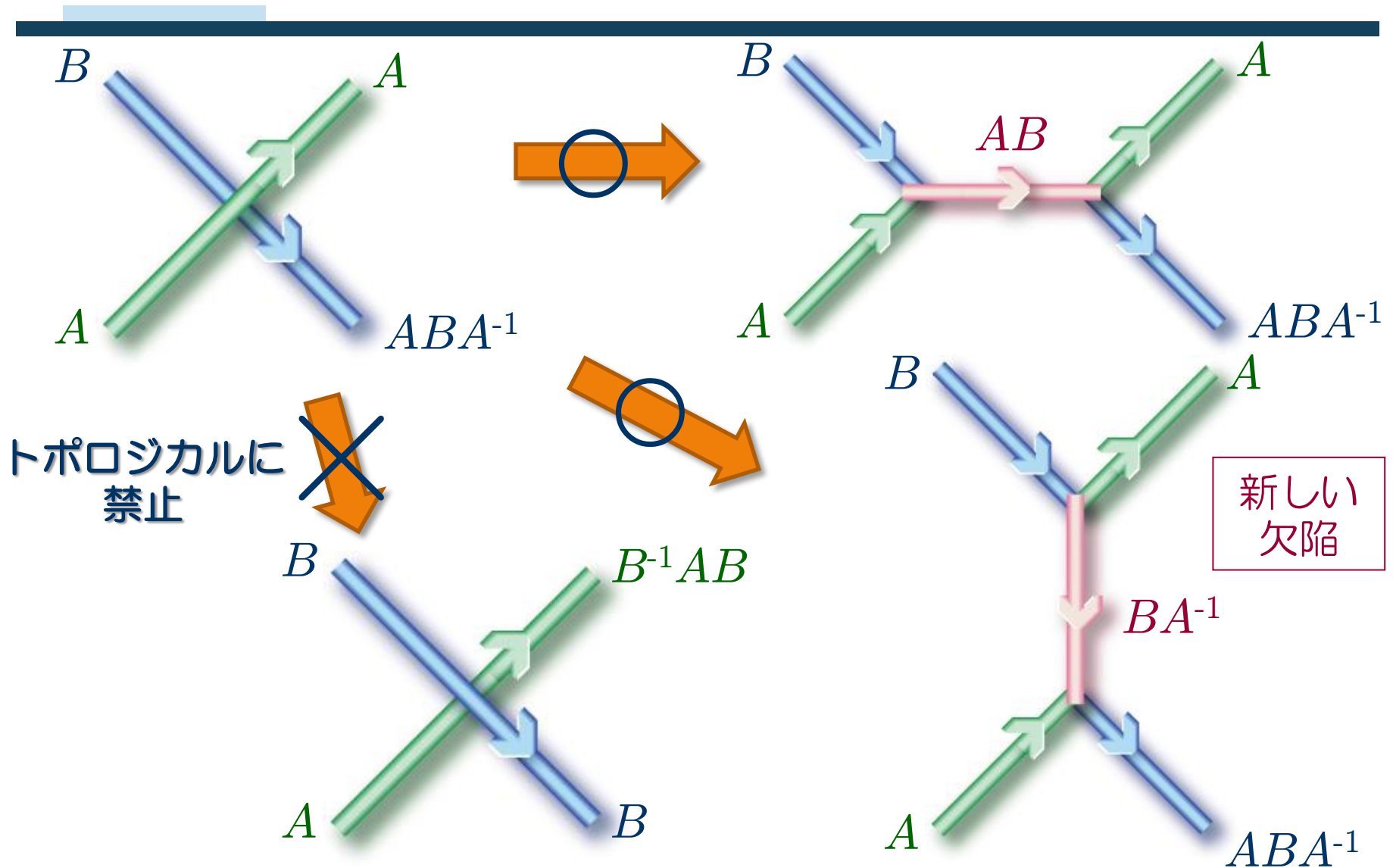
つなぎ換え



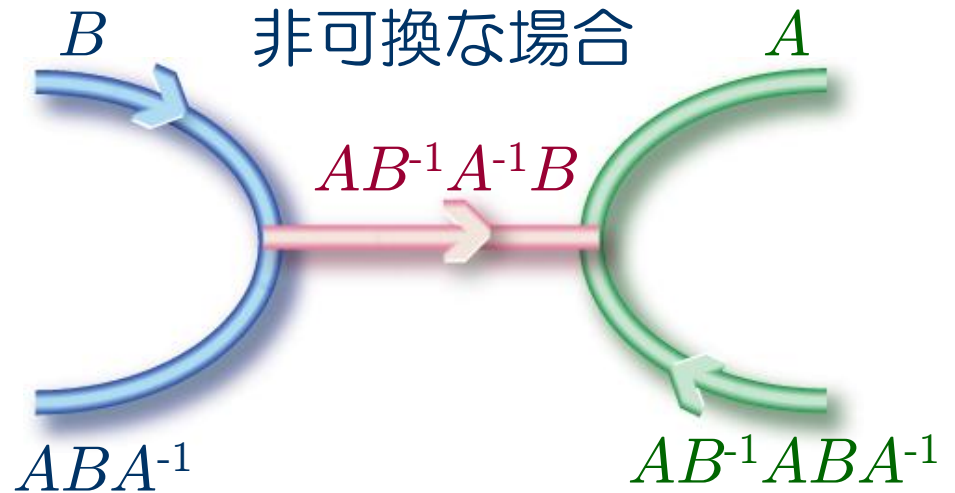
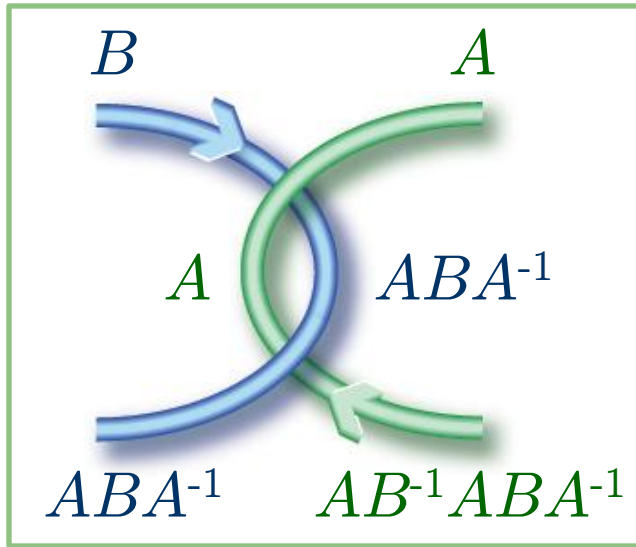
異種で可換な欠陥の場合



非可換な場合



リンクされた欠陥



欠陥の衝突：まとめ

可換な欠陥の衝突：再結合もしくははすり抜け

非可換な欠陥の衝突：新しくできた欠陥に束縛される



多数の欠陥が関与するダイナミクス（固体の塑性変形など）において、欠陥が非可換な場合、欠陥が絡まっていくような挙動が予想される。

非可換な欠陥が現れる系：固体（disclination同士およびdislocationとdisclination）、2軸性液晶（disclination）、スピン自由度を持つ冷却原子気体BEC（量子渦）など

トポロジカル欠陥と統計力学、 固体ダイナミクスへの影響

Phase Ordering Processにおける欠陥ダイナミクス

Phase ordering process : $T > T_c$ (液体相) から $T < T_c$ (液体相) への急冷で起こる、対称性の破れた状態への ordering process



支配的なダイナミクス：トポロジカル欠陥の減衰

Kibbleのイメージ

- 冷却前：相関長 ξ でオーダーパラメーター一定のドメインが系を満たしている
- 冷却後： ξ のスケールでトポロジカル欠陥ができる (欠陥の密度 $\propto \xi^{-n}$)
→他の欠陥と相互作用し、減衰する

T. W. B. Kibble, J. Phys. A : Math. Gen. **9**, 1387 (1976)

Phase Ordering Processにおける欠陥ダイナミクス

Phase ordering processにおけるべき乗則

Phase ordering processにおいて相関関数 $C(\mathbf{r}, t)$ や $S(\mathbf{k}, t)$ におけるべき乗則が議論されている

H. Toyoki and K. Honda, PTP **78**, 237 (1987)

T. Ohta, D. Jasnow, and K. Kawasaki, PRL **49**, 1223 (1982)

A. J. Bray and K. Humayun, PRE **47**, R9 (1993)

$$S(\mathbf{k}, t) = \langle \phi_{\mathbf{k}}(t) \cdot \phi_{-\mathbf{k}}(t) \rangle \propto \rho_{\text{def}}(t) k^{-(d+n)}$$

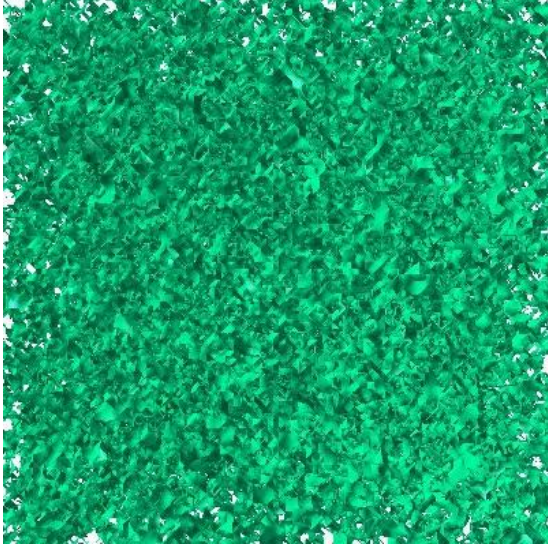
$$\rho_{\text{def}}(t) \propto L(t)^{-n} \propto t^{-n/2}$$

欠陥の衝突によってエネルギーが解放されるという描像によって導出されるが、欠陥が非可換の場合にエネルギーが解放されず、絡まるような状況でどう変わるだろうか？

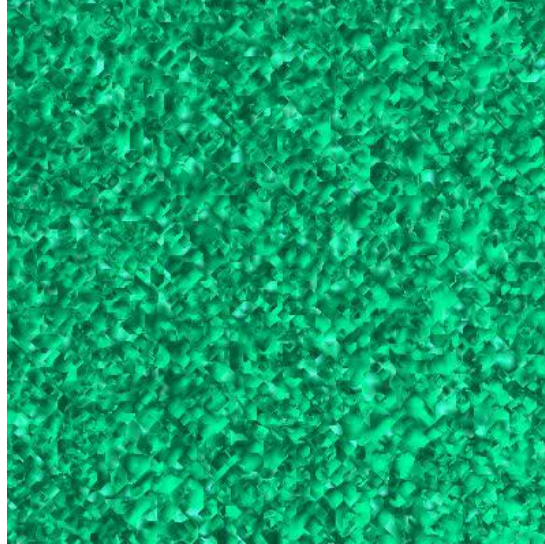
Phase Ordering Processにおける欠陥ダイナミクス

球型模型におけるPhase ordering process

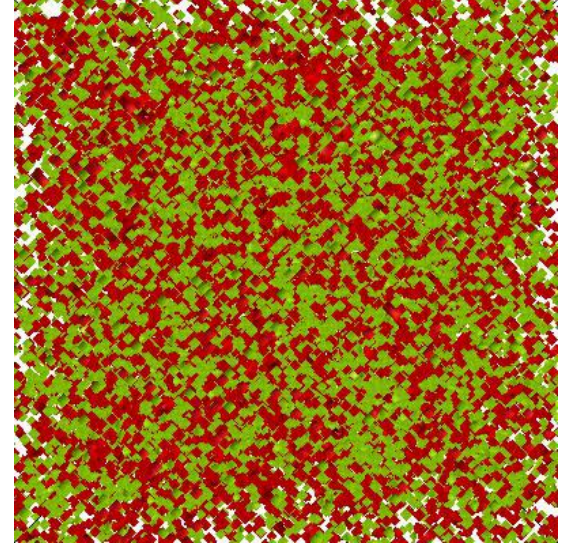
Z_2



S^1

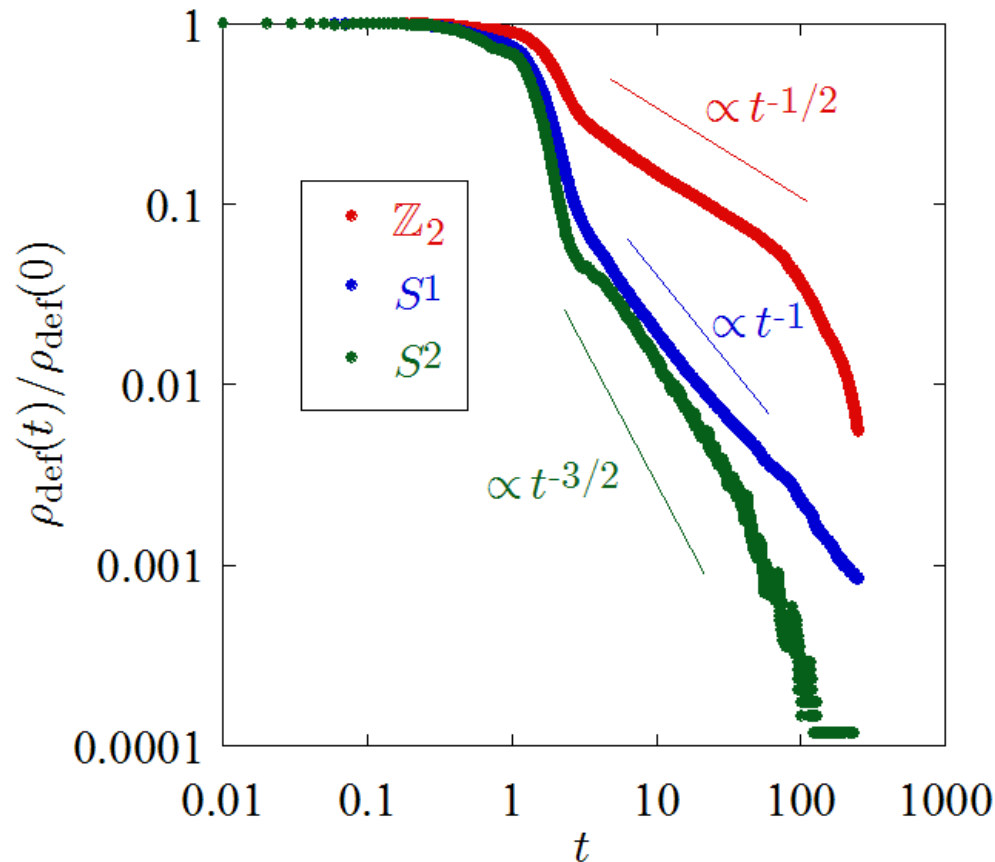


S^2



Phase Ordering Processにおける欠陥ダイナミクス

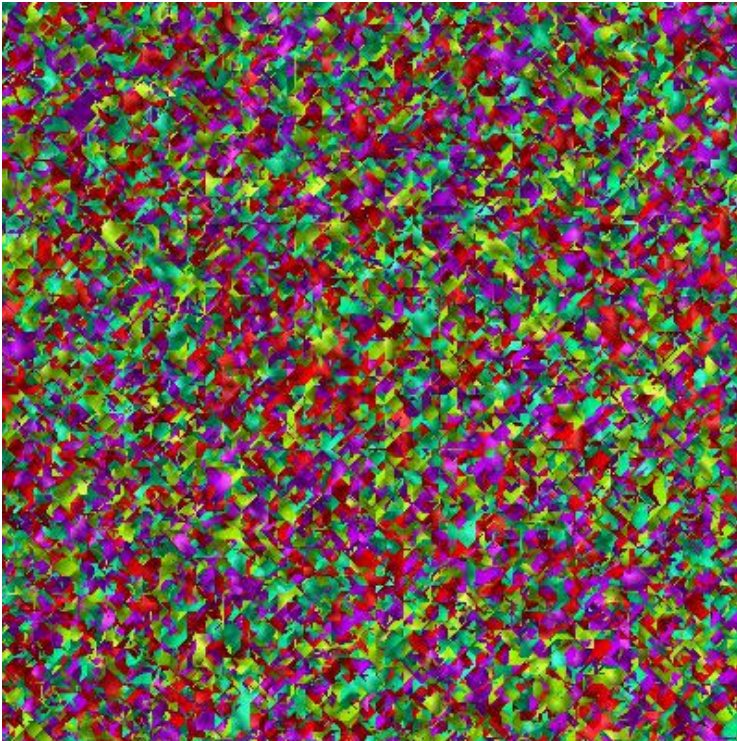
球型モデルにおけるPhase ordering process



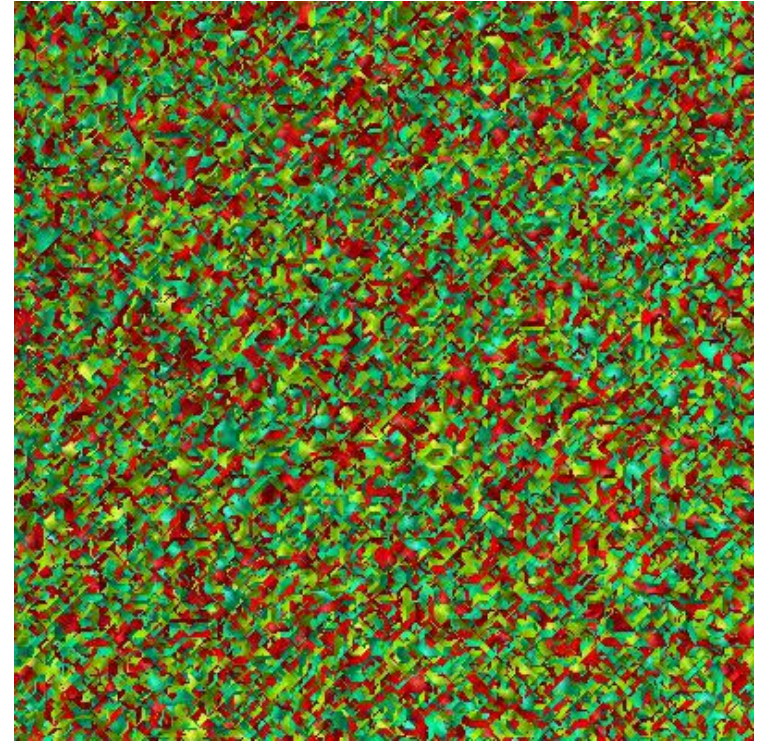
Phase Ordering Processにおける欠陥ダイナミクス

q^4 ベクトルモデルにおけるPhase ordering process

可換な欠陥
($S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$)

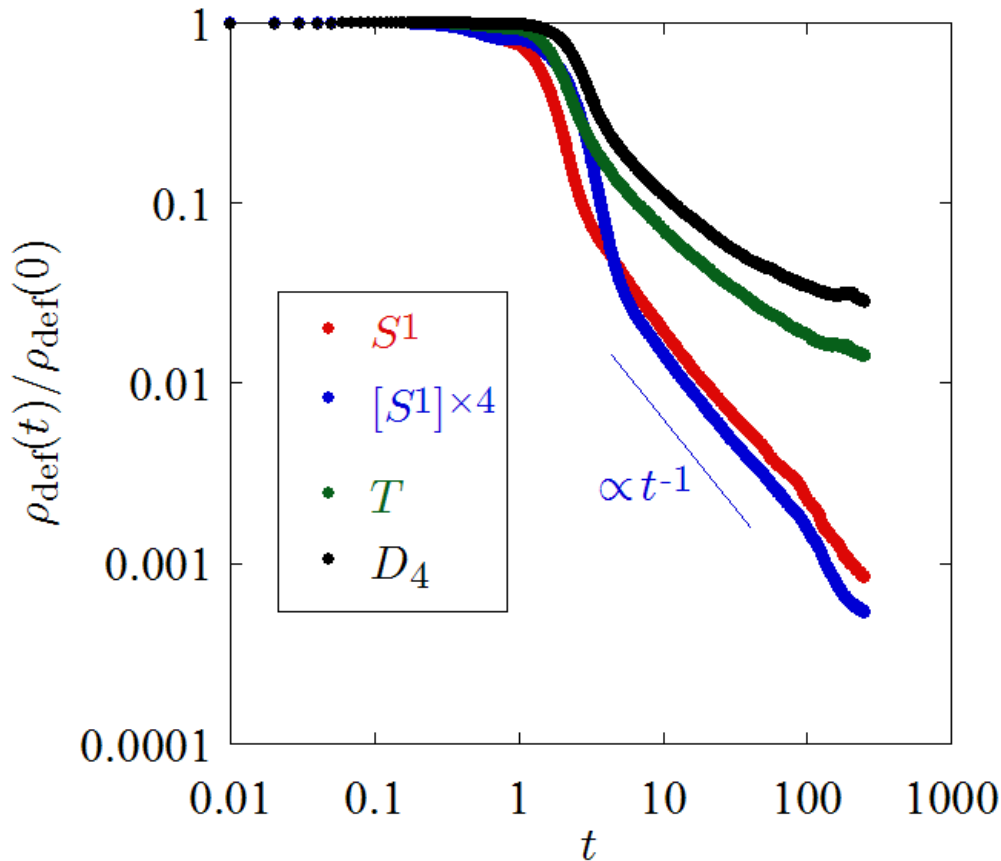


非可換な欠陥
(D_4)

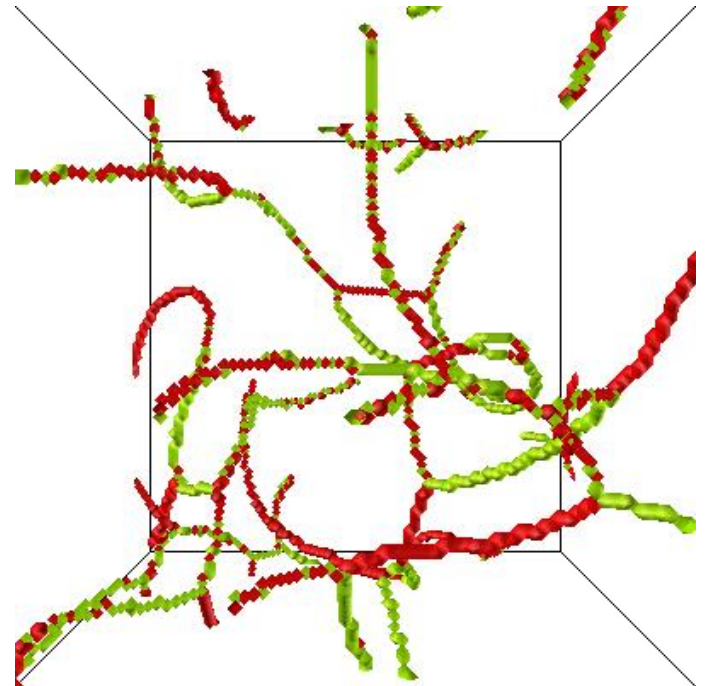


Phase Ordering Processにおける欠陥ダイナミクス

q^4 ベクトルモデルにおけるPhase ordering process

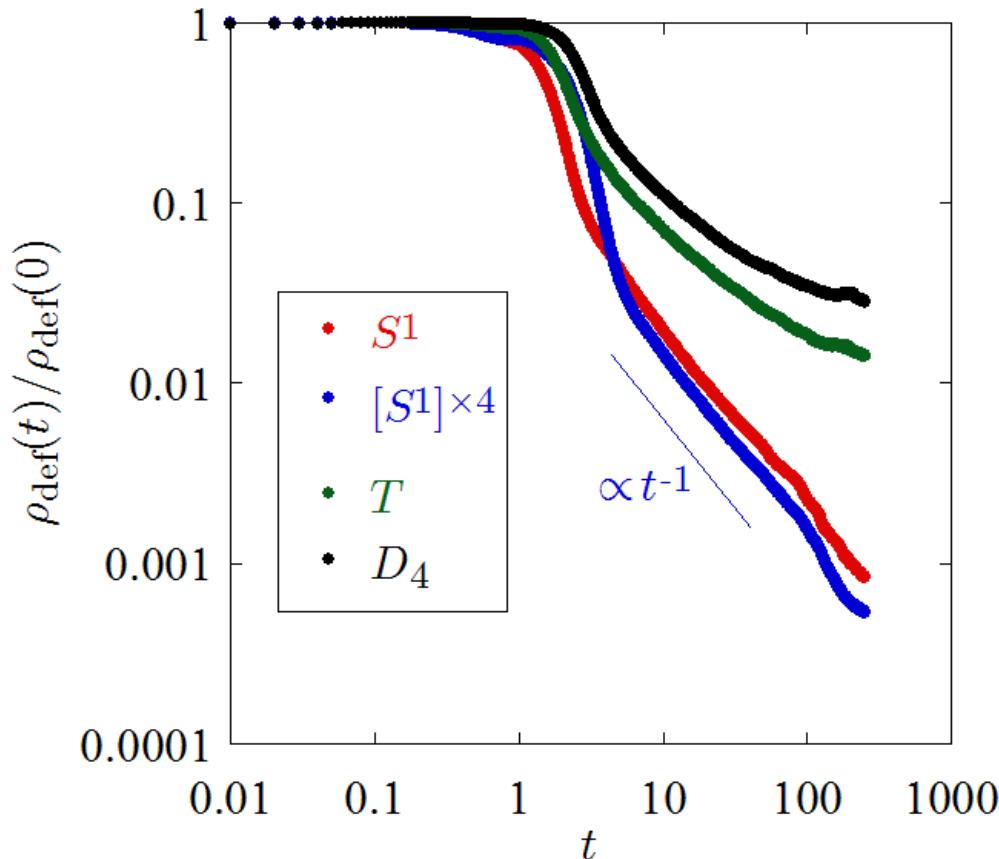


T : q^3 ベクトルモデルにおける非可換欠陥



Phase Ordering Processにおける欠陥ダイナミクス

q^4 ベクトルモデルにおけるPhase ordering process



- 欠陥が非可換なときはベキ乗則に従っていないようにみえる
- 欠陥の寿命が長い（絡まるため）

固体で実際に非可換な欠陥が存在すれば、欠陥がなかなか消えてくれないような挙動が期待される

他の非可換な欠陥

ドメインウォールと線欠陥が非可換な模型：
 $O(2)$ 対称性が破れる模型（ $O(2)$ 模型とは異なる）

$$\mathcal{H} = \sum_{m=1}^4 \left[\frac{\dot{\phi}_m^2}{2} + c_0 (\nabla \phi_m)^2 \right] + c_1 \left[(\phi_0 \phi_0 + \phi_2 \phi_2 - 1/2)^2 + (\phi_1 \phi_1 + \phi_3 \phi_3 - 1/2)^2 + (\phi_0 \phi_1 + \phi_2 \phi_3)^2 \right]$$

ドメインウォール (\mathbb{Z}_2) と線欠陥 (S^1) が存在し、非可換
(鏡映対称性の破れた固体・2成分BEC)

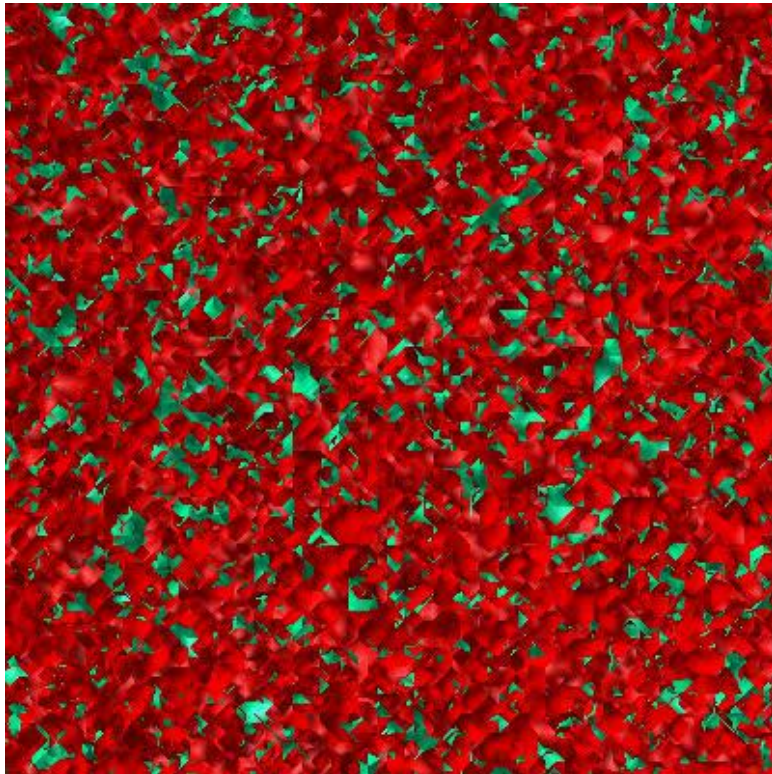
$\mathbb{Z}_2 \times S^1$ 模型

$$\mathcal{H} = \sum_{m=1}^4 \left[\frac{\dot{\phi}_m^2}{2} + c_0 (\nabla \phi_m)^2 \right] + c_1 \left[(\phi_0 \phi_0 - 1/3)^2 + (\phi_1 \phi_1 + \phi_2 \phi_2 - 2/3)^2 \right]$$

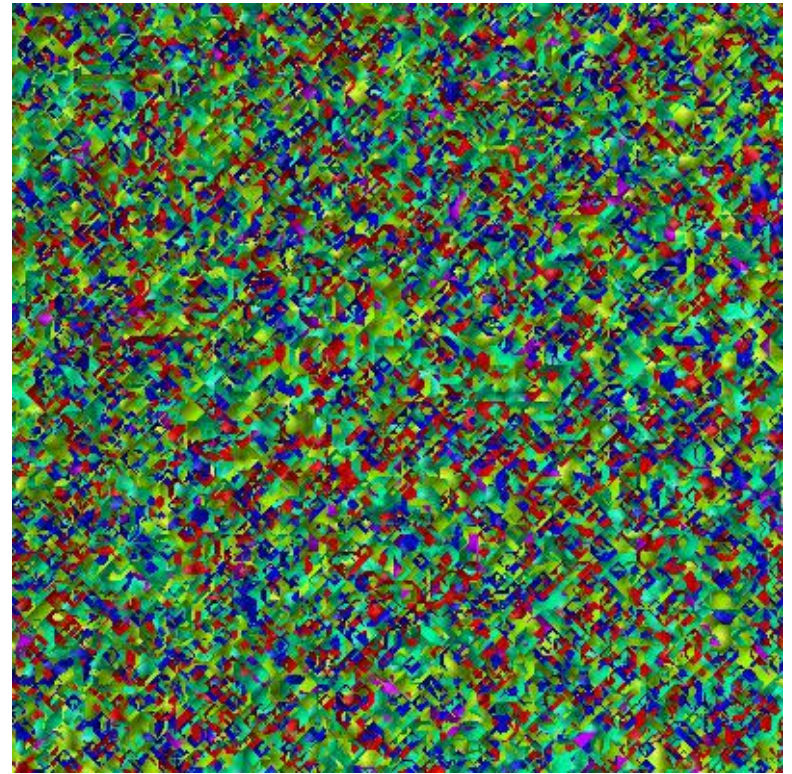
ドメインウォールと線欠陥は可換

他の非可換な欠陥

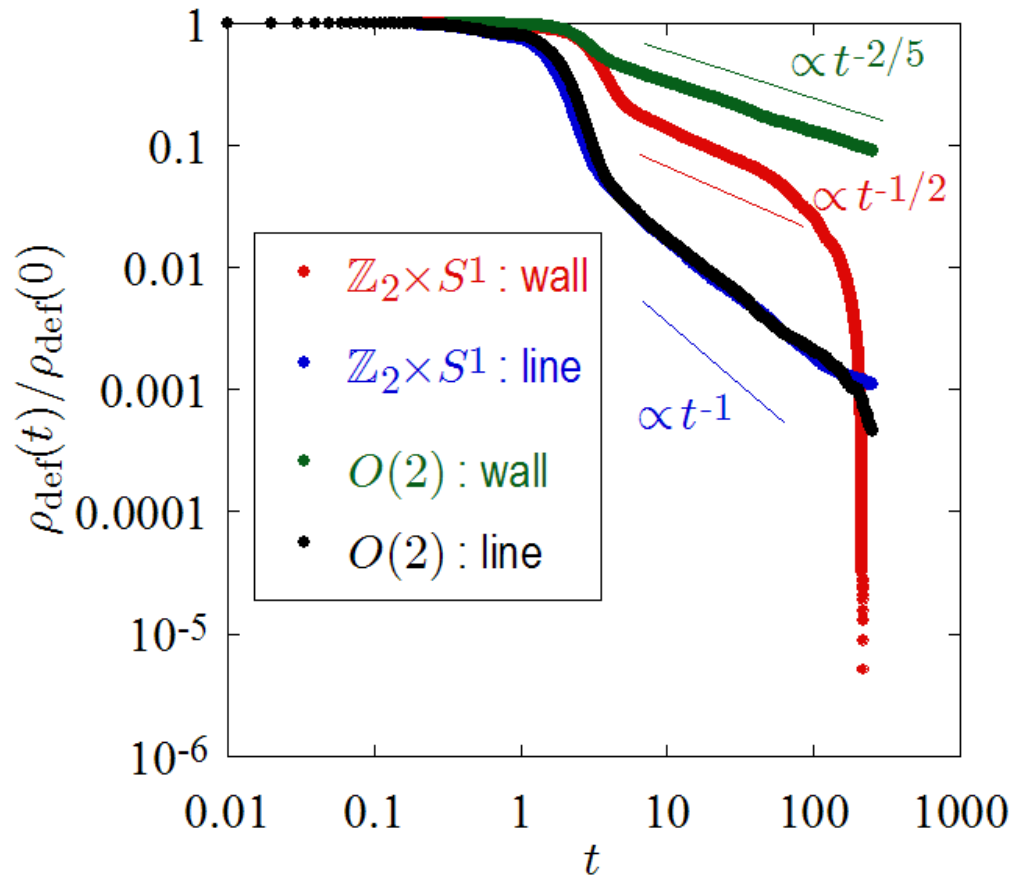
$\mathbb{Z}_2 \times S^1$ 模型



$O(2)$ 対称性が破れる模型



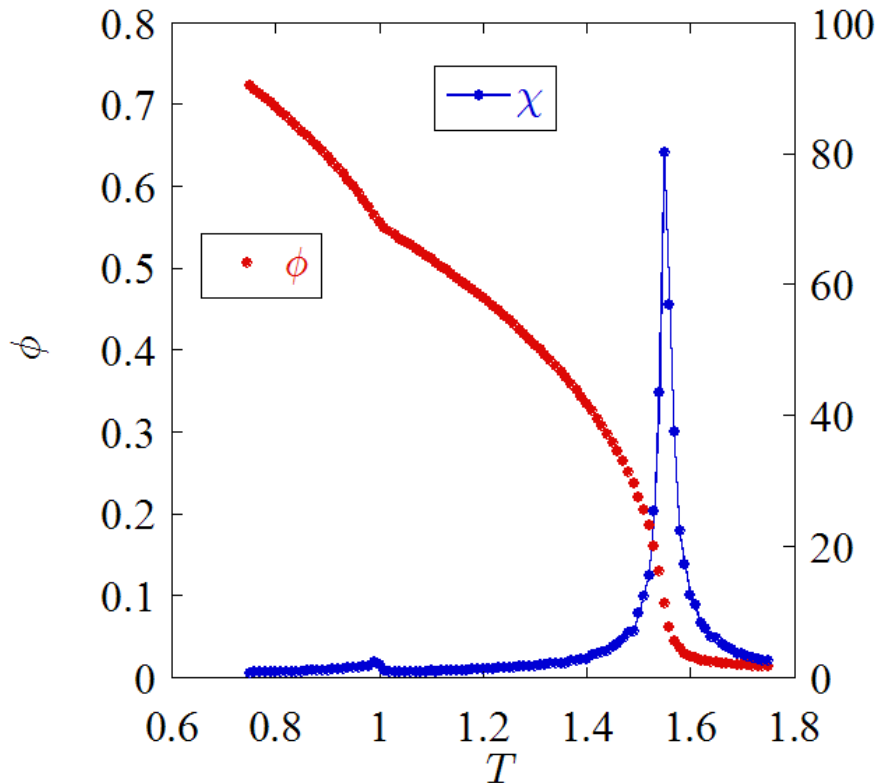
他の非可換な欠陥



面欠陥と線欠陥が非可換なとき、線欠陥の影響を受けて面欠陥の減衰が弱まる。

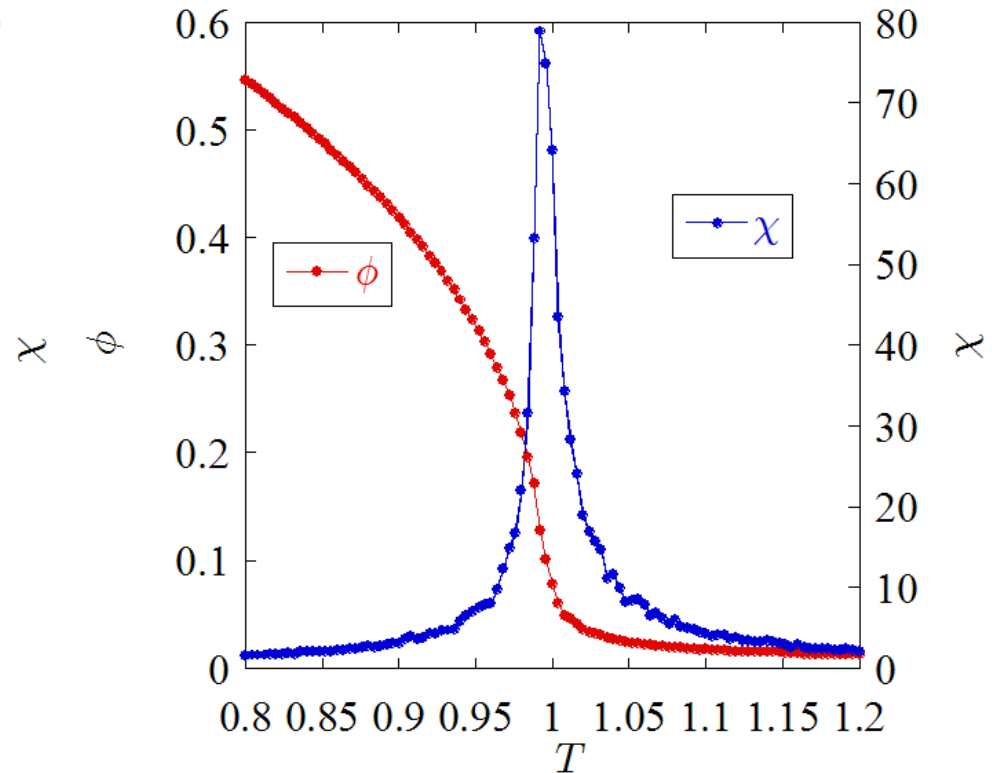
他の非可換な欠陥

$\mathbb{Z}_2 \times S^1$ 模型



離散対称性と連続対称性が独立なので別々に破れる

$O(2)$ 対称性が破れる模型



離散対称性と連続対称性が独立ではなく、同時に破れる

トポロジカル欠陥の今後

トポロジカル欠陥の今後

- 今回、欠陥が非可換となることで欠陥同士が絡まり、それによってphase orderingのダイナミクスが変化することを示した。
- 非可換な欠陥は固体や2軸性液晶等のdisclinationで存在する可能性があり、欠陥の非可換性による新しいダイナミクス、もしくは非可換性に着目することによって、見逃されてきたトポロジカル欠陥のダイナミクスを（固体の塑性変形などの）今まで研究されてきたダイナミクスの中から発見できるかもしれない。

トポロジカル欠陥の今後

- トポロジカル欠陥のトポロジカルな側面（非可換性や非冪零性など）は（特にホモトピー理論を用いて）古くから研究されてきた
- トポロジカル欠陥が関与するダイナミクスも数多く研究されてきている（phase ordering、KT転移、量子乱流など）

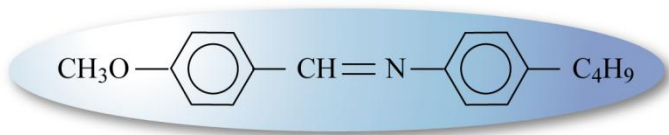
今後、両者を融合した新しいトポロジカル欠陥ダイナミクスを開拓し、研究分野の1つとして確立していきたい

まとめ

- トポロジカル欠陥は対称性の破れを伴う相転移によって出現し、トポロジカル欠陥の種類は対称性の破れ方に依存する。
- (3次元中における) 線欠陥には可換・非可換という概念が存在し、特に非可換な線欠陥が固体のdisclinationで存在している。
- 線欠陥の可換・非可換性は欠陥の衝突ダイナミクスに大きく影響を与え、特に欠陥が非可換になると欠陥はつなぎ換えもすり抜けも起こらず、衝突する2つの欠陥をつなぐ新しい欠陥が現れる。
- 非可換な欠陥は従来知られている(可換な欠陥による) Phase ordering processを変化させる。特に欠陥が累減衰せず、大きく抑えられる

自発的対称性の破れ（液晶の場合）

ネマティック液晶



棒状分子（円柱回転対称性）

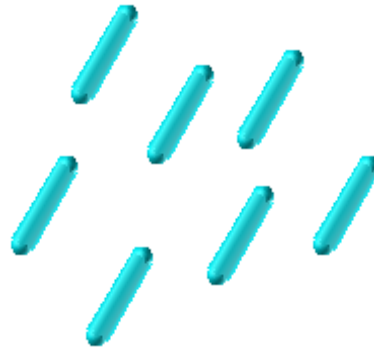
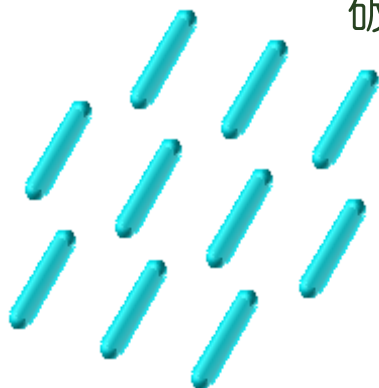
結晶

液晶

液体

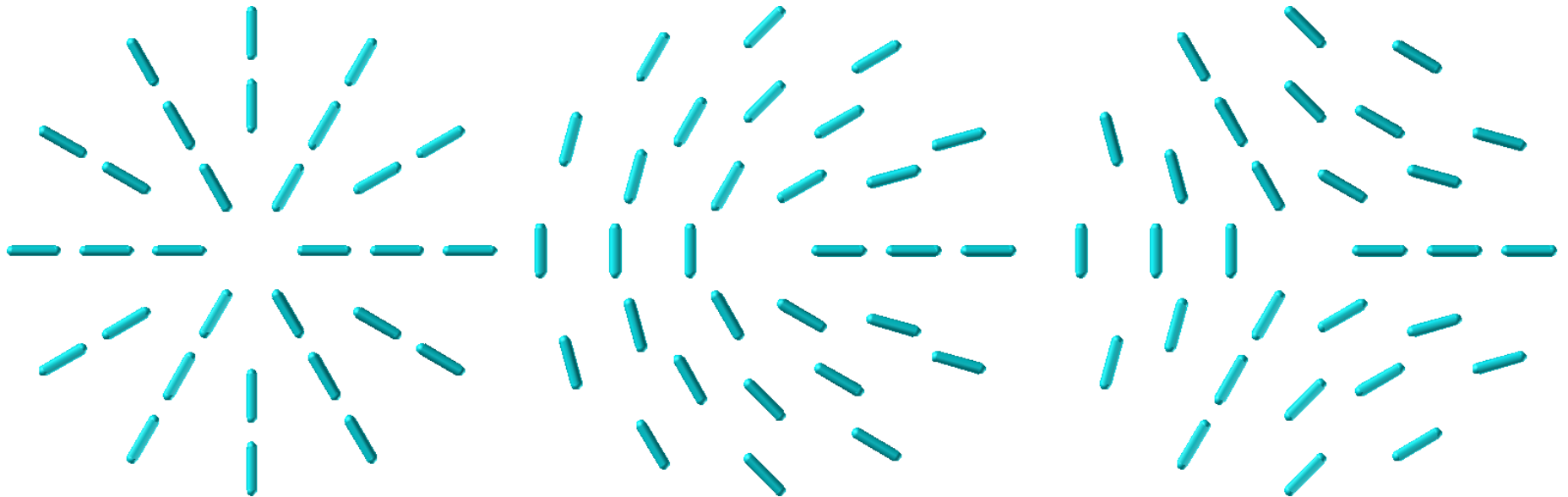
並進対称性の
破れ

回転対称性の
破れ



トポロジカル欠陥（液晶の場合）

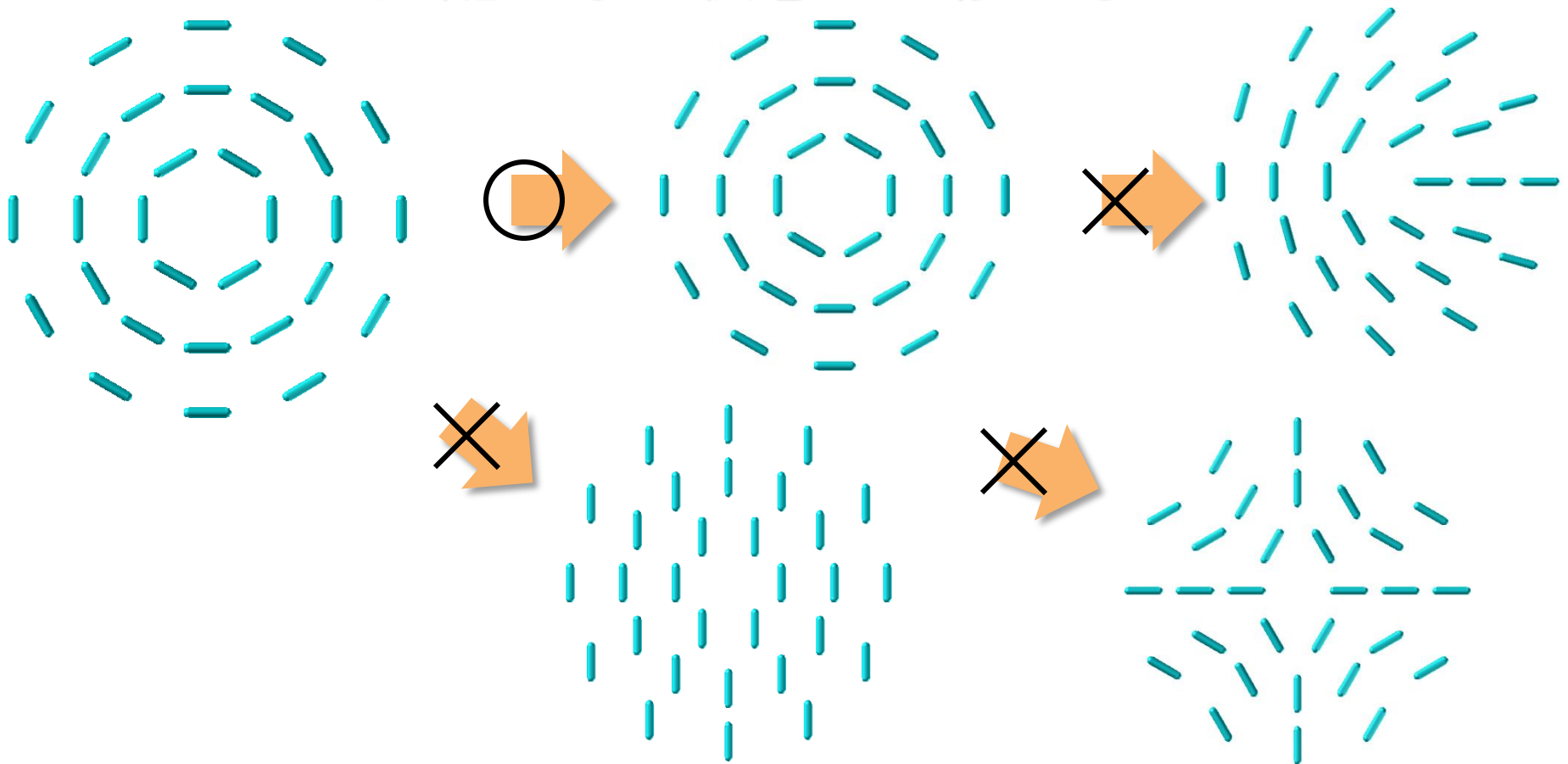
disclination (Schlieren texture)



回転対称性の破れに対応したトポロジカル欠陥
（これらも全て3次元空間中で線欠陥）

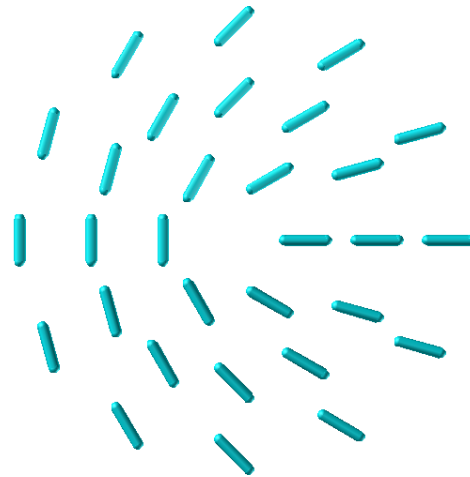
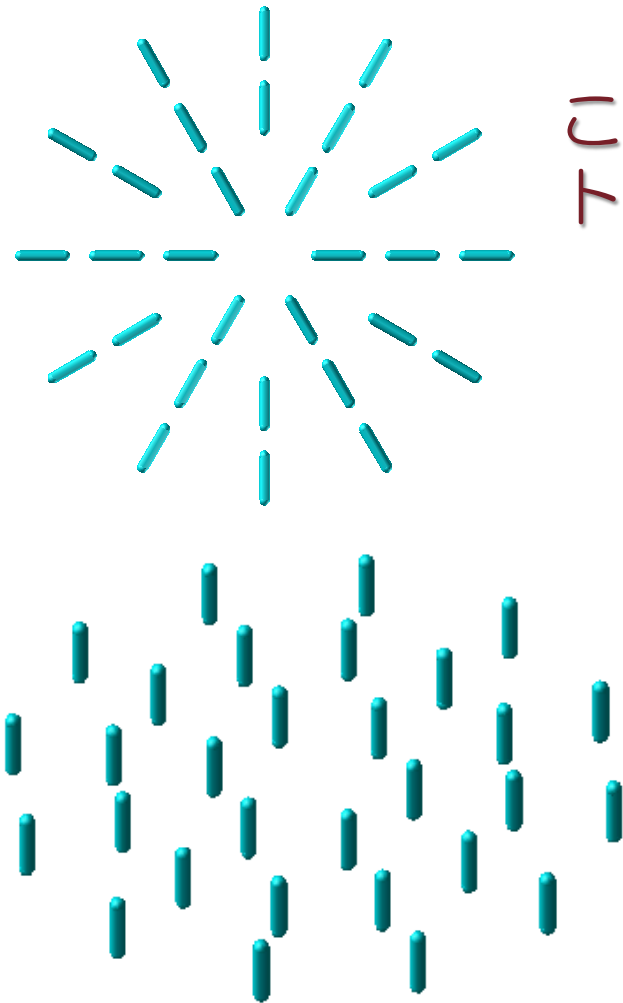
トポロジカル欠陥の安定性

トポロジカル欠陥のある状態は連続的な変形を通して欠陥のない状態へと移せない



トポロジカル欠陥

この欠陥は液晶分子が2次元的に動けばトポロジカル欠陥だが、3次元的に動けばトポロジカル欠陥でなくなる

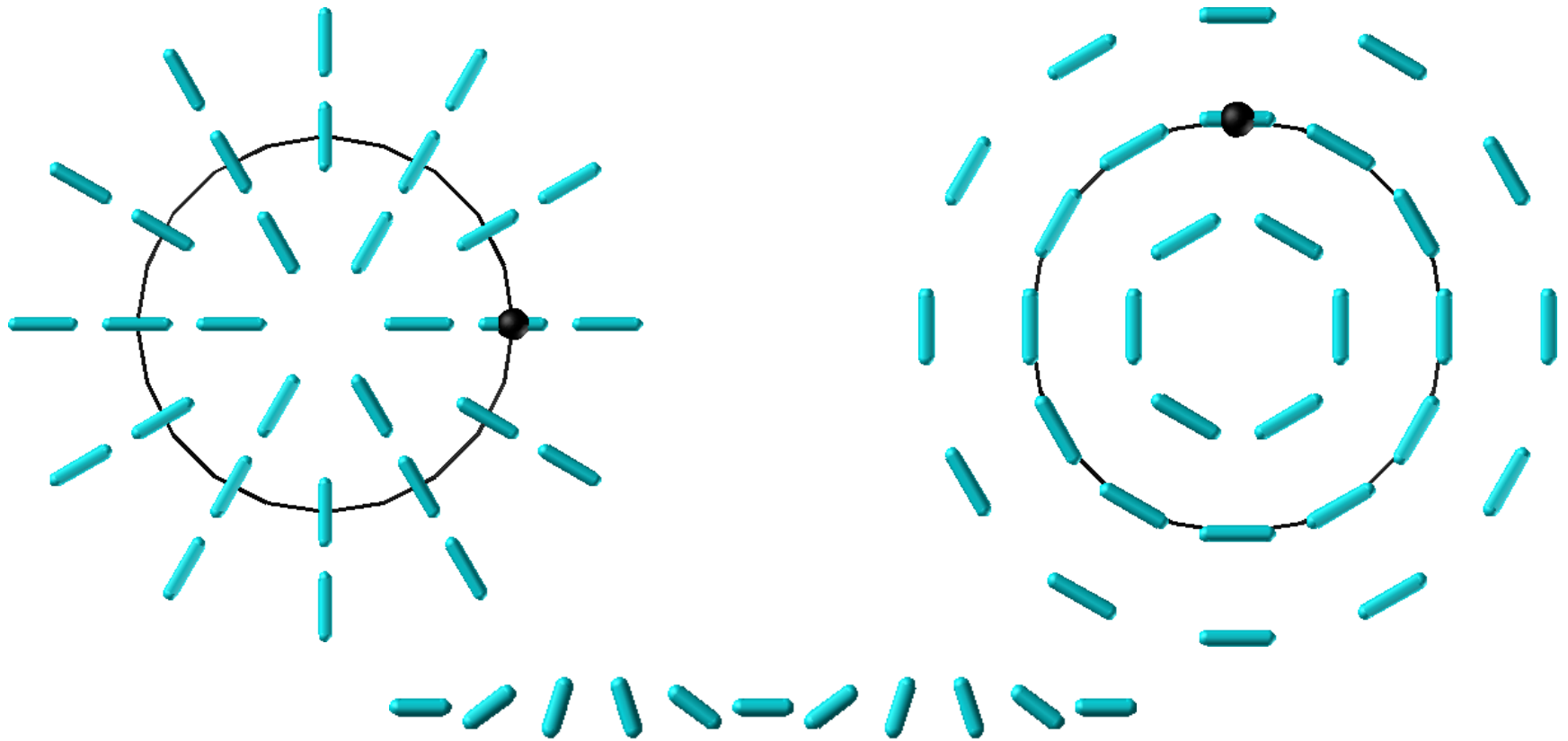


この欠陥はいつもトポロジカル欠陥

トポロジカル欠陥か否か、またその性質は破れる対称性によって大きく変わる

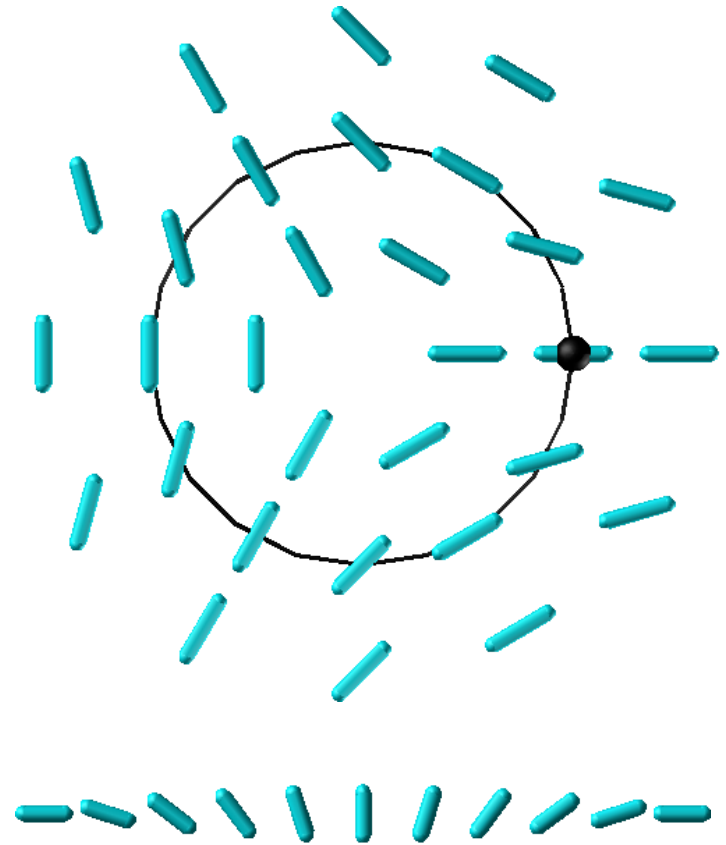
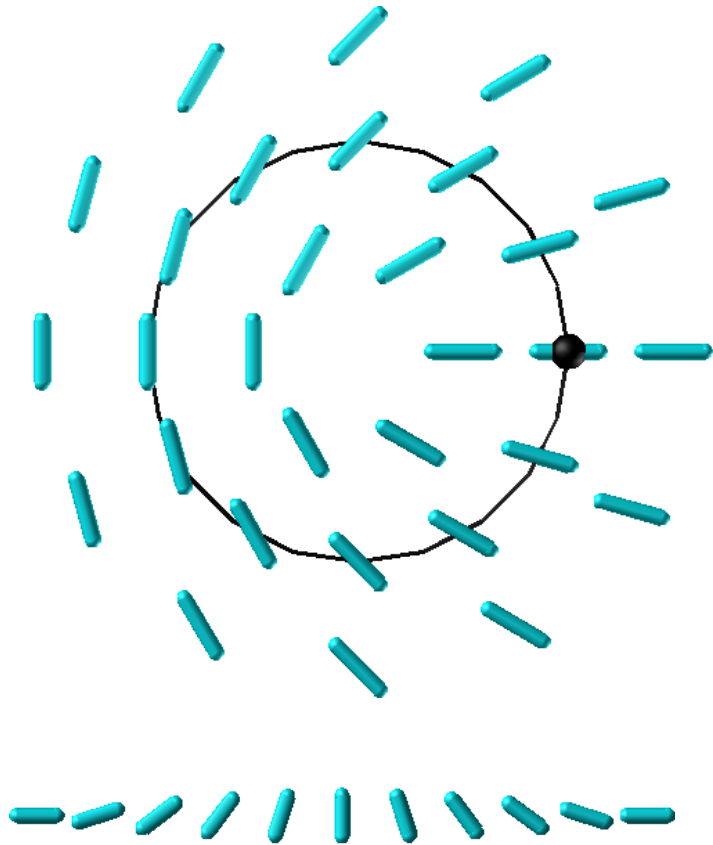
トポロジカル欠陥の分類

3次元空間における線欠陥は、欠陥を囲む閉じたループによって分類される



トポロジカル欠陥の分類

3次元空間における線欠陥は、欠陥を囲む閉じたループによって分類される



存在するトポロジカル欠陥

	G/H	π_0 : domain wall	π_1 : line defect	π_2 : point defect
Ising	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\times	\times
XY	S^1	\times	\mathbb{Z}	\times
Heisenberg	S^2	\times	\times	\mathbb{Z}
Spin-1/2	S^3	\times	\times	\times
Ising & XY	$S^1 \times \mathbb{Z}_2$	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	\times
Chiral XY	$O(2)$	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	\times
非可換渦	$O(3)/T_h$	\times	T^*	\times
非可換渦	$O(3)/O$	\mathbb{Z}_2	O^*	\times
	S^8	\times	\times	\times
非可換渦	$O(3)/D_{4f}$	\times	D_4^*	\times
可換渦だらけ	$[SO(2)]^4$	\times	$[\mathbb{Z}]^4$	\times

臨界指数

	α	β	γ	δ	ν	η
\mathbb{Z}_2	0.14 (0.11)	0.33 (0.33)	1.2 (1.2)	4.6 (4.8)	0.62 (0.63)	0.065 (0.037)
S^1	0.0 (-0.0080)	0.35 (0.35)	1.3 (1.3)	4.7 (5.0)	0.67 (0.67)	0.050 (0.029)
S^2	0.06 (0.12)	0.37 (0.37)	1.2 (1.2)	4.2 (4.2)	0.14 (0.16)	0.65 (0.63)
S^3	0.020	0.39	1.2	4.1	0.66	0.18
$S^1 \times \mathbb{Z}_2$						
$O(2)$						
$O(3)/T_h$	-0.04	0.37	1.3	4.5	0.68	0.088
$O(3)/O$	-0.44	0.42	1.6	4.8	0.81	0.033
S^8	-0.12	0.41	1.3	4.2	0.71	0.16
$O(3)/D_{4f}$	-0.10	0.35	1.4	5.0	0.70	0.0
$[SO(2)]^4$	-0.50	0.40	1.7	5.3	0.83	-0.04
mean field	0	1/2	1	3	1/2	0