

有限要素法による原子核物質の非一様構造の計算

東理大理工・物理 中里 健一郎

共同研究者: 親松和浩(愛知淑徳大人間情報)

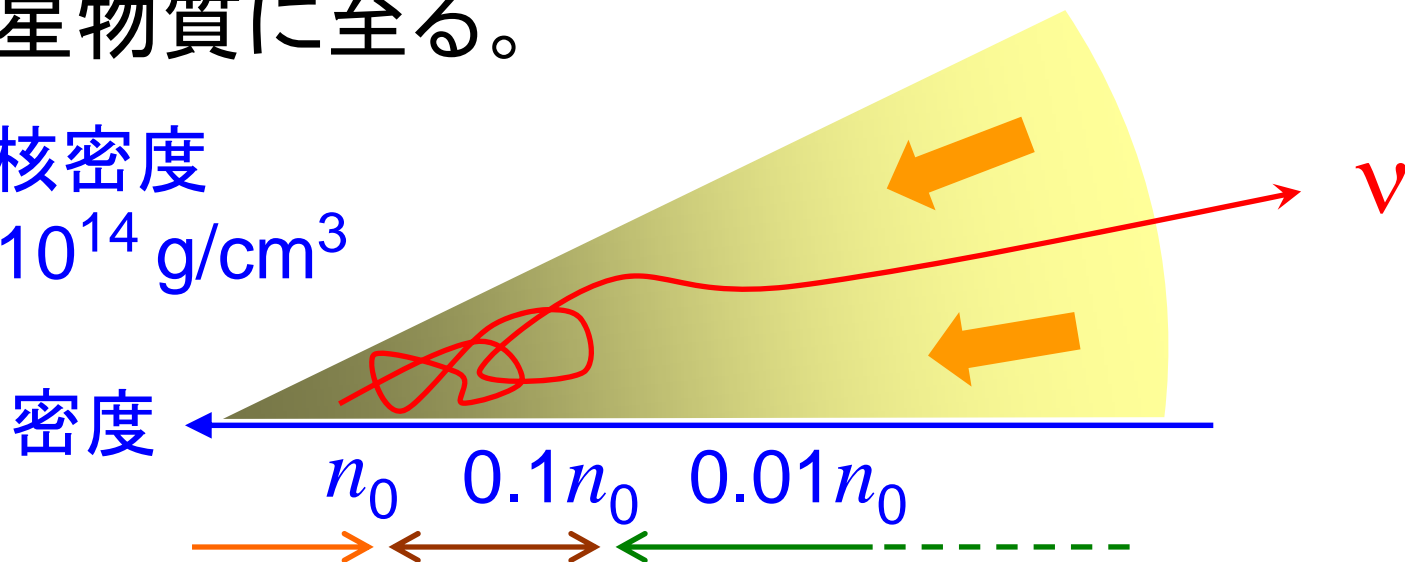
飯田 圭(高知大理)

2011年12月27日 研究会「超新星爆発と数値シミュレーション」@京大基研

高密度下における原子核の溶解

- 重力崩壊型超新星では、鉄の原子核から高密度中性子星物質に至る。

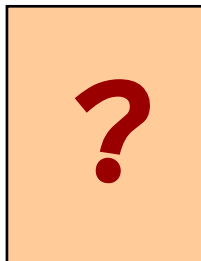
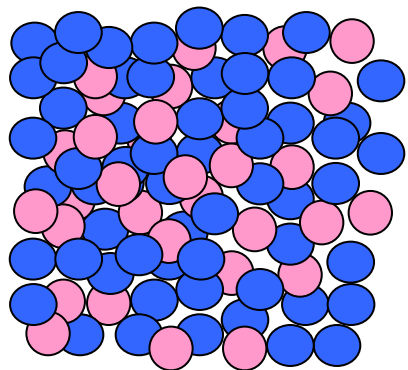
n_0 : 原子核密度
 $\sim 3 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$



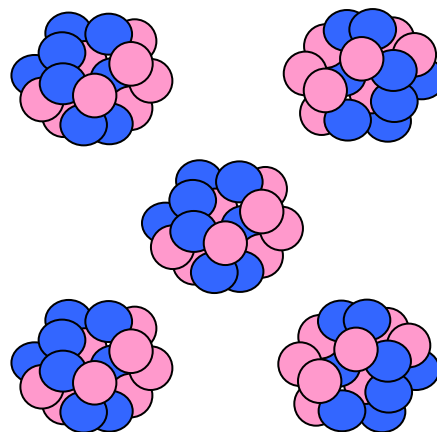
一様核物質

中性子

陽子



核子の塊
(原子核)

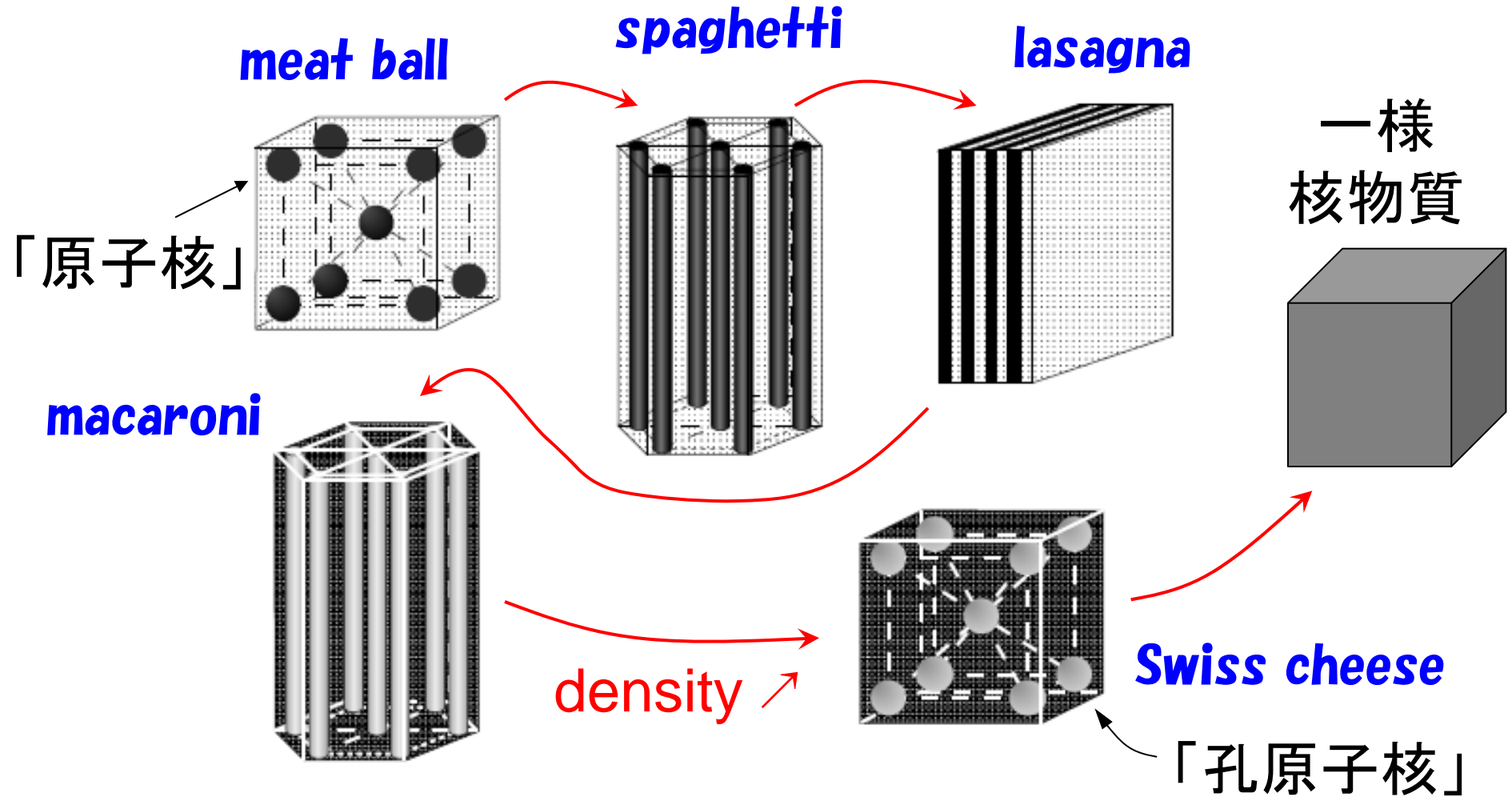


原子核パスタ



- 核密度以下で「原子核」が変形する。

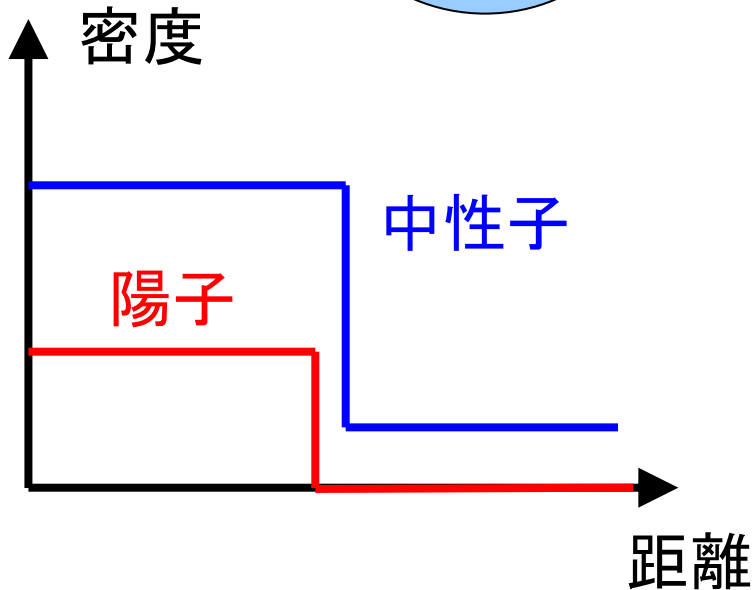
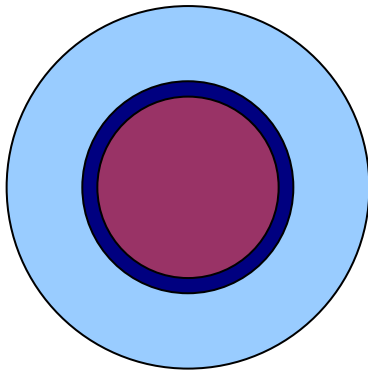
Figure by K. Oyamatsu (1993)



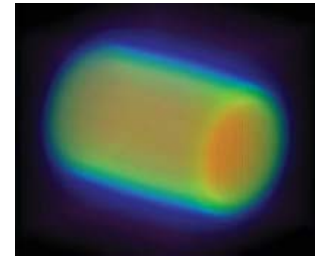
パスタ相 = 非一様な核子分布

- 原子核表面は拡がり (diffuseness) を持つ。

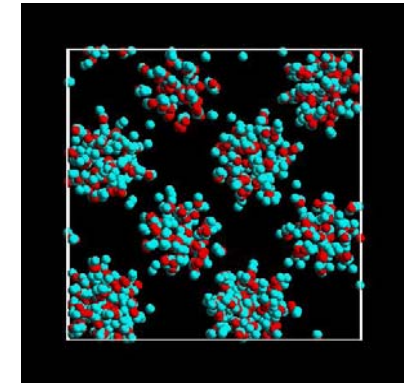
液滴模型



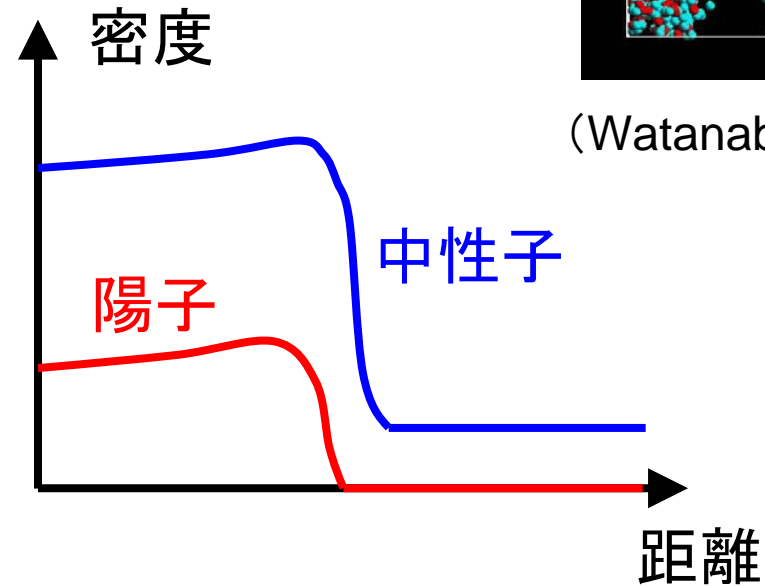
実際の核子分布



(Newton & Stone 2009)



(Watanabe+ 2009)



今回の研究

- Thomas-Fermi 計算

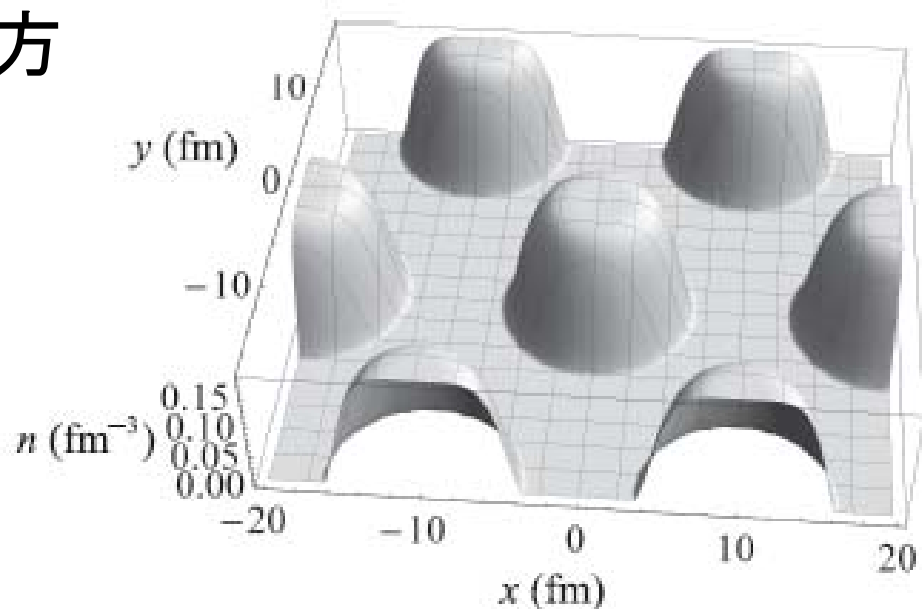
- 核子分布を局所的に一様とみなしてエネルギーを足し上げ、エネルギー密度を最小化する。

$$w = \frac{1}{V_{\text{cell}}} \int_{\text{cell}} \left\{ \underbrace{\varepsilon_0 (n_n(\mathbf{r}), n_p(\mathbf{r}))}_{\text{一様項}} + \underbrace{\varepsilon_g (n_n(\mathbf{r}), n_p(\mathbf{r}))}_{\text{非一様項}} + \underbrace{\frac{e}{2} (n_p(\mathbf{r}) - n_e) \phi(\mathbf{r})}_{\text{クーロン項}} \right\} d^3 r$$

→ 核子分布と大きさの両方について最小化する。

- 有限要素法

- 変分法の数値解法



過去の Thomas-Fermi 計算

- Ogasawara & Sato (1982,1983: 有限温度)
 - 1次元 Wigner-Seitz セル: 球 + 球孔
- Williams & Koonin (1985)
 - 立方体セルをグリッドに分割
 - 核子分布とセルサイズの両方について relaxation
 - 陽子分布 = 中性子分布 ($x_p = 0.5$)、電子は一様分布。
 - グリッドサイズは、約 1 fm 以下。
- Okamoto et al. (2011)
 - 基本的には Williams & Koonin と同じ。
 - 中性子、陽子、電子の分布をそれぞれに解く。
 - グリッドサイズは、約 0.8 fm だが数周期分含める。

今回の研究の着眼点

- Relaxation で収束させるのは大変(らしい)！
→ 変分問題の数値解法として一般的な、有限要素法に基づいた定式化を行う。
 - reasonable な結果が得られるか 2D でテストする。
- 過去の研究では、グリッド幅を 1 fm 程度にとっていたが、それで十分か検証する。
 - resolution を変えた場合の結果と比較。
- 1次元の Wigner-Seitz 近似がしばしば用いられるが、格子を組んでいることによる歪みはどの程度か、密度やポテンシャルの分布を調べる。

問題

- 次の w を最小化する関数 $n_n(\mathbf{r})$, $n_p(\mathbf{r})$, $\phi(\mathbf{r})$ と変数 a を求めなさい。

$$w = \frac{1}{a^3} \int_{\text{cell}} \left\{ \underline{\varepsilon_0 (n_n(\mathbf{r}), n_p(\mathbf{r}))} + \underline{\varepsilon_g (n_n(\mathbf{r}), n_p(\mathbf{r}))} + \underline{\frac{e}{2} (n_p(\mathbf{r}) - n_e) \phi(\mathbf{r})} \right\} d^3 r$$

ただし、 $\phi(\mathbf{r})$ は Poisson 方程式:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -4\pi e [n_p(\mathbf{r}) - n_e]$$

をみだし、バリオン数保存と荷電中性を課す。

$$\textcircled{n_B} = \frac{1}{a^3} \int_{\text{cell}} \{n_n(\mathbf{r}) + n_p(\mathbf{r})\} d^3 r$$

$$n_e = n_B \textcircled{x_p} = \frac{1}{a^3} \int_{\text{cell}} n_p(\mathbf{r}) d^3 r$$

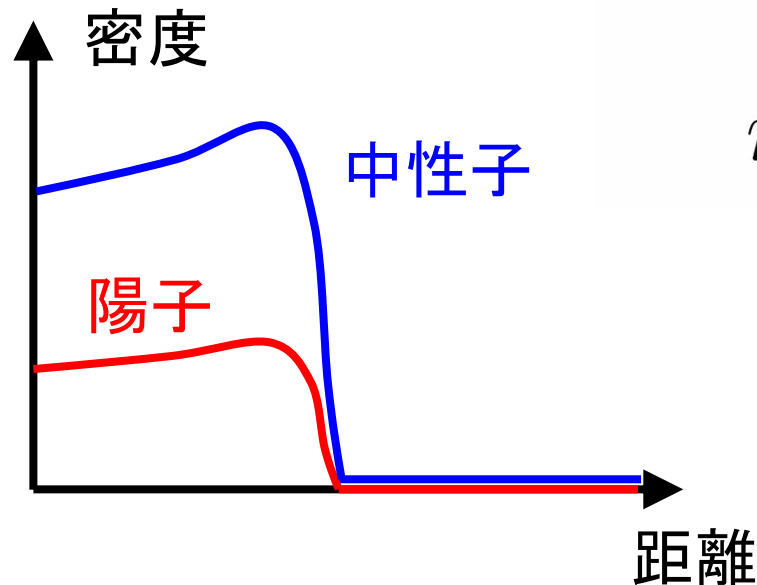
○ : fixed

核子分布の仮定

- 今回のテスト計算では簡単のため、中性子と陽子の分布は比例すると仮定する。(neutron skin, drip は考えない。)

$$n_n(\mathbf{r}) = (1 - x_p) n(\mathbf{r}),$$

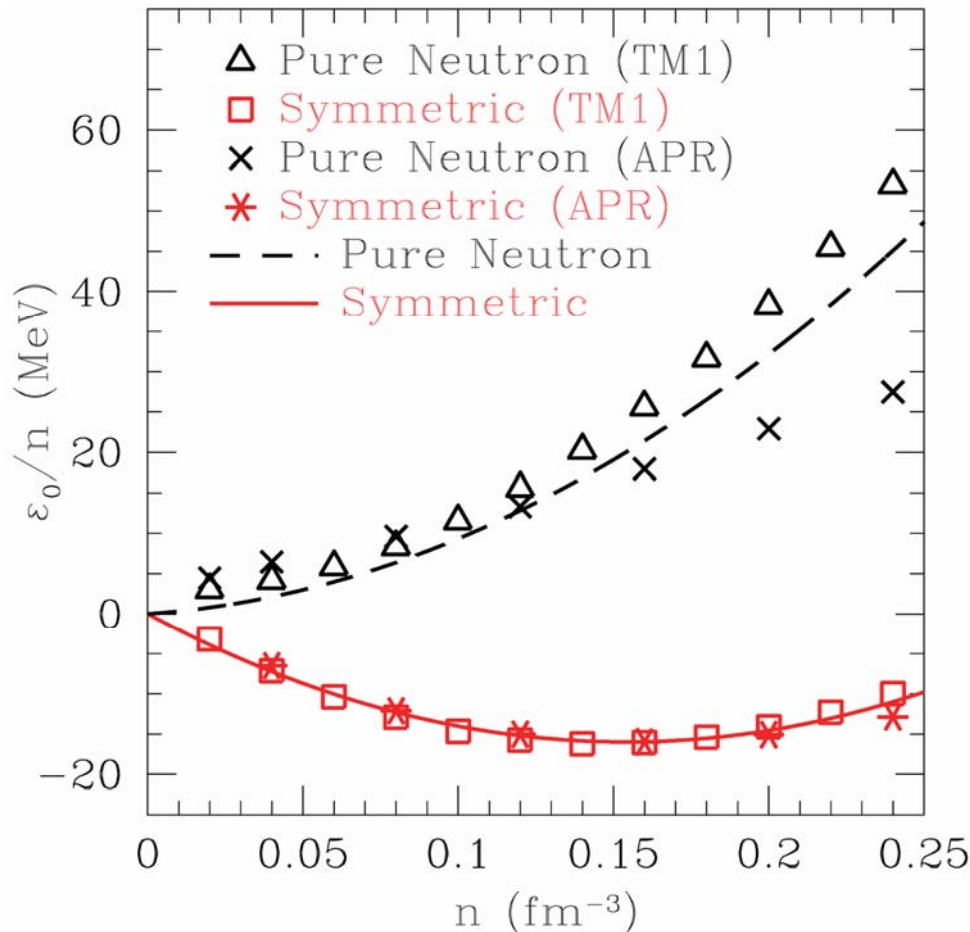
$$n_p(\mathbf{r}) = x_p n(\mathbf{r}),$$



一様核物質状態方程式

- Oyamatsu and Iida (2003)

$$\varepsilon_0(n(\mathbf{r})) = -\frac{w_0}{n_0^2}n(\mathbf{r})^3 + \frac{2w_0 + (1 - 2x_p)^2 S_0}{n_0}n(\mathbf{r})^2$$



$$n_0 = 0.154 \text{ fm}^{-3}$$

$$w_0 = -16 \text{ MeV}$$

$$S_0 = 36 \text{ MeV}$$

$$K_0 = 288 \text{ MeV}$$

$$L = 108 \text{ MeV}$$

– 原子核の半径と質量の実験値とコンシステントなパラメータセット

密度勾配項

- 核子分布の非一様性に由来するエネルギー
 - 液滴模型の表面エネルギーに対応

$$w_g = \frac{F_0}{a^3} \int_{\text{cell}} (\nabla n(\mathbf{r}))^2 d^3 r$$

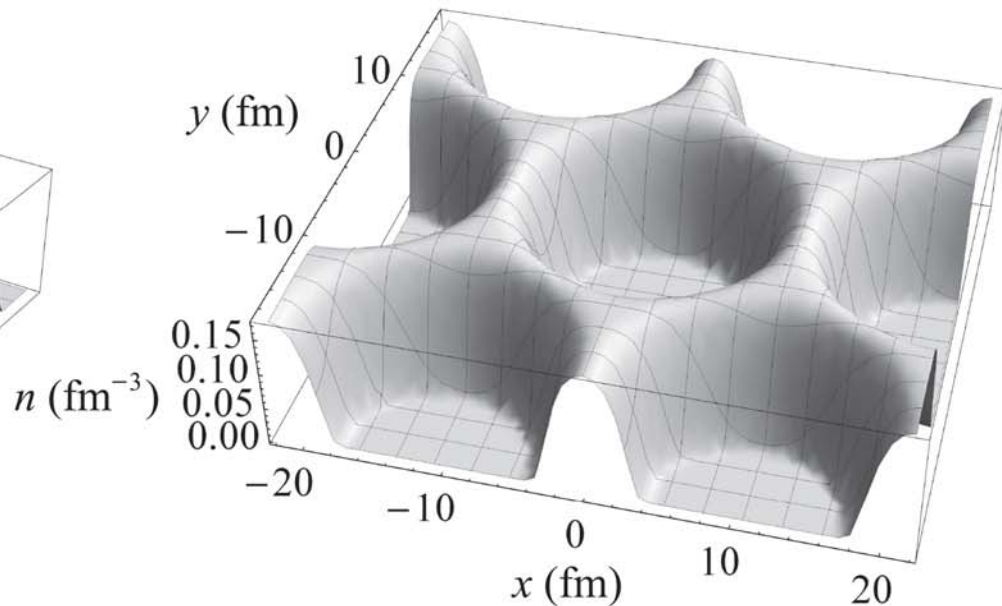
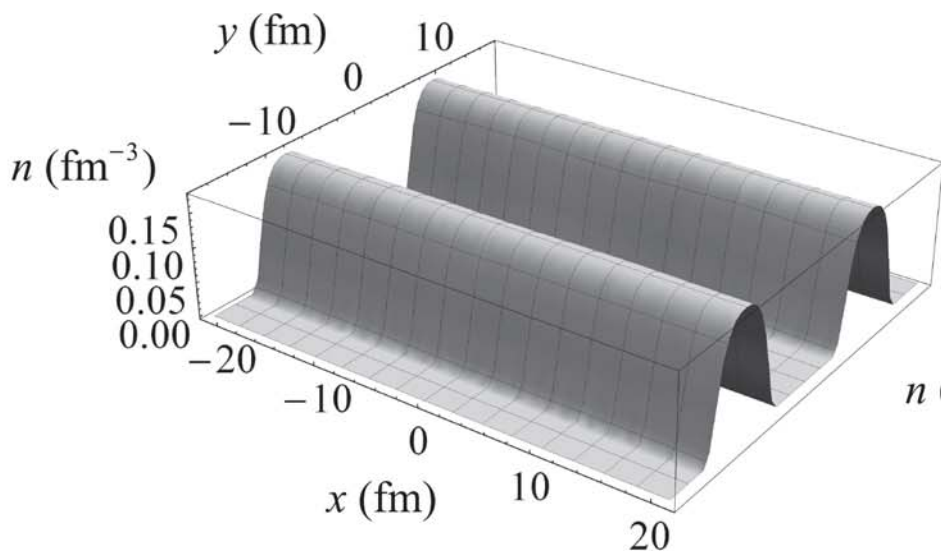
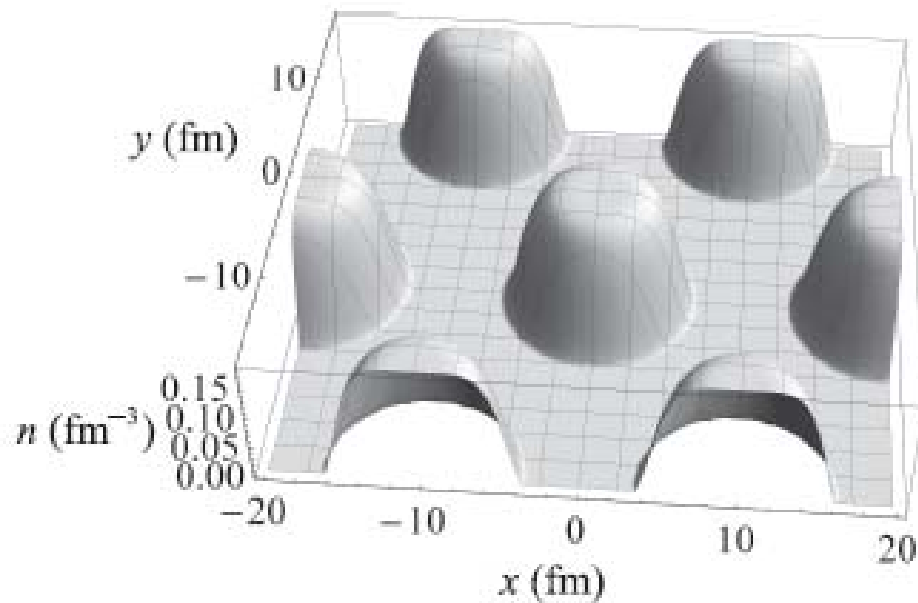
$$F_0 = 70 \text{ MeV fm}^5 \text{ (Oyamatsu and Iida 2003)}$$

- サイズ平衡条件
 - 全エネルギーが a について極値をとるとき、勾配項とクーロン項は以下のようにバランスする。

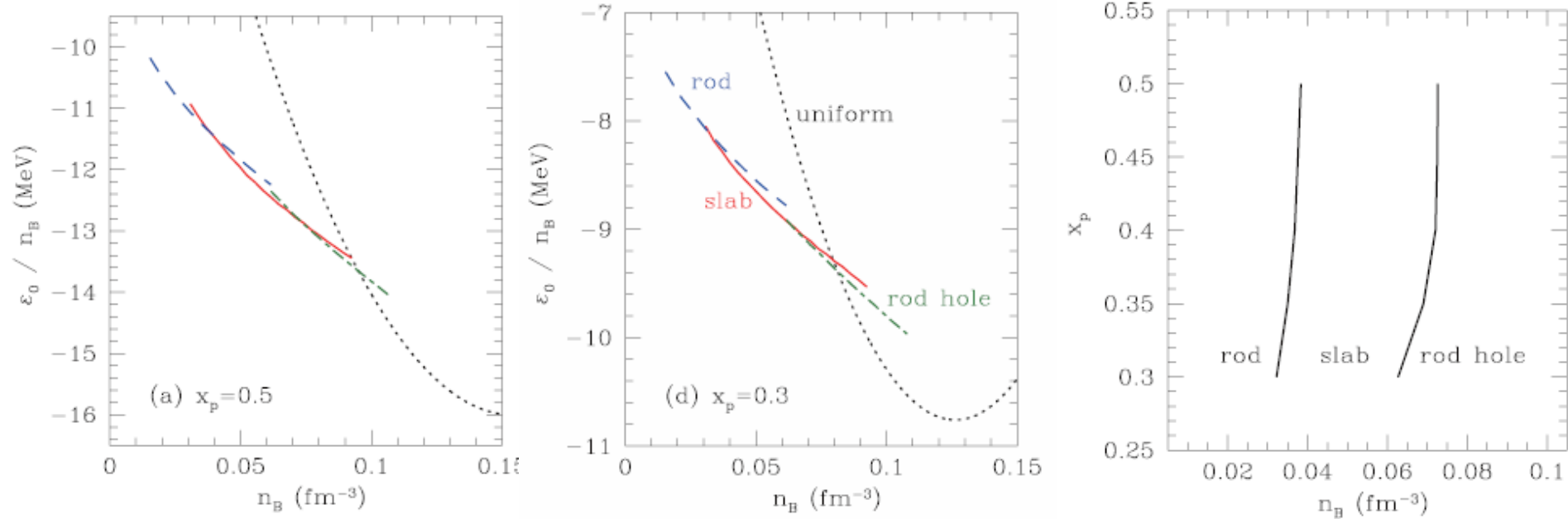
$$W_g = W_C$$

結果の概観

- 2次元で議論可能な構造(円柱、板、円柱孔)がそれぞれ計算できた。

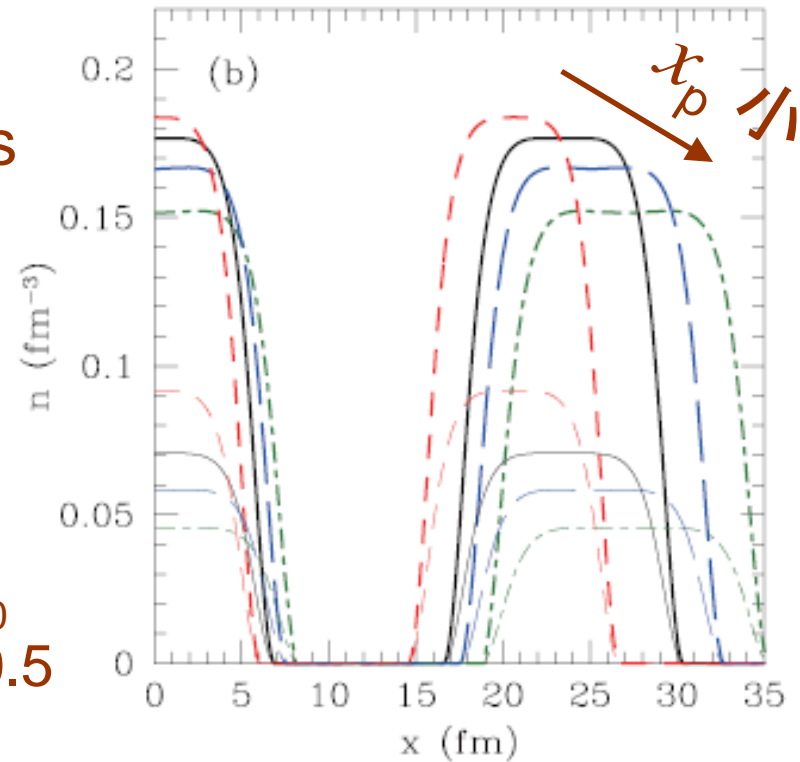
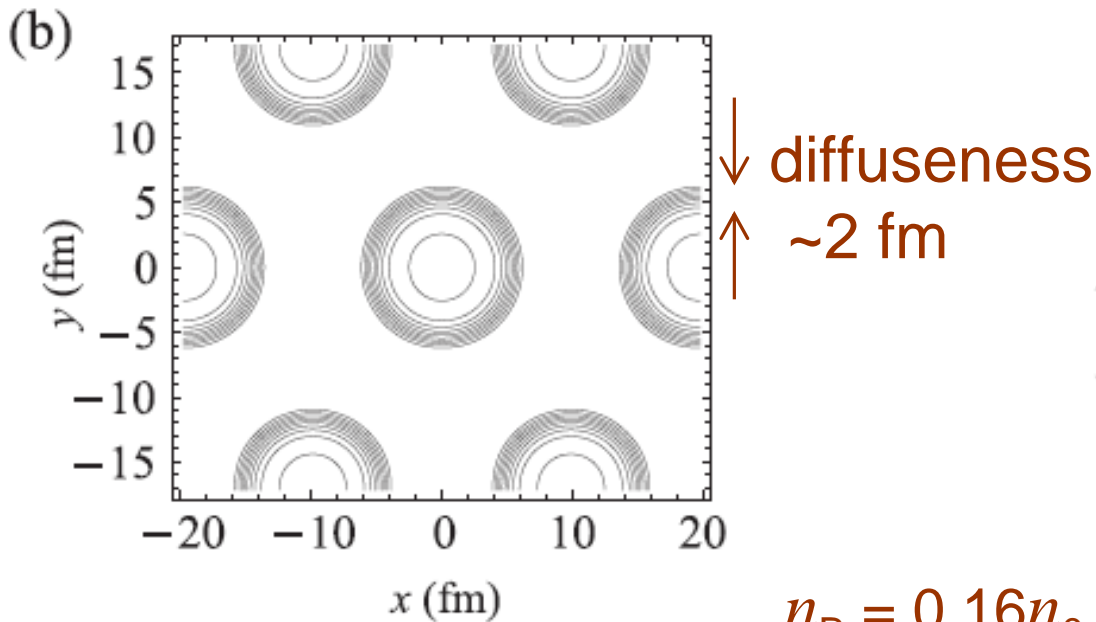


パスタ相図



- 円柱 → 板 → 円柱孔の転移が確認できた。
- 転移密度は1次元 Wigner-Seitz 近似による過去の研究の結果 (Oyamatsu 1993, Maruyama et al. 2005) とコンシステント。

密度分布の特徴

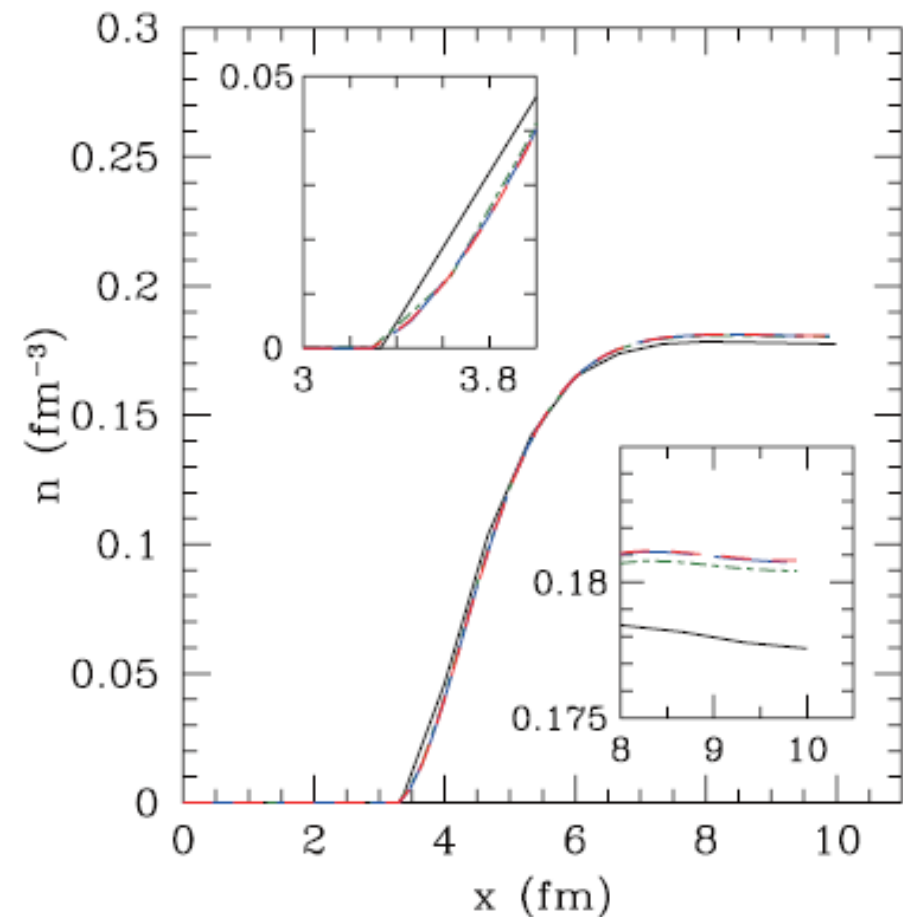


↑ $n_B = 0.3n_0, x_p =$

$n_B = 0.16n_0$
 $0.3 < x_p < 0.5$

- diffuseness は実験値に近い。
- 原子核中心に密度の凹み。(Ogasawara & Sato 1982)
- 中心密度は飽和密度より高くなる。
 - 中性子と陽子の分布に比例関係を仮定した影響？

Resolution dependence



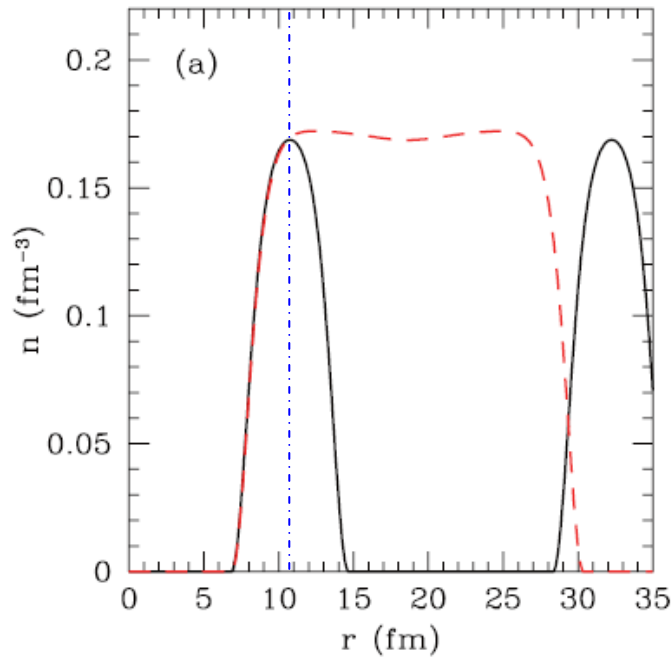
← $n_B = 0.3n_0$, $x_p = 0.5$, rod

— $\Delta r \sim 0.8\text{fm}$
- · - $\Delta r \sim 0.4\text{fm}$
- - - $\Delta r \sim 0.2\text{fm}$
- - - $\Delta r \sim 0.1\text{fm}$

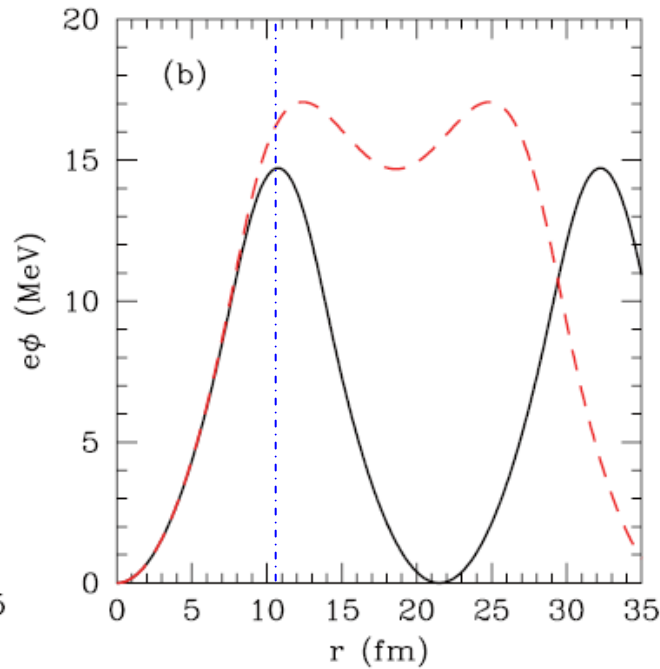
- グリッド幅 $\sim 1\text{ fm}$ で、1% 程度の収束性
- グリッド幅 $\sim 0.1\text{ fm}$ で、0.1% 程度の収束性
- 少なくとも diffuseness を数十グリッドでカバーする必要がある。

1次元分布からのズレ

密度分布



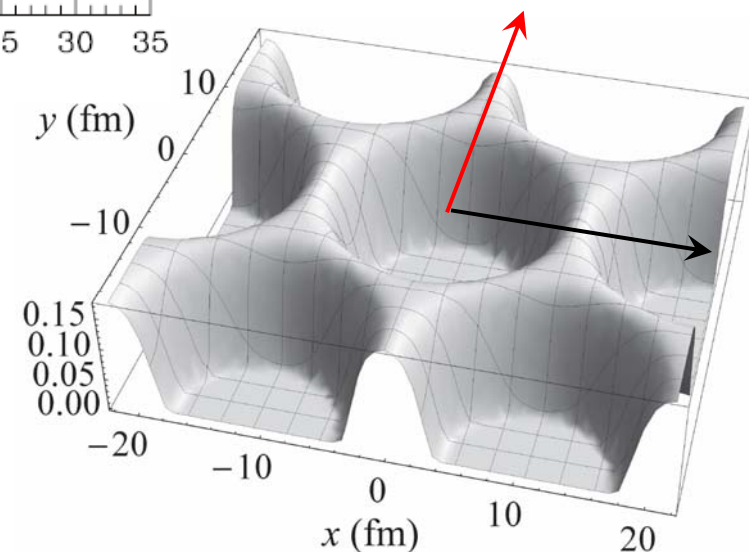
クーロンポテンシャル



- 密度分布はほぼ、回転対称
- クーロンポテンシャルはズれる。

$$n_B = 0.5n_0, x_p = 0.5, \text{rod-hole} \quad \uparrow \rightarrow$$

- 密度分布は動径座標の関数でよいが、クーロンエネルギーはきちんと扱う必要あり。



まとめ

- 原子核物質の非一様構造の Thomas-Fermi 計算を有限要素法によって定式化し、2次元の場合についてテスト計算を行った。
- 原子核の密度分布、パスタ相図といった基本的な性質は再現できることがわかった。
- 精度のよい計算のため、少なくとも diffuseness を数十グリッドでカバーする必要があることがわかった。
- 密度分布は動径座標の関数でよいが、クーロンエネルギーはきちんと扱う必要があることがわかった。