

講義2

強い場自体のダイナミクス

強い場はどのようにして崩壊するのか？

- わかっているようで皆わかってないSchwinger機構
- 存在するのになかなか認知されないNielsen-Olesen不安定性

Schwinger mechanism

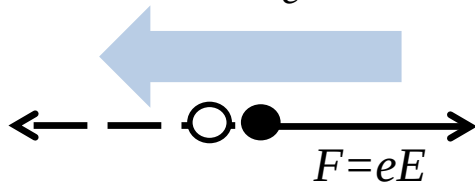
Sauter 1931, Euler-Heisenberg 1936
Schwinger 1951

電場が非常に強いとき、
電子・陽電子対生成が起こる

電場が、virtualな電子、陽電子に
対して行った仕事が、対生成の
エネルギーを超えたとき実現

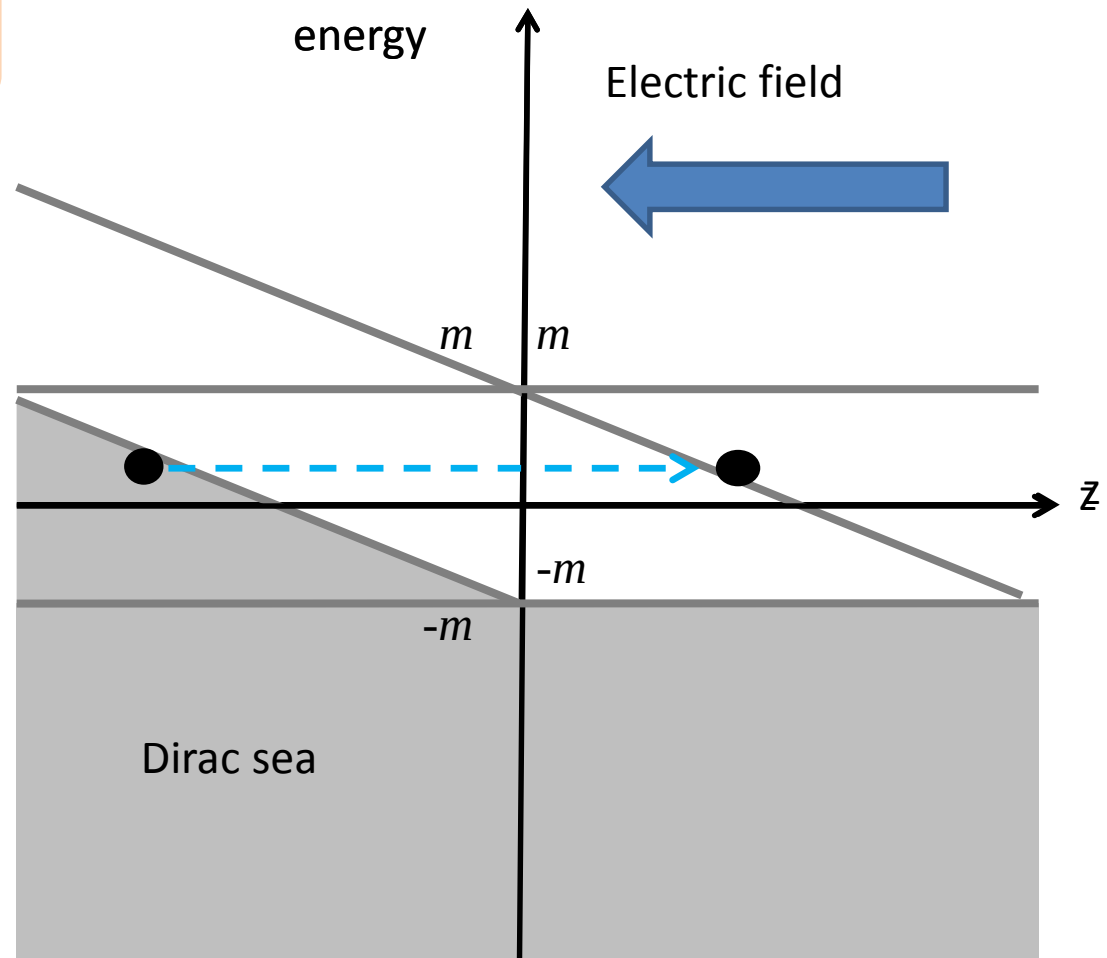
$$2eE \cdot \lambda \geq 2m_e$$

$$\lambda = 1/m_e$$



臨界電場

$$E_{crit} = \frac{m_e^2}{e}$$



トンネル効果としてのSchwinger機構

z方向の一定の電場 $A^0 = -Ez$

電子の分散 $p^2 = (\omega + eEz)^2 - |p^i|^2 = m_e^2$

$$p_z^2 \geq 0 \rightarrow -\frac{\omega + m_T}{eE} \leq z \leq -\frac{\omega - m_T}{eE}$$

$m_T = \sqrt{m_e^2 + |p_T|^2}$ この領域に電子は入れない
→ ポテンシャル障壁に相当

トンネル確率 (WKB法)

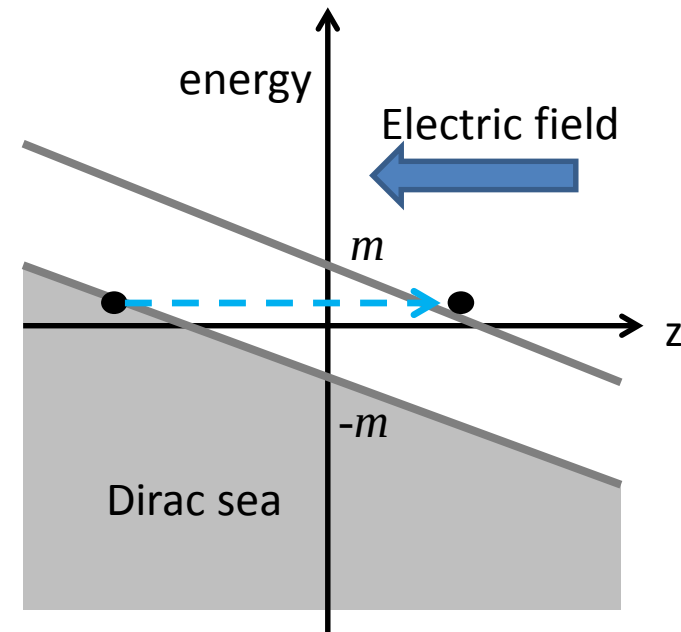
$$P(p_T) = \exp\left[-2 \int_{-\frac{\omega+m_T}{eE}}^{-\frac{\omega-m_T}{eE}} |p_z| dz\right] = \exp\left[-\frac{\pi m_T^2}{eE}\right]$$

Vacuum persistence probability (粒子対生成の起こらない確率)

$$|\langle 0, in | 0, out \rangle|^2 = \prod_{spin} \prod_{t,z} \prod_{p_T} (1 - P(p_T)) \equiv \exp\left[-\int d^4x w\right]$$

$$w = \frac{(eE)^2}{4\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left[-\frac{n\pi m^2}{eE}\right]$$

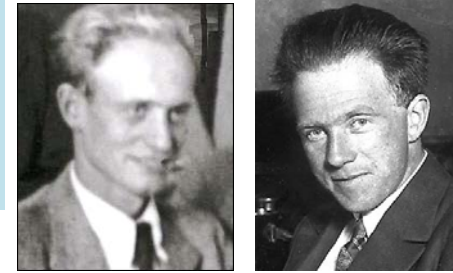
単位時間・単位体積当たり
少なくとも一つの対が生成
する確率



- 非摂動的結果
- $E < E_{\text{crit}}$ では強力的に抑制
 $\exp[-\pi E_{\text{crit}} / E]$

場の不安定性としてのSchwinger機構

- 場が強いとき、量子揺らぎを通じて有効相互作用が生ずる
- 電子の1ループで、外場の効果を無限次まで取りこむ
→ 低エネルギーの有効理論 Euler-Heisenberg action
(Euler-HeisenbergはDirac seaのエネルギーの変化を計算)



Z. Phys. 98, 714 (1936)
arXiv:physics/0605038

電子はbilinearなので、積分できる
log det を外場中で評価するという問題に帰着

$$\exp \left\{ i \int d^4 x \mathcal{L}_{\text{eff}}(A_\mu) \right\} = \int d\psi d\bar{\psi} \exp \left\{ i \int d^4 x \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - m_e) \psi \right\}$$

これに加えて電磁場の運動項もある

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(A_\mu) = -i \ln \det(D), \quad D = i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m_e.$$

$$= \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots$$

外場を無限次まで足し上げることに相当

場の不安定性としてのSchwinger機構

計算の指針

1. プロパータイム法の導入

外場の無い場合の効果を引いておく

$$\ln \det(\bar{D}) = \ln \det(D) - \ln \det(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_e) = \text{Tr} \ln \left((i \not{\partial} - e \not{A} - m_e)(i \not{\partial} - m_e)^{-1} \right)$$

charge conjugationをしたものは同じで、それと合わせて評価 $C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T$

$$2 \ln \det(\bar{D}) = \text{Tr} \ln \left(((i \not{\partial} - e \not{A})^2 - m_e^2)((i \not{\partial})^2 - m_e^2)^{-1} \right)$$

プロパータイムを導入

$$\ln \frac{\alpha}{\beta} = \int_0^\infty \frac{ds}{s} (e^{is(\beta+i0)} - e^{is(\alpha+i0)})$$

$$2 \ln \det(\bar{D}) = - \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-is(m_e^2-i0)} \int d^4x \text{tr} \left(\underline{\langle x | e^{is(i\not{\partial} - e\not{A})^2} | x \rangle} - \langle x | e^{is(i\not{\partial})^2} | x \rangle \right)$$

この量をどう評価するか

場の不安定性としてのSchwinger機構

計算の指針

2. Diracの構造を切り崩し、プロパータイム法を活用して量子力学とのアナロジー

$$(i \not{\partial} - e \not{A})^2 = (i\partial_\mu - eA_\mu)^2 - \frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

時間、空間的に一定の電磁場

$$E_3 = F^{30} = -F^{03} = a, \quad B^3 = F^{12} = -F^{21} = b.$$

の場合には簡単になる

$$-\frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = e\sigma_3 \otimes \begin{pmatrix} b & -ia \\ -ia & b \end{pmatrix} \Rightarrow \text{tr} \exp\left(-\frac{ise}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right) = 4 \cos(ebs) \cosh(eas)$$

Diracの構造を持たない表式に

$$\begin{aligned} \ln \det(\bar{D}) &= -2 \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-is(m_e^2 - i0)} \int d^4x \left(\cos(ebs) \cosh(eas) \langle x | e^{is(i\partial_\mu - eA_\mu)^2} | x \rangle \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \langle x | e^{is(i\partial_\mu)^2} | x \rangle \right). \end{aligned}$$

残りは $H \doteq (p_\mu - eA_\mu)^2$ を「ハミルトニアン」として量子力学とのアナロジーで評価

場の不安定性としてのSchwinger機構

結果 Euler-Heisenberg action

($a = -E$, $b = B$)

$$-i \ln \det(D) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-is(m_e^2 - i0)} \left(e^{2ab} \frac{\cosh(eas) \cos(ebs)}{\sinh(eas) \sin(ebs)} - \frac{1}{s^2} \right)$$

- 電場、磁場について非線形 $2n$ 点相互作用がinduceされた (さらに元々の運動項あり)
- 弱い場に対して非線形な補正項がつく

$$= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{\alpha^2}{360m^4} \left[4(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})^2 + 7(F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu})^2 \right] + \dots$$

- 電場のみの場合 ($b \rightarrow 0$)

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-ism^2} \left(ea \coth(eas) - \frac{1}{s} \right)$$

s積分は実軸にあるpoleを回避してとる。
そこから虚部が発生する

$$w = 2 \operatorname{Im}(L_{\text{eff}}) = \frac{(eE)^2}{4\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-\frac{n\pi m^2}{eE}\right)$$

トンネル効果として計算
した対生成確率と一致！

- 磁場のみの場合は不安定性なし 非線形効果のみ

QCDにおけるSchwinger機構

Batalin, Matinyan, Savvidi 1977

Gyulassy, Iwazaki 1985

- **カラー電場**中での粒子対生成
- クォーク対、グルーオン対の両方

Covariantly constant gauge field $D_\mu F^{\mu\nu}=0$ は、ゲージ変換でAbelianな背景場と扱える

クォーク対生成は電子対生成と本質的に同じ（自由度と質量が違うだけ）

グルーオン対生成

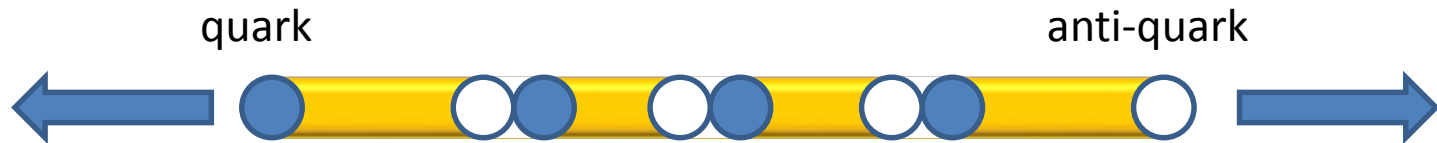
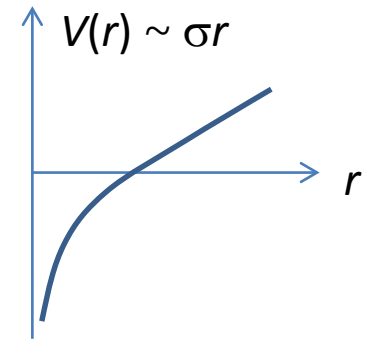
ボゾン、ゼロ質量

$$w = 2 \operatorname{Im}(L_{\text{eff}}) = \frac{(gE)^2}{4\pi^3} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}}_{\frac{\pi^2}{12}} = \frac{(gE)^2}{48\pi}$$

非常に強い不安定性

Hadronization via Schwinger mechanism

- ハドロン化の非摂動的モデル (Lund model)
- 閉じ込め力→quark, antiquarkの間に線形なポテンシャル
カラーフラックスチューブ(カラー電束)の形成
- フラックスチューブが長くなるとquark, antiquark対生成
を起こす方がエネルギー的に安定



quark, anti-quark生成確率に Schwinger公式を用いる
→ 高エネルギー反応、重イオン衝突で、現象論的に大いに成功
多くのMonte-Carlo計算(PYTHIA, HIJING)に採用

しかし、

非摂動的過程に、弱結合で求めたSchwinger公式を使う正当性？
Schwinger公式の結合定数に関する高次効果、
強結合領域での粒子対生成の理解が必要か？

カラー磁場：Nielsen-Olesen不安定性

Homogeneous (color) magnetic field is unstable due to *non-minimal coupling* in non-Abelian gauge theory

ex) Color SU(2) pure Yang-Mills A_μ^a ($a=1,2,3$)

{ **Background field** $B^z_3 \neq 0$
 Constant magnetic field in 3rd color direction and in z direction.
Fluctuations

Other color components of the gauge field: **charged matter field**

$$\left\{ \begin{array}{l} A_\mu \equiv A_\mu^3, \\ \text{Abelian part} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \phi_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 + iA_\mu^2), \quad \phi_\mu^* \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 - iA_\mu^2) \\ \text{non-Abelian part} \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} - \frac{1}{2}|D_\mu\phi_\nu - D_\nu\phi_\mu|^2 + \underline{\frac{ig}{2}f^{\mu\nu}(\phi_\mu^*\phi_\nu - \phi_\nu^*\phi_\mu)} + \frac{g^2}{4}(\phi_\mu^*\phi_\nu - \phi_\nu^*\phi_\mu)^2$$

Non-minimal magnetic coupling

→ induces mixing of $\phi_i \rightarrow$ mass term for ϕ^- with a wrong sign

$$\phi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^x \pm i\phi^y)$$

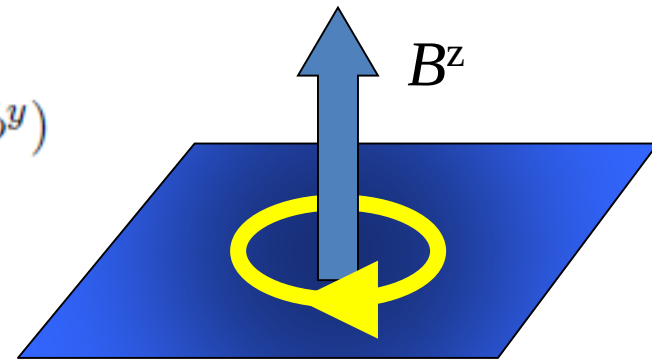
カラー磁場：Nielsen-Olesen不安定性

Linearized with respect to fluctuations

$$(\partial_t^2 - D^2 \pm 2gB) \phi^\pm = 0, \quad \phi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^x \pm i\phi^y)$$

eigenfrequency

$$\omega^2 = p_z^2 + gB(2n + |m| - m + 1) \pm 2gB.$$

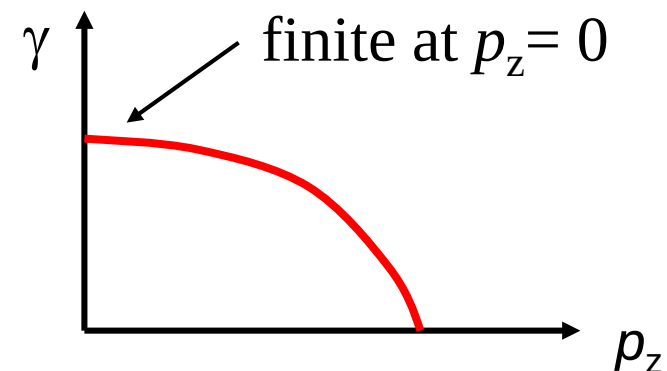


$\uparrow$ Free motion in z direction $\nwarrow$ Landau levels $(2N + 1)$ Non-minimal coupling

→ **Lowest Landau level ($N = 0$) of ϕ^- is unstable for small p_z**

$$\tilde{\phi}_{\text{unstable}}^-(t, x_\perp, p_z) \propto \exp \left\{ \gamma(p_z)t - \frac{1}{4}gBx_\perp^2 \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Growth rate : } \gamma(p_z) = \sqrt{gB - p_z^2}. \\ \text{Transverse size of unstable mode } l \sim 1/\sqrt{gB} \end{array} \right.$$



!! N-O instability is realized if homogeneity region is larger than Larmor radius !!

Schwinger enhanced by Nielsen-Olesen

カラー電場とカラー磁場が共存する場合 Tanji, KI 2011

Nielsen-Olesen 不安定性で増大したlowest Landau modeが爆発的に生成される。

$$w = \frac{N}{2} \frac{g^2 E B}{(2\pi)^2} \sum_{\sigma=\pm} \sum_{n=0}^{\infty} \ln \left[1 + e^{-\pi(2n+1-2\sigma) \frac{B}{E}} \right]$$

Lowest Landau level $n=0$, $\sigma=-1$ のとき、 $\exp \{+(B/E)\pi\}$

不安定性がある時のSchwinger機構の例になっている
(不安定性がある有限の時間内だけに存在する場合は議論できる
パラメトリック共鳴なども)

Abelian and Non-Abelian instabilities

QED

電場

電子・陽電子対生成



磁場

非線形効果

不安定性(粒子生成)なし

電場と磁場の共存

電子・陽電子対生成

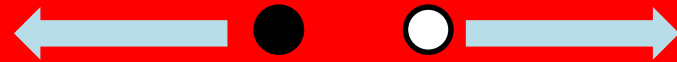
最低Landau level以外は「重く」
なるので生成しにくくなる



QCD

カラー電場 Tanji, Iwazaki

クォーク・反クォーク対生成 「物質生成」!
グルオン対生成



カラー磁場 Fujii-Itakura, Iwazaki 2008

グルオン最低ランダウレベルの増大

Nielsen-Olesen不安定性



カラー電場と磁場の共存 Tanji-Itakura2012

Nielsen-Olesen不安定性で増大した

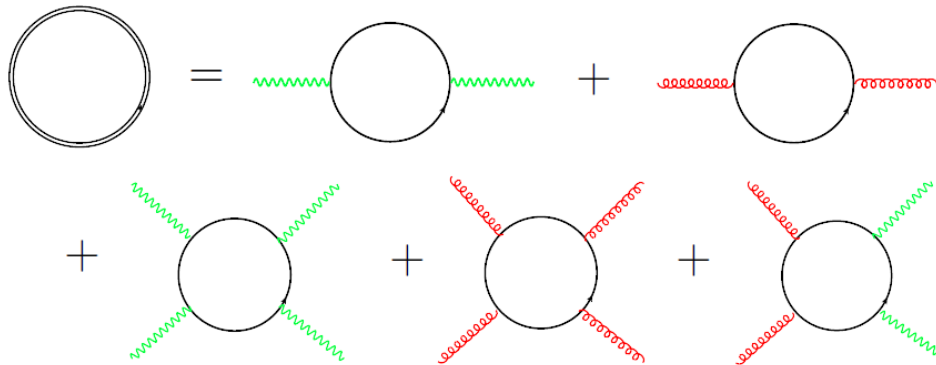
グルオン対の生成



QCD in strong B

Ozaki 2014

YM場とEM場の両方が存在するときのEuler-Heisenberg actionが計算可能



Quark loopの寄与を評価

カラー背景場 (Abelianized)
と電磁場とが混ざる

The Euler-Heisenberg Lagrangian for QCD+QED

+ ...

$$\mathcal{L}_q^1 = \frac{i^\epsilon}{8\pi^2} \sum_{a=1}^{N_c} \sum_{i=1}^{N_f} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{3-\epsilon}} e^{-im_{q_i}^2 s} (a_{a,i} s) (b_{a,i} s) \cot(a_{a,i} s) \coth(b_{a,i} s)$$

where

$$a_{a,i}^2 - b_{a,i}^2 = [(gw_a)^2 (\vec{H}_c^2 - \vec{E}_c^2) + (eQ_{q_i})^2 (\vec{B}^2 - \vec{E}^2) + 2gw_a eQ_{q_i} (\vec{H}_c \cdot \vec{B} - \vec{E}_c \cdot \vec{E})]$$

$$a_{a,i} b_{a,i} = -[(gw_a)^2 \vec{E}_c \cdot \vec{H}_c + (eQ_{q_i})^2 \vec{E} \cdot \vec{B} + gw_a eQ_{q_i} (\vec{E}_c \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{H}_c)]$$

Beyond naïve Schwinger mechanism

- 今までは、1 loop、時空間一定の電磁場のみ扱っていた
- 現実的にはそれでいい状況は少ない
- 幾つかの疑問

Schwinger 機構の実現には、本当にあんなに強い電場が必要なのか？

Schwinger機構をもっと起こしやすくすることはできないだろうか？

空間的、時間的非一様性の重要性？1 loop でいいのか？

原子のレーザーイオン化から学ぶ

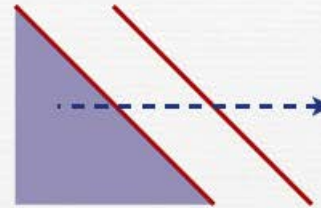
vacuum pair production

$$P_{EH} \sim \exp \left[-\pi \frac{m^2 c^3}{e \mathcal{E} \hbar} \right]$$

$$\mathcal{E}_c = \frac{m^2 c^3}{e \hbar} \approx 1.3 \times 10^{16} \text{ V/cm}$$

$$I_c = \frac{c}{8\pi} \mathcal{E}_c^2 \approx 4 \times 10^{29} \text{ W/cm}^2$$

Heisenberg/Euler, 1936



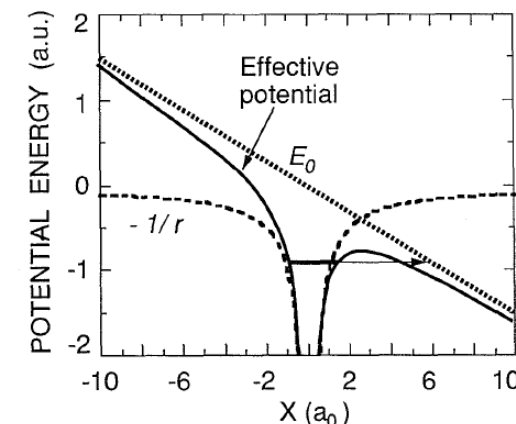
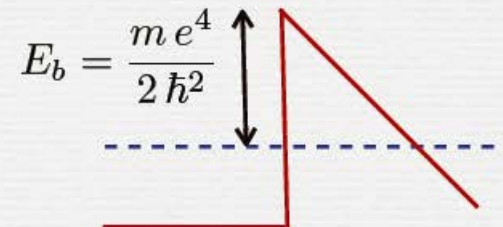
atomic ionization

$$P_{\text{ionization}} \sim \exp \left[-\frac{2}{3} \frac{m^2 e^5}{\mathcal{E} \hbar^4} \right]$$

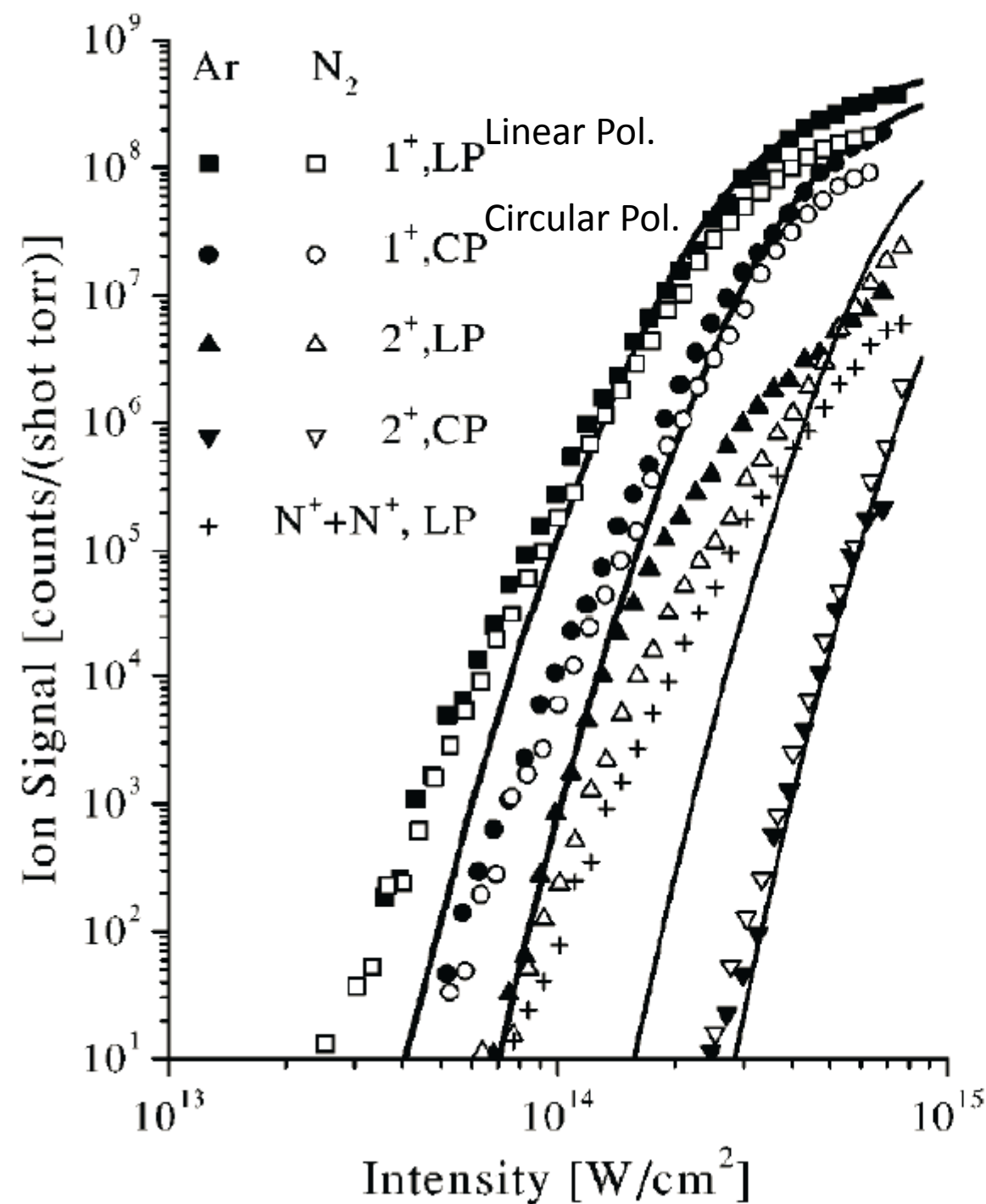
$$\mathcal{E}_c^{\text{ion}} = \frac{m^2 e^5}{\hbar^4} = \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^3 \frac{m^2 c^3}{e \hbar} = \alpha^3 \mathcal{E}_c \approx 10^9 \text{ V/cm}$$

$$I_c^{\text{ion}} = \alpha^6 I_c \approx 10^{16} \text{ W/cm}^2 \quad \text{Laser intensity}$$

Oppenheimer, 1929



「占有状態にある電子が、電場の助けを借りてトンネル効果で外に出る」という点で、二つの現象は類似。
高次のnの効果はない



$$E_b \sim 15 \text{ eV}$$

Solid lines: "ADK model"
based on tunneling picture,
Ammosov, Delone, Krainov
Sov.Phys.JETP 64 (1986) 1191

$$\frac{4m^3 e^9}{E \hbar^7} \exp \left[-\frac{2m^2 e^5}{3E \hbar^4} \right]$$

(Landau-Lifshitz QM sec77)

ionization is seen
below the sharp
cutoff critical field

$$I_c \sim 10^{16} \text{ W/cm}^2$$

Phys. Rev. A 58 (1998) R4271

G. Gibson et al, 1998

時間変動する電場からの粒子対生成 (I)

時間変動する電場中の粒子生成

Brezin, Itzykson 1970

$$E(t) = E \cos(\omega t)$$

$\omega \rightarrow 0$ で時間変化なしの場合に一致

Keldysh adiabaticity parameter

$$\gamma = \frac{m\omega}{eE}$$

[Vector potential $eA = -(eE/\omega) \sin \omega t$ vs m]

電子・陽電子対生成確率

$$P \sim \begin{cases} \frac{\alpha E^2}{2\pi} \exp\left(-\frac{\pi m^2}{eE}\right), \\ \frac{\alpha E^2}{8} \left(\frac{eE}{2m\omega}\right)^{4m/\omega}, \end{cases}$$

$$\gamma \ll 1$$

Schwinger 機構
“non-perturbative”

$$\gamma \gg 1$$

多光子吸収
“perturbative”

$2m/\omega$: 対生成を可能にする光子の数

レーザーイオン化で見ていたのはこの効果か

電場が臨界電場に達さなくとも多光子吸収で対生成可能

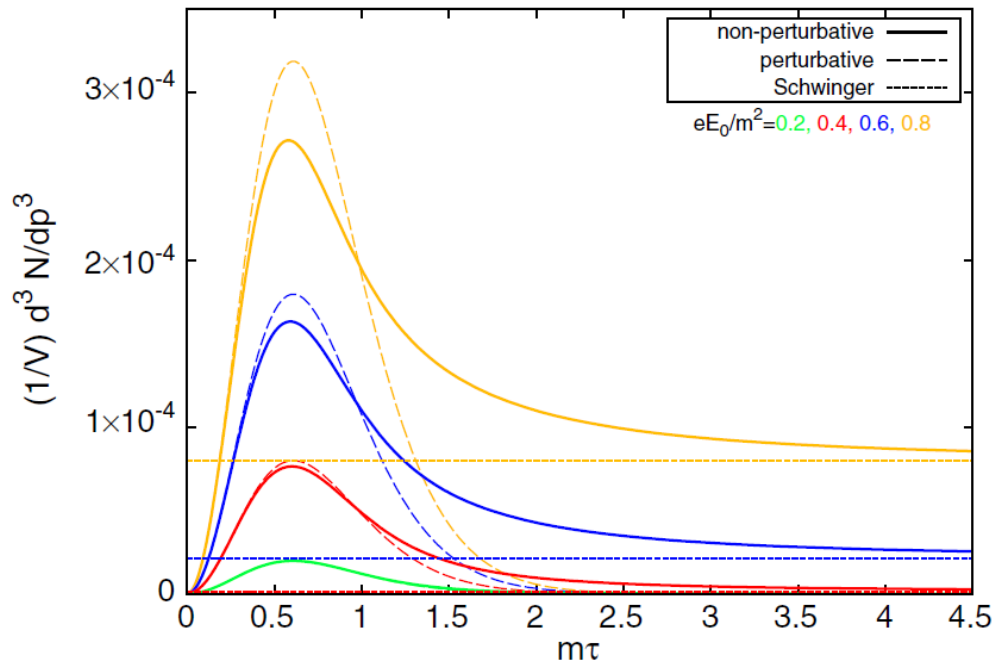
時間変動する電場からの粒子対生成 (II)

Taya, Fujii, KI, 2014

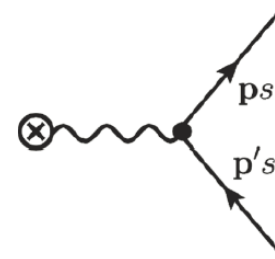
Sauter 型の時間依存性

$$E(t) = E_0 \text{sech}^2(t/\tau)$$

- パルスの高さと幅依存性
- 厳密に解ける



- パルス幅が長いとき、Schwingerと一致
- パルス幅が短いとき、Schwingerよりも多くの粒子対生成が起こる。
「1光子からの対生成」で理解できる



→ パルス幅の変化は「摂動的」から
「非摂動的」粒子対生成への遷移

→ 田屋君の講演へ！！

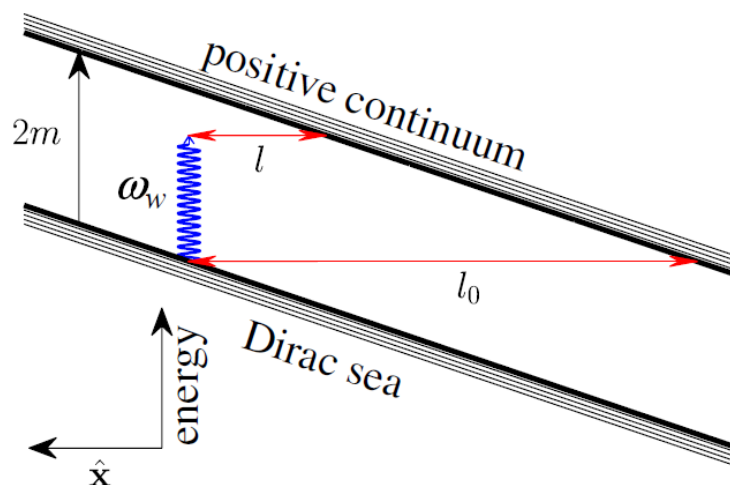
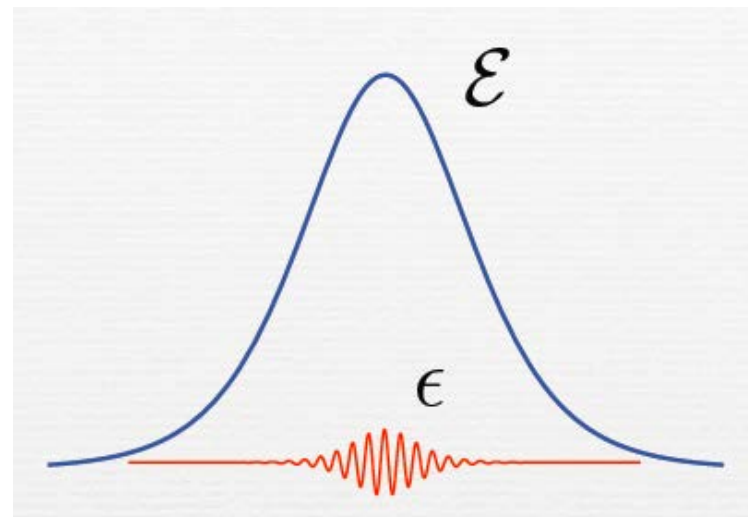
Dynamically assisted Schwinger mechanism

Schutzhold, Gies, Dunne, 2008

強い、ゆっくりと変化するモードに
弱く、早く変化するモードを加えた場
における粒子対生成

多光子吸収とSchwinger機構が
同時に起こる。
→ トンネルバリアが有効的に低くなり
素朴なSchwinger機構に比べて膨大な
増大因子を持つ
→ 最も有効なtime profileは何か？

重イオン衝突で生成するグラズマ？
コヒーレントな強いカラー場は小さな揺らぎ
を伴う。時間的な揺らぎもあり得る。
→ この非自明な背景でのquark-antiquark
生成を考えるべき。



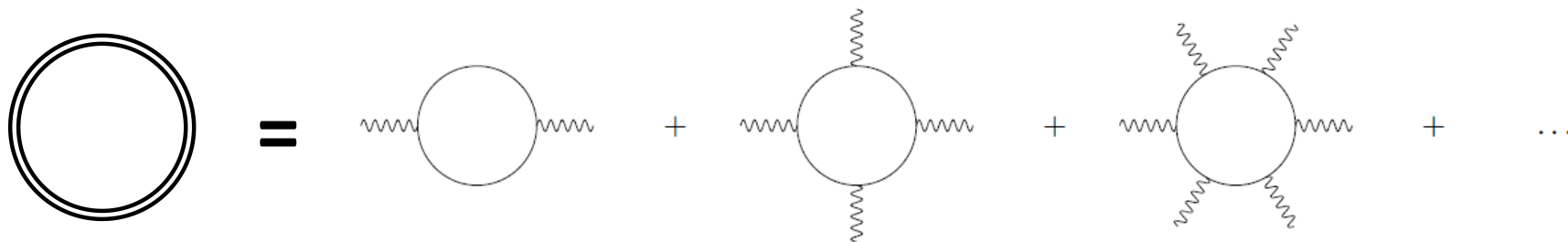
Schwinger機構における高次効果

- Weak-coupling, strong field ($\beta = eE/m^2$)

LO result

$$\text{Im}\mathcal{L}_{\text{spin}}^{(1)}(E) = \frac{m^4}{8\pi^3}\beta^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \exp\left[-\frac{\pi k}{\beta}\right]$$

$$\text{Im}\mathcal{L}_{\text{scal}}^{(1)}(E) = \frac{m^4}{16\pi^3}\beta^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \exp\left[-\frac{\pi k}{\beta}\right]$$



2-loop Euler-Heisenberg

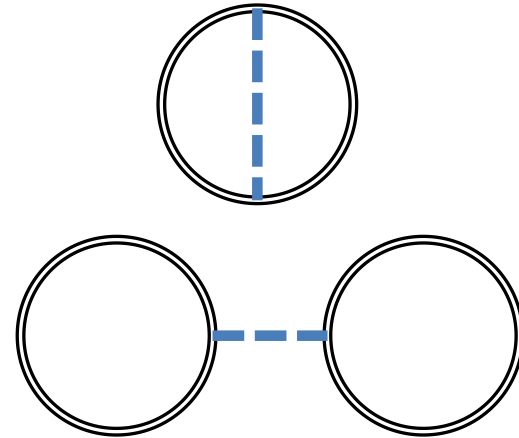
- Lebedev-Ritus 1984 weak-field expansion $\beta = eE/m^2 \ll 1$

$$\text{Im}\mathcal{L}_{\text{spin}}^{(2)}(E) = \frac{m^4}{8\pi^3} \beta^2 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha\pi K_k^{\text{spin}}(\beta) \exp\left[-\frac{\pi k}{\beta}\right]$$

$$\text{Im}\mathcal{L}_{\text{scal}}^{(2)}(E) = \frac{m^4}{16\pi^3} \beta^2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \alpha\pi K_k^{\text{scal}}(\beta) \exp\left[-\frac{\pi k}{\beta}\right]$$

$$K_k^{\text{scal,spin}}(\beta) = -\frac{c_k}{\sqrt{\beta}} + 1 + \mathcal{O}(\sqrt{\beta})$$

$$c_1 = 0, \quad c_k = \frac{1}{2\sqrt{k}} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{l(k-l)}}, \quad k \geq 2$$



Lowest contribution at weak-field ($k=1$)

$$\text{Im}\mathcal{L}_{\text{spin}}^{(1)}(E) + \text{Im}\mathcal{L}_{\text{spin}}^{(2)}(E) \underset{\beta \rightarrow 0}{\sim} \frac{m^4 \beta^2}{8\pi^3} (1 + \alpha\pi) e^{-\frac{\pi}{\beta}}$$

強結合における粒子生成

- Affleck-Manton NPB 194 (1982) 38

“Monopole pair production in a magnetic field”

$$\Gamma_M = \frac{(gB)^2}{(2\pi)^3} \exp\left[-\frac{\pi M^2}{gB} + \frac{g^2}{4}\right], \quad g = \frac{4\pi}{e} \gg 1$$

→ suggests “strong-coupling results”

$$\Gamma = \frac{(eE)^2}{(2\pi)^3} \exp\left[-\frac{\pi m^2}{eE} + \frac{e^2}{4}\right]$$

Schwinger LO resultに
 $e^2/4$ が加わったのみ

This is indeed the case as shown in AAM using
“worldline instanton approach”(for scalar case)

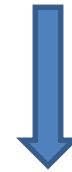
Affleck, Alvarez, and Manton, NPB197 (1982) 509

All loop result for weak-coupling?

$$(\beta = eE/m^2)$$

- Ritus

$$\text{Im}\mathcal{L}_{\text{spin}}^{(1)}(E) + \text{Im}\mathcal{L}_{\text{spin}}^{(2)}(E) \stackrel{\beta \rightarrow 0}{\sim} \frac{m^4 \beta^2}{8\pi^3} (1 + \alpha\pi) e^{-\frac{\pi}{\beta}}$$



$$e^{\alpha\pi} = e^{e^2/4}$$



$$\Gamma = \frac{(eE)^2}{(2\pi)^3} \exp\left[-\frac{\pi m^2}{eE} + \frac{e^2}{4}\right]$$

Strong coupling result

Beyond LO Schwinger

- Weak-coupling, weak-field limit

one loop	two loop	all loop
$\frac{(eE)^2}{(2\pi)^3} \exp\left[-\frac{\pi m^2}{eE}\right],$	$\frac{(eE)^2}{(2\pi)^3} (1 + \alpha\pi) \exp\left[-\frac{\pi m^2}{eE}\right],$	$\frac{(eE)^2}{(2\pi)^3} \exp\left[-\frac{\pi m^2}{eE} + \frac{e^2}{4}\right]$

- Strong-coupling, weak-field limit

$$\frac{(eE)^2}{(2\pi)^3} \exp\left[-\frac{\pi m^2}{eE} + \frac{e^2}{4}\right]$$

- Weak-coupling, strong-field limit

Schwinger's formula for all n

- Strong-coupling, strong-field limit

unknown $\leftarrow$ QCD!?