

連続状態離散化チャネル結合法 の発展と応用

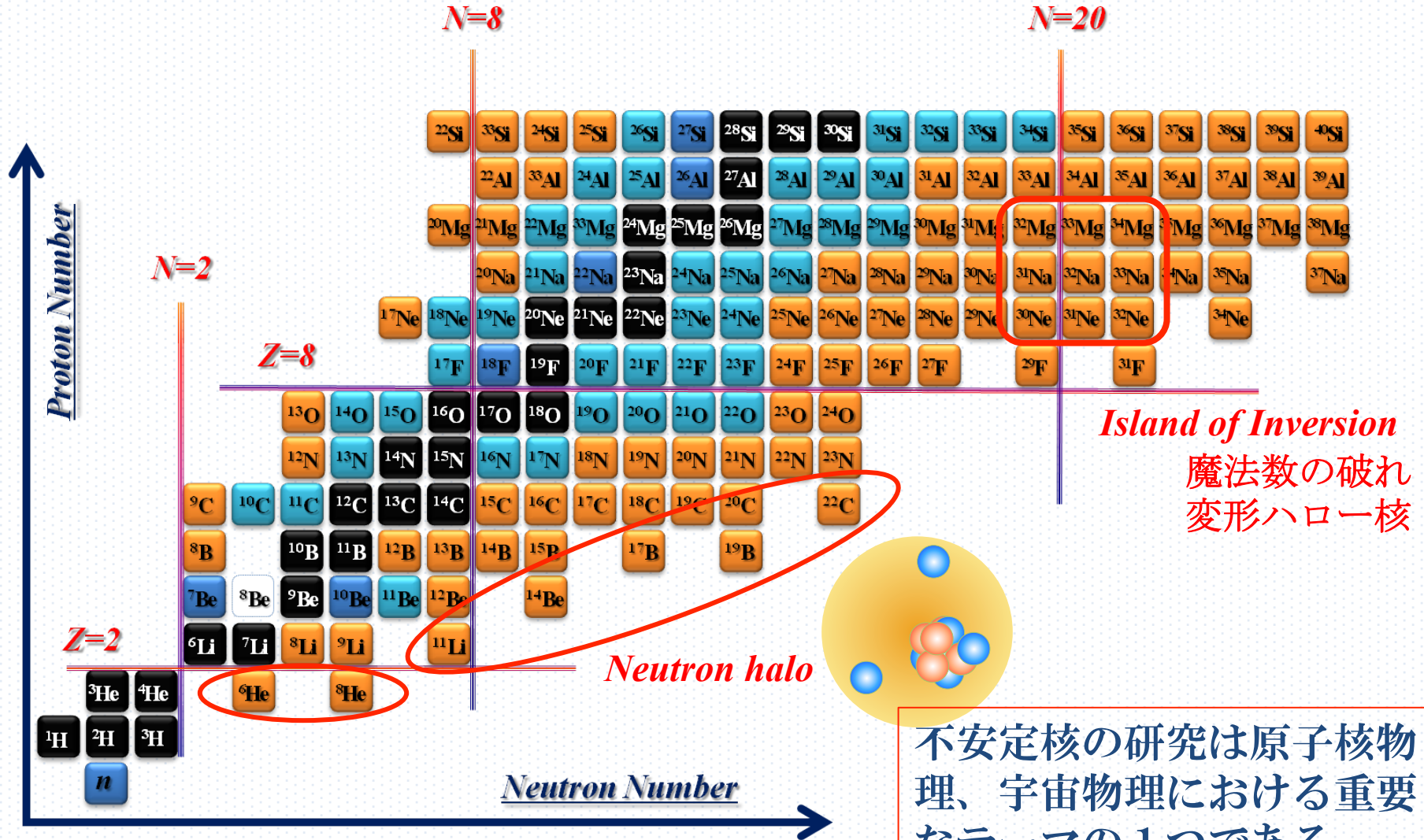
松本 琢磨
(九州大学)

Contents

- Introduction
- 散乱の基礎
- 原子核反応
- 3体反応系の理論とCDCC法
- CDCC法の発展
- CDCC法による不安定核反応解析と応用
- まとめ

近年の原子核研究

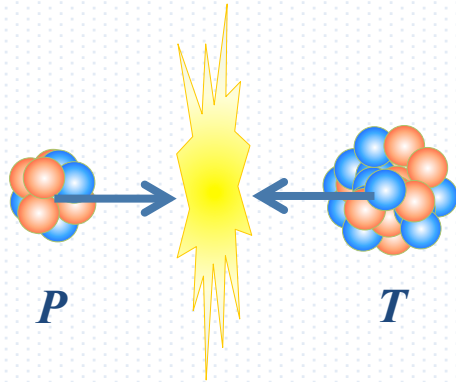
原子核：数個から数百個の核子（陽子、中性子）からなる多体系



不安定核の研究は原子核物理、宇宙物理における重要なテーマの1つである。

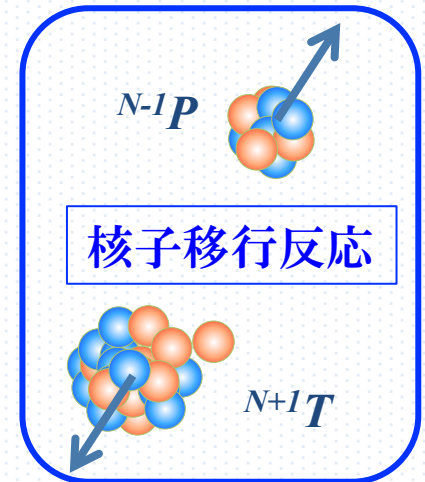
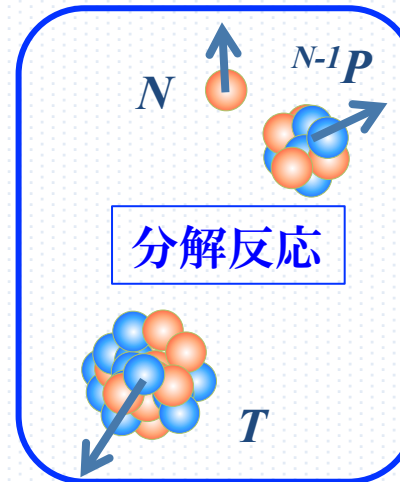
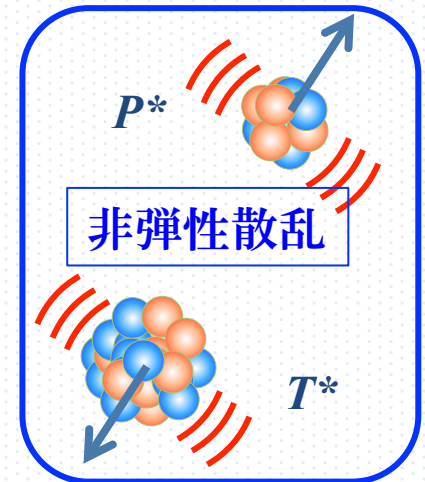
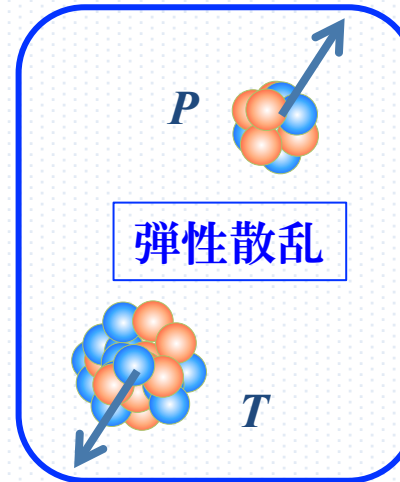
原子核反応

核反応：（一般的に）2個の原子核の衝突によって引き起こされる反応



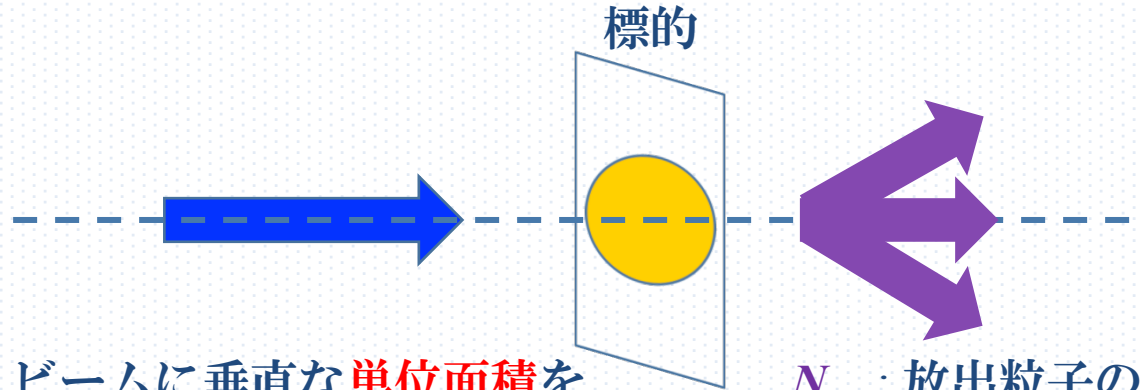
原子核反応では多様な（無限の）
放出チャネル（反応後の状態）が
考えられる

原子核反応論とは多様な終状態へ
の遷移（確率）を記述する理論



これ以外の終状態も多数考えられる

断面積



反応が起きた確率

$$P_r = \frac{N_{out}}{N_{in}}$$

次元：面積

N_{in} ：ビームに垂直な単位面積を
単位時間当たりに通過する粒子数
(入射ビームの流束)

N_{out} ：放出粒子の単位
時間当たりの個数

- 反応が起きた確率 P_r は標的に依存する。
- 単位面積当たりの標的には標的原子核が N_T 個含まれている。
- P_r をその数 N_T で割ると1標的原子核当たりの反応確率である断面積が求まる。

$$N_T = \rho \times d \times N_A / A_T$$

単位面積あたり
の標的の質量

質量あたりの標
的原子核数

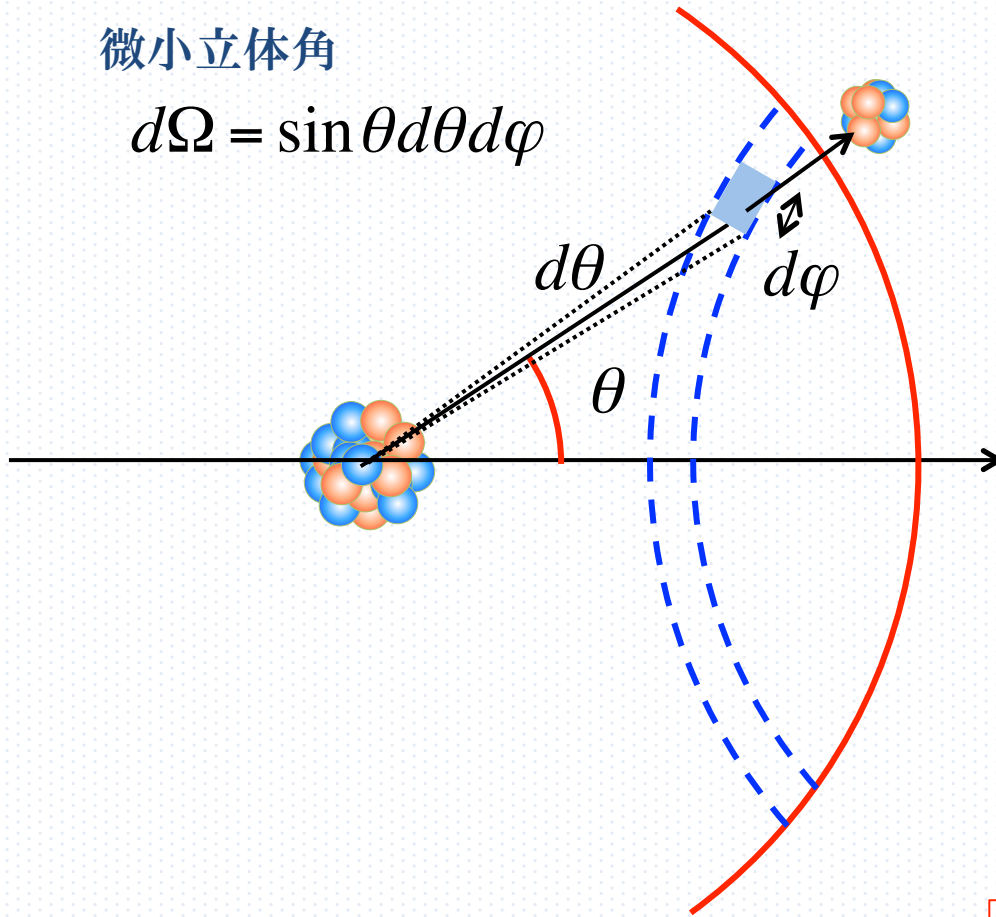
ρ ：標的の密度
 d ：標的の厚さ
 N_A ：アボガドロ数
 A_T ：標的の原子量

断面積は反応が起こる確率を定量化したもの

微分断面積

微小立体角

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$$



実験的にはある放出角度に検出器を設置し粒子を測定する。



断面積の角度依存性、角度分布が測定される。

微分断面積

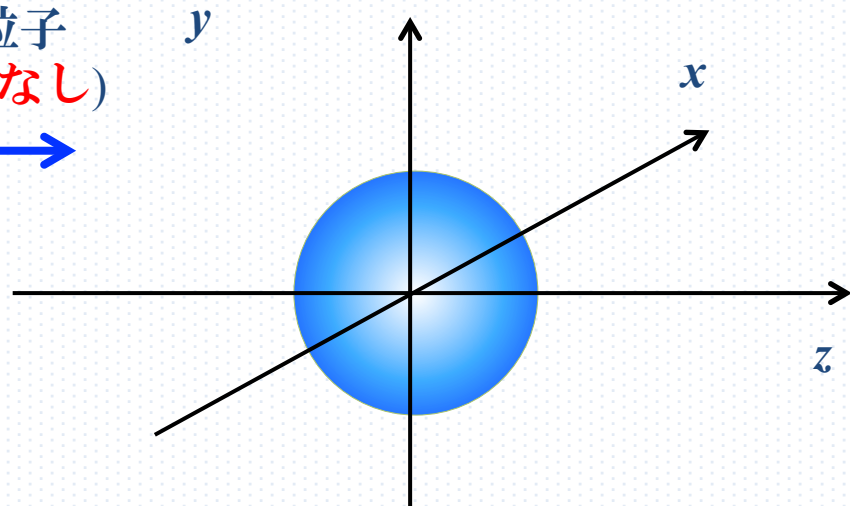
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma(\theta, \varphi)$$

微分断面積を立体角全体で積分すると全断面積が得られる。

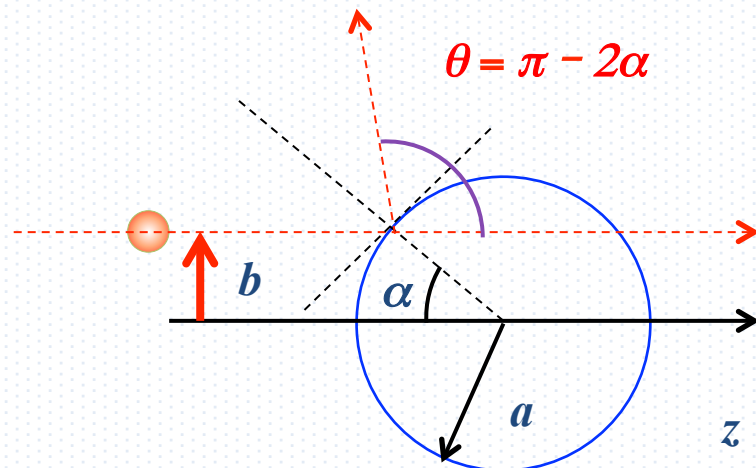
$$\sigma_{tot} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sigma(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta$$

剛体球の断面積

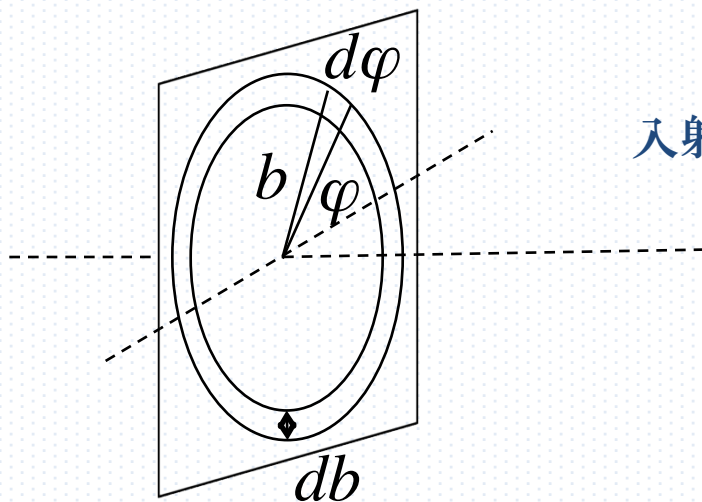
入射粒子
(大きさなし)



衝突係数 b が決まると粒子が放出される角度
(散乱角) が決定



$$b = a \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$



入射粒子が通過する微小面積

$$d\sigma = b db d\varphi$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

断面積の大きさ

剛体球散乱での微分断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{4}$$

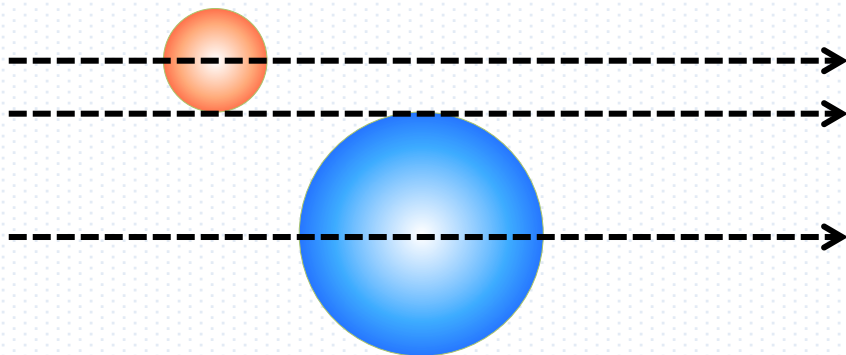


全立体角で積分（ 4π 掛ける）

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \pi a^2$$

剛体球散乱の全（反射）断面積は剛体球の断面の面積に等しい

断面積は反応を起こす入射原子核と標的原子核の大きさを反映する



$$\sigma = \pi(r_p + r_T)^2$$

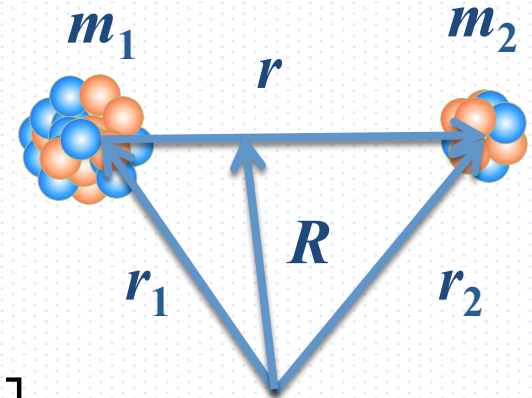
標的の半径 r_T が分かっているば入射核の半径 r_p が断面積から決定できる。

これまで古典的な散乱で断面積を求めた。原子核反応は量子力学に従うため、量子力学で断面積がどう計算されるかを議論する。

散乱問題の基礎(復習)

2粒子の散乱問題

右の図のように粒子がいくつかの粒子からなるように描かれてあるが、実際は**構造をもたないもの**としてあつかう。



2体のシュレディンガー方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_{\vec{r}_1}^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_{\vec{r}_2}^2 + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) - E_{lab} \right] \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}$$

$$M = m_1 + m_2, \mu = m_1 m_2 / M$$

相対運動部分

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_{\vec{r}}^2 + V(r) - E_r \right] \psi(\vec{r}) = 0$$

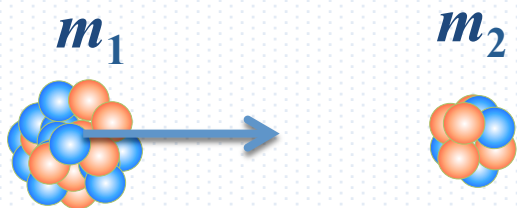
重心運動部分

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\vec{R}}^2 - E_R \right] \psi_G(\vec{R}) = 0$$

散乱の微分方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 - E_R \right] \psi_G(\vec{R}) = 0$$

E_{lab} : 入射エネルギー



$$P_R = \sqrt{2ME_R} = \sqrt{2m_1 E_{\text{Lab}}},$$

$$E_R = \frac{m_1}{M} E_{\text{Lab}}, E_r = \frac{m_2}{M} E_{\text{lab}}$$

注) 入射核 $\leftrightarrow$ 標的核で E_r が変化

散乱問題で解くべき微分方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + V(r) - E_r \right] \psi(\vec{r}) = 0$$

ψ を散乱の境界条件のもとで解く

境界条件

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + V(r) - E_r \right] \psi(\vec{r}) = 0 \quad V(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

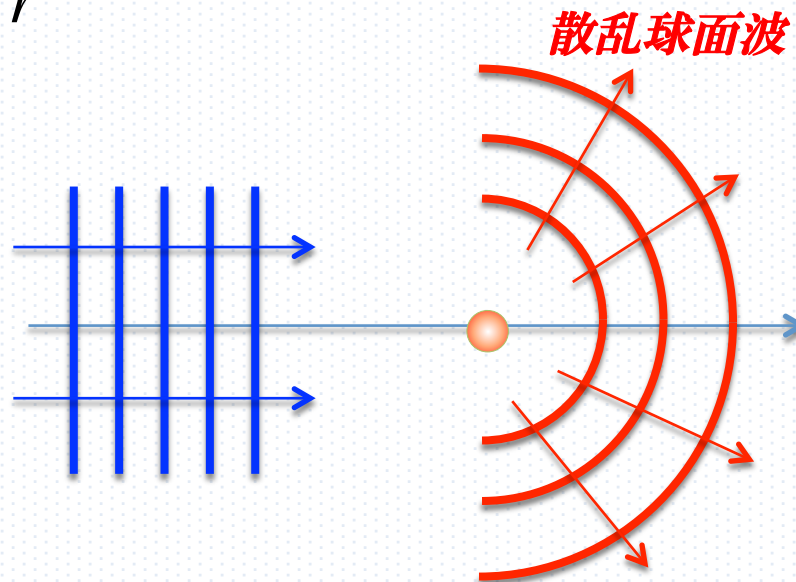
$$k = \sqrt{\frac{2\mu E_r}{\hbar^2}}$$

境界条件 注) ここでは直感的に与える

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad f(\theta): \text{散乱振幅}$$

入射平面波

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 - E_r \right] \varphi_0(\vec{r}) = 0$$

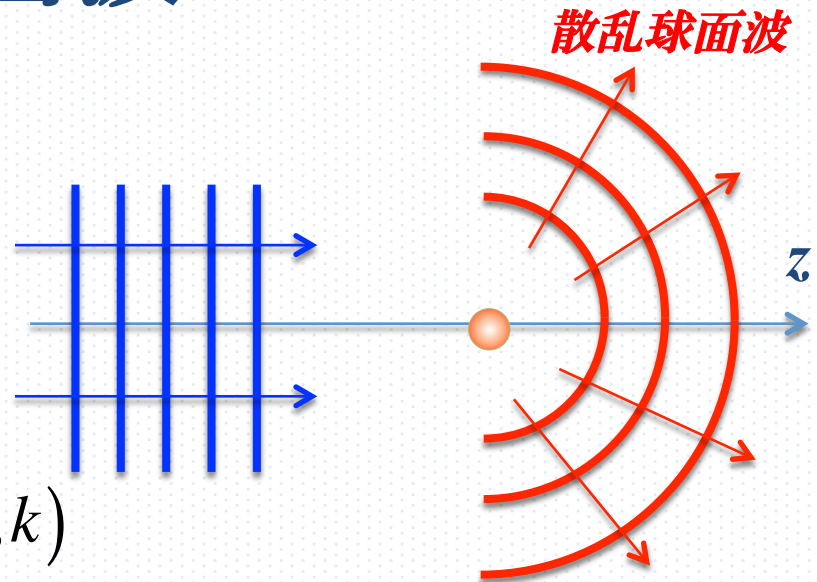


入射平面波

入射平面波

$$\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$$

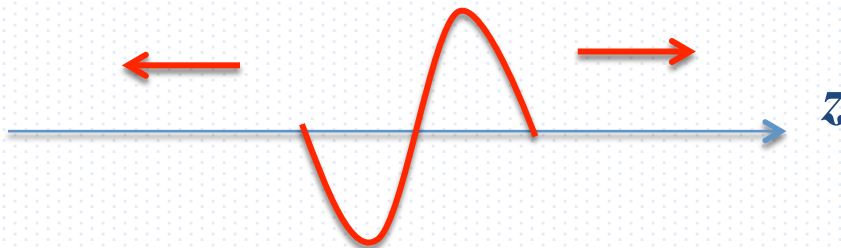
入射運動量の方向→**z軸** $\vec{k} = (0, 0, k)$



$$\exp(ikz)$$

z が一定の**平面**で**同じ位相**を持つ波

波の進む向きは？



時間の成分が必要

$$\exp\left(i\left(kx - \frac{E}{\hbar}t\right)\right)$$

積分方程式

数学的に考えていきましょう・・・

$$\left[\nabla_r^2 + k^2 \right] \psi(\vec{r}) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) \psi(\vec{r}), \quad k^2 = \frac{2\mu E_r}{\hbar^2}$$

非斉次方程式の一般解 = 斉次方程式の一般解 + 特解

$$\psi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) + \chi(\vec{r})$$

斉次方程式の一般解

$$\left[\nabla_r^2 + k^2 \right] \varphi(\vec{r}) = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{平面波}$$

特解

$$\left[\nabla_r^2 + k^2 \right] \chi(\vec{r}) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) \psi(\vec{r})$$

Green関数

$$\left[\nabla_r^2 + k^2\right]\chi(\vec{r}) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r)\psi(\vec{r})$$

Green関数

$$\left[\nabla_r^2 + k^2\right]G_0(\vec{k}, \vec{r}) = \delta(\vec{r})$$

左辺に代入すると
右辺と一致

特解 $\chi(\vec{r}) = \frac{2\mu}{\hbar^2} \int G_0(\vec{k}, \vec{r} - \vec{r}') V(r') \psi(\vec{r}') d\vec{r}'$

Green関数の求め方

- 散乱の量子論
- 散乱理論 など

$$G_0^{(\pm)}(\vec{k}, \vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp\left(\pm ik|\vec{r} - \vec{r}'|\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

波動関数の積分方程式表示

$$\psi^{(\pm)}(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\exp(\pm ik|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r') \psi^{(\pm)}(\vec{r}') d\vec{r}'$$

r' の積分はポテンシャル V のレンジ内

上記の式は波動関数が求まっているわけではない（右辺にも波動関数有り）

r が大きい極限を考える

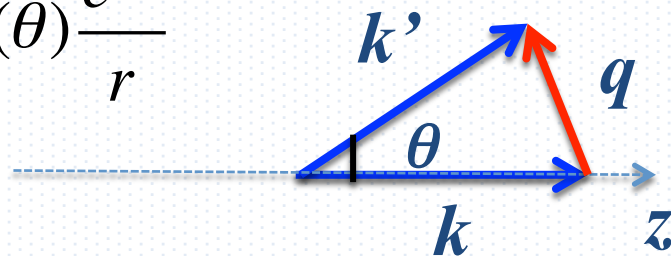
$$r \gg r' : |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2} \rightarrow r - \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r}'$$

$$\frac{\exp(ik|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rightarrow \frac{\exp(ikr)}{r} \exp(-i\vec{k}' \cdot \vec{r}')$$

境界条件と散乱振幅

$$\psi^{(+)}(\vec{r}) \rightarrow \varphi(\vec{r}) - \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \frac{2\mu}{\hbar^2} \int \exp(-i\vec{k}' \cdot \vec{r}') V(r') \psi^{(+)}(\vec{r}') d\vec{r}'$$

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$



散乱振幅

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2\mu}{\hbar^2} \int \exp(-i\vec{k}' \cdot \vec{r}') V(r') \psi^{(+)}(\vec{r}') d\vec{r}'$$

波動関数の積分表示は境界条件を含んだ式になっている。

散乱振幅と断面積

断面積：条件を満たす放出粒子が単位時間あたりに測定される個数を入射ビームの流束で割ったもの

入射波の流れ密度

$$j_{in} = \frac{\hbar}{2i\mu} \left(e^{-ikz} \frac{d}{dz} e^{ikz} - e^{ikz} \frac{d}{dz} e^{-ikz} \right) = \frac{\hbar k}{\mu} = v$$

放出波の流れ密度 (r 動径方向の流れ)

$$j_r = \frac{\hbar}{2i\mu} \left(\chi^*(r) \frac{d}{dr} \chi(r) - \chi(r) \frac{d}{dr} \chi^*(r) \right) = \frac{\hbar k}{\mu} \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} + O(r^{-3})$$

測定位置は無限遠 $r \rightarrow \infty$ $j_r dS = j_r r^2 d\Omega = v |f(\theta)|^2 d\Omega$ $d\sigma = \frac{j_r dS}{j_{in}} = |f(\theta)|^2 d\Omega$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2}$$

量子力学において断面積は散乱振幅の絶対値の2乗で定義される

Lippmann-Schwinger 方程式

$$\psi^{(\pm)}(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\exp(\pm ik|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r') \psi^{(\pm)}(\vec{r}') d\vec{r}'$$

演算子で記述

Lippmann-Schwinger方程式

$$|\psi^{(\pm)}\rangle = |\varphi\rangle + \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon} V |\psi^{(\pm)}\rangle$$

平面波

Green関数

$$(H_0 - E)|\varphi\rangle = 0 \quad G_0^{(\pm)} = \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon}$$

散乱振幅

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2\mu}{\hbar^2} \langle \varphi | V | \psi^{(\pm)} \rangle$$

遷移行列

Lippmann-Schwinger方程式の形式解

$$|\psi^{(+)}\rangle = |\varphi\rangle + \frac{1}{E - H \pm i\varepsilon} V |\varphi\rangle = \Omega^{(+)} |\varphi\rangle$$

散乱振幅

実際このGreen関数を求めるのは散乱問題を解くことと同じ

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2\mu}{\hbar^2} \langle \varphi | V | \psi^{(+)} \rangle$$

遷移行列 (T 行列)

$$T = \langle \varphi | V | \psi^{(+)} \rangle$$

$$T = \langle \varphi_{k'} | V \Omega^{(+)} | \varphi_k \rangle = \langle \varphi_{k'} | \hat{T} | \varphi_k \rangle$$

遷移演算子によって入射波が散乱される割合を表す

Born近似

散乱振幅

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2\mu}{\hbar^2} \langle \varphi | V | \psi^{(\pm)} \rangle$$

ψを求める必要がある

$$|\psi^{(\pm)}\rangle = |\varphi\rangle + \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon} V |\psi^{(\pm)}\rangle$$

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2\mu}{\hbar^2} \left\{ \boxed{\langle \varphi | V | \varphi \rangle} + \langle \varphi | V \frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon} V |\varphi\rangle + \dots \right\}$$

Born近似での散乱振幅

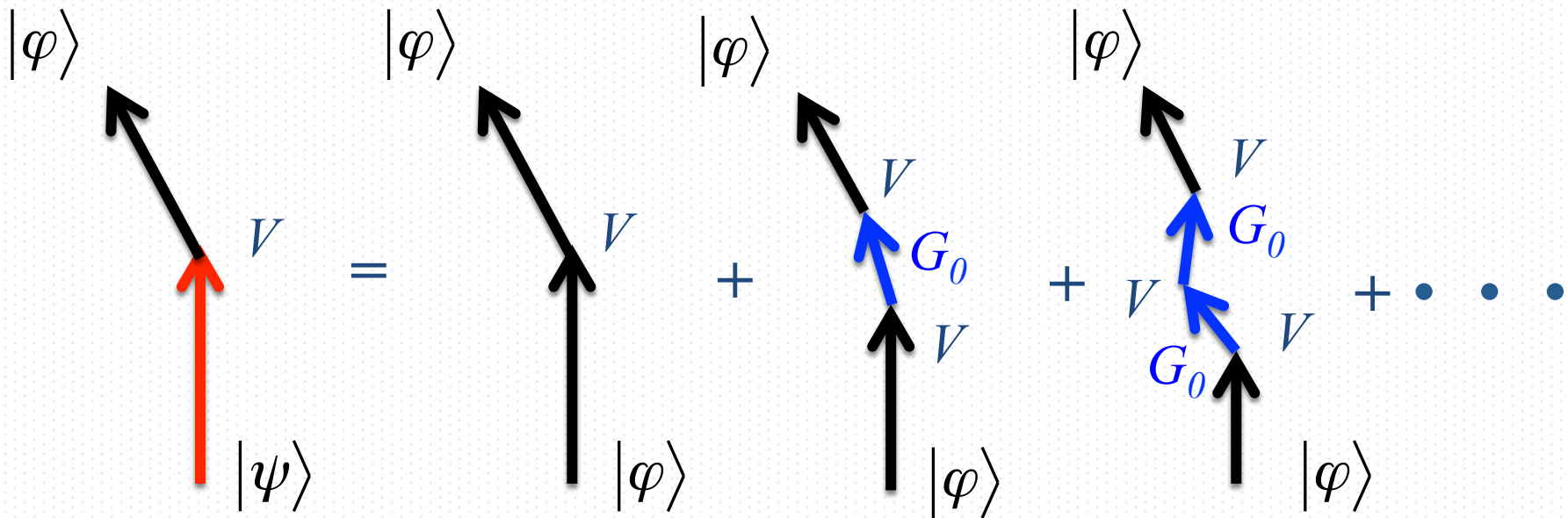
$$f_{Born}(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2\mu}{\hbar^2} \langle \varphi | V | \varphi \rangle$$

$$|\psi\rangle \approx |\varphi\rangle$$

平面波近似→歪曲波近似

Born展開

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2\mu}{\hbar^2} \left\{ \langle \varphi | V | \varphi \rangle + \langle \varphi | V \frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon} V | \varphi \rangle + \dots \right\}$$



Born近似は1次までの計算。このときポテンシャルVによる1回の散乱から1-step計算とも呼ぶ。2次からGreen関数の計算が入るので格段に難しくなる。

Born近似によるRutherford散乱

遮蔽クーロンポテンシャル

$$V_C(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} e^{-r/r_{scr}}$$

無限のレンジに対応

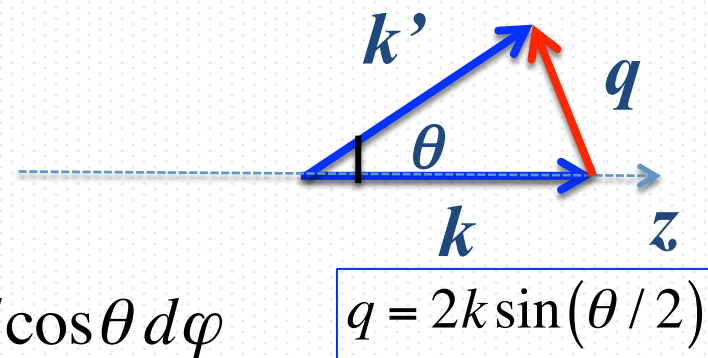
$$r_{scr} \rightarrow \infty$$

$$f_{Born}(\theta) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int e^{iq \cdot r} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} e^{-r/r_{scr}} dr$$

$$= -\frac{\mu Z_1 Z_2 e^2}{2\pi\hbar^2} \int e^{iqr \cos\theta} \frac{1}{r} e^{-r/r_{scr}} r^2 dr d\cos\theta d\varphi$$

$$= -\frac{2\mu Z_1 Z_2 e^2}{\hbar^2} \int e^{-r/r_{scr}} \frac{\sin qr}{q} dr$$

$$= -\frac{2\mu Z_1 Z_2 e^2}{\hbar^2} \frac{1}{q^2 + 1/r_{scr}^2}$$



古典力学的に得られた結果と一致

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{16E_r^2 \sin^4(\theta/2)}$$

正確な波動関数を用いても断面積は同じ形になる

Born近似による断面積

ボルン近似による断面積

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu^2}{4\pi^2\hbar^4} \left| \int e^{iqr} V(r) dr \right|^2 = \frac{\mu^2}{4\pi^2\hbar^4} |\tilde{V}(q)|^2$$

- ❖ ボルン近似では微分断面積はポテンシャルのフーリエ変換として記述される。
- ❖ ポテンシャルは原子核の密度を反映。

電子散乱・・・陽子の密度分布

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z_1^2 e^4}{16E_r^2 \sin^4(\theta/2)} |F(q)|^2$$

中性子（陽子）散乱・・・原子核の密度分布

Eikonal近似

高エネルギーでの散乱
→ 平面波と**そのズレ**

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + V(r) - E_r \right] \psi(\vec{r}) = 0$$

$$\psi(\vec{r}) = e^{ikz} \chi(\vec{r})$$

$$\nabla_r^2 \psi(\vec{r}) = \underline{\underline{-k^2 e^{ikz} \chi(\vec{r})}} + 2ike^{ikz} \frac{\partial}{\partial z} \chi(\vec{r}) + e^{ikz} \nabla_r^2 \chi(\vec{r})$$

E_r の項と消える

$$\nabla_r^2 \chi(\vec{r}) \approx 0$$

Eikonal近似での方程式

$$\frac{\partial}{\partial z} \chi(\vec{r}) = \frac{1}{i\hbar v} V(r) \chi(\vec{r})$$

平面波からの**ズレ**の部分
は激しく振動しない

$$\chi(z, \vec{b}) \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} 1$$

$$\chi(z, \vec{b}) = \exp \left[\frac{1}{i\hbar v} \int_{-\infty}^z V(z', \vec{b}) dz' \right]$$

円筒座標系

Eikonal近似での散乱振幅1

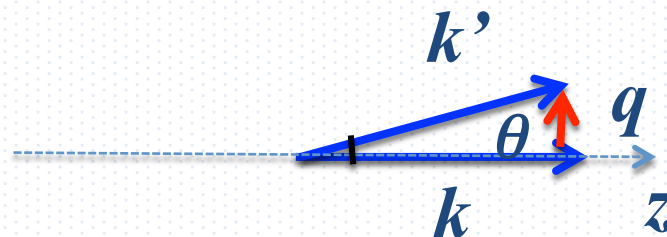
Eikonal近似での波動関数

$$\psi(z, \vec{b}) = \exp \left[ikz + \frac{1}{i\hbar v} \int_{-\infty}^z V(z', \vec{b}) dz' \right]$$

$$f_{Eik}(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2\mu}{\hbar^2} \int e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} V(r) e^{\frac{1}{i\hbar v} \int_{-\infty}^z V(z', \vec{b}) dz'} d\vec{r}$$

前方散乱近似 (θ が小さい)

$$\exp(-i\vec{q} \cdot \vec{r}) \approx \exp(-i\vec{q} \cdot \vec{b})$$



$$f_{Eik}(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2\mu}{\hbar^2} \int e^{-i\vec{q} \cdot \vec{b}} d\vec{b} \boxed{V(z, \vec{b}) e^{\frac{1}{i\hbar v} \int_{-\infty}^z V(z', \vec{b}) dz'} dz}$$

z 積分が解析的に実行可能

*Eikonal*近似での散乱振幅2

$$f_{Eik}(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2\mu}{\hbar^2} \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{b}} d\vec{b} V(z, \vec{b}) e^{\frac{1}{i\hbar v} \int_{-\infty}^z V(z', \vec{b}) dz'} dz$$

*Eikonal*近似での方程式を考慮すれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(z, \vec{b}) e^{\frac{1}{i\hbar v} \int_{-\infty}^z V(z', \vec{b}) dz'} dz = i\hbar v \left[\exp\left(\frac{1}{i\hbar v} \int_{-\infty}^z V(z', \vec{b}) dz'\right) \right]_{z=-\infty}^{z=\infty}$$

*Eikonal*近似での散乱振幅

$$f_{Eik}(\theta) = \frac{ik}{2\pi} \int d\vec{b} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{b}} \left(1 - e^{i\chi(\vec{b})}\right)$$

位相差関数 (Phase shift function)

$$\chi(\vec{b}) = -\frac{1}{\hbar v} \int_{-\infty}^{\infty} V(z, \vec{b}) dz$$

部分波分解

Born近似 : 微分方程式は解かない。

Eikonal近似 : 1階の微分方程式を解く。

部分波分解 : 2階の微分方程式を解く。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + V(r) - E_r \right] \psi(\vec{r}) = 0$$

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\ell} \frac{u_{\ell}(r)}{r} Y_{\ell m}(\Omega_r)$$

動径成分の*Schroedinger*方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2\mu r^2} + V(r) - E_r \right] u_{\ell}(r) = 0$$

動径成分の境界条件

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) + k^2 \right] u_\ell(r) = 0 \quad (1)$$

$V(r)=0$ の場合の解析解

✓ 球Bessel関数 (原点で正則) $kr \cdot j_\ell(kr)$

✓ 球Neumann関数 (原点で発散) $kr \cdot n_\ell(kr)$

✓ 球Hankel関数 $H_\ell^{(\pm)}(kr) = [-n_\ell(kr) \pm i j_\ell(kr)] \cdot kr$

動径成分の漸近形

$$u_\ell(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \left[H_\ell^{(-)}(kr) - S_\ell H_\ell^{(+)}(kr) \right] \quad S_\ell : \text{S行列}$$

漸近形に滑らかに接続するように微分方程式(1)を数値的に計算する。

Numerov's Method

差分法：微分量を数値的な差（差分）で表して方程式を解く

$$\frac{d^2}{dr^2} u_\ell(r) = \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) - k^2 \right] u_\ell(r) \quad \frac{d^2}{dx^2} y(x) = A(x)y(x)$$

次の点 $(x+h)$ での波動関数を前2点 $(x, x-h)$ の値から見積もる

$$y(x \pm h) = y(x) \pm y'(x) \cdot h + \frac{1}{2} y''(x) \cdot h^2 \pm \frac{1}{3!} y'''(x) \cdot h^3 + \frac{1}{4!} y''''(x) \cdot h^4 + \dots$$

$$y(x+h) + y(x-h) = 2y(x) + y''(x) \cdot h^2 + \frac{1}{6} y''''(x) \cdot h^4 + O(h^6)$$

$$y''''(x) = (A(x+h)y(x+h) - 2A(x)y(x) + A(x-h)y(x-h)) / h^2$$

$$y(x+h) = \frac{\left(2 + \frac{5}{6} A(x)h^2\right)y(x) - \left(1 - \frac{1}{12} A(x-h)h^2\right)y(x-h)}{1 - \frac{h^2}{12} A(x+h)}$$

部分波分解による散乱振幅

接続条件 滑らかに接続＝対数微分が一致する

$$\underline{\underline{\frac{du_\ell(r)}{dr} \bigg/ u_\ell(r) = \frac{d[H_\ell^{(-)}(kr) - S_\ell H_\ell^{(+)}(kr)]}{dr} \bigg/ [H_\ell^{(-)}(kr) - S_\ell H_\ell^{(+)}(kr)]}}$$

数値的に求める(内側)

実際には内側の波動関数には因子がかかっているものが求まるが対数微分をとることで因子によらない。

部分波分解ではS行列を求める→接続点での係数

部分波分解による散乱振幅

$$f(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_{\ell} (2\ell + 1)(1 - S_\ell) P_\ell(\cos \theta)$$

Coulombポテンシャル

Coulombポテンシャル

中性子散乱以外考慮しなければならない

$$V_{Coul}(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$$

Born近似

$$f_{Born}(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2\mu}{\hbar^2} \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} r^2 dr d\Omega \rightarrow \infty$$

Eikonal近似

$$\begin{aligned} \chi(\vec{b}) &= -\frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} dz \\ &= -\frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \left[\log \left| 2z + 2\sqrt{b^2 + z^2} \right| \right]_{-\infty}^{\infty} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Coulomb力が長距離力のため計算が発散→ 漸近形＝平面波

Coulomb力 + 短距離力の問題

Coulomb力が**長距離力**のため漸近形が平面波にならない

Coulomb場での入射波

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \varphi_C(k, r) + f(\theta) \frac{\exp(ikr - i\eta \ln(2kr))}{r}$$

$$f(\theta) = f_c(\theta) + f_N(\theta)$$

$f_c(\theta)$ Coulomb力による散乱振幅 (Rutherford散乱振幅)

$f_N(\theta)$ 短距離力による散乱振幅

Lippmann-Schwinger方程式

Coulomb力のみの散乱波

$$|\psi^{(\pm)}\rangle = |\psi_C^{(\pm)}\rangle + \frac{1}{E - H_0 - V_{coul} \pm i\varepsilon} V_N |\psi^{(\pm)}\rangle$$

積分が発散しないように短距離力だけを含む

$$|f_c(\theta)|^2 = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E} \right)^2 \sin^{-4} \frac{\theta}{2}$$

Coulomb + 短距離力の部分波分解

$$H_\ell^{(\pm)}(kr) = [-n_\ell(kr) \pm ij_\ell(kr)] \cdot kr \quad \longrightarrow \quad H_\ell^{(\pm)}(kr) = G_\ell(kr) \pm iF_\ell(kr)$$

G, F は

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2\eta k}{r} + k^2 \right] u_\ell(r) = 0, \eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2 \mu}{\hbar^2 k}$$

の解析解 ($\eta=0$ の時のベッセル、ノイマン関数)

$$u_\ell(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} [H_\ell^{(-)}(kr) - S_\ell H_\ell^{(+)}(kr)]$$

部分波分解による散乱振幅 (短距離力部分)

$$f_N(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_{\ell} (2\ell+1) e^{2i\sigma_\ell} (1 - S_\ell) P_\ell(\cos\theta)$$

Coulomb力がある場合は核力による散乱を解き、Coulomb部分を加える。

ここまでのまとめ1

- 境界条件である漸近形は入射波と散乱波によって記述される。
- 散乱波の流束から断面積が計算されるが、それは散乱振幅の2乗として表される。
- 散乱振幅を近似的に求める方法として、Born近似、Eikonal近似などがあり、真面目に解くときは部分波分解で解く。
- Coulomb力がある場合は入射波が平面波ではなくなるが、基本的に解き方は同じ。

原子核反応の記述

光学模型

流束の保存（ポテンシャル V が実数）

$$\nabla_r \cdot j(\vec{r}) = \frac{\hbar}{2i\mu} \left[\psi^*(\vec{r}) \nabla_r^2 \psi(\vec{r}) - \left(\nabla_r^2 \psi^*(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}) \right] = 0$$

これは**弾性散乱** $a + A \rightarrow a + A$ が100%起こることを想定。
しかし、原子核は多粒子からなる多体系であり反応後



弾性チャネル



非弾性チャネル



その他のチャネル

のような様々な反応のチャネルに遷移する為、100%弾性散乱を起こすことはない。

光学模型：複素ポテンシャル（**光学ポテンシャル**）を用いて散乱を記述

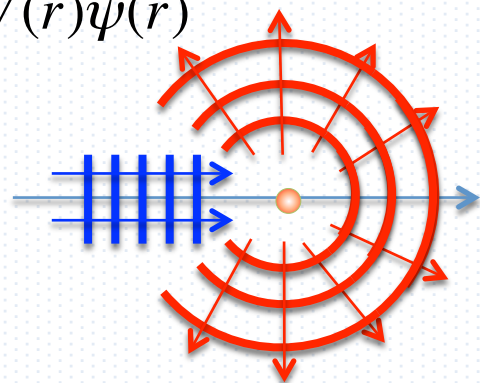
光学ポテンシャル

$$V(r) \rightarrow V_R(r) + iW_I(r)$$

$$\nabla_r \cdot \vec{j}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{2i\mu} \left[\psi^*(\vec{r}) \nabla_r^2 \psi(\vec{r}) - \left(\nabla_r^2 \psi^*(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}) \right] = \frac{2}{\hbar} \psi^*(\vec{r}) W(r) \psi(\vec{r})$$

グリーンの定理

$$\int_V \nabla_r \cdot \vec{j}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_S \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS = \frac{2}{\hbar} \int \psi^*(\vec{r}) W(r) \psi(\vec{r}) d\vec{r}$$



ある閉空間から出て行く流束
この値が**負**だと流束が減る

$$W_I(r) < 0$$

$$a + A \rightarrow a + A$$

弾性チャネル

$$\rightarrow a + A^*$$

$$\rightarrow a^* + A$$

$$\rightarrow a^* + A^*$$

$$\rightarrow b + B$$

非弾性チャネル

その他のチャネル



これらのチャネルに遷移する分だけ入射流束が減る (吸収される)

Feshbach理論

$P + Q = 1, P = |0\rangle\langle 0|$ 弾性チャネルへの射影演算子 (見る部分)

$$(H - E)(P + Q)\Psi = 0,$$

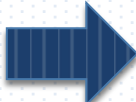
$$(PHP - E)P\Psi = -PHQ\Psi,$$

弾性チャネルの波動関数

$$\psi = \langle 0 | \Psi \rangle$$

$$(QHQ - E)Q\Psi = -QHP\Psi \rightarrow Q\Psi = \frac{1}{E - QHQ + i\varepsilon} QHP\Psi$$

$H = K + V + h$
 K, h は P, Q と可換



$$\left[K + PVP + PVQ \frac{1}{E - QHQ + i\varepsilon} QVP - E_0 \right] P\Psi = 0$$

$$\left[K + \langle 0 | V | 0 \rangle + \langle 0 | PVQ \frac{1}{E - QHQ + i\varepsilon} QVP | 0 \rangle - E_0 \right] \psi = 0$$

Feshbachの一般化光学ポテンシャル

光学ポテンシャルと反応断面積

現象論的光学ポテンシャル

$$U(r) = V_0 f(x_0) + i \left[W_1 f(x_1) + 4W_s \frac{d}{dx_D} f(x_D) \right] + V_{so} \frac{1}{r} \frac{d}{dx_{so}} f(x_{so})$$

Woods-Saxon型

入射エネルギー、入射粒子、標的核に対するグローバルな光学ポテンシャルの決定

$$f(x) = \left[1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right) \right]^{-1}$$



弾性散乱の微分断面積、反応断面積を合わせる

反応断面積

弾性チャネル以外の部分の行く断面積

$$\sigma_R = \frac{\pi^2}{k} \sum_{\ell} (2\ell + 1) (1 - |S_{\ell}|^2)$$

実数ポテンシャルの場合 $|S|^2=1$ より 0

不安定核反応において**原子核の大きさ**を見るのに重要な物理量

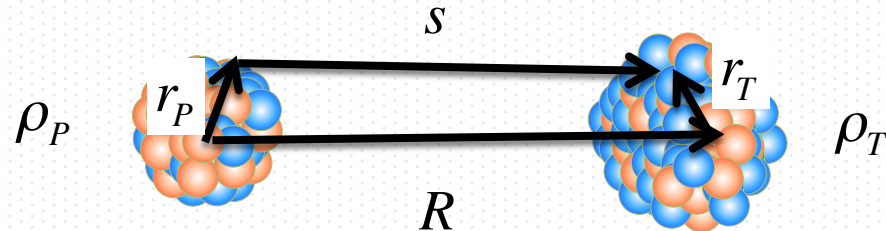
微視的光学ポテンシャル

近年、2重畳み込み模型を用いた微視的光学ポテンシャルの計算が盛んに行われている。



2重畳み込み模型

$$U(R) = \int \rho_P(r_P) \rho_T(r_T) v_{NN}(s, E, \rho) dr_P dr_T$$

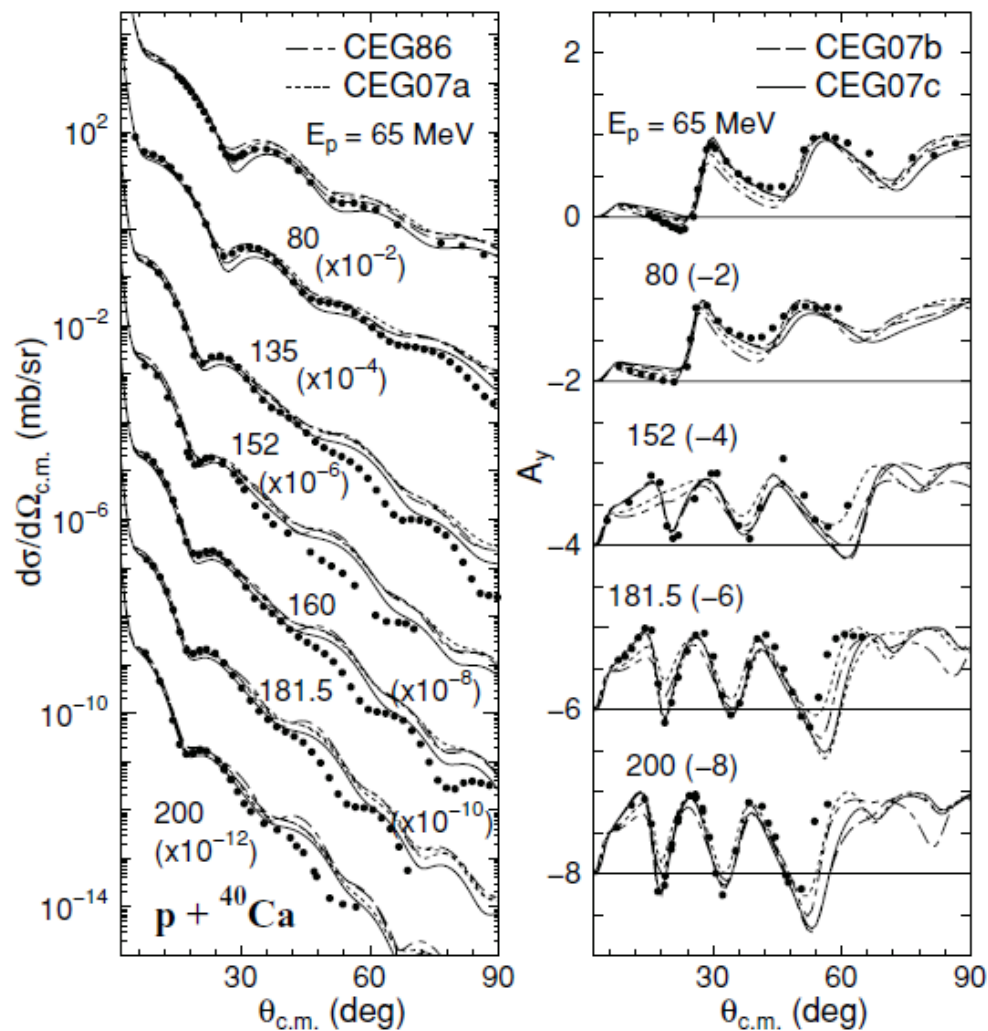


v_{NN} : *Effective NN interaction*

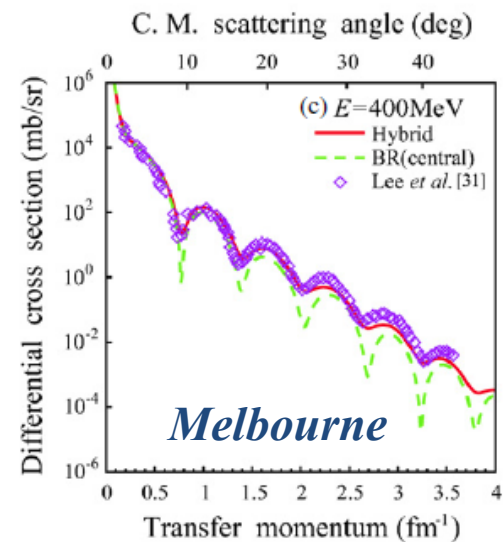
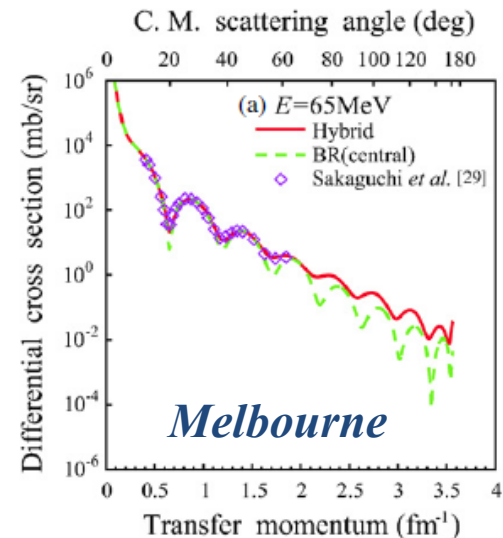
→ *g-matrix*

周りに他の核子がいる場合の2核子間力

畳込みモデルによる計算例



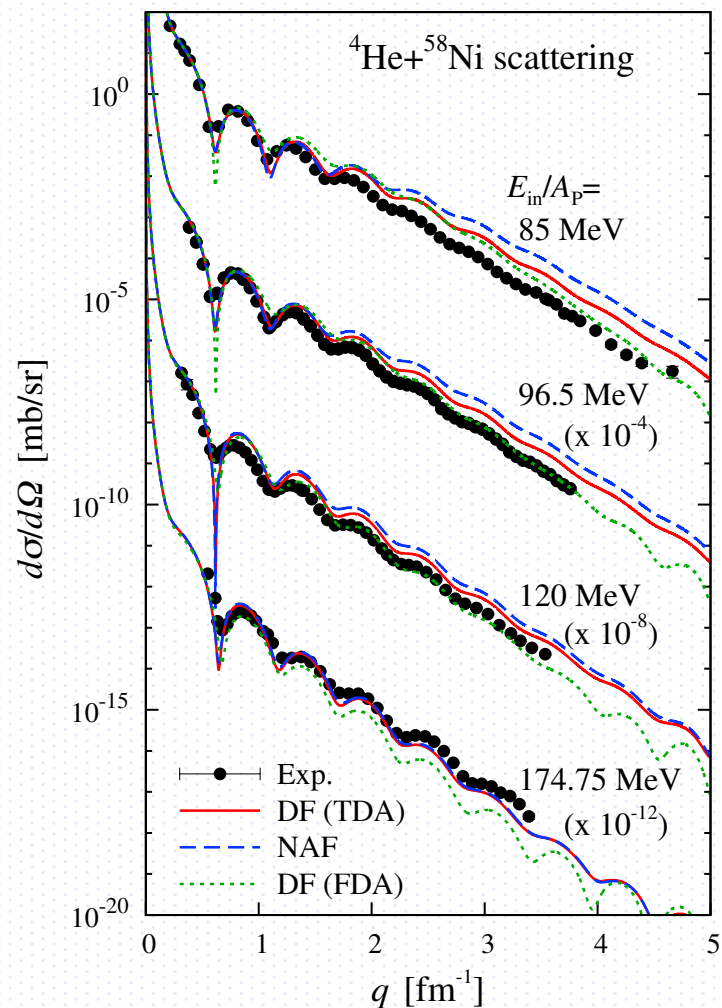
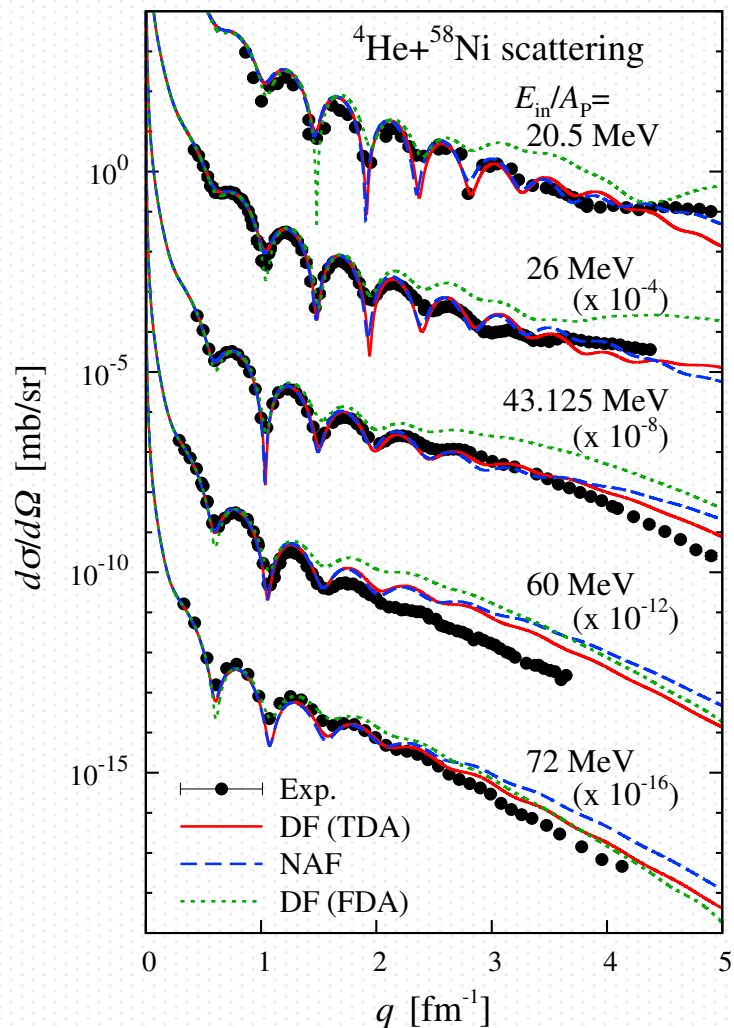
Furumoto, Sakuragi, Yamamoto, PRC78, 044610



Minomo, Ogata, Kohno, Shimizu, Yahiro,
J. Phys. G. 37, 085011

2重畳み込みモデルの計算

豊川氏 (九大)

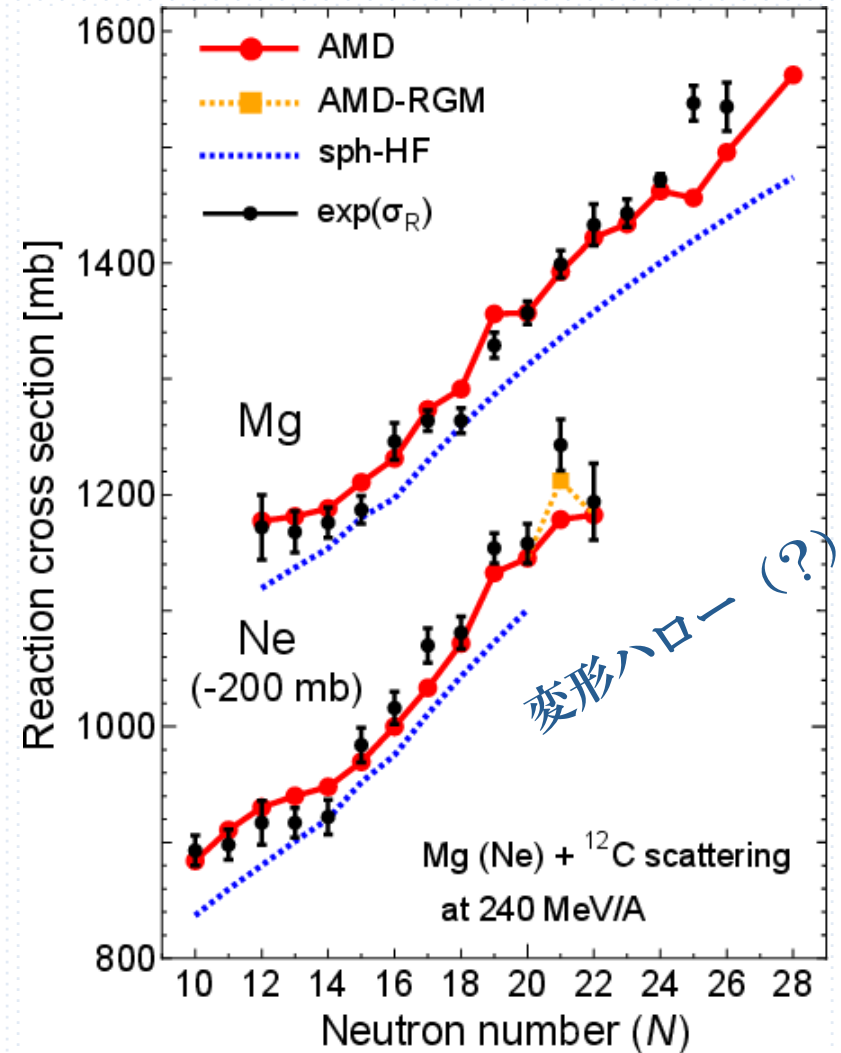
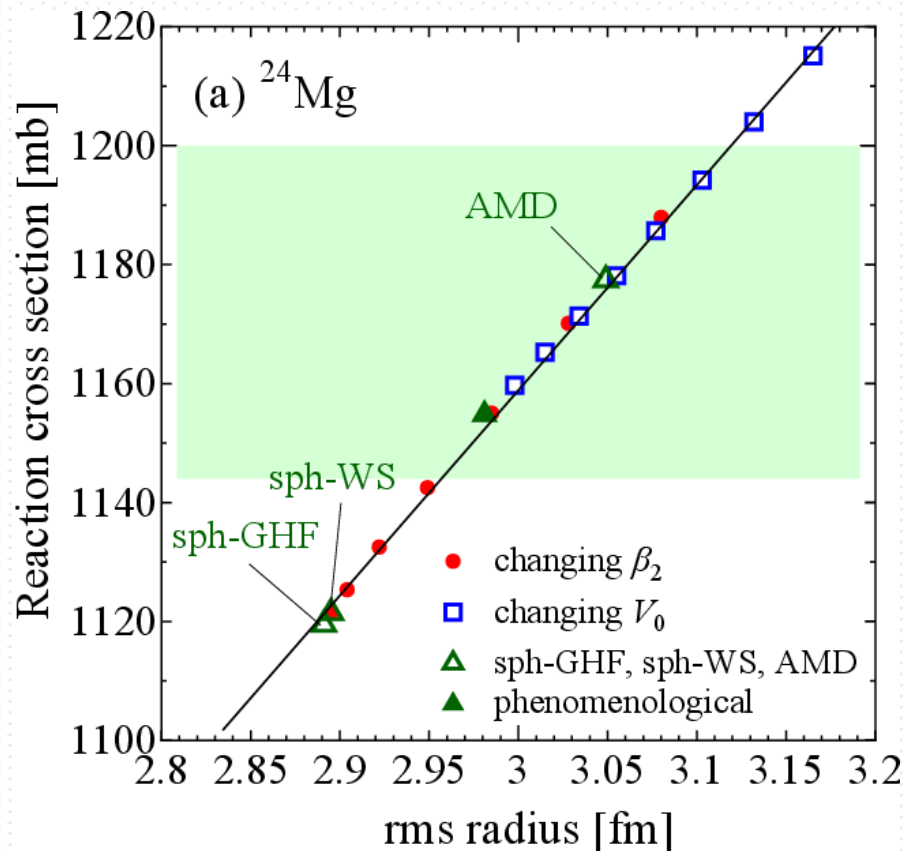


v_{NN} をchiral EFTから構築する、3体力の効果を見積もる

反応断面積

渡邊氏 (九大)

反応断面積による不安定核の
半径、変形の研究



Exp. M. Takechi, EPJ Web of Conferences 66, 02101 (2014).
M. Takechi, Private communication.

非弾性チャネル

光学模型・・・弾性散乱断面積、**反応断面積**の計算が可能

反応断面積＝弾性散乱以外  **非弾性散乱**を視るには

これまでは弾性散乱の漸近形のみを考慮

$$\psi(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \boxed{f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}}$$

弾性チャネルの散乱振幅

非弾性チャネルを含んだ漸近形 (直感的に)

$$\psi(\vec{r}, \vec{\xi}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \phi_0 + \boxed{f_0(\theta) \frac{e^{ik_0 r}}{r}} \phi_0 + \boxed{f_1(\theta) \frac{e^{ik_1 r}}{r}} \phi_1$$

非弾性チャネルの散乱振幅

非弾性チャネル

$$\left[K + h + PVP + PVQ \frac{1}{E - QHQ + i\varepsilon} QVP - E \right] P\Psi = 0$$

$$P + Q = 1, P = |0\rangle\langle 0| + \boxed{|1\rangle\langle 1|} \quad U = PVP + PVQ \frac{1}{E - QHQ + i\varepsilon} QVP$$

非弾性チャネル
(視る部分に加える)

Lippmann-Schwinger方程式

$$P\Psi^{(+)} = \Phi_0 + \frac{1}{E - K - h + i\varepsilon} PUPP\Psi^{(+)},$$

弾性チャネルの漸近形

$$\langle 0 | P\Psi^{(+)} \rangle = \langle 0 | \Phi_0 \rangle + \frac{1}{E_0 - K + i\varepsilon} \langle 0 | U | P\Psi^{(+)} \rangle,$$

$$\langle 1 | P\Psi^{(+)} \rangle = \cancel{\langle 1 | \Phi_0 \rangle} + \frac{1}{E_1 - K + i\varepsilon} \langle 1 | U | P\Psi^{(+)} \rangle,$$

=0

非弾性チャネルの漸近形

非弾性チャネルの断面積

弾性散乱のとき

$$\psi^{(+)}(\vec{r}) \rightarrow \varphi(\vec{r}) - \frac{\exp(ikr)}{r} \left[\frac{1}{4\pi} \frac{2\mu}{\hbar^2} \int \exp(-i\vec{k}' \cdot \vec{r}') V(r') \psi^{(+)}(\vec{r}') d\vec{r}' \right] = f_0(\theta)$$

$$\frac{1}{E_0 - K + i\varepsilon} \langle 0 | U | P \Psi^{(+)} \rangle$$

非弾性散乱のとき（弾性散乱からの類推）

$$\frac{1}{E_1 - K + i\varepsilon} \langle 1 | U | P \Psi^{(+)} \rangle \quad \longrightarrow \quad f_1(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2\mu}{\hbar^2} \langle \Phi_1 | U | P \Psi^{(+)} \rangle$$

$$\Phi_1 = \exp(i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}) \phi_1, |\vec{k}_1| \neq |\vec{k}|$$

非弾性散乱の断面積

励起した分だけ波の運動量が変化

単位時間あたりに測定される非弾性した粒子の個数を入射流束で割ったもの

$$d\sigma_1 = \frac{j_r dS}{j_{in}} = \frac{v_1}{v_0} |f_1(\theta)|^2 d\Omega \quad \longrightarrow \quad \frac{d\sigma_1}{d\Omega} = \frac{k_1}{k_0} |f_1(\theta)|^2$$

チャネル結合法

$$[K + h + U - E]P\Psi = 0$$

$$P\Psi = \phi_0\psi_0 + \phi_1\psi_1$$

ϕ_0, ϕ_1 は直交

左から ϕ_0 を掛けて積分

左から ϕ_1 を掛けて積分

$$[K + \langle 0|U|0\rangle - E_0]\psi_0 = -\langle 0|U|1\rangle\psi_1$$

$$[K + \langle 1|U|1\rangle - E_1]\psi_1 = -\langle 1|U|0\rangle\psi_0$$

チャネル結合方程式

各チャネルの境界条件

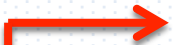
$$\psi_0 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{ik_0 r} + f_0(\theta) \frac{e^{ik_0 r}}{r}$$

$$\psi_1 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} f_1(\theta) \frac{e^{ik_1 r}}{r}$$

ψ_0 をもとめるのに ψ_1 が必要で、 ψ_1 を求めるのに ψ_0 が必要・・・

反復法による計算

チャネル結合法の計算例（反復法）


$$\left[K + \langle 0|U|0\rangle - E_0 \right] \psi_0 = -\langle 0|U|1\rangle \psi_1 \rightarrow 0 \text{ とする}$$

(1). 右辺を 0 として ψ_0 をもとめる。

(3). (2)を使って再度 ψ_0 を求める

$$\left[K + \langle 1|U|1\rangle - E_1 \right] \psi_1 = -\langle 1|U|0\rangle \psi_0^{(1)} \leftarrow (1) \text{ の解を代入}$$

(2). (1)の解を用いて ψ_1 をもとめる。



解が収束するまで行う

Born近似による非弾性散乱振幅

$$f_1(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2\mu}{\hbar^2} \langle \Phi_1 | U | \phi_0 \psi_0^{(1)} \rangle$$

ここまでのまとめ2

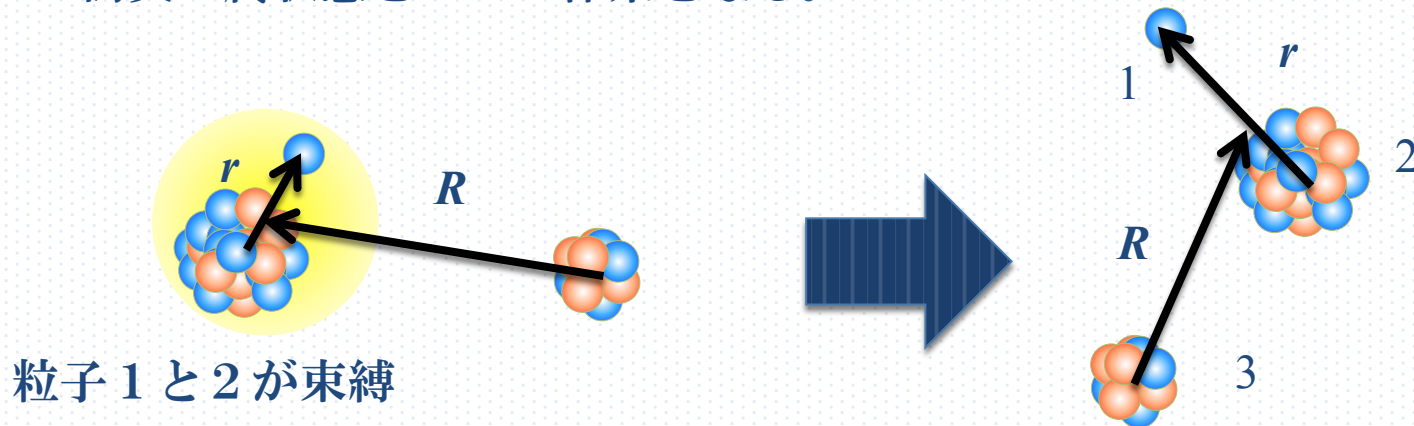
- 光学模型、光学ポテンシャルによって弾性散乱以外の視ない部分への遷移は反応断面積として記述できる。
- 現在、微視的に光学ポテンシャルを構築する研究が盛んに行われ成功を収めている。
- 反応断面積は原子核の半径、さらには変形の情報も含んでいる。
- 非弾性チャネルの計算は反応を視る模型空間を広げることで取り入れることが可能。

3体系散乱問題とCDCC

3体系の散乱問題

これまでの話・・・2粒子が衝突し2粒子が放出される反応

ここで3体系の散乱問題を考える。ただし3粒子の衝突ではなく2粒子の衝突で終状態として3体系となる。



$$[T_R + T_r + V_{12}(r) + V_{23}(r, R) + V_{31}(r, R) - E] \Psi = 0$$

Lippmann-Schwinger 方程式 (?)

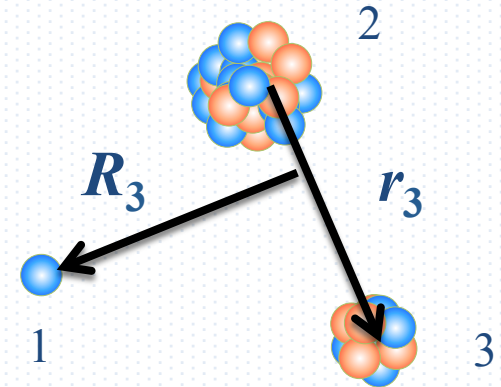
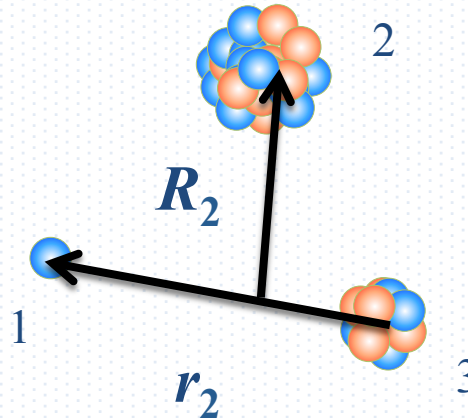
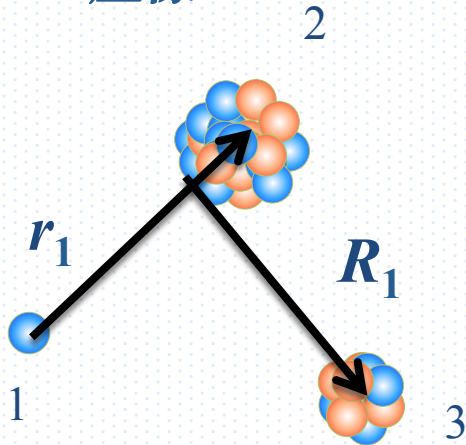
$$\Psi^{(+)} = \Phi_0 + \frac{1}{E - T_R - T_r - V_{12} + i\epsilon} [V_{23}(r, R) + V_{31}(r, R)] \Psi^{(+)}$$

→ 3体散乱の境界条件を満たすか？

3体系のJacobi座標

Jacobi座標

$$T = T_{r_1} + T_{R_1} = T_{r_2} + T_{R_2} + T_{r_3} + T_{R_3}$$



$$\Psi^{(+)} = \Phi_0 + \frac{1}{E - T_R - T_r - V_{12} + i\epsilon} [V_{23}(r, R) + V_{31}(r, R)] \Psi^{(+)}$$

散乱振幅

→
(遷移行列)

$$\langle \phi_{12} \varphi_{(12)3} | [V_{23}(r, R) + V_{31}(r, R)] | \Psi^{(+)} \rangle$$

12が束縛もしくは散乱状態
の境界条件のみ

13が束縛し2との散乱、23が束縛し1と散乱するといった
境界条件が満たされていない

Faddeev方程式

Faddeev分解

$$\Psi = \psi_{12} + \psi_{23} + \psi_{31}$$

3種類の境界条件を(12)-3, (23)-1, (31)-2考慮

Faddeev方程式

$$T = T_{r1} + T_{R1} = T_{r2} + T_{R2} + T_{r3} + T_{R3}$$

$$(T + V_{12} - E)\psi_{12} = -V_{12}(\psi_{23} + \psi_{31})$$

$$(T + V_{23} - E)\psi_{23} = -V_{23}(\psi_{31} + \psi_{12})$$

$$(T + V_{31} - E)\psi_{31} = -V_{31}(\psi_{12} + \psi_{23})$$

足すと



$$(T + V_{12} + V_{23} + V_{31} - E)\Psi = 0$$

$$\psi_{12} = \varphi_{12} + \frac{1}{E - T - V_{12} + i\epsilon} V_{12}(\psi_{23} + \psi_{31})$$

$$\psi_{23} = \frac{1}{E - T - V_{23} + i\epsilon} V_{23}(\psi_{31} + \psi_{12})$$

$$\psi_{31} = \frac{1}{E - T - V_{31} + i\epsilon} V_{31}(\psi_{12} + \psi_{23})$$

- Faddeev方程式は3体系散乱を正確に解くことができる方法
- 3つの方程式を連立して解く
- 計算は非常に大変

歪曲波 *Faddeev* 方程式

歪曲波 *Faddeev* 方程式

$$(T + V_{12} + \boxed{PV_{23}P} + \boxed{PV_{31}P} - E)\psi_{12} = \boxed{-V_{12}(\psi_{23} + \psi_{31})} \rightarrow 0$$

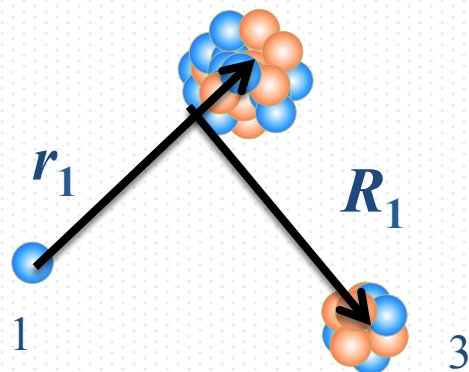
$$(T + V_{23} - E)\psi_{23} = -V_{23}\psi_{31} + (\boxed{PV_{23}P} - V_{23})\psi_{12}$$

$$(T + V_{31} - E)\psi_{31} = (\boxed{PV_{31}P} - V_{31})\psi_{12} - V_{31}\psi_{23}$$



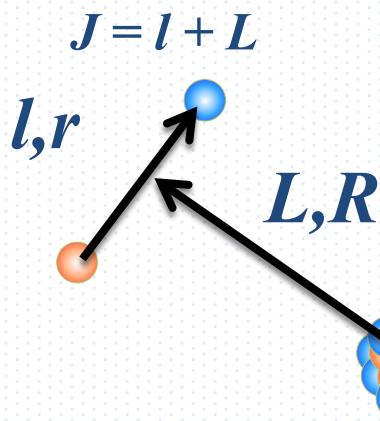
2

$$(T + V_{12} + PV_{23}P + PV_{31}P - E)\psi_{12} = 0$$



模型空間Pとして(12)-3チャンネルだけで考える。
(23)-1, (31)-2のチャンネルはQとして視ない。

重陽子の分解反応



全波動関数（全角運動量JM）

入射核の内部状態（完全系）で展開する。

$$\Psi_{JM}(\vec{r}, \vec{R}) = \phi_0(\vec{r})\chi_{JM}(\vec{R}) + \sum_{i,\ell,L} \int \left[\phi_\ell(k, \vec{r}) \otimes \chi_L(P, \vec{R}) \right]_{JM} dk$$

連続状態

動径成分Rに関するチャネル結合方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu_R} \frac{d^2}{dR^2} + \frac{\hbar^2 L(L+1)}{2\mu_R R^2} + U_{k\ell L, k\ell L}^{(J)}(k, R) - (E - \varepsilon_{i\ell}) \right] \chi_{k\ell L}^{(J)}(P, R) \\ = - \sum_{\ell' L'} \int U_{k\ell L, k'\ell' L'}^{(J)}(R) \chi_{i'\ell' L'}^{(J)}(R) dk'$$

kについて連続的な方程式

チャネル結合ポテンシャル

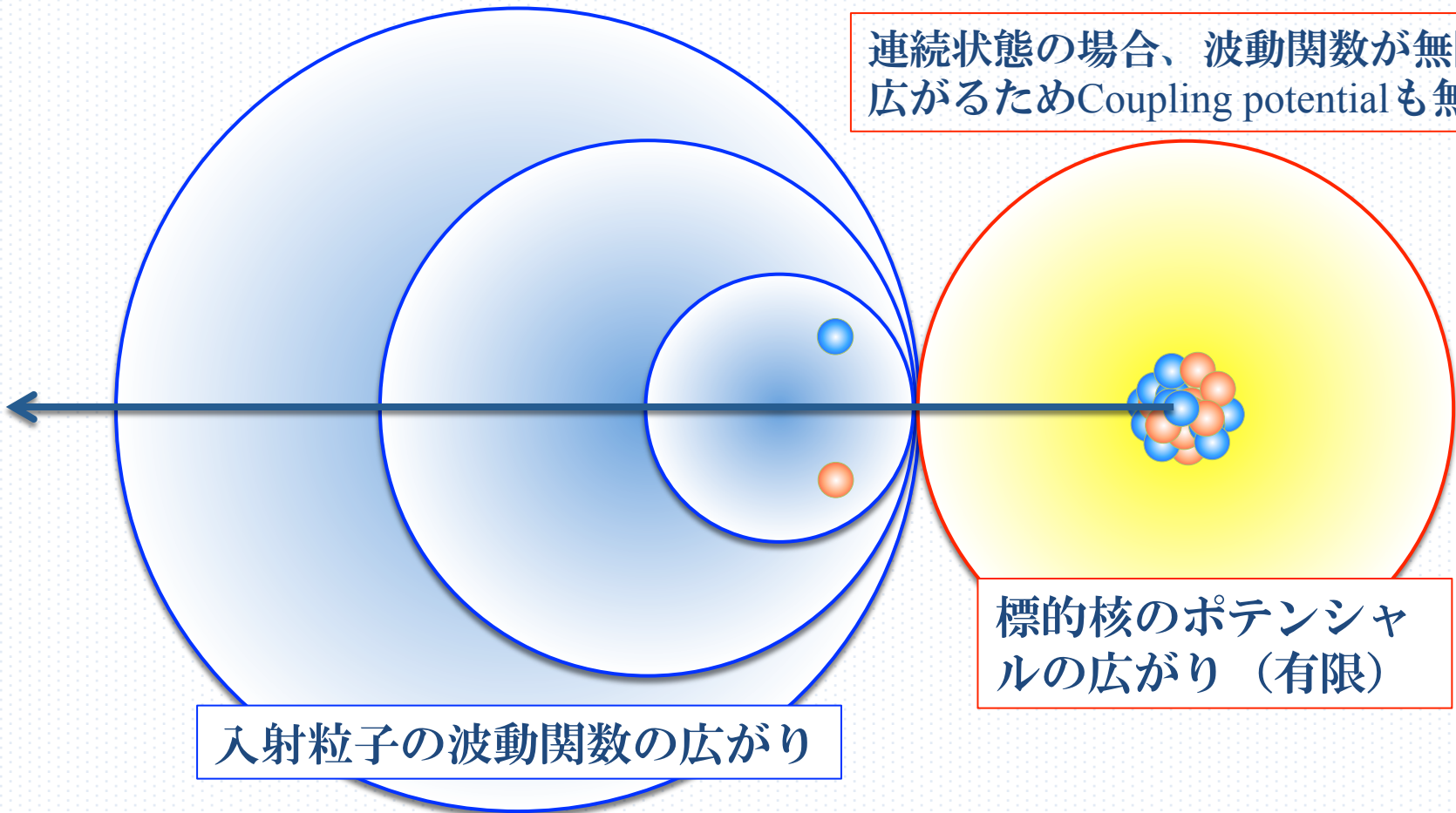
$$U_{k\ell L, k'\ell' L'}^{(J)}(R)$$

$$= \int \left[\phi_\ell(k, \vec{r}) \otimes Y_L(\Omega_R) \right]_{JM}^* \left(U_{nT}(\vec{r}, \vec{R}) + U_{pT}(\vec{r}, \vec{R}) \right) \left[\phi_{\ell'}(k', \vec{r}) \otimes Y_{L'}(\Omega_R) \right]_{JM} d\vec{r} d\Omega_R$$

結合ポテンシャル

$$U_{kk'}(R) = \int_0^{\infty} \phi^*(k, r) V(r, R) \phi(k', r) dr \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

連続状態の場合、波動関数が無限に
広がるためCoupling potentialも無限に



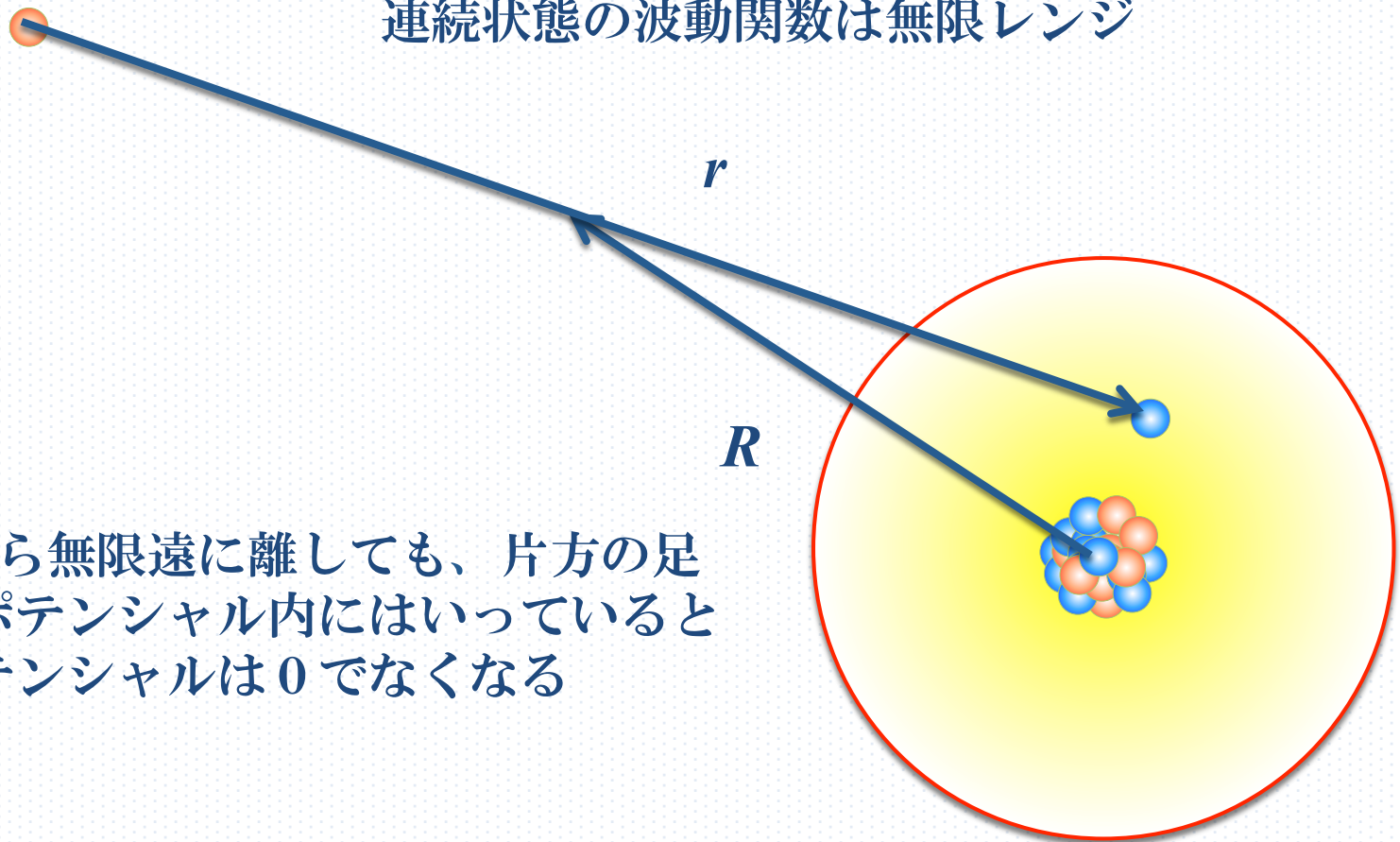
入射粒子の波動関数の広がり

標的核のポテンシャル
の広がり（有限）

結合ポテンシャル

連続状態の波動関数は無限レンジ

R をいくら無限遠に離しても、片方の足が
表的ポテンシャル内にはいると結合ポテンシャルは0でなくなる



離散化チャネル結合法

Continuum-Discretized Coupled-Channels: CDCC

角運動量 l と相対運動量 k についてある最大値までしか分解反応に寄与しないと想定。

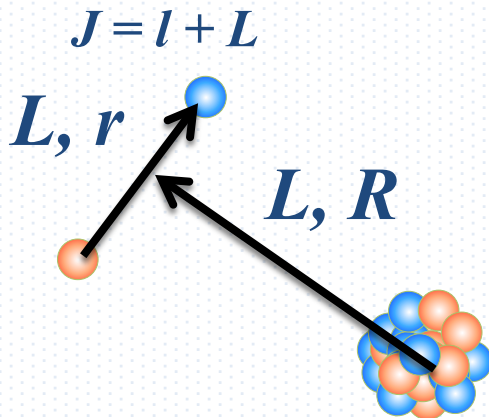
→ 角運動量 l を有限にすることで結合ポテンシャルが無限遠で0となる領域が現れる。

$$\Psi_{JM}(\vec{r}, \vec{R}) = \phi_0(\vec{r})\chi_{JM}(\vec{R}) + \sum_{\ell, L}^{\ell_{\max}} \int_0^{k_{\max}} \left[\phi_{\ell}(k, \vec{r}) \otimes \chi_L(P, \vec{R}) \right]_{JM} dk$$



$$\sum_i^{i_{\max}} \sum_{\ell, L}^{\ell_{\max}} \left[\phi_{i\ell}(\vec{r}) \otimes \chi_L(\vec{R}) \right]_{JM}$$

相対運動量 k について有限個の離散的状态で記述

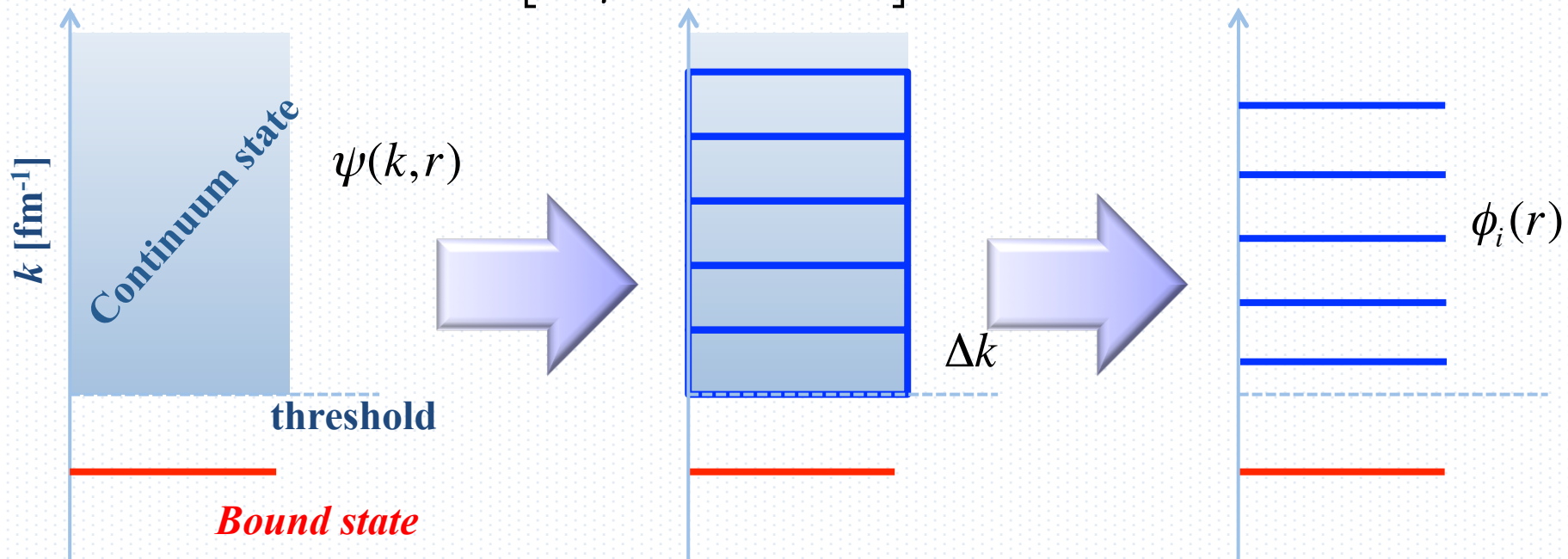


どうやって連続状態を離散化するか？

Momentum-bin法

2体系の連続状態の波動関数は2体の散乱問題の解

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + V(r) - \varepsilon \right] \psi(k, r) = 0$$



Average method

$$\phi_i(r) = \frac{1}{\sqrt{\Delta k}} \int_{k_{i-1}}^{k_i} \psi(k, r) dk$$

Midpoint method

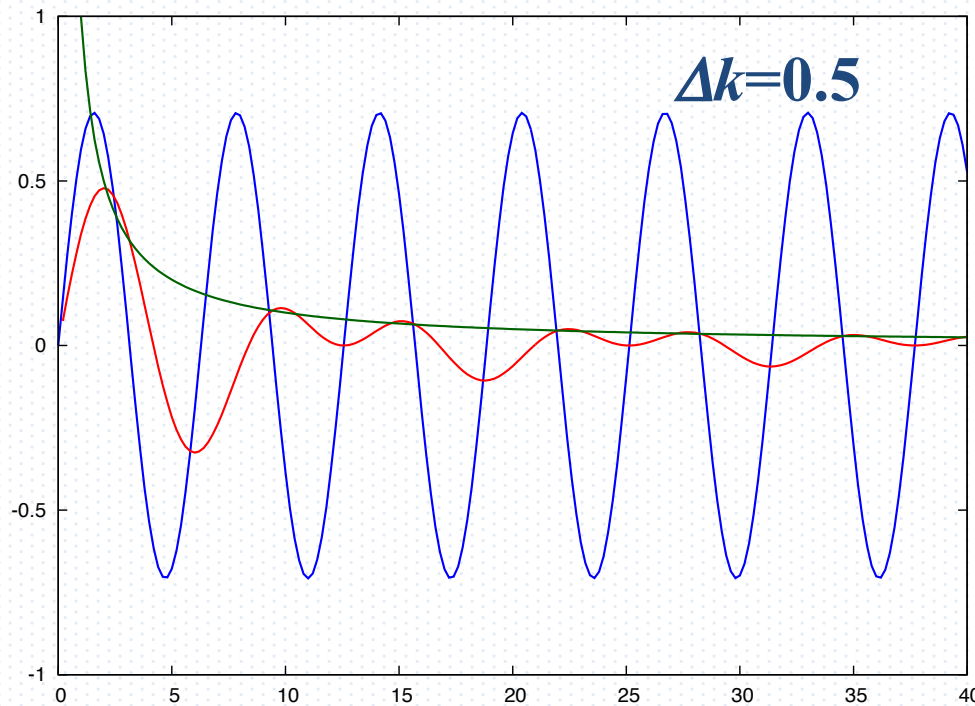
$$\phi_i(r) = \sqrt{\Delta k} \psi(\bar{k}_i, r)$$

Average法とMidpoint法

$$\phi_i(r) = \frac{1}{\sqrt{\Delta k}} \int_{k_{i-1}}^{k_i} \psi(k, r) dk \approx \frac{1}{\sqrt{\Delta k}} \int_{k_{i-1}}^{k_i} \sin(kr) dk$$

$$\phi_i(r) = \frac{2}{r\sqrt{\Delta k}} \sin\left(k_i r - \frac{\Delta k r}{2}\right) \sin \frac{\Delta k r}{2}$$

1/rで減衰する波動関数

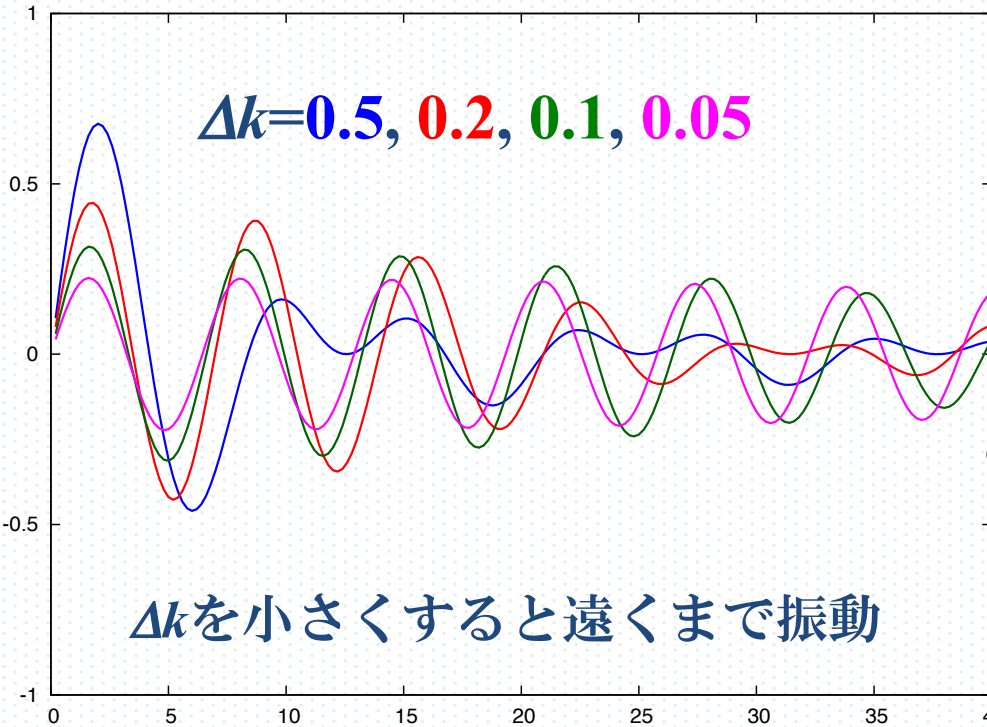


Midpoint法の波

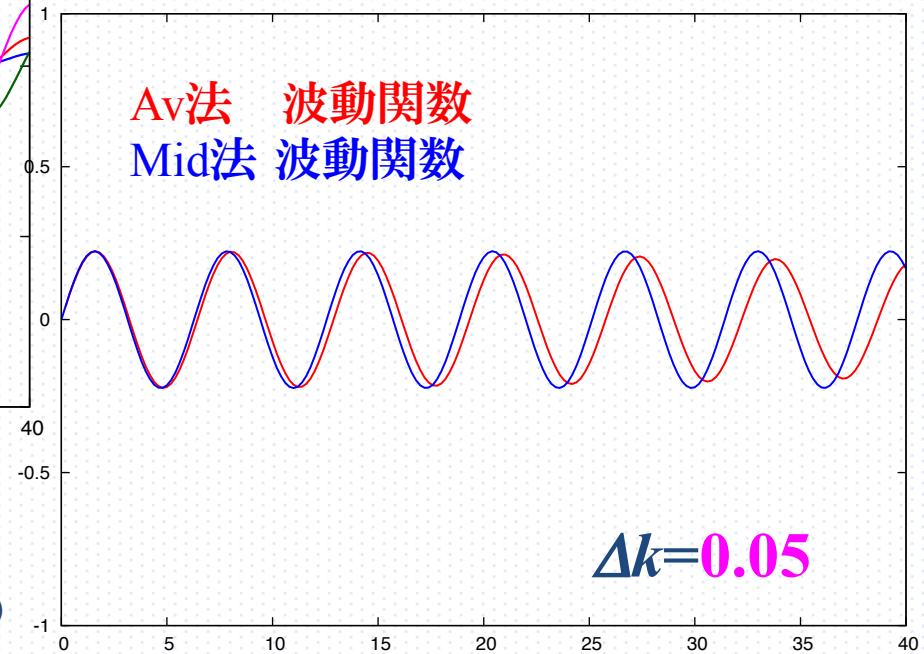
Average法の波

1/rのdamping

Δk のふるまい



Δk を小さくすると $A_v = M_{id}$



Yahiro, Nakano, Iseri, Kamimura, PTP67, 1464(1982)
Piyadasa, Yahiro, Kamimura, Kawai, PTP81, 910 (1989)
Piyadasa, Kawai, Kamimura, Yahiro, PRC60, 044611 (1999)

Midpoint法とAverage法が一致すること、Average法が収束することについては確認済み。→Average法が確立された離散化の方法

Pseudo-state法

E. W. Schmid and H. Ziegelmann, *The Quantum Mechanical Three-Body Problem* p. 192, 1974. R. C. Johnson and P. C. Tandy, Nucl. Phys. A 235 (1974), 56. B. Anders and A. Lindner, Nucl. Phys. A 296 (1978), 77.

散乱問題

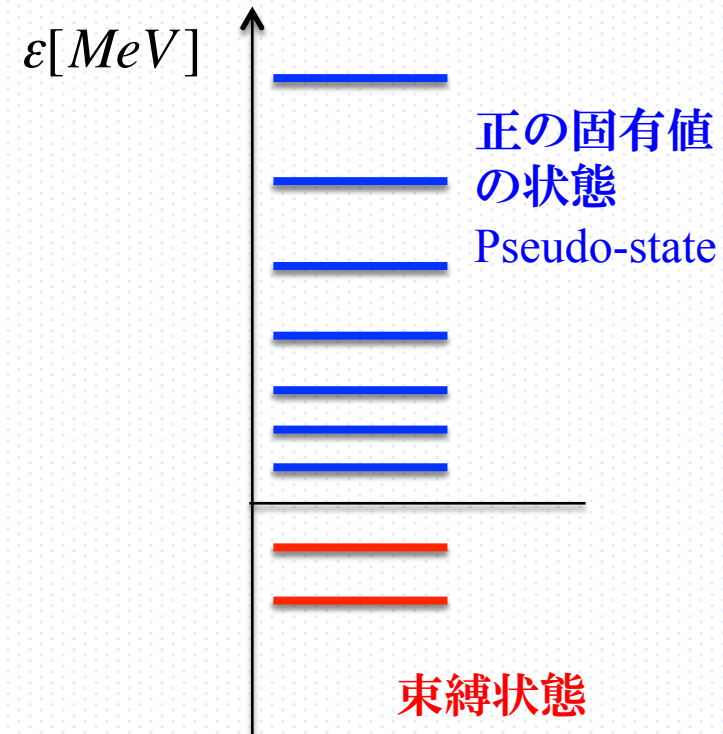
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + V(r) - \varepsilon \right] \psi(k, r) = 0 \quad \longrightarrow \quad H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + V(r) \quad \text{の固有値問題}$$

$$\phi(r) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} C_j \varphi_j(r)$$

$$\left[\left(\begin{array}{c} H_{ij} \end{array} \right) - \varepsilon \left(\begin{array}{c} N_{ij} \end{array} \right) \right] \left(\begin{array}{c} C_j \end{array} \right) = 0$$

$$N_{ij} = \int \varphi_i^*(r) \varphi_j(r) dr$$

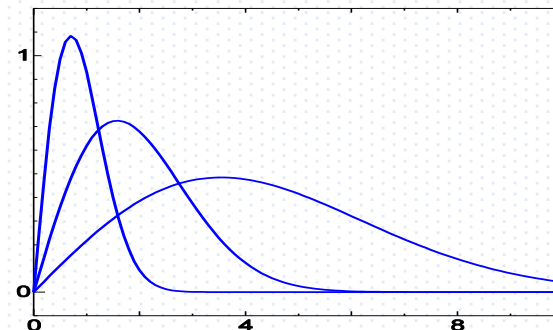
$$H_{ij} = \int \varphi_i^*(r) H \varphi_j(r) dr$$



Gaussian Basis Function

- *Real-range Gaussian basis function*

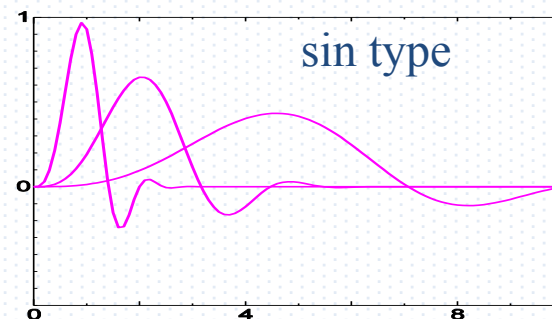
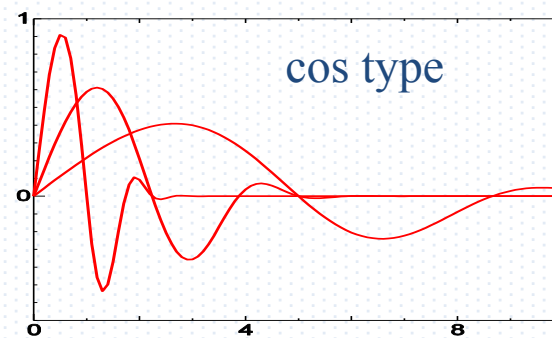
$$\varphi_{j\ell}(r) = r^\ell \exp\left[-\frac{r^2}{r_j^2}\right]$$



- *Complex-range Gaussian basis function*

$$\varphi_{j\ell}(r) = r^\ell \exp\left[-\frac{r^2}{r_j^2}\right] \exp\left[-i\lambda_w \frac{r^2}{r_j^2}\right]$$

cos と sin の形があり振動を記述するのに有利



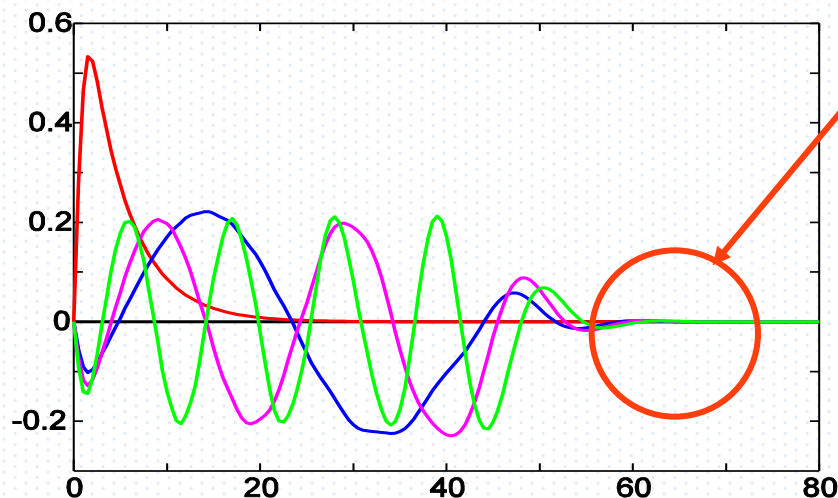
- *Range parameter*

$$r_j = r_1 a^{j-1} \quad \text{等比級数}$$

一般的には r_1 と $r_{\max}$ を決定し公比 a を決定

*Pseudo-state*法の問題点

□ 漸近形の問題



束縛状態近似で求めている
ため遠方で0になる。



広い模型空間で近似的に
完全系が張れない？

□ 離散的状態の固有値

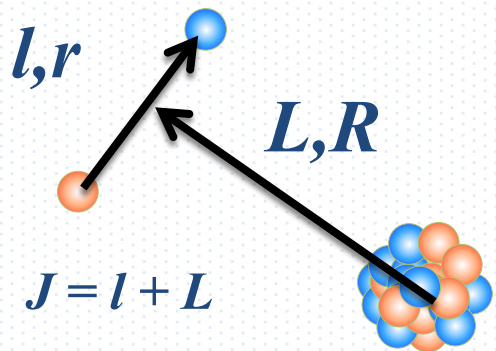
基底関数の取り方を変化させると固有値が変化

→ 状態が変化し、解が収束しているか判断しづらい



3体分解反応に関して PS 法の正当性をAv法と比較し確認

離散化チャネル結合方程式



全波動関数 (全角運動量JM)

$$\Psi_{JM}(\vec{r}, \vec{R}) = \phi_0(\vec{r}) \chi_{JM}(\vec{R}) + \sum_{i, \ell, L}^{\ell \max} \left[\phi_{i\ell}(\vec{r}) \otimes \chi_L(\vec{R}) \right]_{JM}$$

動径成分Rに関するチャネル結合方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu_R} \frac{d^2}{dR^2} + \frac{\hbar^2 L(L+1)}{2\mu_R R^2} + U_{i\ell L, i\ell L}^{(J)}(R) - (E - \varepsilon_{i\ell}) \right] \chi_{i\ell L}^{(J)}(R) \\ = - \sum_{i' \ell' L'} U_{i\ell L, i' \ell' L'}^{(J)}(R) \chi_{i' \ell' L'}^{(J)}(R)$$

チャネル結合ポテンシャル

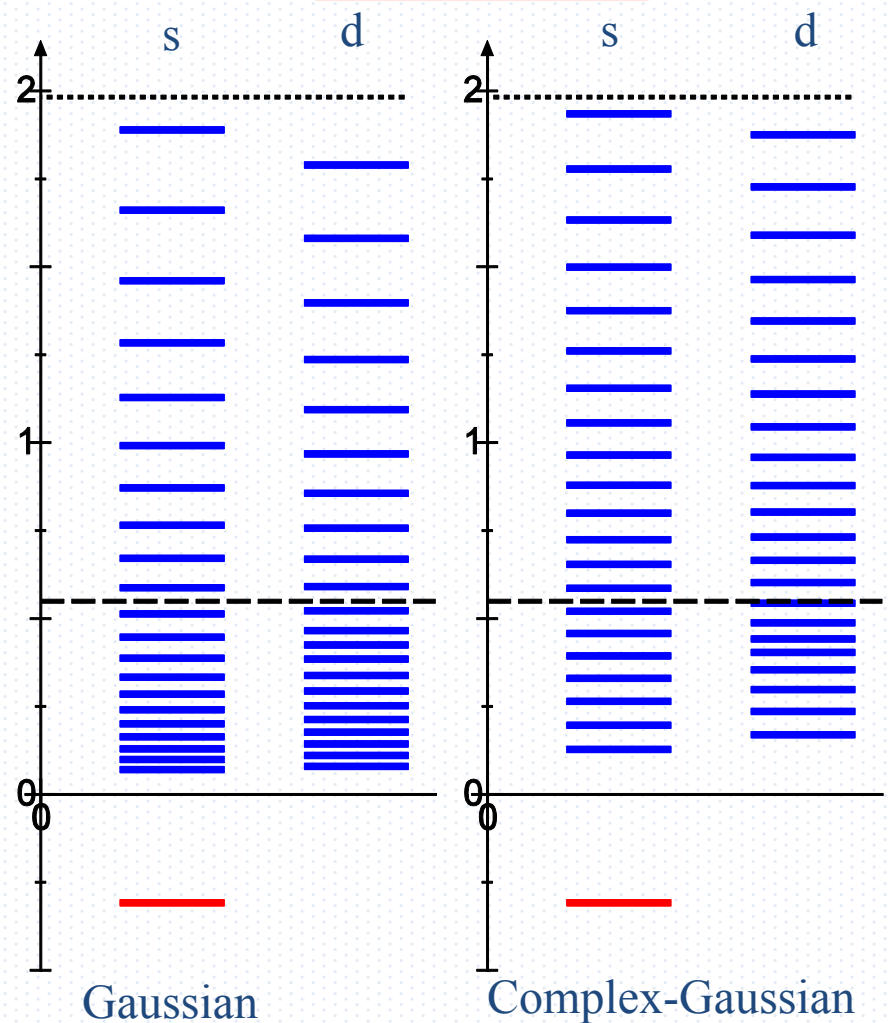
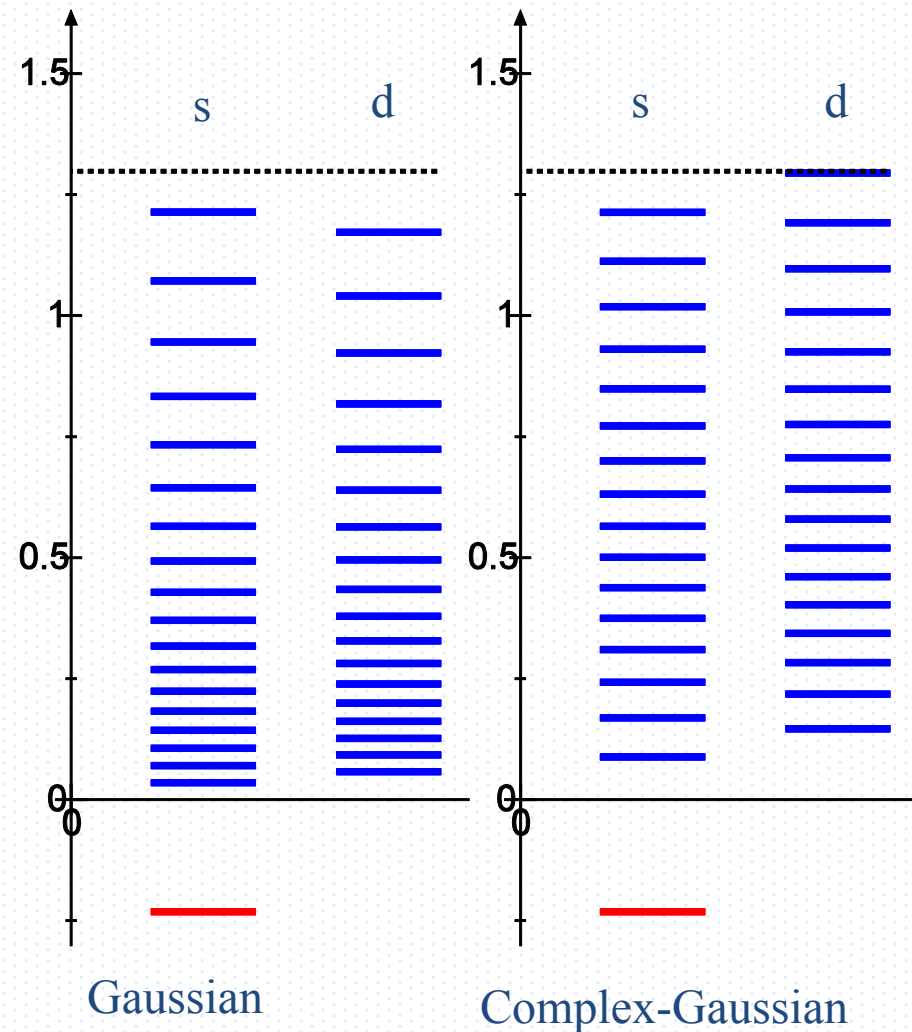
$$U_{i\ell L, i' \ell' L'}^{(J)}(R)$$

$$= \int \left[\phi_{i\ell}(\vec{r}) \otimes Y_L(\Omega_R) \right]_{JM}^* \left(U_{nT}(\vec{r}, \vec{R}) + U_{pT}(\vec{r}, \vec{R}) \right) \left[\phi_{i' \ell'}(\vec{r}) \otimes Y_{L'}(\Omega_R) \right]_{JM}^* d\vec{r} d\Omega_R$$

Pseudo-state (d , ${}^6\text{Li}$)

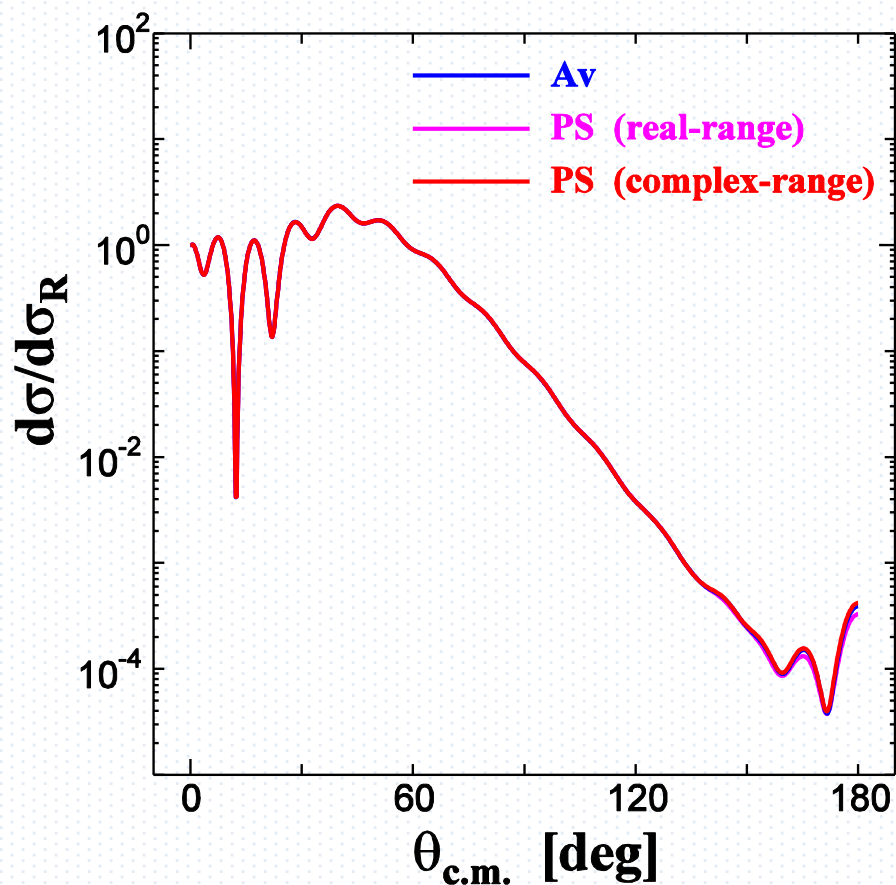
$$d = n + p$$

$${}^6\text{Li} = d + {}^4\text{He}$$

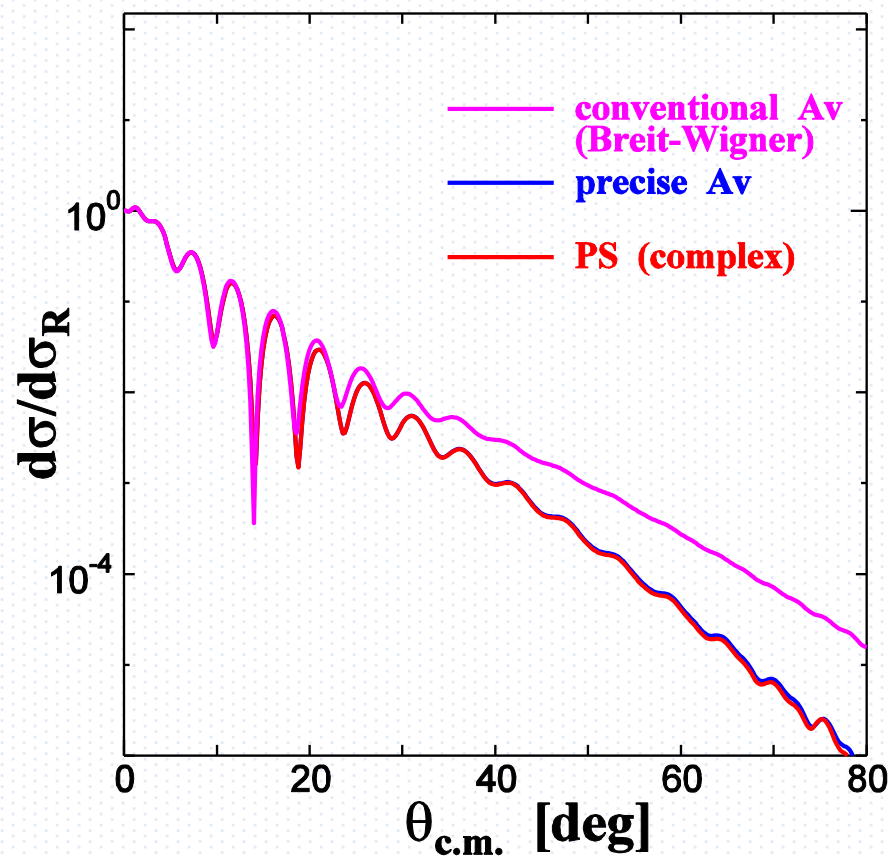


彈性散亂微分斷面積

$d(n+p)+^{58}\text{Ni}$ scattering at 80 MeV



$^6\text{Li}(d+^4\text{He})+^{40}\text{Ca}$ scattering at 156 MeV



分解断面積の平滑化

CDCCでは連続状態を離散化しているため、得られる断面積は離散的状态への非弾性断面積。それをエネルギーの連続的な分解断面積に変換する必要が有る。

離散的なT行列 → 連続的なT行列

$$T(k, P) = \langle \psi(k) \varphi(P) | U | \Psi^{(+)} \rangle$$

$$1 \approx |\phi_0\rangle \langle \phi_0| + \sum_i^{i_{\max}} |\phi_i\rangle \langle \phi_i|$$

近似的な完全系

$$T(k, P) = \sum_i \langle \psi(k) | \phi_i \rangle \langle \phi_i \varphi(P) | U | \Psi^{(+)} \rangle$$

離散的なT行列

$$T(k, P) = \sum_i f_i(k) T_i$$

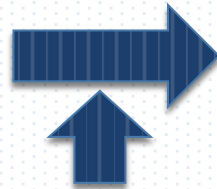
Smoothing factor

$$f_i(k) = \langle \psi(k) | \phi_i \rangle$$

Smoothing factor

f_i の重みで重ね合わせる

$$f_i(k) = \int \psi^*(k, r) \phi_i(r) dr$$



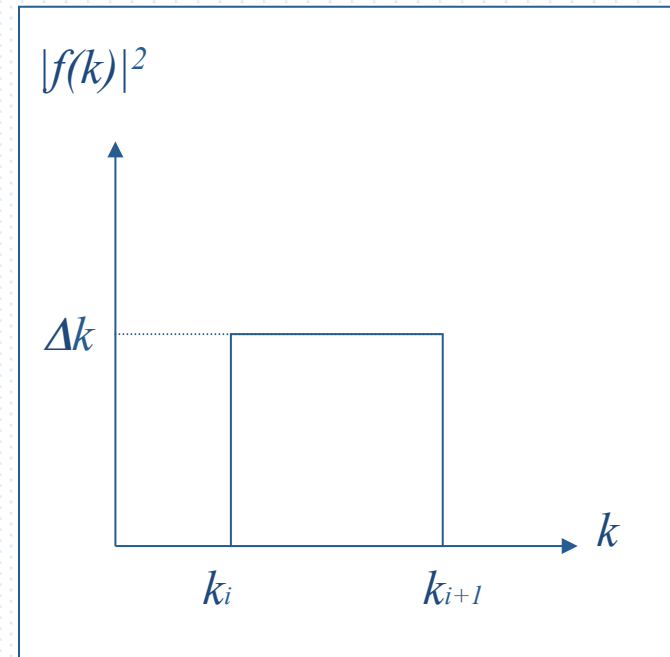
$$\phi_i(r) = \int \psi(k, r) f_i(k) dk$$

$$\delta(r' - r) = \int \psi^*(k, r') \psi(k, r) dk$$

Average法でのSmoothing factor

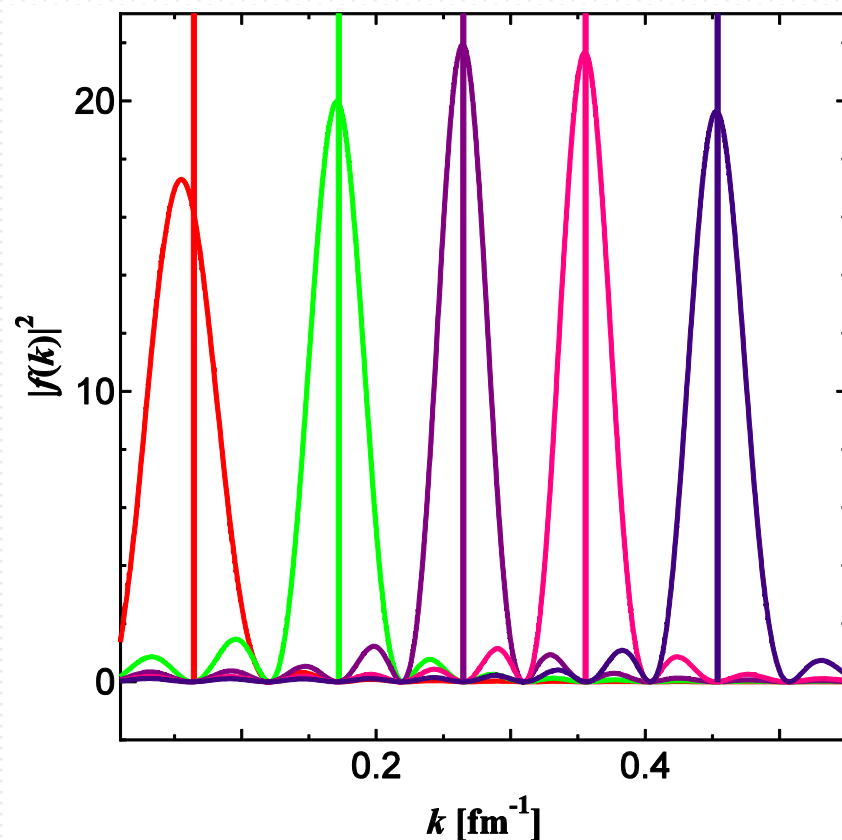
$$f_i(k) = \int \psi^*(k, r) \left[\frac{1}{\sqrt{\Delta k}} \int_{k_{i-1}}^{k_i} \psi(k', r) dk' \right] dr$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta k}} \int_{k_{i-1}}^{k_i} \delta(k - k') dk' = \sqrt{\Delta k}$$

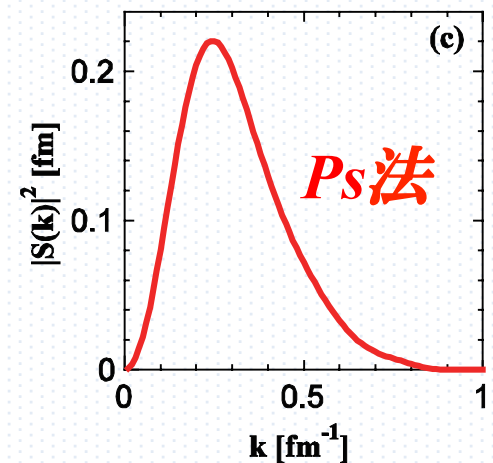
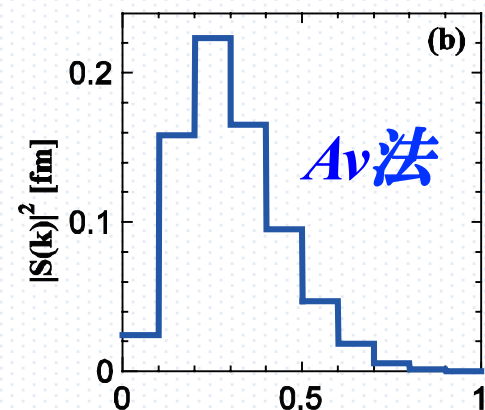
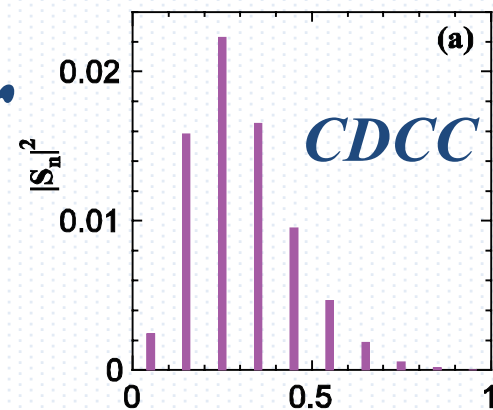


Smoothing factor

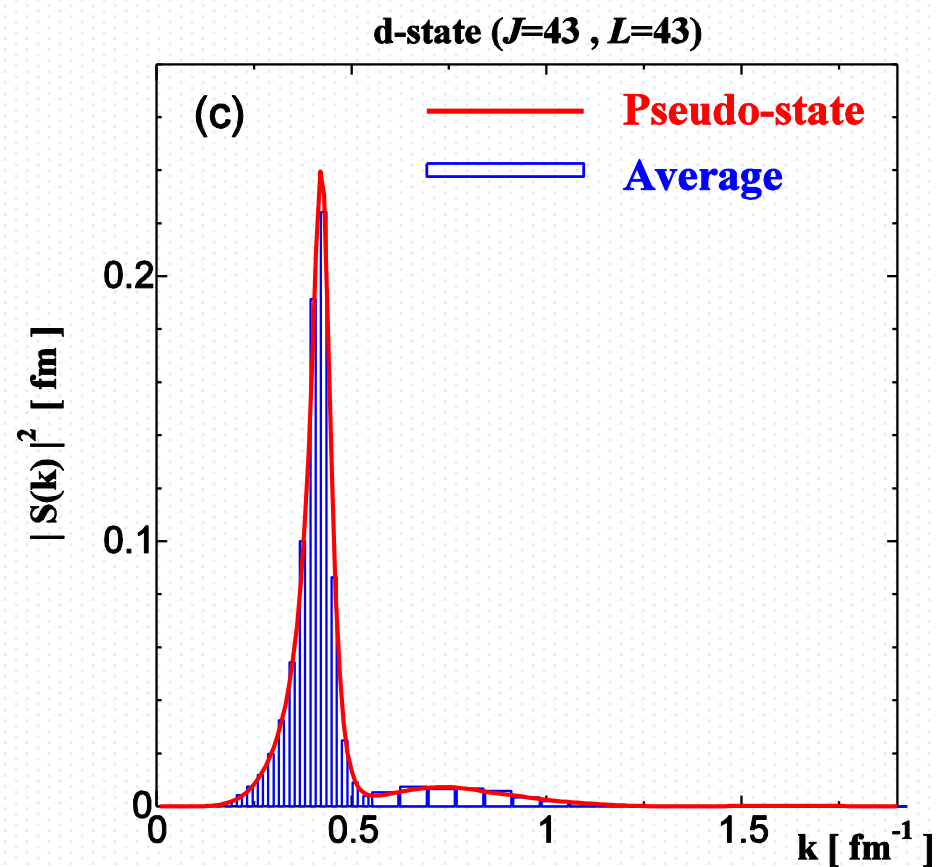
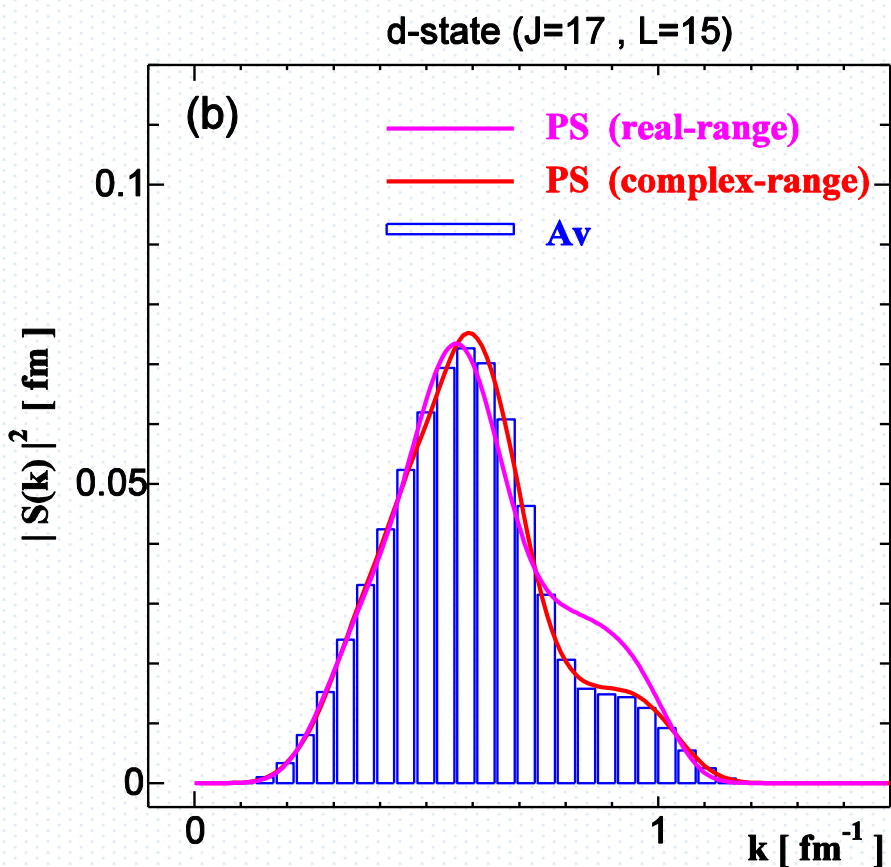
Pseudo-state法でのSmoothing factor



各状態のエネルギー固有値がほぼ中心になる山



分解断面積

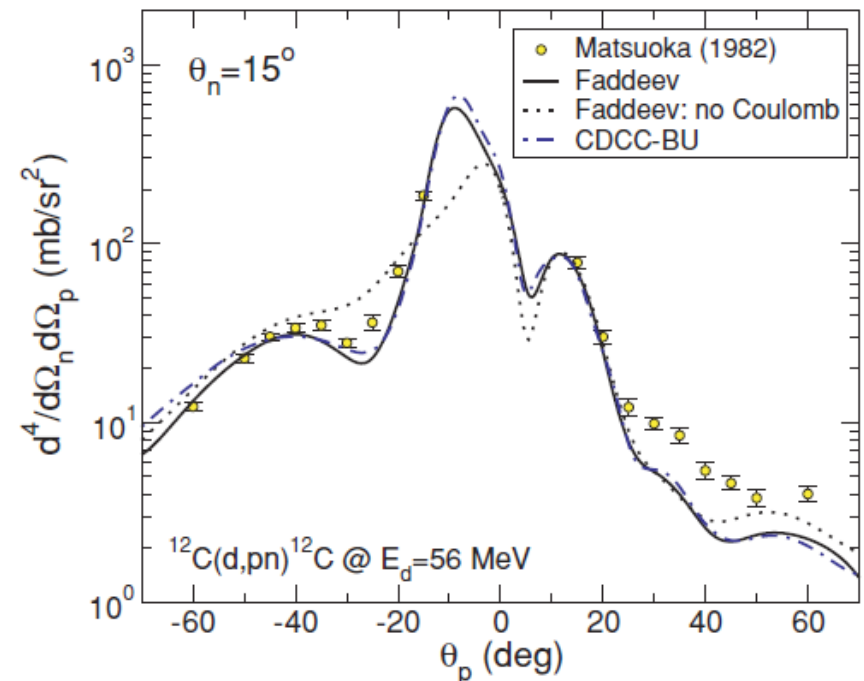
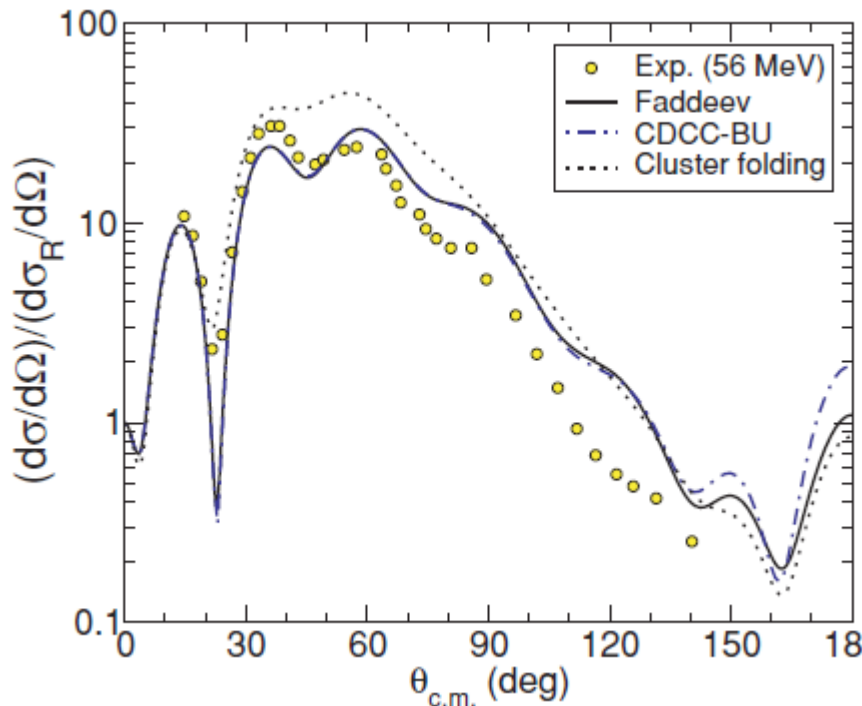


Av法では *resonance state* の取り扱いについて気をつける必要がある。

CDCC vs Faddeev

Deltuva, Moro, Cravo, Nunes, Fonseca PRC76, 064602 (2007)

- CDCC法は昔から収束性の問題等についてFaddeev理論から批判を受けていた → 歪曲波Faddeev理論との対応
- 近年になってFaddeev計算とCDCC計算の比較ができるようになり、それが良く一致することが確認された。



ここまでのまとめ3

- CDCC法における離散化の方法としてAverage法と *Pseudo-state法* の比較を行い両者の一致を確認。
- 離散的断面積、弾性散乱微分断面積は一致。
- 連続的断面積、分解断面積はSmoothingを行うことでAv法とPS法を比較可能になった。
- CDCC法は適切に設定された *模型空間* の中で構築された反応論。
- 分解過程が重要となる弱束縛不安定核の反応解析で成功を収めている。

CDCCの発展

Continuum-Discretized Coupled-Channels: CDCC

Yahiro, Ogata, TM, Minomo, PTEP01A206, (2012).

CDCC計算

一般的な計算量(重陽子の分解反応)

- ✓ 結合するチャネル数は100。
→ それだけの連立した方程式を解く。
- ✓ 差分法で結合ポテンシャルが0となる R まで解いていく。
→ $R \sim 30$ fm、差分法の刻み $\Delta R \sim 0.1$ fm程度
- ✓ 全角運動量 $J = 100$ 。



解が収束したかどうかを確認するために計算の模型空間を広げて収束性を確認。

Coulomb分解の記述

Coulomb分解での計算量

- ✓ 結合するチャネル数は100。
- ✓ 差分法で結合ポテンシャルが0となるRまで解いていく。
→ $R \sim 1000$ fm、差分法の刻み $\Delta R \sim 0.1$ fm程度
- ✓ 全角運動量 $J = 10000$ 。

- Rが核力のときの30倍、角運動量が1000倍
→ 計算時間は3000倍
- 核力分解の計算が1分だとするとCoulomb分解の計算は2日以上・・・さらに収束性のチェック・・・



Eikonal CDCC法の提案

Eikonal-CDCC

角運動量の大きな部分波をEikonal近似で見積もる。

$$\chi_i(R) = \psi_i^{(b)}(Z) e^{iK_i^{(b)}Z} \quad \psi_i^{(b)}(Z) : \text{弱い振動}$$

Eikonal CC方程式

$$\frac{i\hbar^2 K_i^{(b)}}{\mu} \frac{d}{dZ} \psi_i^{(b)}(Z) = \sum_j U_{ij}^{(b)}(Z) \psi_j^{(b)}(Z) e^{i(K_j^{(b)} - K_i^{(b)})Z}$$

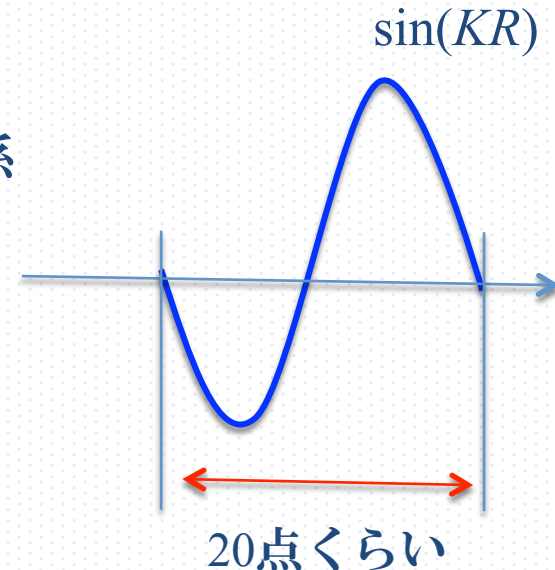
□ 2階微分方程式→1階微分方程式

差分法で散乱波を解く場合の刻み ΔR と波数 K の関係

$$\Delta R \cdot K \approx 0.2$$

波数 K が大きい（高エネルギー）場合刻みを細かくとる必要がある。

Eikonal近似の場合は刻みが大きくても問題ない。



Eikonal 散乱振幅

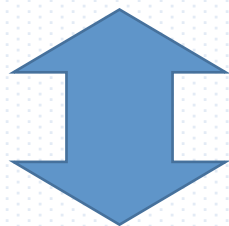
$$f_{EK}(\theta) = iK \int J_0(qb) (1 - e^{i\chi(b)}) b db$$

$$Kb = L + \frac{1}{2}$$

$$= iK \sum_L \int_{L/K}^{(L+1)/K} J_0(qb) (1 - e^{i\chi(b)}) b db$$

$$\approx iK \sum_L \underbrace{J_0\left((2L+1)\frac{\theta}{2}\right) (1 - e^{i\chi(b)})}_{\approx P_L(\cos\theta)} \int_{L/K}^{(L+1)/K} b db$$

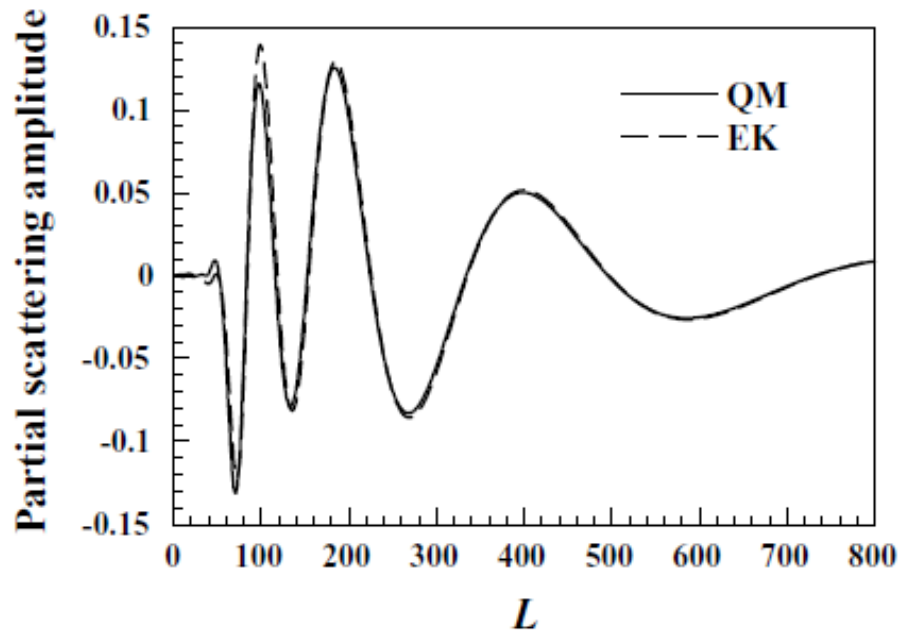
$$\approx \frac{i}{2K} \sum_L (2L+1) (1 - e^{i\chi(b)}) P_L(\cos\theta) = \frac{2L+1}{2K^2}$$



Eikonal 散乱振幅と量子
力学的散乱振幅の対応

$$f_{QM}(\theta) = \frac{i}{2K} \sum_L (2L+1) (1 - S_L) P_L(\cos\theta)$$

Eikonal vs 量子力学



$$F^{EK}(L) = (2L+1)(1 - e^{i\chi(b)})$$

$$F^{QM}(L) = (2L+1)(1 - S_L)$$

Hybrid 散乱振幅

$$f(\theta) = \frac{i}{2K} \sum_{L=0}^{L_c} (2L+1)(1 - S_L) P_L(\cos \theta) + \frac{i}{2K} \sum_{L=L_c}^{L_{\max}} (2L+1)(1 - e^{i\chi(b)}) P_L(\cos \theta)$$

ある L_c までは量子力学的に計算し、 L_c 以上はEikonal近似で計算する

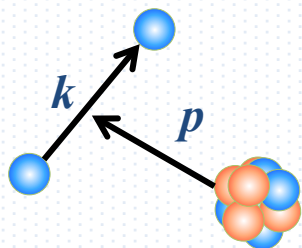
多体系入射核反応への適応

基本的にCDCC法は2体系入射反応だけの理論ではない。

→ 多体系入射核反応でも適用可能

問題点：多体系の分解状態をどうやって記述するか？

例：3体系のAverage法



$\psi(p, k)$

3体系の波動関数

$$\hat{\psi}(\bar{p}_i, \bar{k}_i) = \int_{p_{i-1}}^{p_i} \int_{k_{i-1}}^{k_i} \psi(p, k) dk dp$$

あらゆる p, k に関する3体系の散乱波動関数を求め、 p, k の空間でbinに区切り離散化する。

問題点：

- ✓ 3体系の散乱波動関数の記述
- ✓ Momentum-binの取り方

多体系のPseudo-state法

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu_r} \nabla_r^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu_y} \nabla_y^2 + V_{12} + V_{23} + V_{31} \quad \text{の固有値問題}$$

3体系の基底関数

$$\phi(r, y) = \sum_{n=1}^{n_{\max}} \sum_{j=1}^{j_{\max}} C_{nj} \varphi_n(r) \varphi_j(y)$$

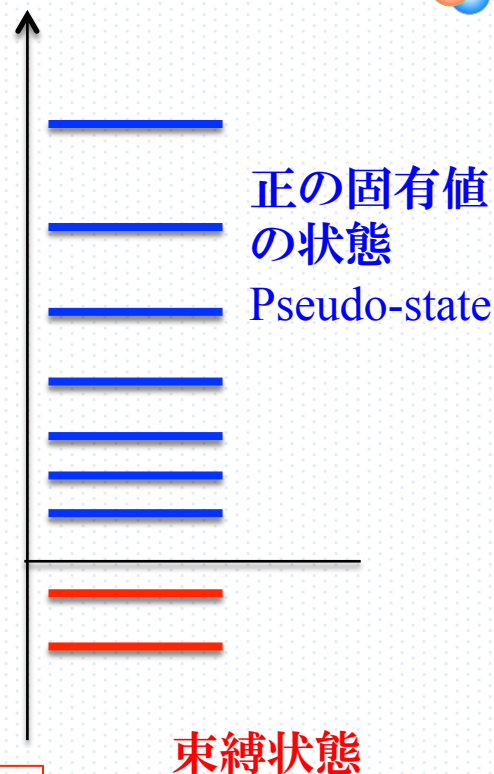
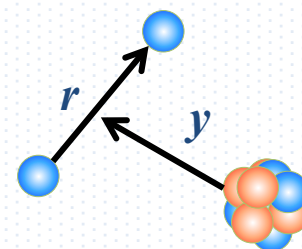
固有値方程式 (2体系と同じ)

$$\left[\begin{pmatrix} H_{mi,nj} \end{pmatrix} - \varepsilon \begin{pmatrix} N_{mi,nj} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} C_{nj} \end{pmatrix} = 0$$

行列要素の計算

$$N_{mi,nj} = \int \varphi_m^*(r) \varphi_i^*(y) \varphi_n(r) \varphi_j(y) dy dr$$

$$H_{mi,nj} = \int \varphi_m^*(r) \varphi_i^*(y) H \varphi_n(r) \varphi_j(y) dy dr$$

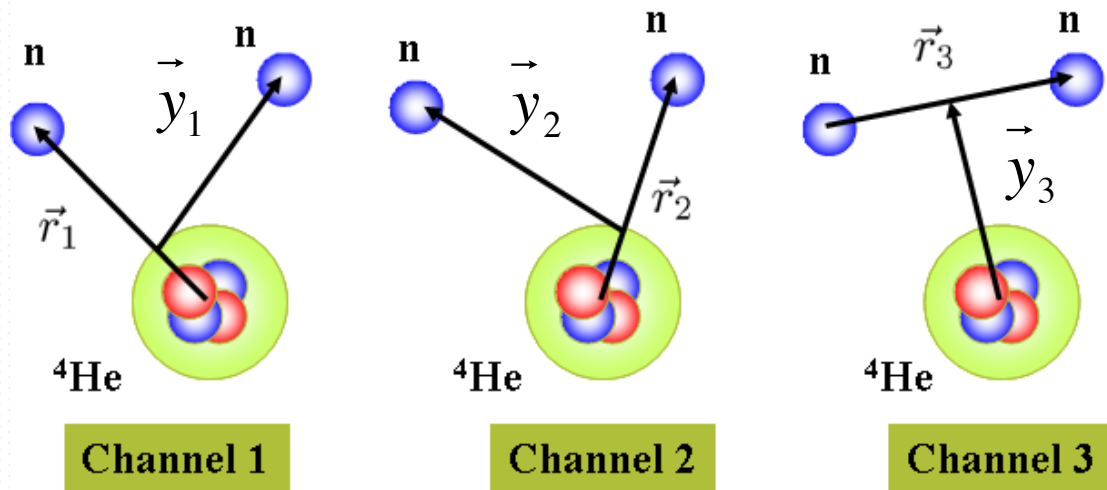


PS法は多体系でも同様に計算できる

${}^6\text{He}$ の離散的連続状態の計算

□ Gaussian Expansion Method

E. Hiyama, Y. Kino, and M. Kamimura, Prog. Part. Nucl. Phys. 51, 223 (2003)



□ Hamiltonian

➤ V_{nn} : Bonn-A

➤ $V_{\alpha n}$: KKNN int.

n - ${}^4\text{He}$ 禁止状態 → OCM

S. Saito, Prog. Theor. Phys. 41 (1969), 705

${}^6\text{He}$ Three-body Hamiltonian

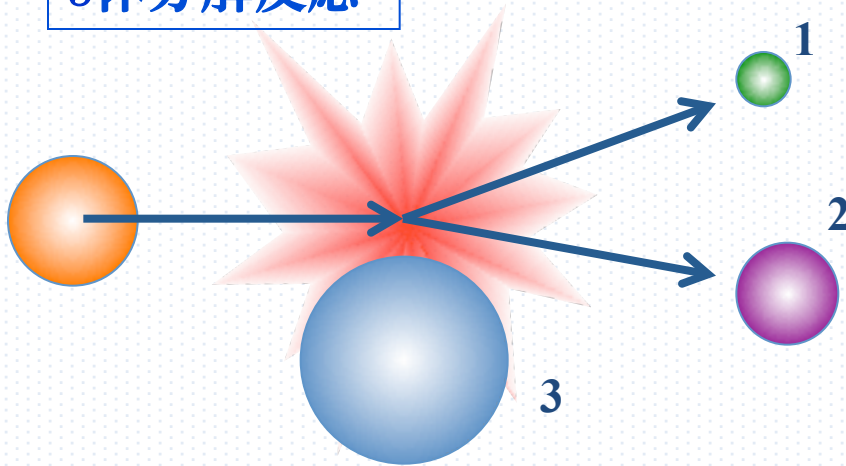
$$H = T_r + T_y + V_{nn} + V_{nc} + V_{nc} + V_{nnc}$$

Gaussian basis functions

$$\phi_{\text{Im}}(r, y) = \sum_{c=1}^3 \sum_{nj\ell\lambda} A_{nj\ell\lambda}^{(c)} \varphi_{n\ell}(r_c) \varphi_{j\lambda}(y_c) \left[\left[Y_{\ell}(\Omega_r) \otimes Y_{\lambda}(\Omega_y) \right] \otimes S \right]_{\text{Im}}$$

分解反応について

3体分解反応



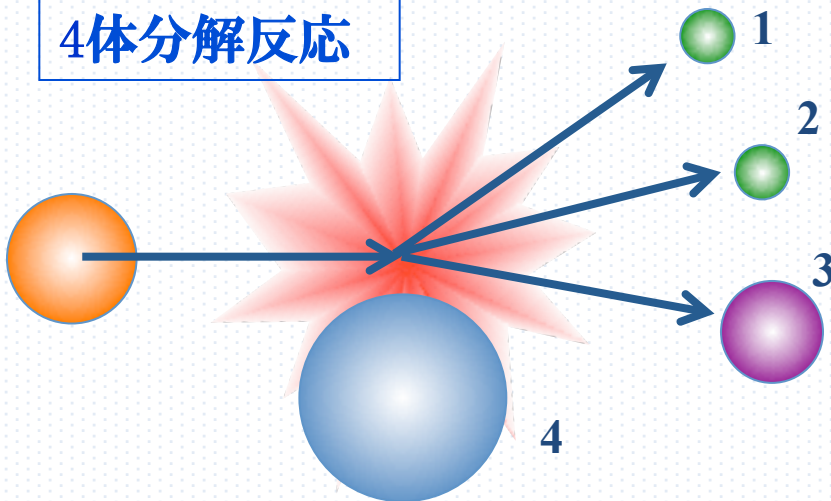
入射核が**2粒子**に分解

入射核(**2体**) + 標的核(**1体**)
→ **3体分解反応**

Ex.) d, ${}^6\text{Li}$, ${}^{11}\text{Be}$, ${}^8\text{B}$, ${}^{15}\text{C}$, etc..

One-neutron halo

4体分解反応



入射核が**3粒子**に分解.

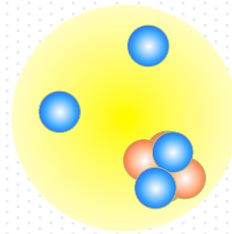
入射核(**3体**) + 標的核(**1体**)
→ **4体分解反応**

Ex.) ${}^6\text{He}$, ${}^{11}\text{Li}$, ${}^{14}\text{Be}$, etc..

Two-neutron halo

Coupling potentialの計算

${}^6\text{He} + {}^{12}\text{C}$ scattering @ 38.3 MeV



遷移密度

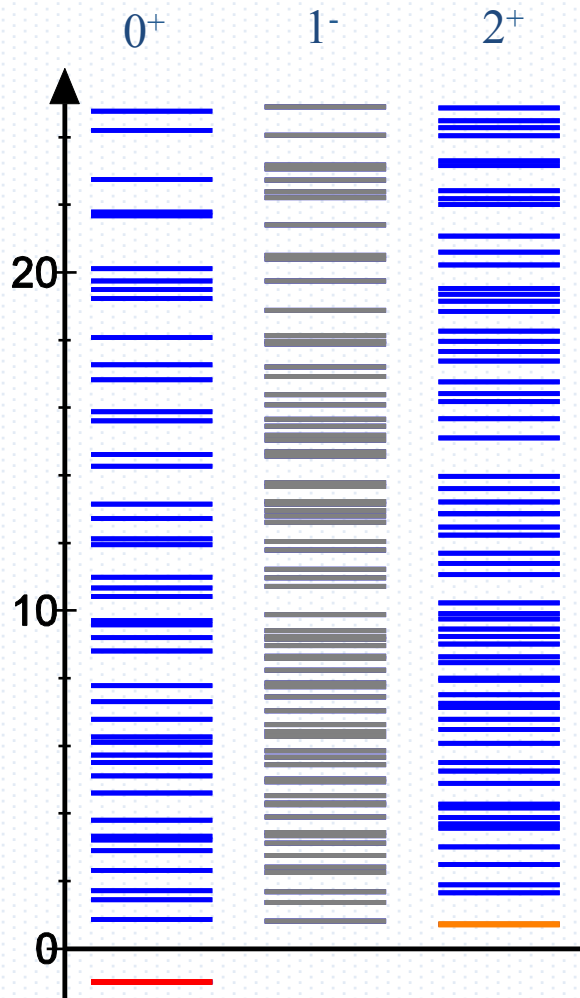
$$\rho_{nn'}(r_p) = \langle \Phi_n | \delta(r_p - t) | \Phi_{n'} \rangle$$

2重畳み込み模型

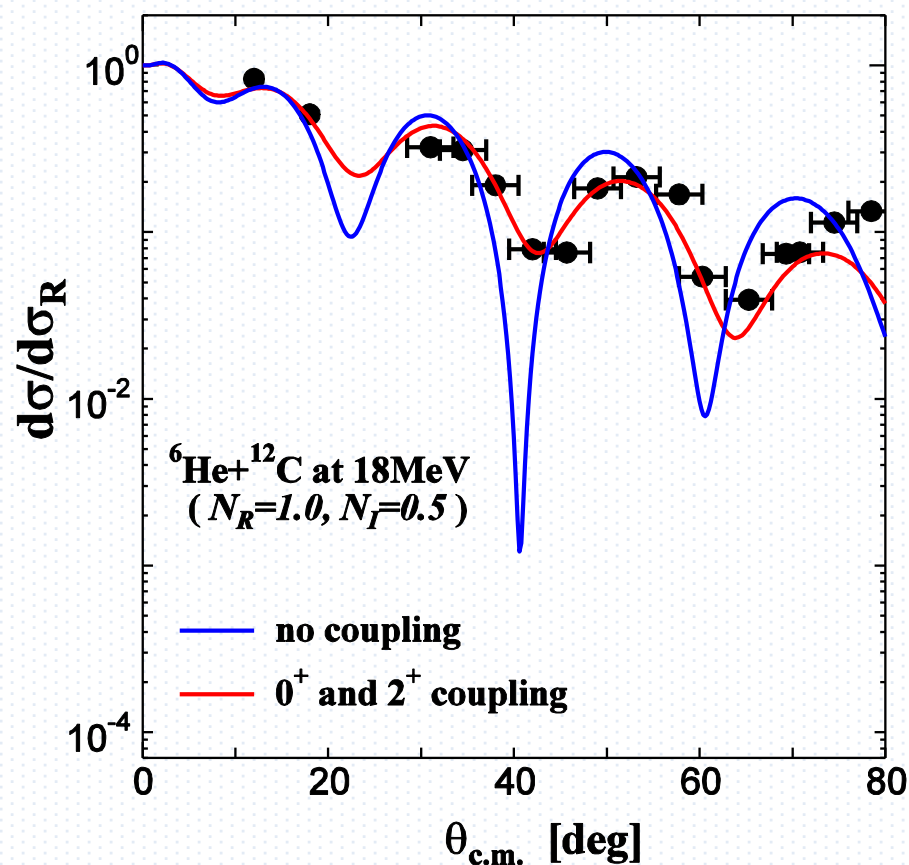
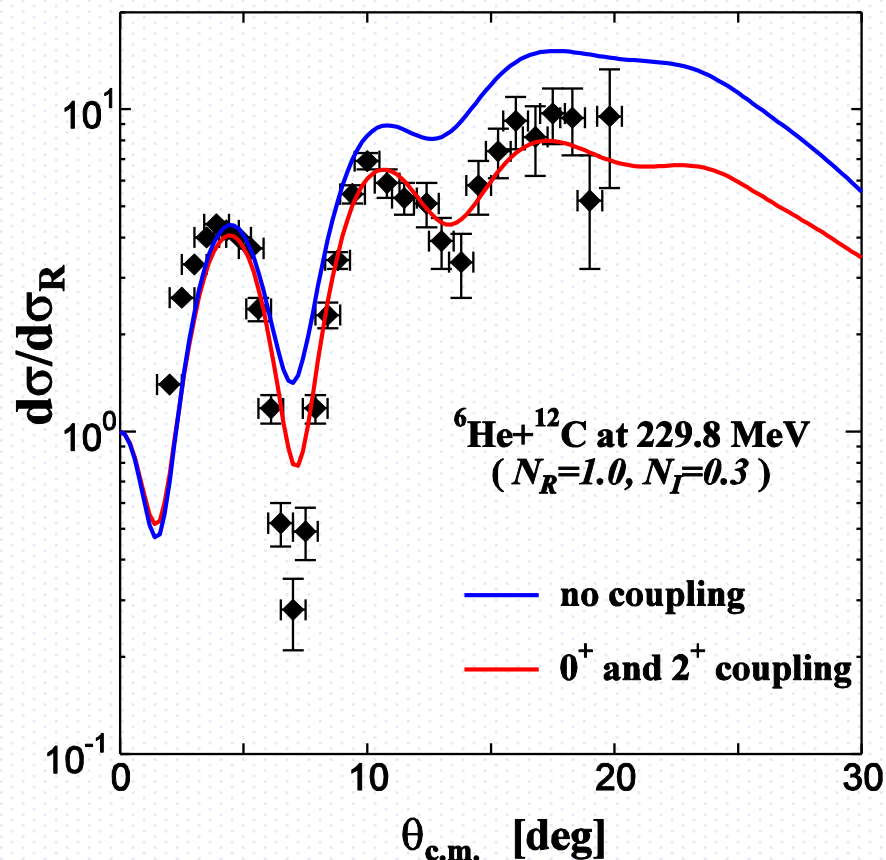
$$U_{nn'}(R) = \int \rho_{nn'}(r_p) v_{NN}(s, \rho, E) dr_p$$

v_{NN} : Density-dependent M3Y (DDM3Y)

実部しかないので虚部は実部と同形で N_I をかける

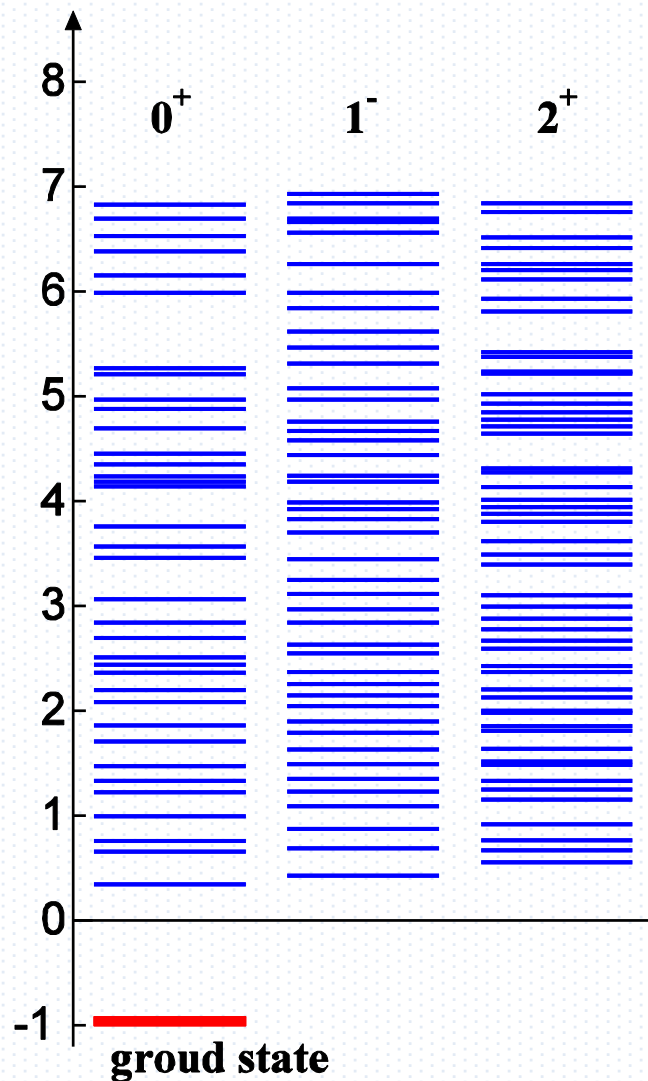


弾性散乱の微分断面積



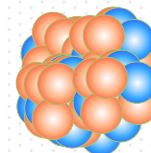
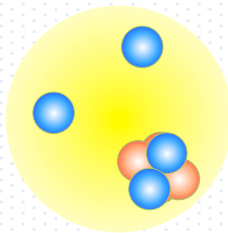
N_I は微分断面積の振動パターンには影響しない。

Coupling Potentialの計算



${}^6\text{He} + {}^{208}\text{Bi}$ scattering @ 20 MeV

クーロンポテンシャルの効果が重要



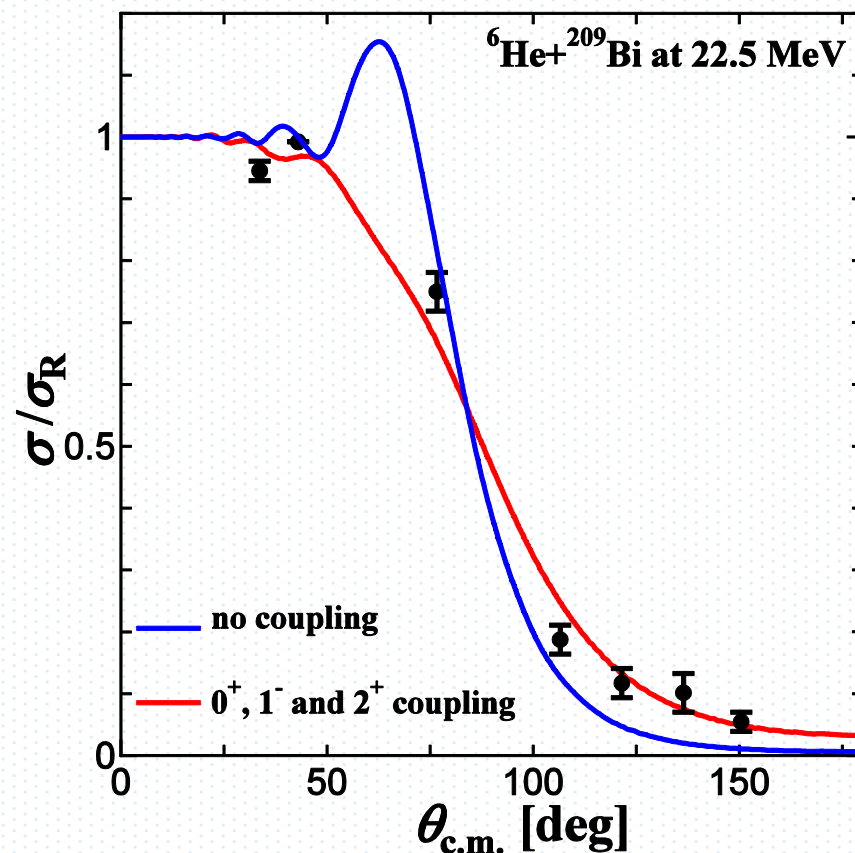
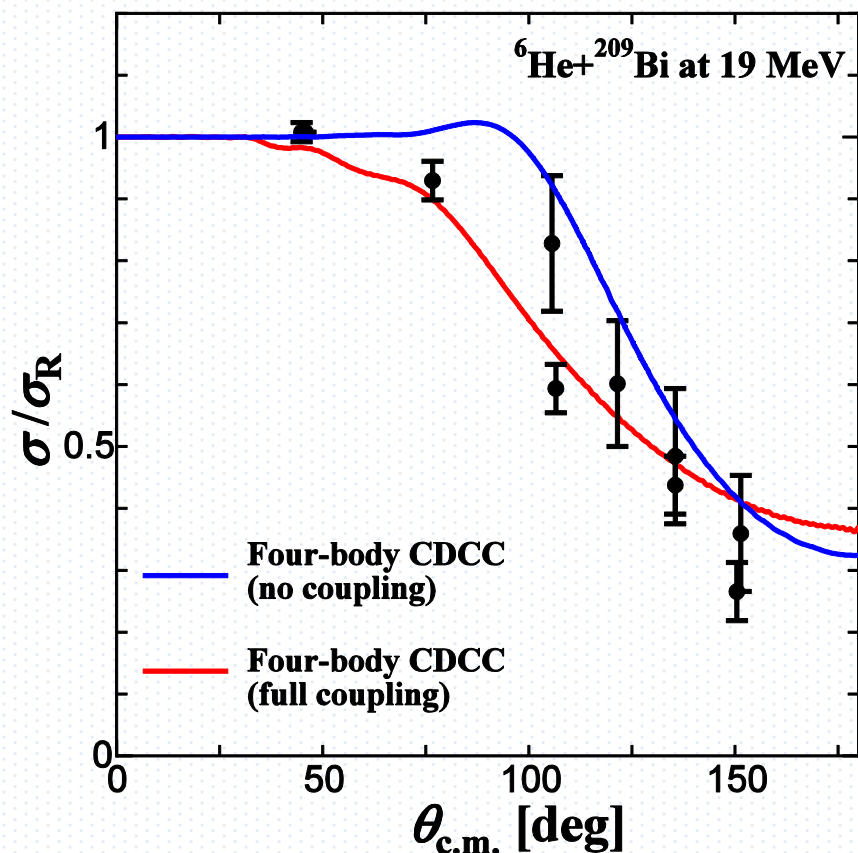
結合ポテンシャル (Cluster folding)

$$U_{nn'}^{NucI}(R) = \langle \Phi_n | V_{nT} + V_{nT} + V_{aT} | \Phi_{n'} \rangle$$

nT, aT間の光学ポテンシャル

$$U_{nn'}^{Coul}(R) = \langle \Phi_n | V_{nT}^{Coul} | \Phi_{n'} \rangle \quad \text{ロングレンジ}$$

弾性散乱の微分断面積



他のグループによる計算

M. Rodríguez-Gallardo, J. M. Arias, J. Gómez-Camacho, R. C. Johnson,
A. M. Moro, J. Thompson, and J. A. Tostevin, PRC 77, 064609 (2008)

分解断面積の連続化

入射核が2体系の場合は、Smoothing factorを計算することで解決

$$f_n(p, k) = \langle \psi(p, k) | \Phi_n \rangle$$

3 体系の連続状態の波動関数

3 体系の場合、Smoothing factorの計算が困難



Smoothing factorを必要としない新たな計算方法が必要

複素スケールリング法

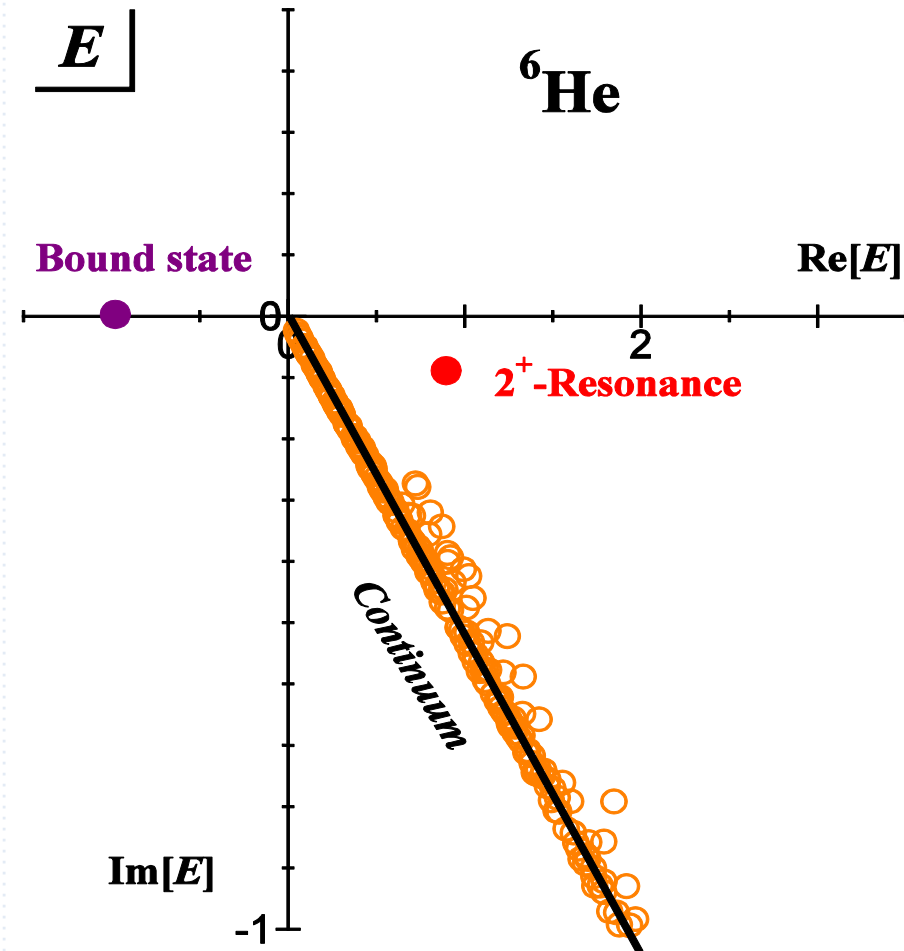
Complex-scaling operator: U^θ

$$U^\theta f(r) = e^{i3/2\theta} f(re^{i\theta})$$

Coordinate: $r \rightarrow re^{i\theta}$

Momentum: $k \rightarrow ke^{-i\theta}$

Useful for searching **many-body resonances**



Green's function with Complex-Scaling Method (CDCS Green's function)

$$\mathcal{G}^{(-)}(E, \xi, \xi') = \frac{1}{E - H - i\epsilon} \approx \sum_{\nu} U^{-\theta} \frac{|\Phi_{\nu}^{\theta}\rangle \langle \tilde{\Phi}_{\nu}^{\theta}|}{E - E_{\nu}^{\theta}} U^{\theta}$$

Smoothing with CSM

Discrete T matrix $T_i = \langle \Phi_i \chi_C^{(-)}(R) | V | \Psi^{(+)}(\xi, R) \rangle$

Continuous T matrix $T(E) = \langle \psi^{(-)}(E, \xi) \chi_C^{(-)}(\mathbf{R}) | V | \Psi^{(+)}(\xi, \mathbf{R}) \rangle$

$$\frac{d\sigma}{dE} = \int T^\dagger(E') T(E') \delta(E - E') dE' = \frac{1}{\pi} \text{Im} \mathcal{R}(E)$$

$$\mathcal{R}(E) = \int d\xi d\xi' \langle \Psi^{(+)}(\xi, \mathbf{R}) | V^* | \chi_C^{(-)}(\mathbf{R}) \rangle_{\mathbf{R}} \mathcal{G}^{(-)}(E, \xi, \xi') \langle \chi_C^{(-)}(\mathbf{R}) | V | \Psi^{(+)}(\xi, \mathbf{R}) \rangle_{\mathbf{R}}$$

Green's function with Complex-Scaling Method (CDCS Green's function)

Ref. Y. Kikuchi, K.Kato, M. Myo, M.Takashina, and K.Ikeda, PRC81, 044308.

Ref. T.M, T. Egami, K. Ogata, and M. Yahiro, PTP121, 885.

$$\mathcal{G}^{(-)}(E, \xi, \xi') \approx \sum_{\nu} \sum_{i,j} |\Phi_i\rangle \frac{\langle \Phi_i | U^{-\theta} | \Phi_{\nu}^{\theta} \rangle \langle \tilde{\Phi}_{\nu}^{\theta} | U^{\theta} | \Phi_j \rangle}{E - E_{\nu}^{\theta}} \langle \Phi_j |$$

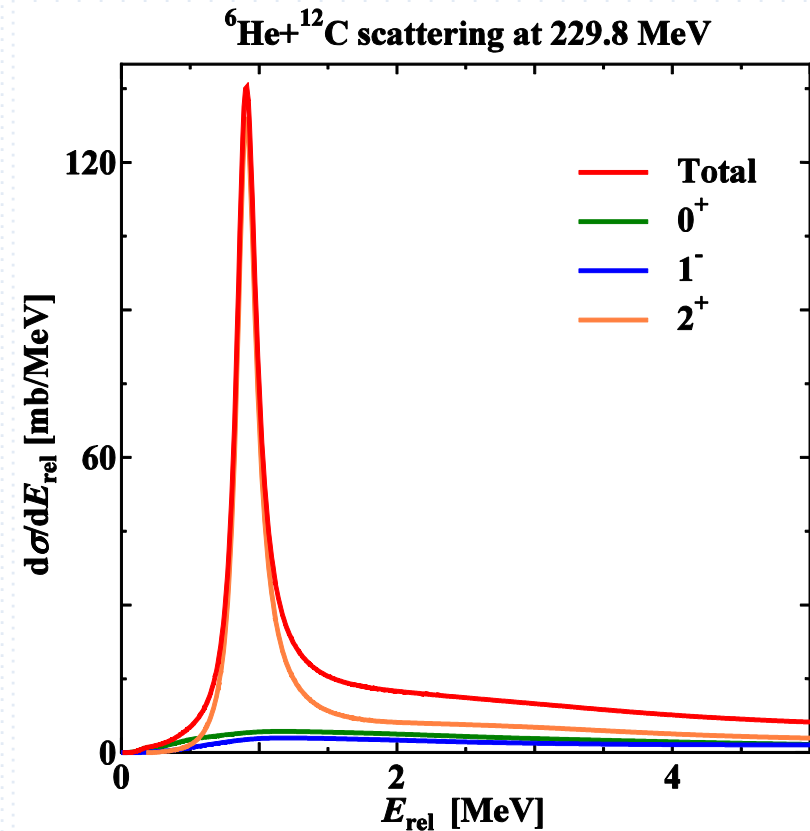
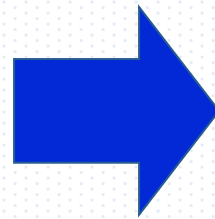
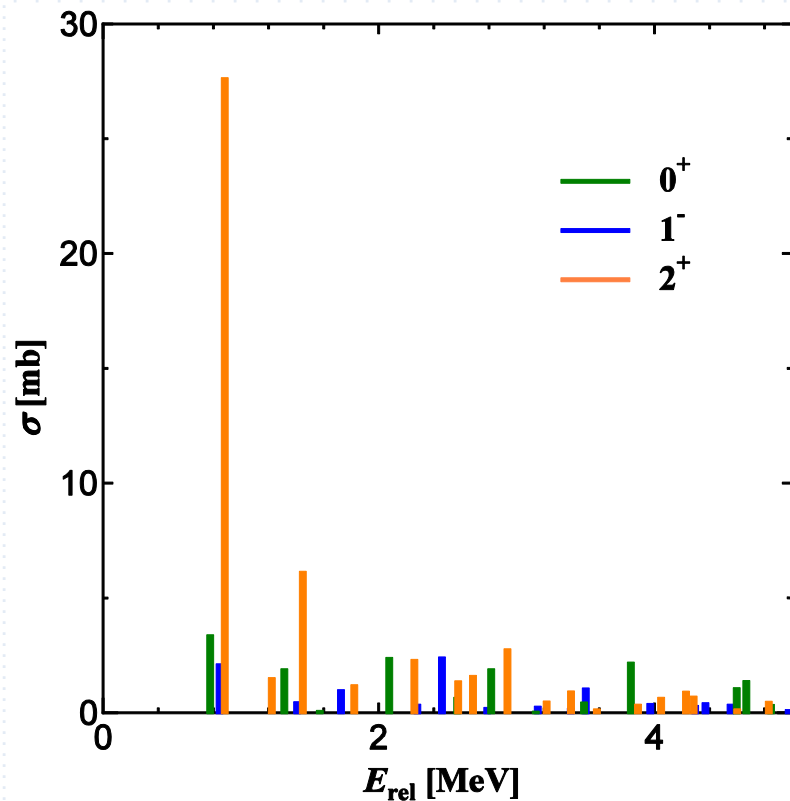
$$\mathcal{R}(E) = \sum_{\nu} \sum_{i,j} \langle \Psi^{(+)} | V^* | \chi_C^{(-)} \Phi_i \rangle \frac{\langle \Phi_i | U^{-\theta} | \Phi_{\nu}^{\theta} \rangle \langle \tilde{\Phi}_{\nu}^{\theta} | U^{\theta} | \Phi_j \rangle}{E - E_{\nu}^{\theta}} \langle \Phi_j \chi_C^{(-)} | V | \Psi^{(+)} \rangle$$

T-matrix calculated by CDCC

Differential Breakup Cross Section

New description of differential breakup cross section

$$\frac{d\sigma}{dE} = \frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_{\nu} \sum_{i,j} T_i^{\text{CDCC}\dagger} \frac{\langle \Phi_i | U^{-\theta} | \Phi_{\nu}^{\theta} \rangle \langle \tilde{\Phi}_{\nu}^{\theta} | U^{\theta} | \Phi_j \rangle}{E - E_{\nu}^{\theta}} T_j^{\text{CDCC}}$$



収束性のチェック

1. Convergence of **T-matrix elements** calculated by **CDCC**

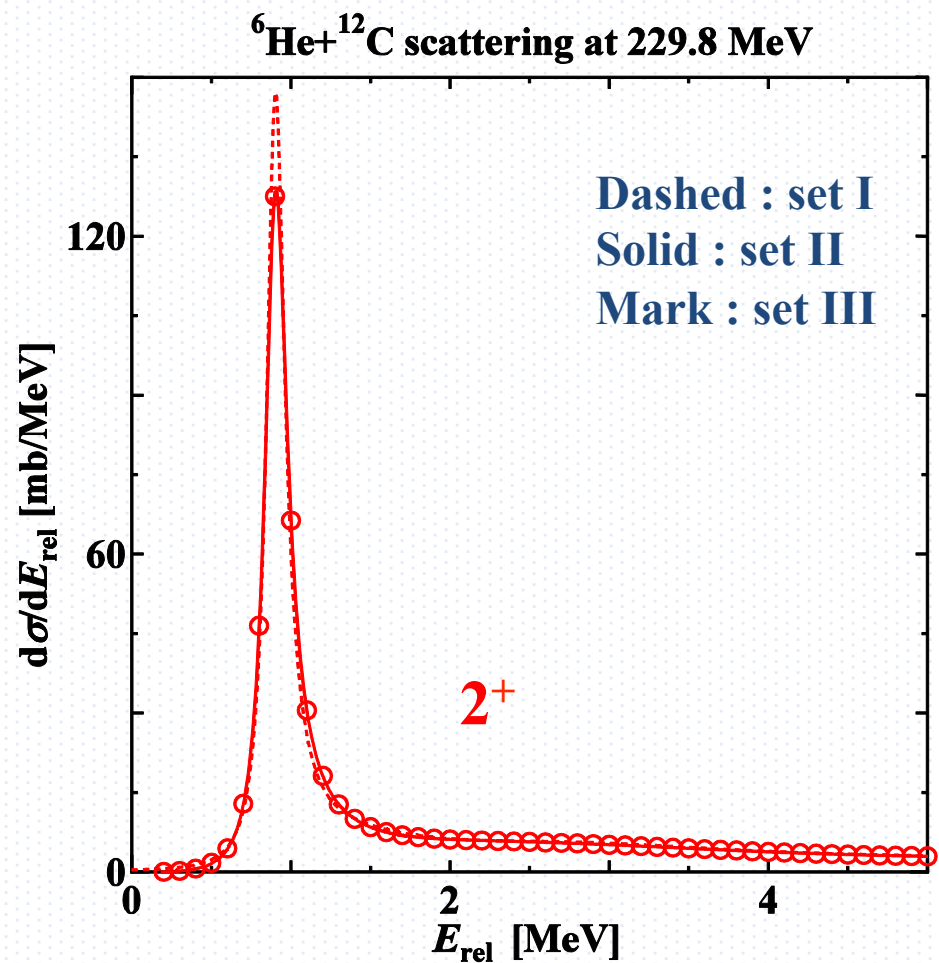
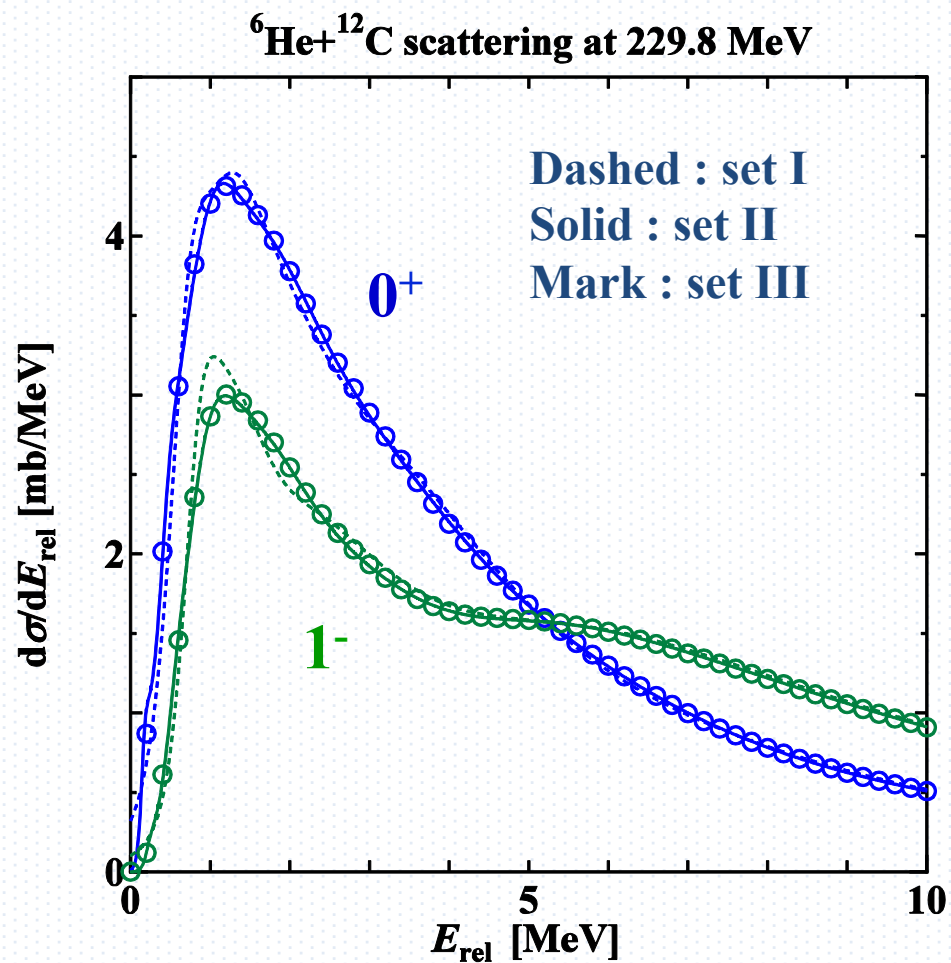
$$1 \approx \sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \longrightarrow \Psi(\xi, \mathbf{R}) \approx \sum_i \phi_i(\xi) \chi_i(\mathbf{R})$$

2. Convergence of **Green's function** with **CSM**.

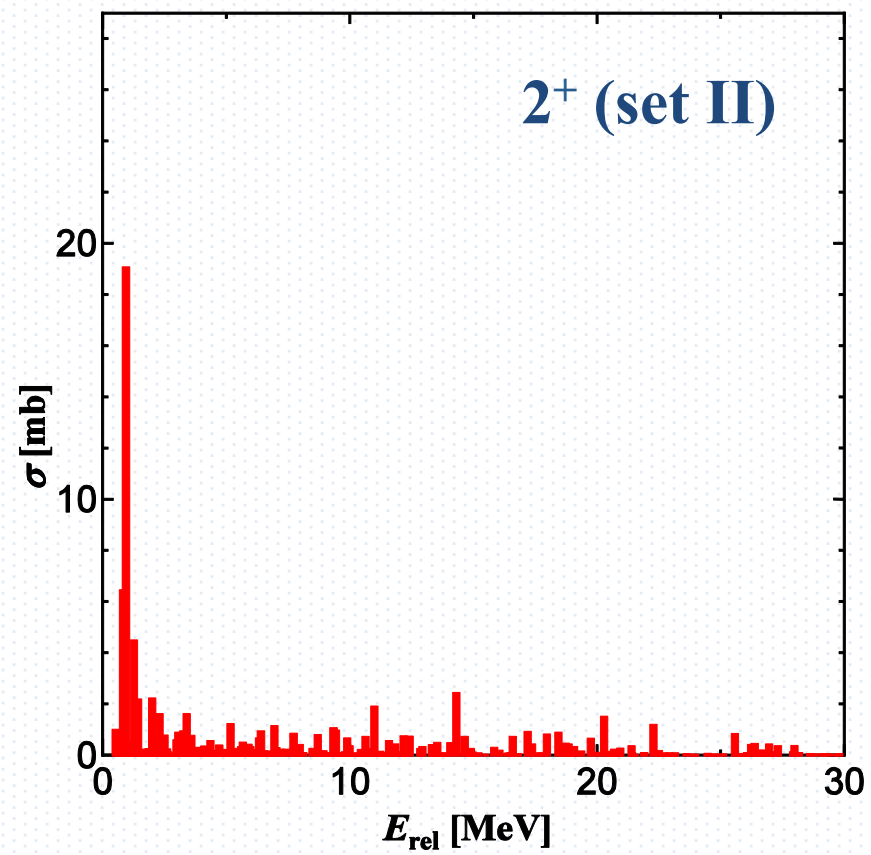
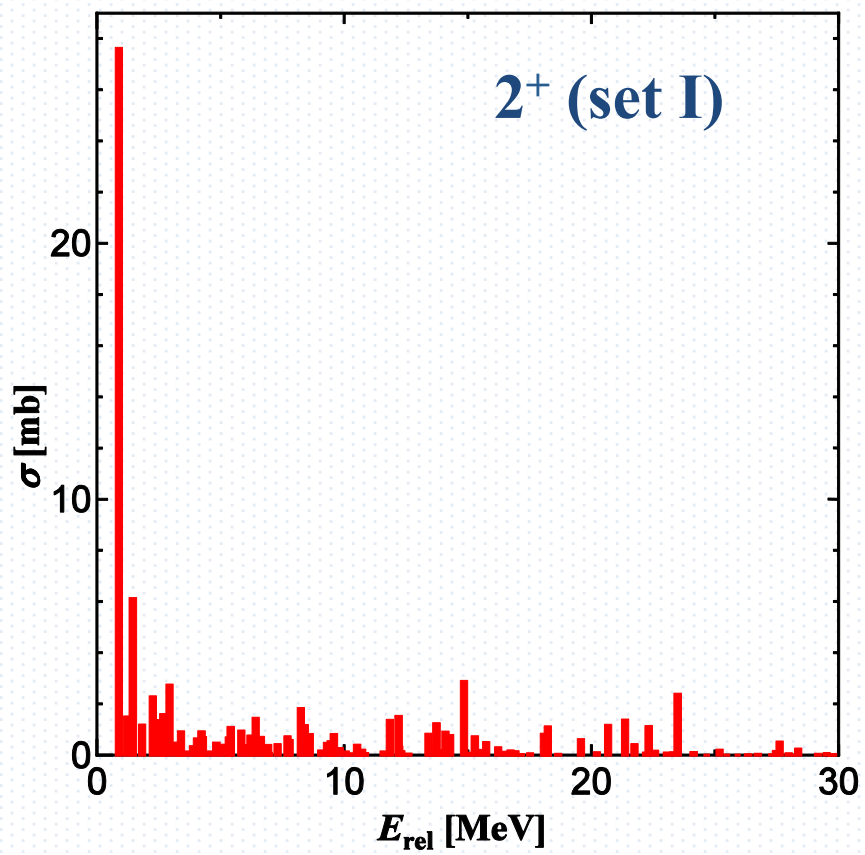
$$1 \approx \sum_{\nu} |\phi_{\nu}^{\theta}\rangle\langle\tilde{\phi}_{\nu}^{\theta}| \longrightarrow \mathcal{G}(E, \xi, \xi') \approx \sum_{\nu} U^{-\theta} \frac{|\phi_{\nu}^{\theta}\rangle\langle\tilde{\phi}_{\nu}^{\theta}|}{E - E_{\nu}^{\theta}} U^{\theta}$$

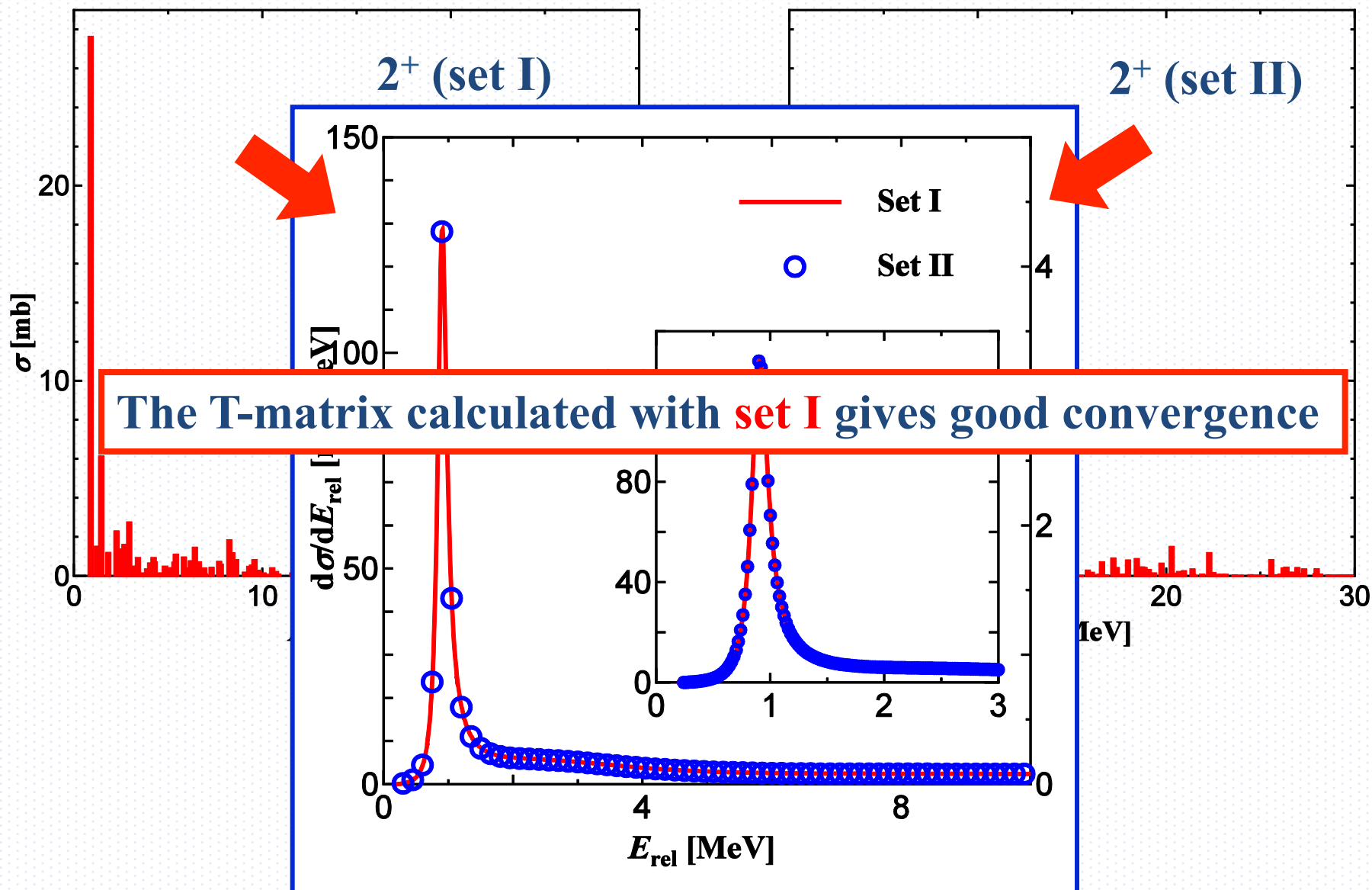
We should confirm the convergence with extending the model space

	The number of bases	Gaussian range max
Set I	10	10 fm
Set II	15	20 fm
Set III	20	50 fm

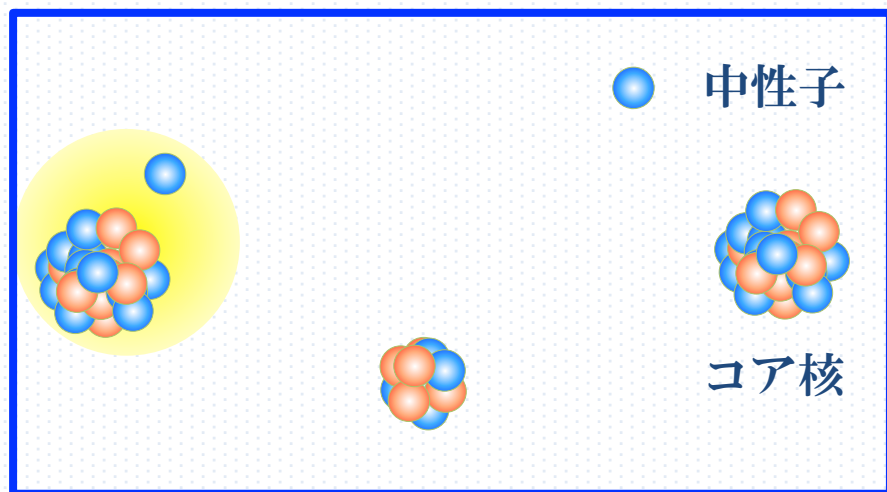


The result with **set II** gives good convergence for Green's function

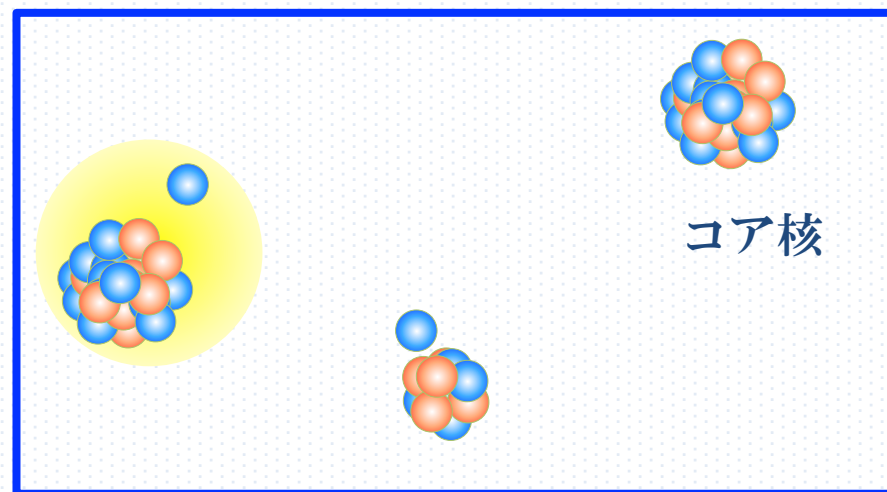




中性子除去断面積



分解過程



ストリッピング過程

コアとなる原子核だけを測定：**中性子除去断面積**

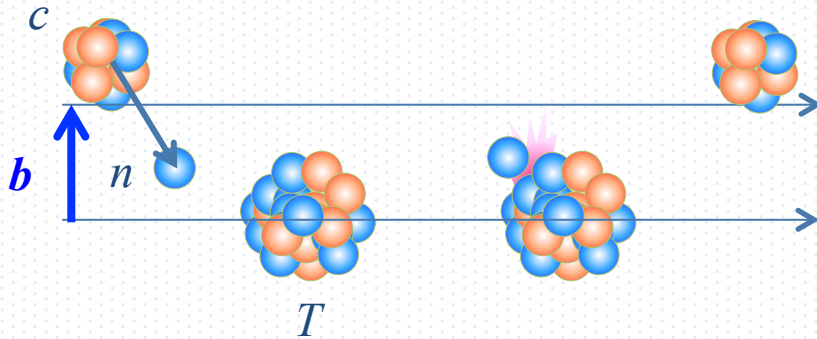
包括的断面積

分解過程＋ストリッピング過程の計算

- 分解過程はCDCCにより記述可能
- ストリッピング過程はCDCCでは視ないチャネル
- グラウバー模型による計算が成功（ただし問題あり）

アイコナール反応理論

アイコナールS行列



$$\begin{aligned}
 S_{EK}(b) &= \exp \left[\frac{i}{\hbar v} \int_{-\infty}^{\infty} (U_{nT}(R) + U_{cT}(R)) dZ \right] \\
 &= \exp \left[\frac{i}{\hbar v} \int_{-\infty}^{\infty} U_{nT}(R) dZ \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar v} \int_{-\infty}^{\infty} U_{cT}(R) dZ \right] \\
 &= S_n^{EK}(b) S_c^{EK}(b)
 \end{aligned}$$

各S行列の元の計算式

$$S_n^{EK}(b) \quad [T_R + \hbar + U_{nT}(r, R) - E] \Psi(r, R) = 0$$

$$S_c^{EK}(b) \quad [T_R + \hbar + U_{cT}(r, R) - E] \Psi(r, R) = 0$$

アイコナール反応理論ではアイコナールS行列をもとの方程式でポテンシャル項をそれぞれ無視した方程式の解として記述する。

^{31}Ne の1中性子除去断面積

コアが生き残る

$$\sigma_{-1nstr} = \int \langle 0 | |S_c^{EK}|^2 \left(1 - |S_n^{EK}|^2 \right) | 0 \rangle b db$$

中性子が標的に吸収される断面積

中性子が吸収

コアが放出される断面積（中性子除去断面積）

$$\sigma_{-1nrem} = \sigma_{-1nstr} + \sigma_{BU}$$

	12C (ERT)	12C (Glauber)	208Pb (ERT)	208Pb (Glauber)
σ_{-1nstr}	90	96	244	330
σ_{BU}	24	--	800	810
σ_{-1nrem}	114	96	1044	1140
S	0.69	0.82	0.68	0.62

ここまでのまとめ4

- CDCC法は分解反応を精密に記述できる方法であるが、計算は大変。特にクーロン分解は異常に時間を必要とする。→ *Eikonal-CDCC法*により解決
- CDCC法は多体分解反応解析にも適用できる。分解状態はPS法により 3 体分解反応同様に記述される。
- 多体分解反応の分解断面積は、複素スケーリング法を用いた新たな連続化法により計算可能。
- CDCC法で記述できない（視ない） 1 中性子剥離断面積は*Eikonal Reaction Theory*により記述できる。

CDCCによる不安定核解析

CDCCの汎用コード

CDCCの汎用コードは

<http://www.nt.phys.kyushu-u.ac.jp/CDCC/index.html>

にて公開中。基本的に重陽子散乱の計算だが、少し書き換えることにより様々な3体分解反応の計算が可能。

その他の汎用コード (webから入手可能)

青木氏 (理研) : ctak, hctaku

Ian Thompson(Lawrence Livemore) : FRESCO

不安定核の反応の特徴

- 不安定核を標的核として用いることができない。
- 測定される断面積の種類は多くない。
- 光学ポテンシャルの情報が少ない。
- 弱束縛のため分解効果が重要となる。



- Eikonal CDCC
- Four-body CDCC
- Microscopic Optical potential
- Eikonal Reaction Theory

ソフトE1励起

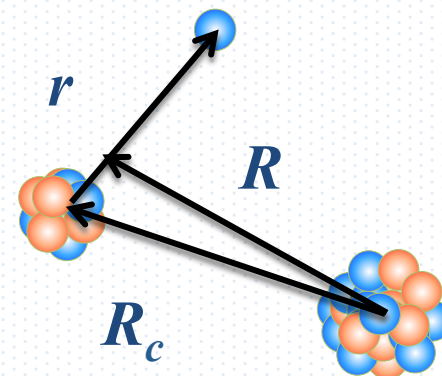
$$\alpha = \frac{A_n}{A_c + A_n}$$

B(E1)遷移

$$B(E1, \varepsilon) \propto \sum_{\mu} \left| \langle \psi(\varepsilon) | \alpha r Y_{1\mu}(\Omega_r) | \phi_0 \rangle \right|^2$$

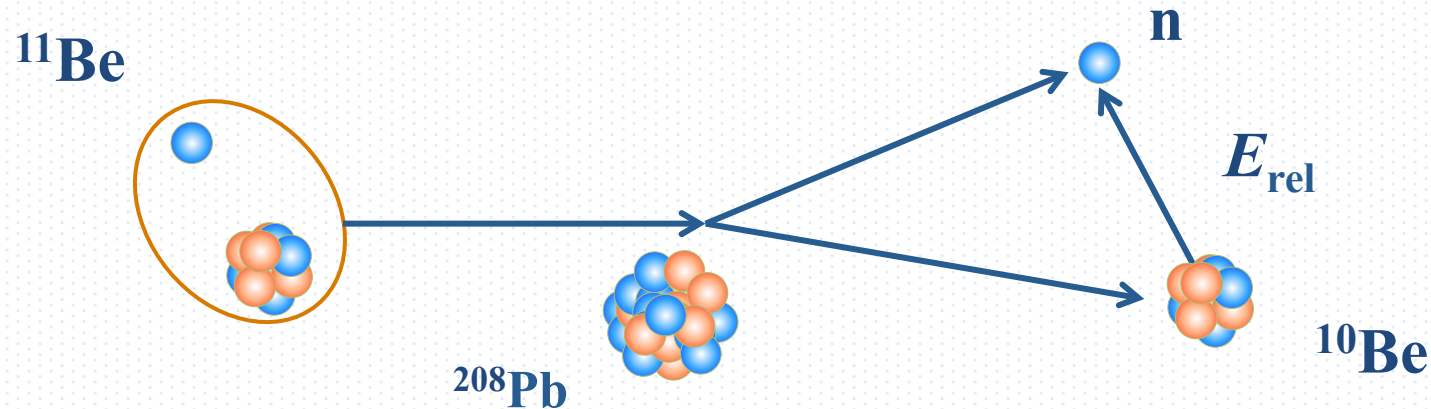
Coulombポテンシャルの多重極展開

$$\begin{aligned} V_{cT}^{Coul}(|R - \alpha r|) &= Z_T Z_c e^2 \sum_{\lambda} \frac{(\alpha r)^{\lambda}}{R^{\lambda+1}} P_{\lambda}(\cos \theta) \quad R \gg r \\ &= \frac{Z_T Z_c e^2}{R} + \frac{1}{R^2} \boxed{\alpha Z_T Z_c e^2 r P_1(\cos \theta)} + O(R^{-3}) \end{aligned}$$



前方散乱の分解断面積から不安定核のB(E1)を求めることができる。

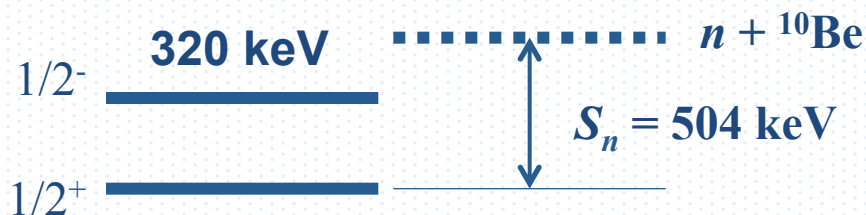
Coulomb分解(^{11}Be)



$$^{11}\text{Be}_{\text{g.s.}} = \alpha |^{10}\text{Be}(0^+) \otimes \nu 2s_{1/2}\rangle + \beta |^{10}\text{Be}(2^+) \otimes \nu 1d_{5/2}\rangle$$

コア励起入りのCDCC計算→***XCDCC***

• Well known Structure

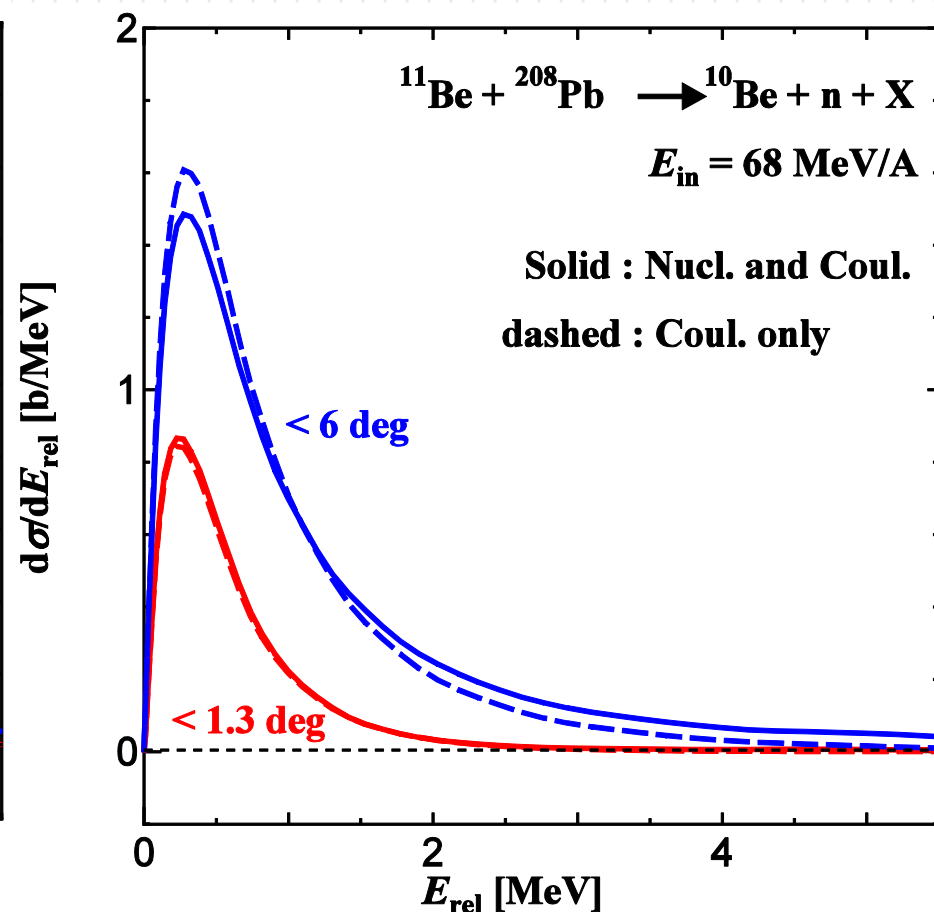
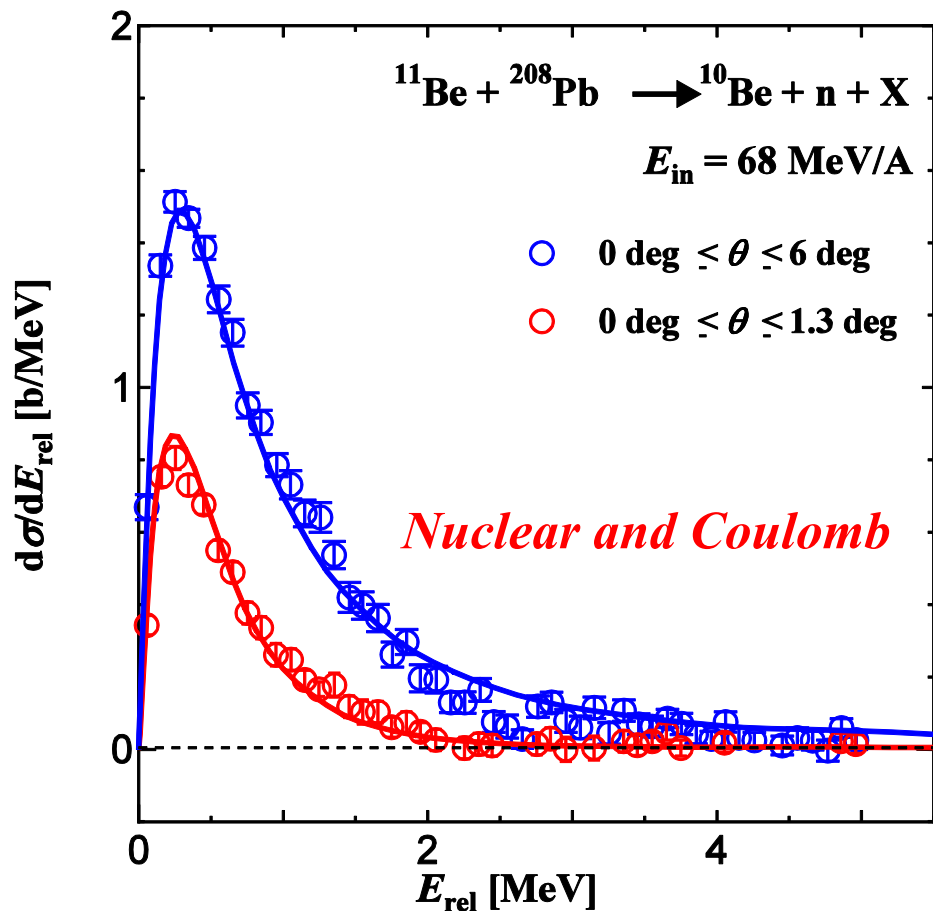


CDCC calculation

- Assuming $\alpha = 1$, $\beta = 0$.
- α can be decided by reproducing the energy spectrum.

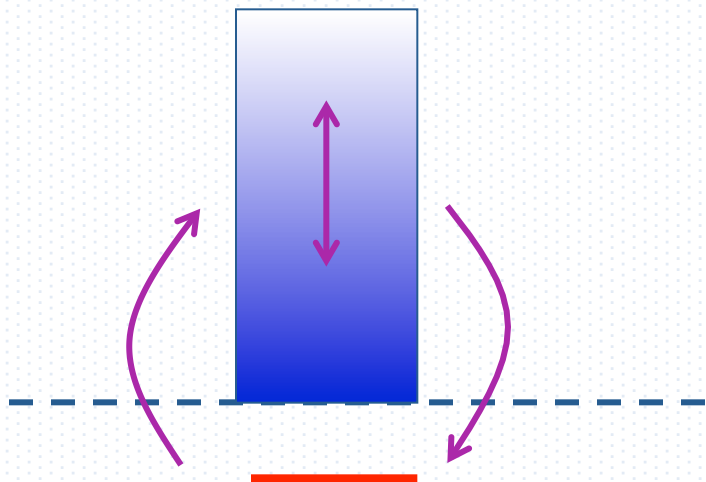
$^{11}\text{Be} + ^{208}\text{Pb} @ 68 \text{ MeV/nuc.}$

Fukuda et al., PRC70,054606(2004)



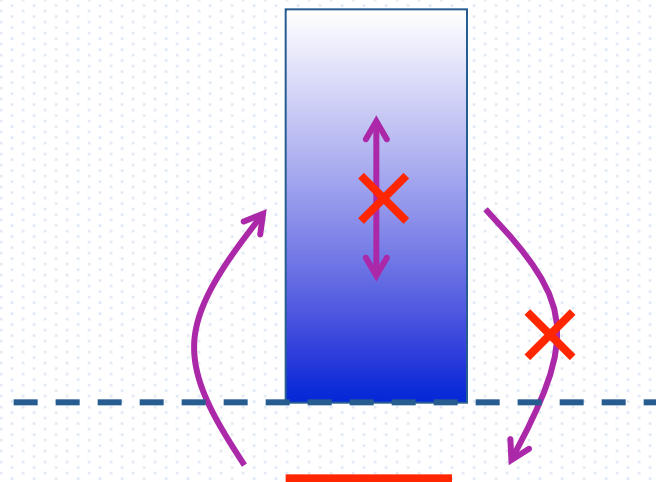
多段階過程 *or* 1段階過程

CDCC



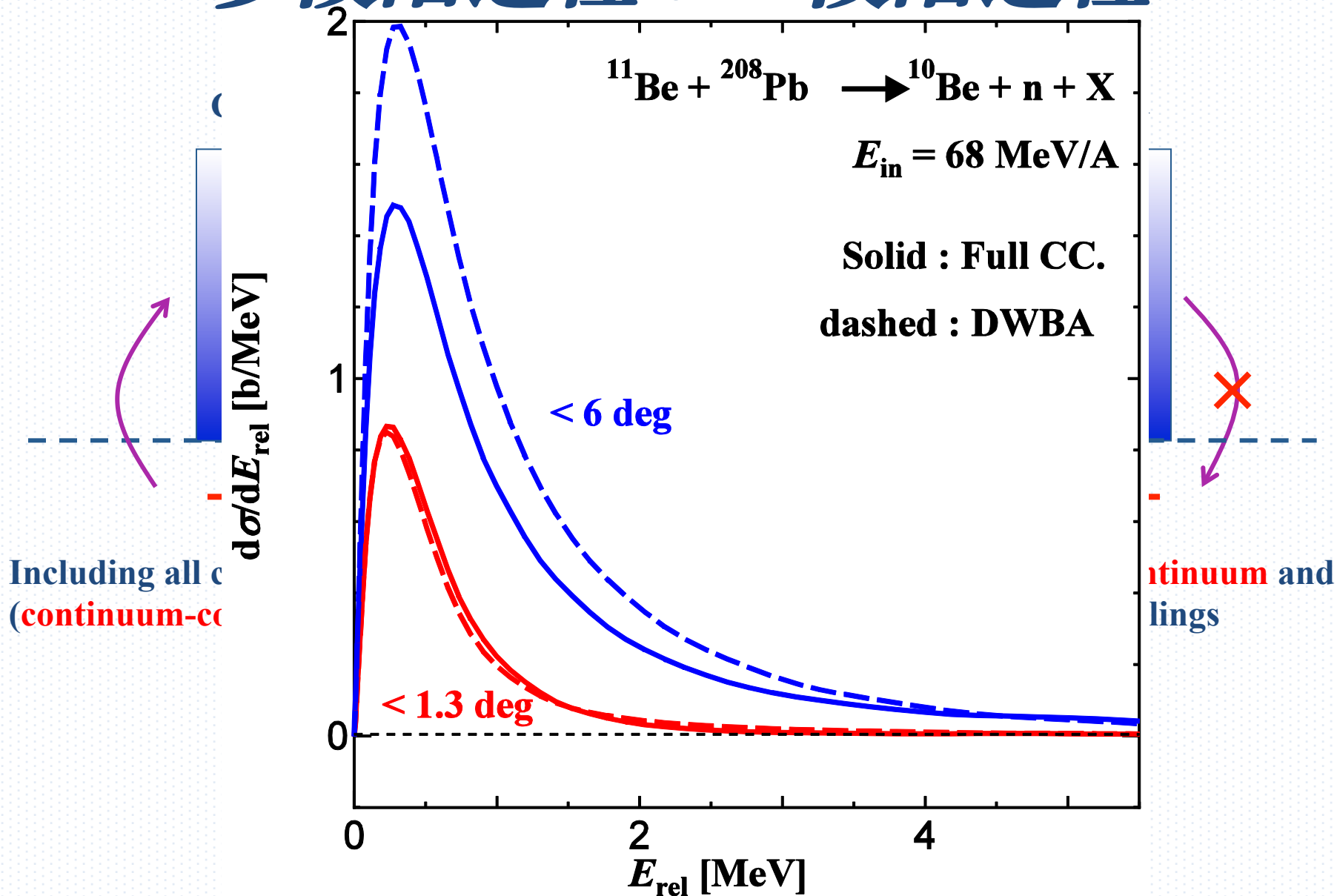
Including all coupling effects
(**continuum-continuum**, **bound-continuum**)

DWBA

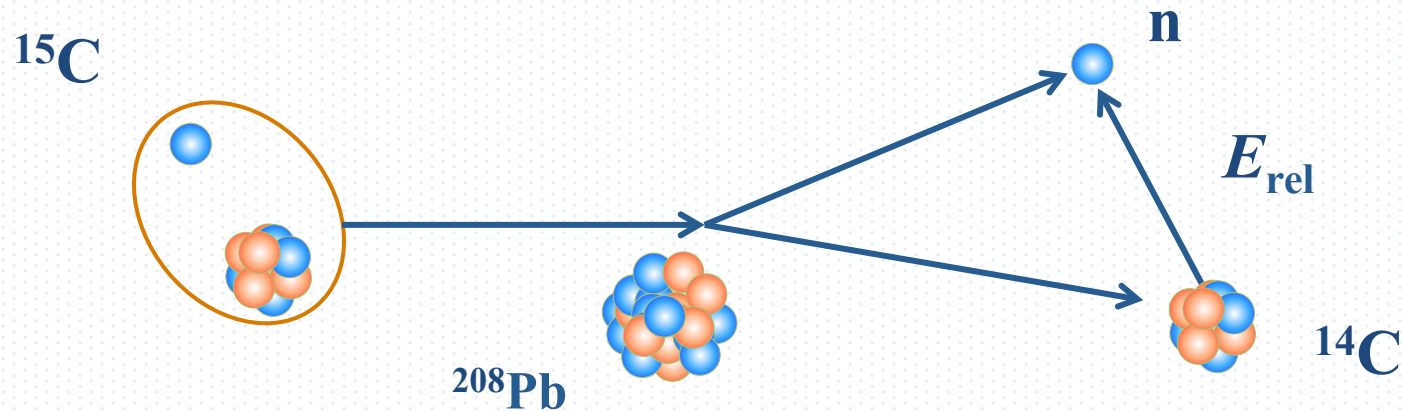


Without **continuum-continuum** and
continuum-bound couplings

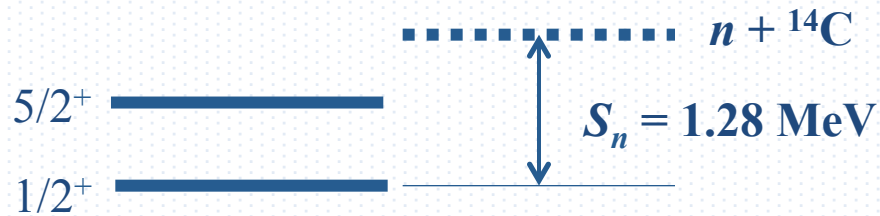
多段階過程 or 1段階過程



Coulomb 分解(^{15}C)



• Well known Structure

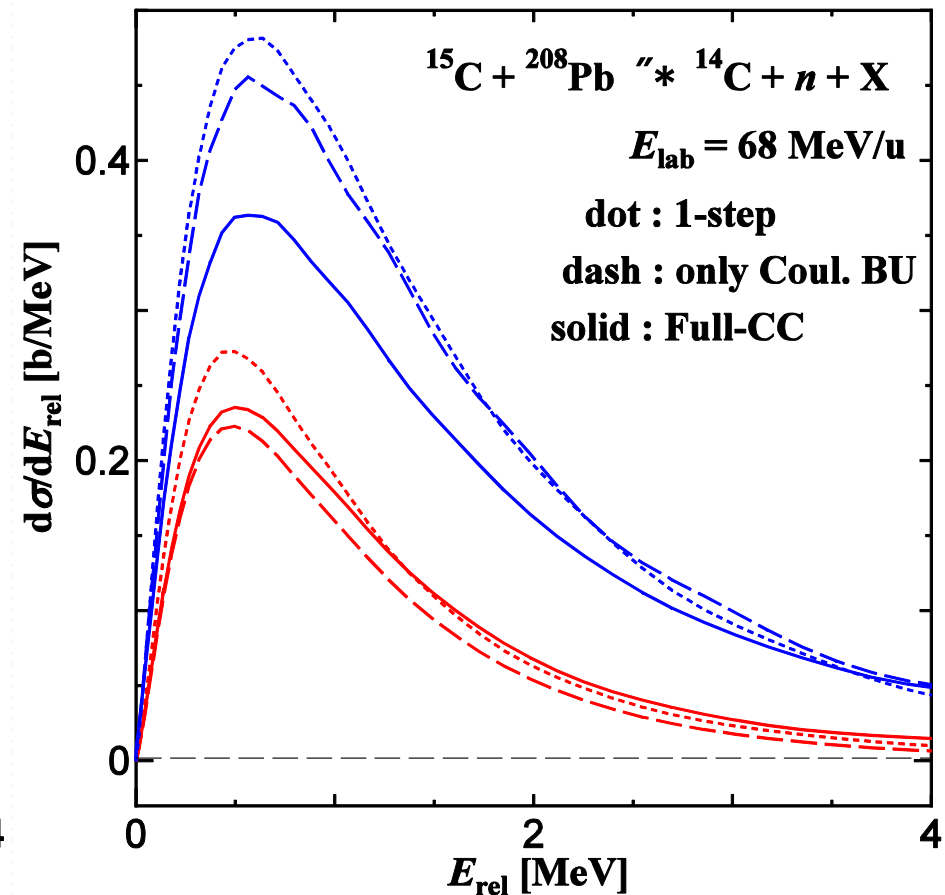
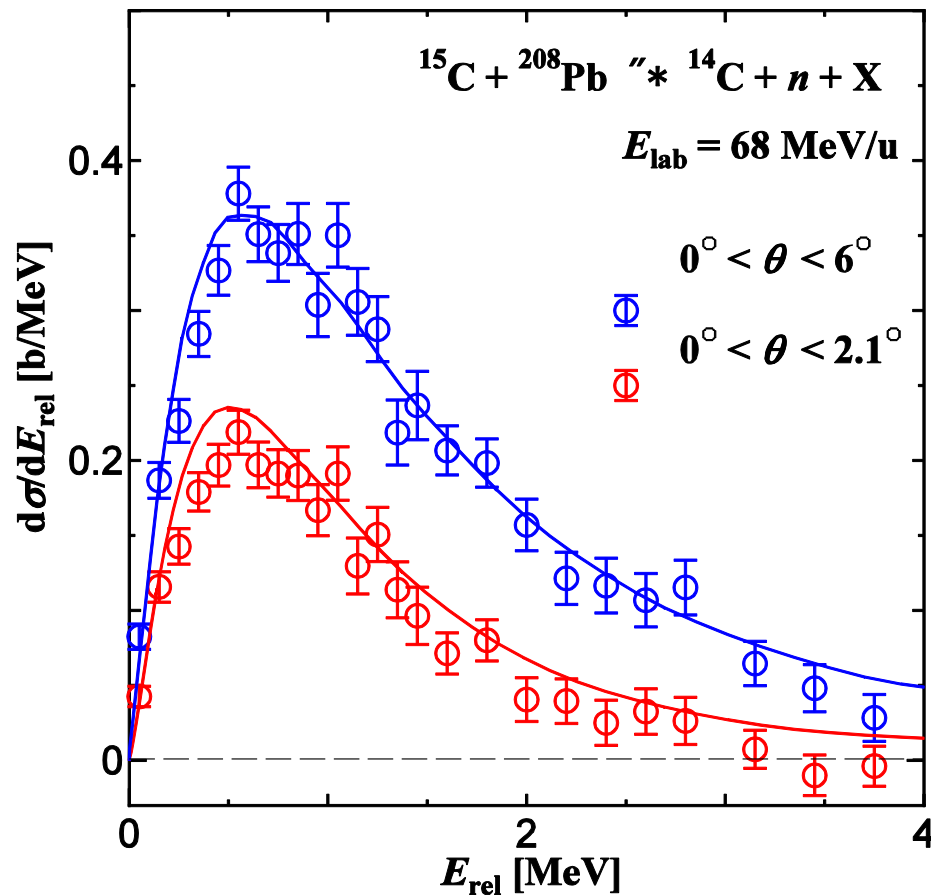


$$^{15}\text{C}_{\text{g.s.}}(1/2^+) = \alpha |^{14}\text{C}(0^+) \otimes \nu 2s_{1/2}\rangle + \beta |^{14}\text{C}(2^+) \otimes \nu 1d_{5/2}\rangle$$

$^{15}\text{C} + ^{208}\text{Pb} @ 68 \text{ MeV/nucl}$

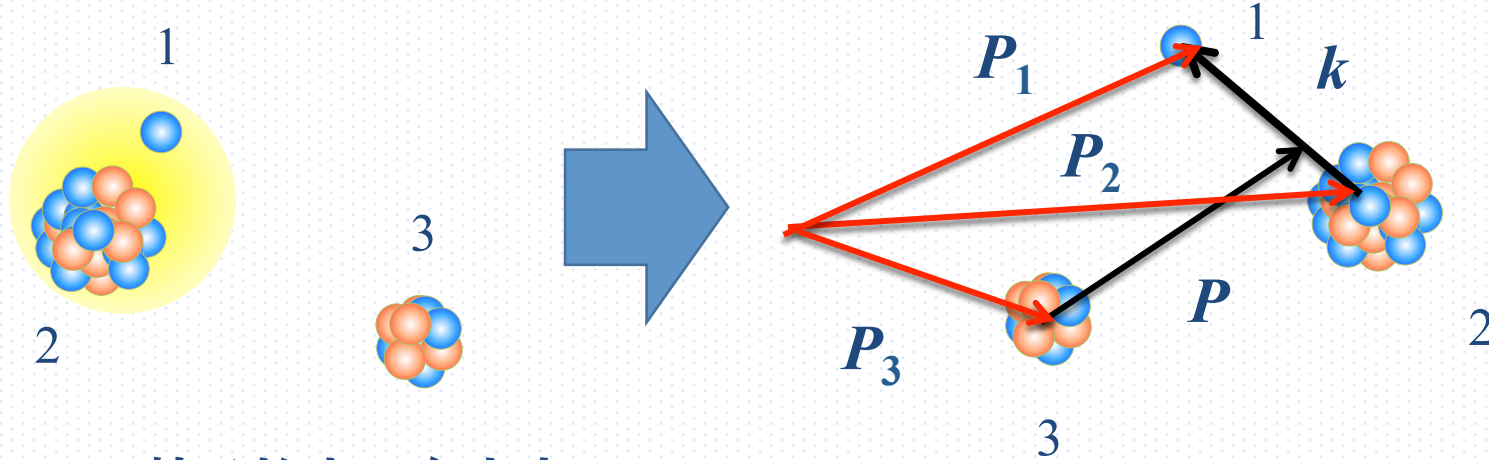
Experimental data are taken from Nakamura et al., PRC79,035805(2009)

Nuclear and Coulomb



3重微分断面積

CDCCでは放出3粒子の運動を記述



- 3粒子放出の自由度 $3 \times 3 = 9$
- エネルギー保存(1) + 運動量保存(3) = 4
- 残りの自由度 5

→ 粒子2の運動量と粒子1の放出角度

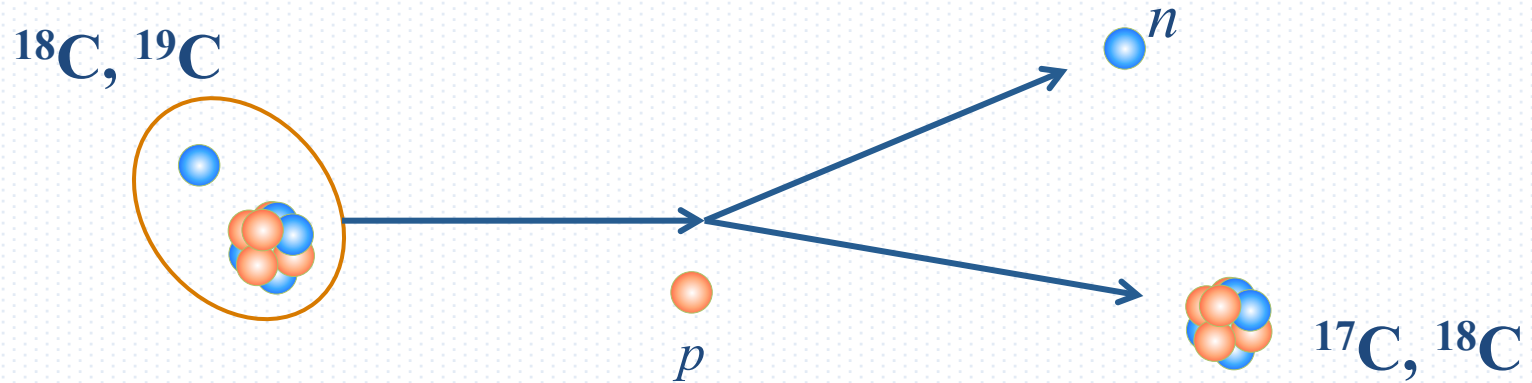
$$\frac{d^3\sigma}{dP_2 d\Omega_2 d\Omega_1}$$



$$\frac{d^2\sigma}{dP_2 d\Omega_2} = \int d\Omega_1 \frac{d^3\sigma}{dP_2 d\Omega_2 d\Omega_1}$$

放出粒子の運動量分布

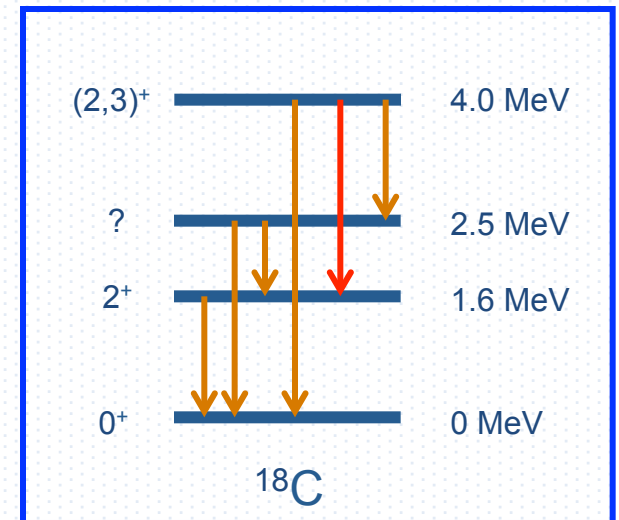
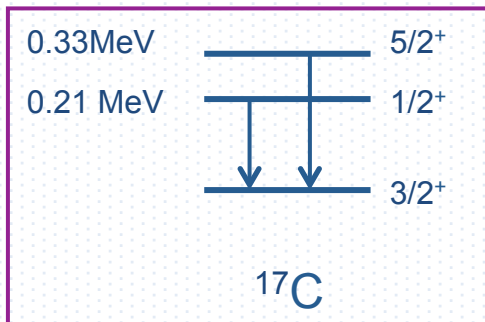
中性子剥離断面積



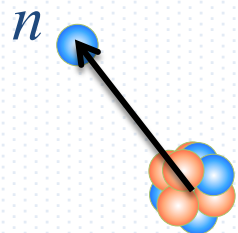
運動量分布

$$\begin{aligned} \psi_{\text{g.s.}}(^{18}\text{C} : 0^+) &= \alpha |0d_{3/2} \otimes ^{17}\text{C}(3/2^+)\rangle \\ &+ \beta |1s_{1/2} \otimes ^{17}\text{C}(1/2^+)\rangle \\ &+ \gamma |0d_{5/2} \otimes ^{17}\text{C}(5/2^+)\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{\text{g.s.}}(^{19}\text{C} : 1/2^+) &= \alpha |1s_{1/2} \otimes ^{18}\text{C}(0^+)\rangle \\ &+ \beta |0d_{3/2} \otimes ^{18}\text{C}(2^+)\rangle \\ &+ \gamma |0d_{5/2} \otimes ^{18}\text{C}(2^+)\rangle \\ &+ \zeta |0d_{5/2} \otimes ^{18}\text{C}(3^+)\rangle \end{aligned}$$



放出粒子の運動量分布

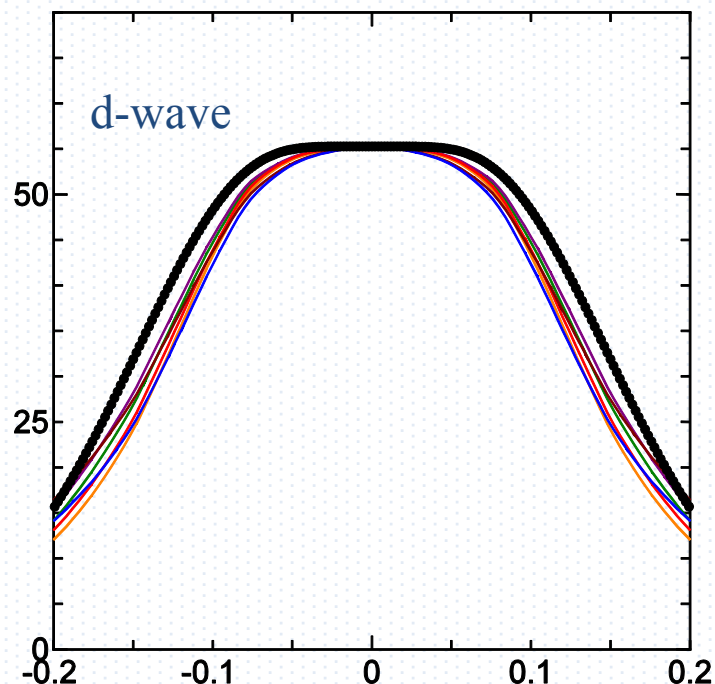
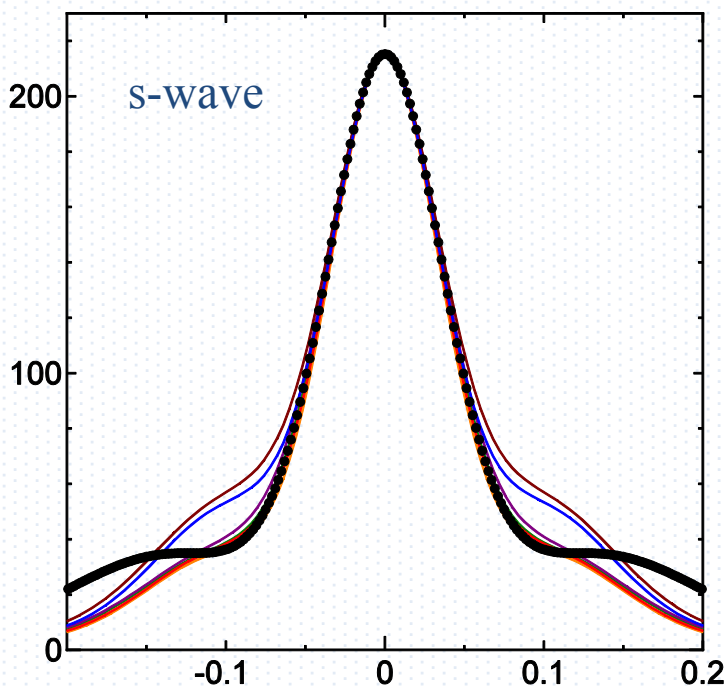


$\psi(k, r)$

c

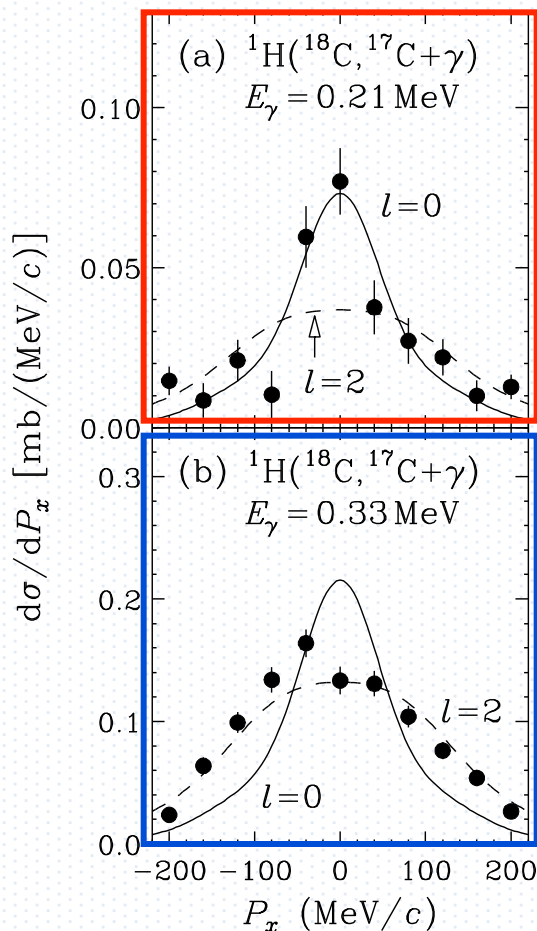
Black circle : Fourier transformation of the w.f.

$$f(k_z) = \int e^{ik_z z} \psi(k, r) dr$$



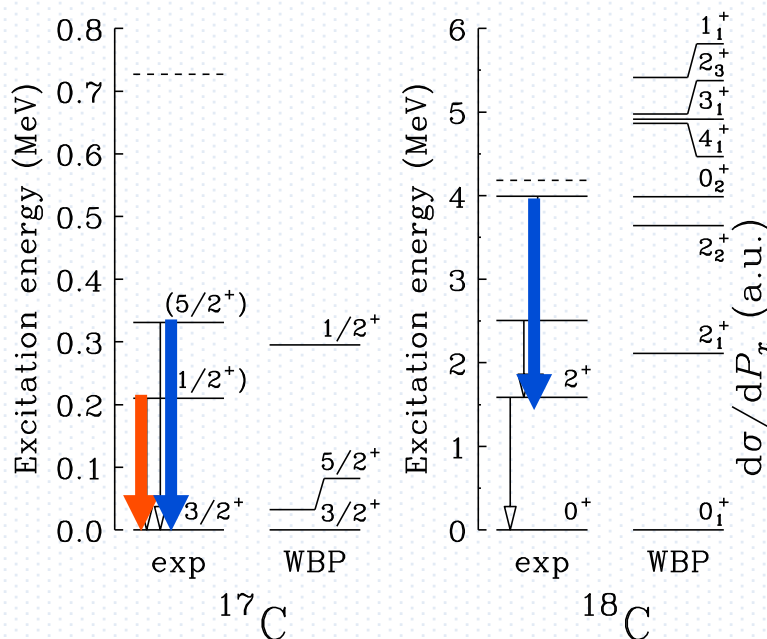
放出コア核の運動量分布は波動関数のフーリエ変換に対応→中性子の軌道を判別可能

運動量分布(^{17}C , ^{18}C)



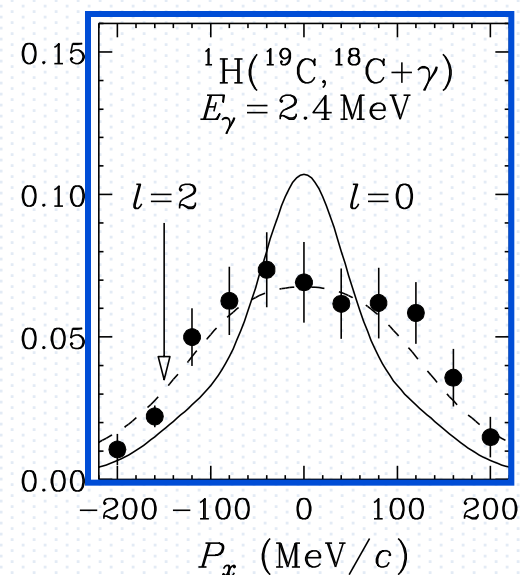
Neutron in s-wave

$^{17}\text{C}(E_x=0.21\text{MeV}):1/2^+$



Neutron in d-wave

$^{18}\text{C}(E_x=4\text{MeV}):2^+, 3^+$



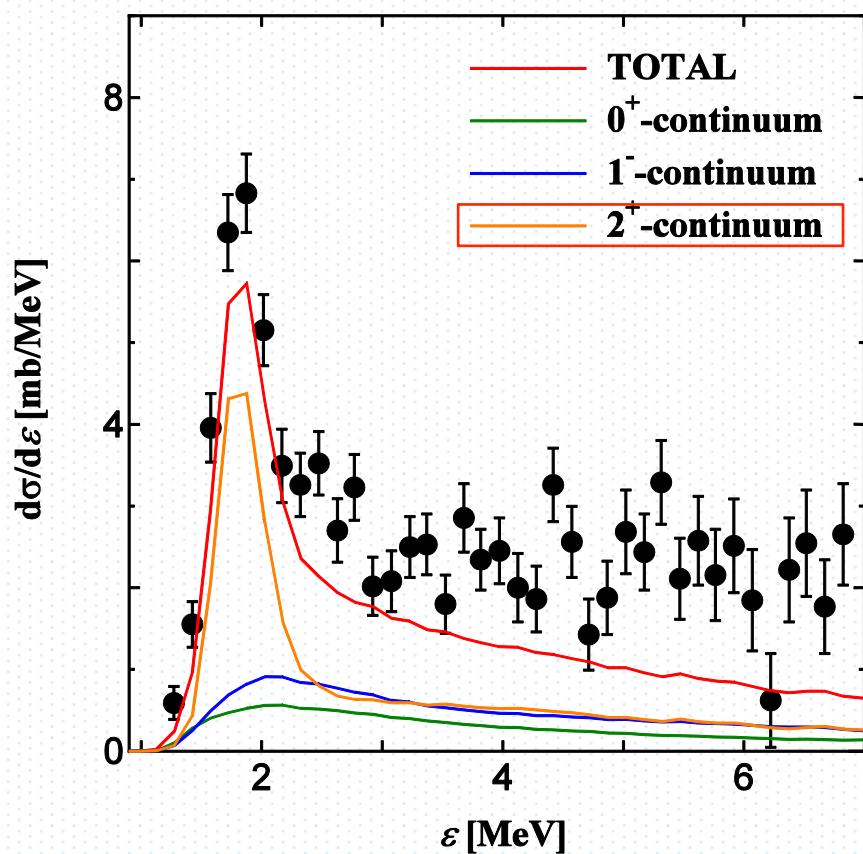
Neutron in d-wave

$^{17}\text{C}(E_x=0.33\text{MeV}):5/2^+$

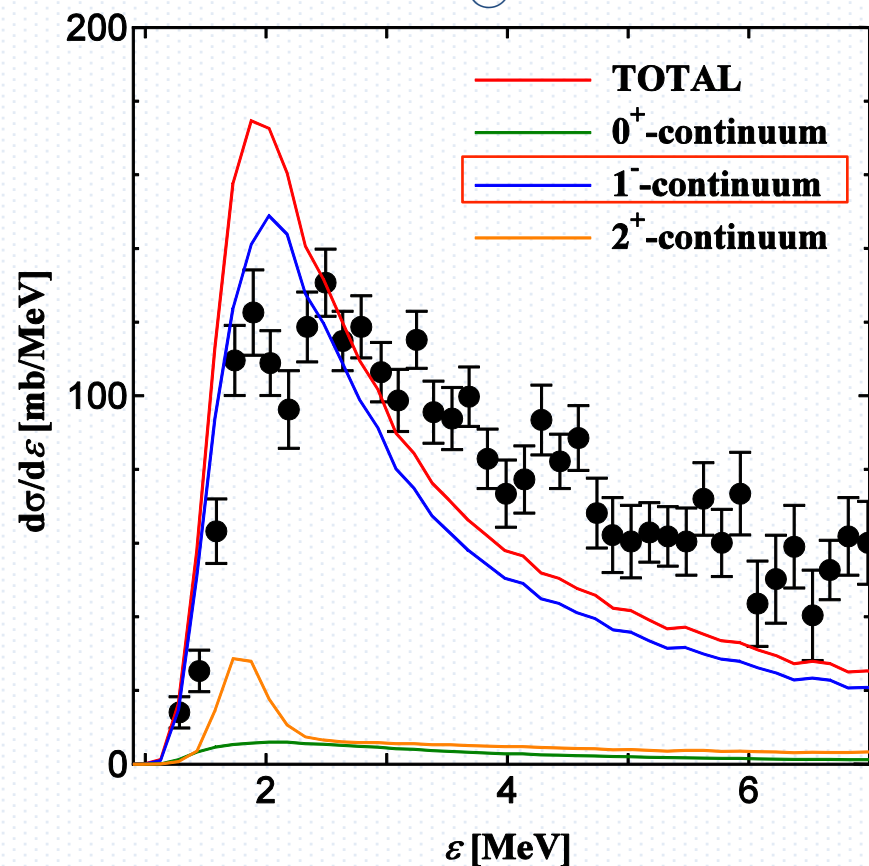
Y. Kondo, T. Nakamura, Y. Sato, T. M. N. Aoi et al.,
 Phys. Rev. C79, 014602 (2009)

6He の核力・クーロン分解解析

$6\text{He}+^{12}\text{C}@240\text{MeV/nuc.}$



$6\text{He}+^{208}\text{Pb}@240\text{MeV/nuc.}$

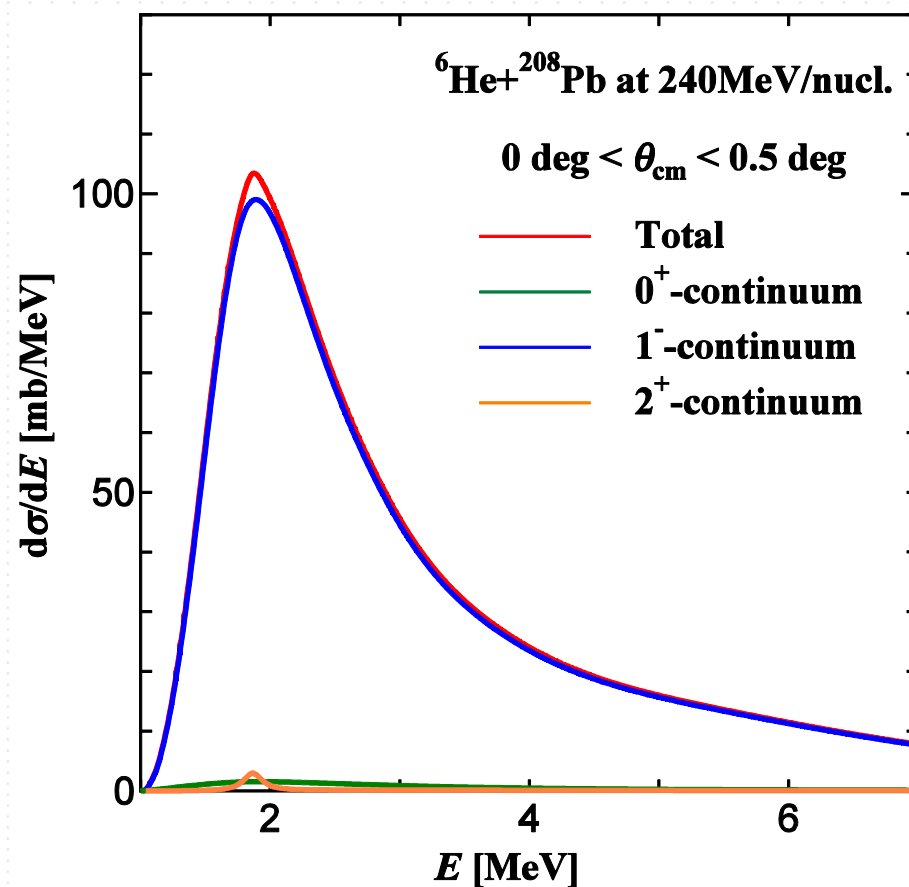
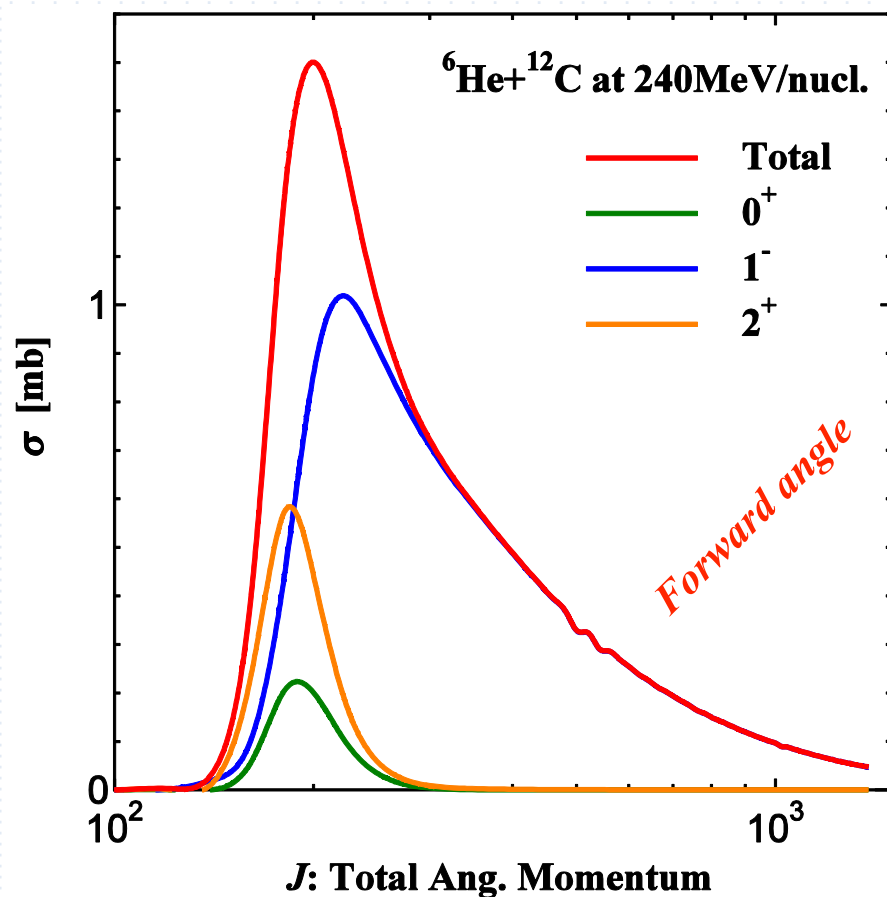


Exp. data from PRC59, 1252 (1999), T. Aumann *et al.*

前方散乱

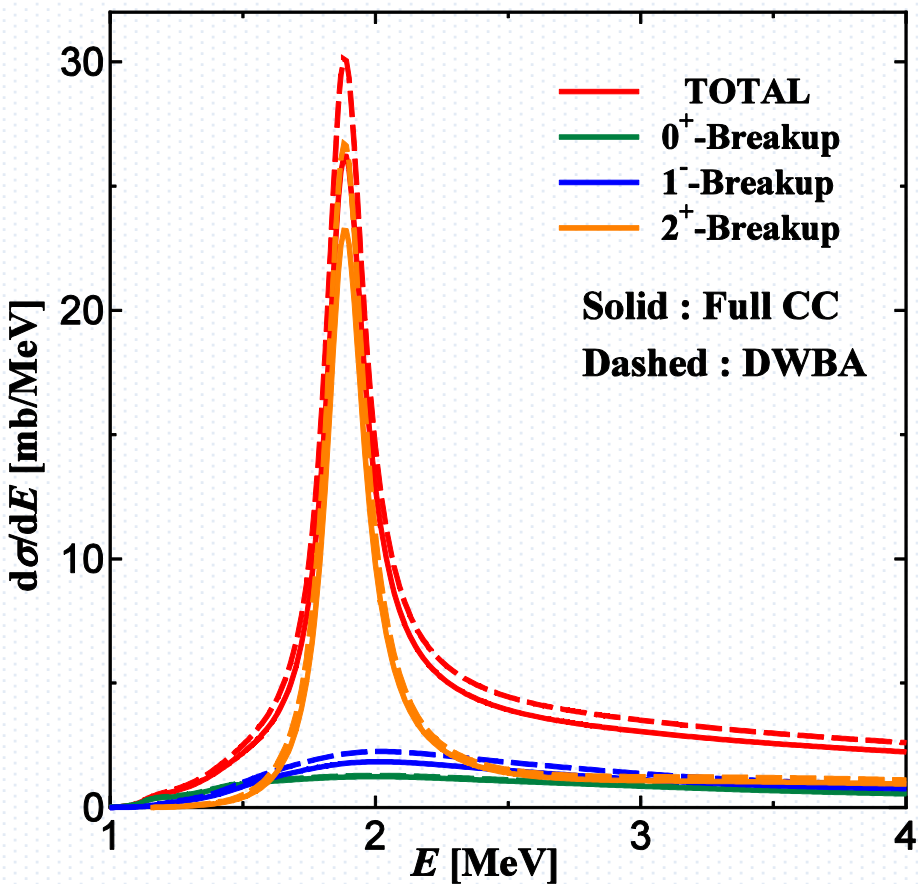
${}^6\text{He}$ 分解においても前方に限れば
Coulomb分解だけを視ることが可能

Partial cross section for J

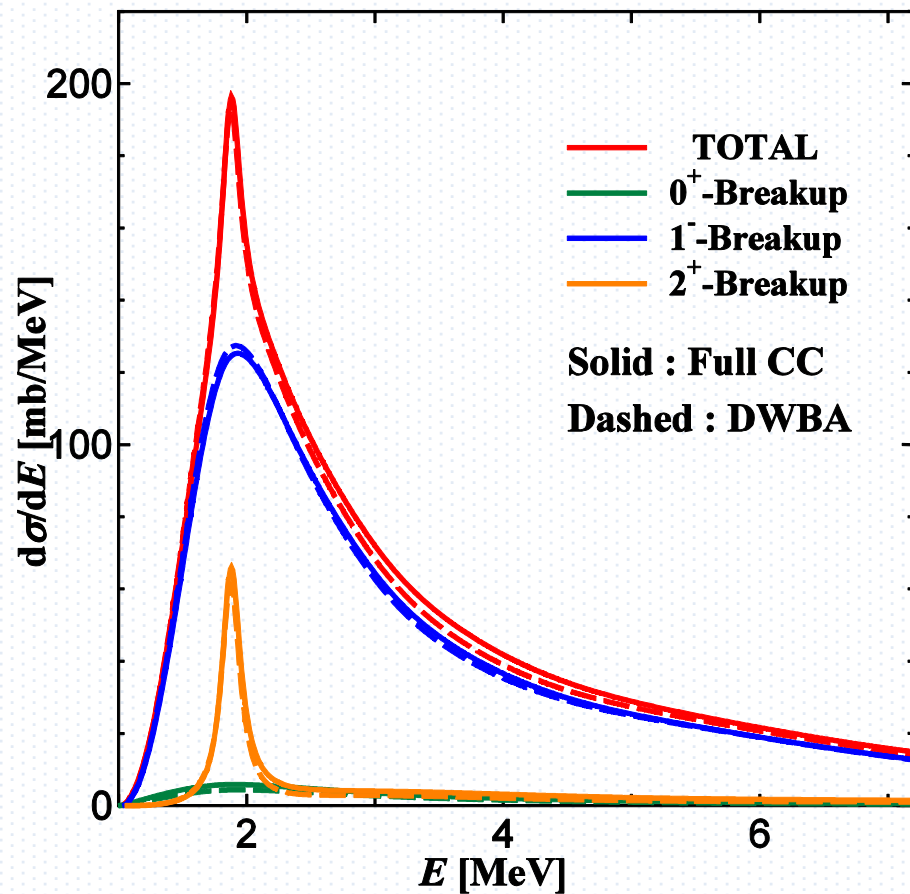


多段階過程 *or* 1段階過程

${}^6\text{He}+{}^{12}\text{C}$ scattering@240MeV/A



${}^6\text{He}+{}^{208}\text{Pb}$ scattering@240MeV/A



CDCCの工学分野への応用

Application to Nuclear Engineering

□ Background

- **Lithium** is an important element relevant to not only a tritium breeding material in **DT fusion reactors** but also a candidate for target material in the intense neutron source of **IFMIF**.
- Accurate nuclear data of **nucleon induced reactions on $^{6,7}\text{Li}$** are currently required for incident energies up to 150 MeV.
- Statistical model is not applicable to Li scattering because the **clustering structure** is important for Li

□ CDCC calculation

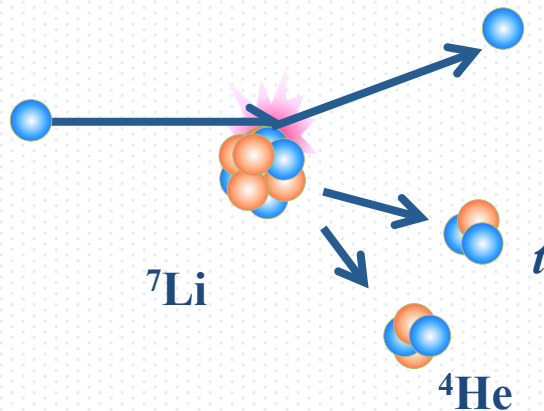
- $^{6,7}\text{Li}$ structure

$$^6\text{Li} = ^4\text{He} + d \quad \text{2-body cluster model}$$

$$^7\text{Li} = ^4\text{He} + t$$

- Nucleon- $^{6,7}\text{Li}$ interaction

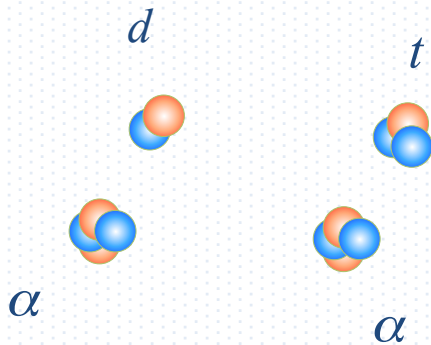
Single folding model with **JLM**



This work has been performed at Hokkaido Univ (JCPRG) and Kyushu Univ..

${}^6\text{Li}, {}^7\text{Li} + n$ 散乱

${}^6\text{Li}, {}^7\text{Li}$ 2-cluster model



Transition density

$$\rho_{ij}(r_P) = \sum_{n=1}^{A_P} \langle \phi_i | \delta(r_P - s_n) | \phi_j \rangle$$

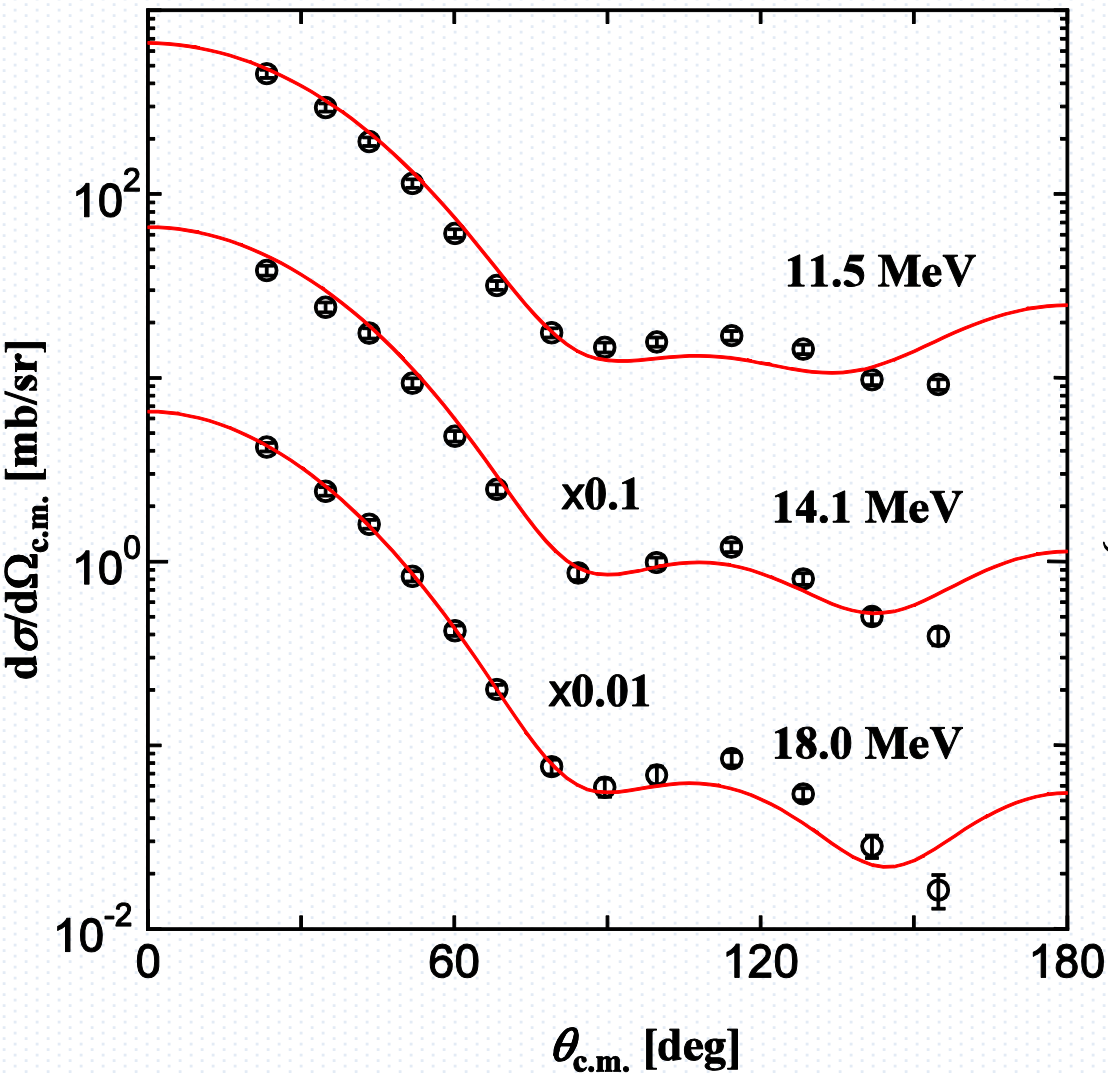
Microscopic coupling potential

$$U_{ij}(R) = \int \rho_{ij}(r_P) v_{NN}(s, E, \rho) dr_P$$

v_{NN} : JLM effective potential

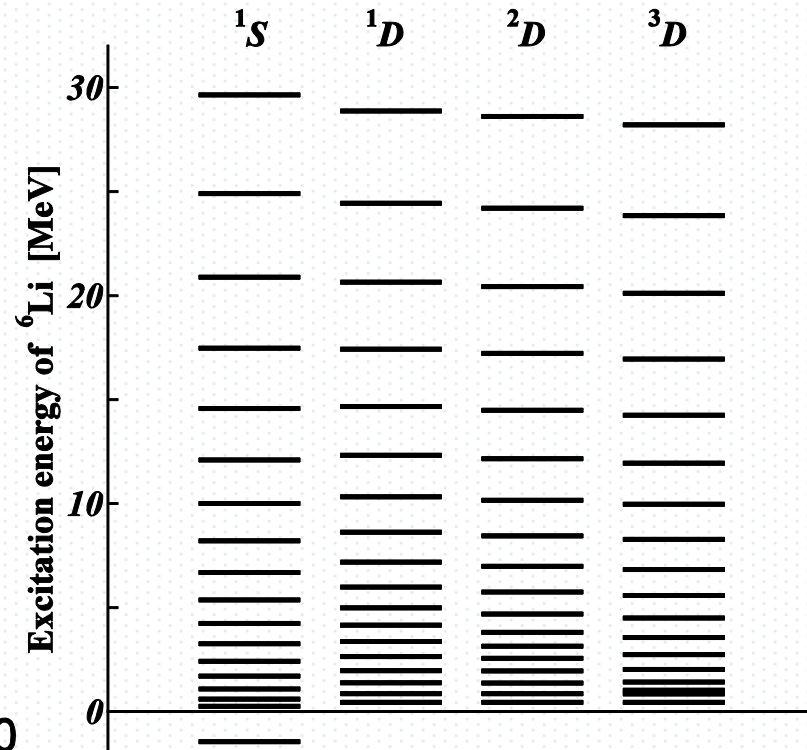
J.-P. Jeukenne, A. Lejeune, and C. Mahaux, Phys. Rev. C16, 80 (1977)

CDCC Analysis of ${}^6\text{Li}(n, n)$

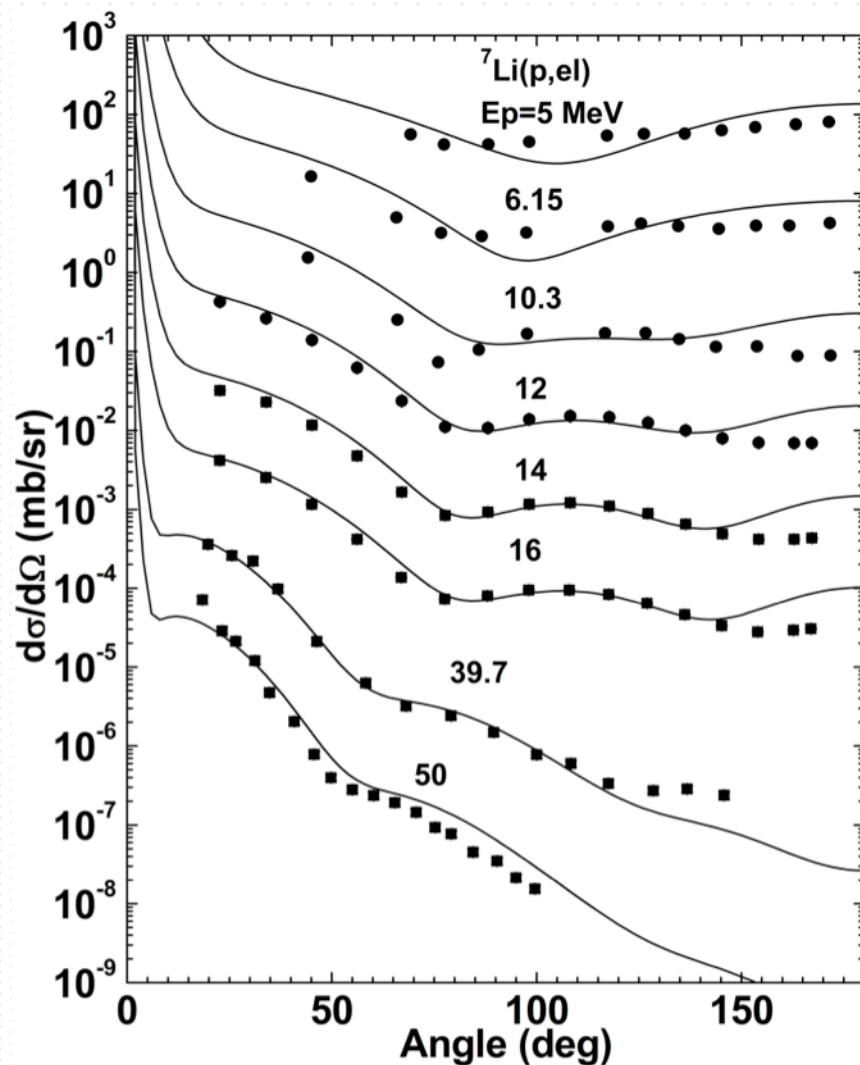
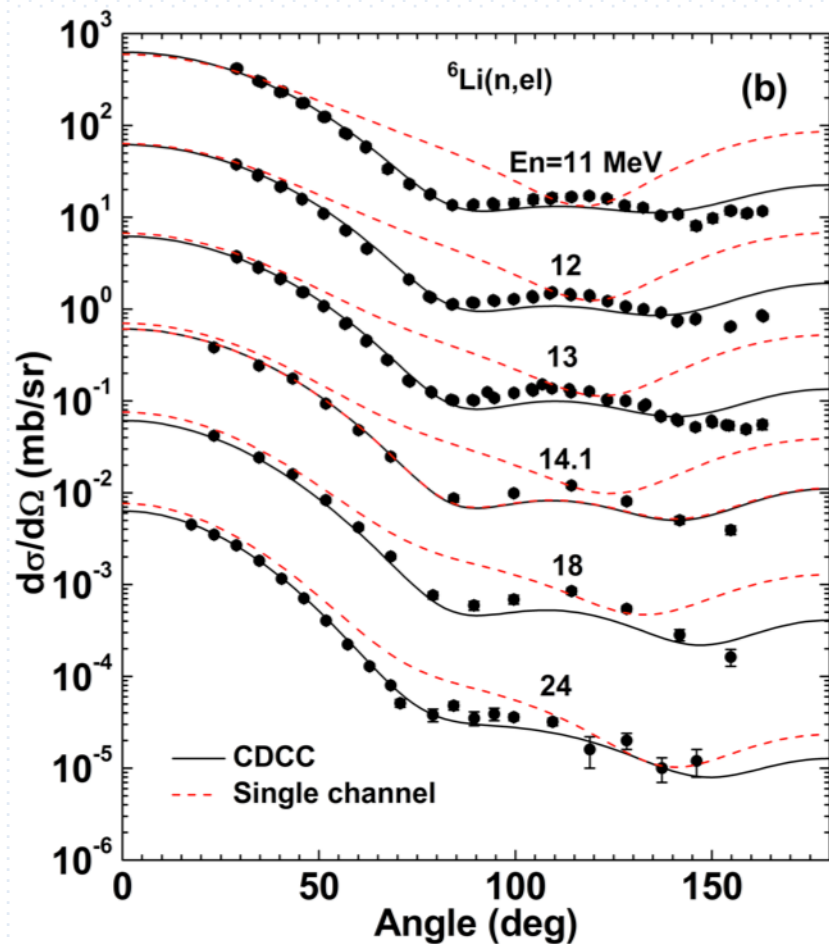


Calculation

- n - ${}^6\text{Li}$ interaction: JLM
- ${}^6\text{Li}$: $d + \alpha$ model

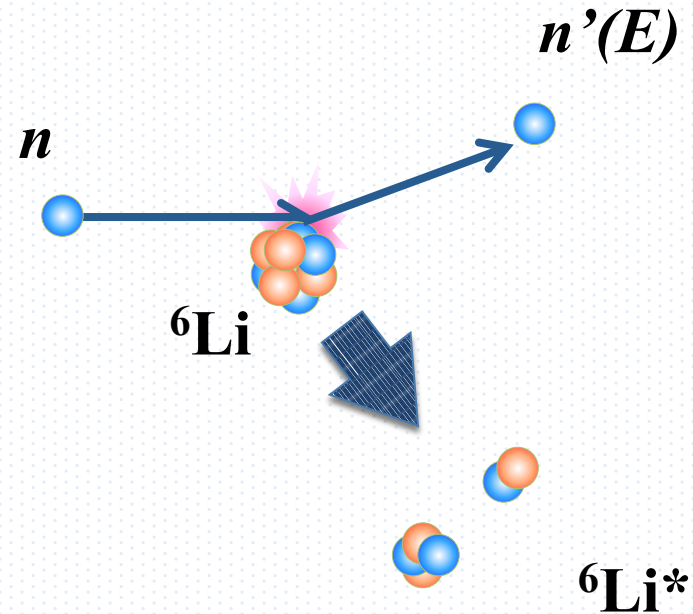
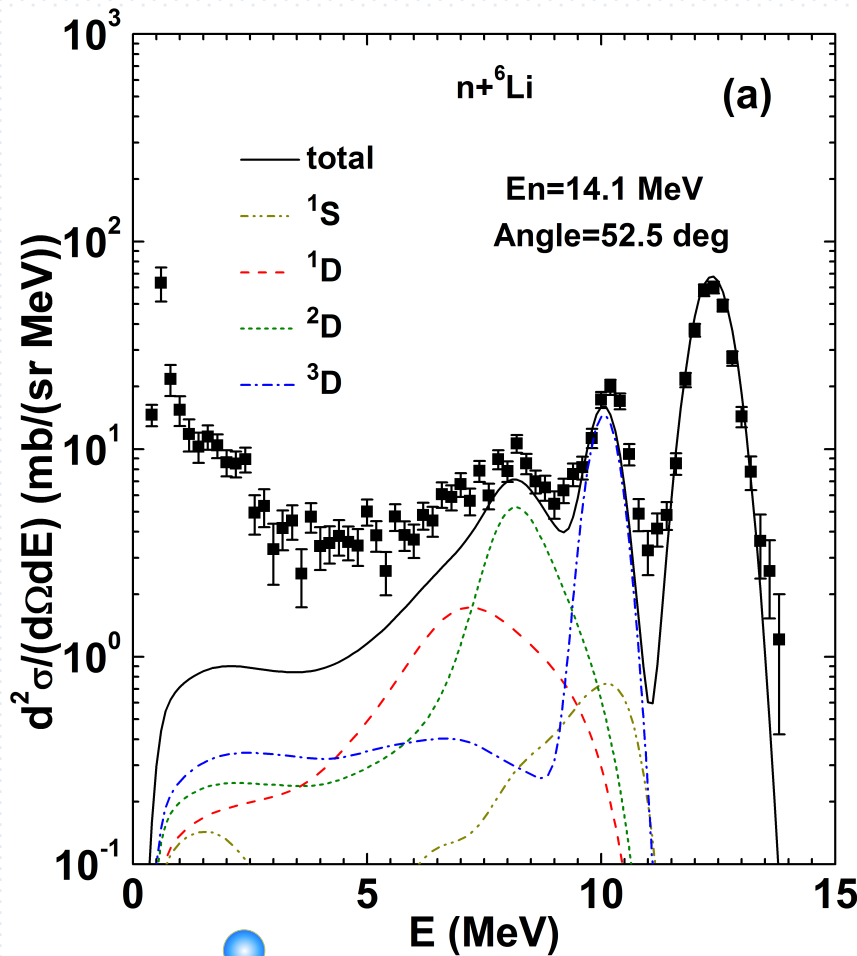


Elastic scattering



Calculated by Guo (Kyushu Univ.)

Nucleon emission (BU of Li)

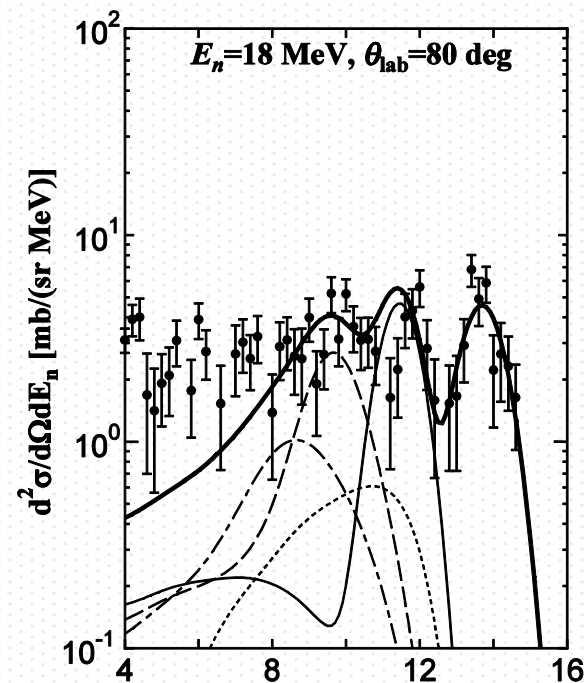
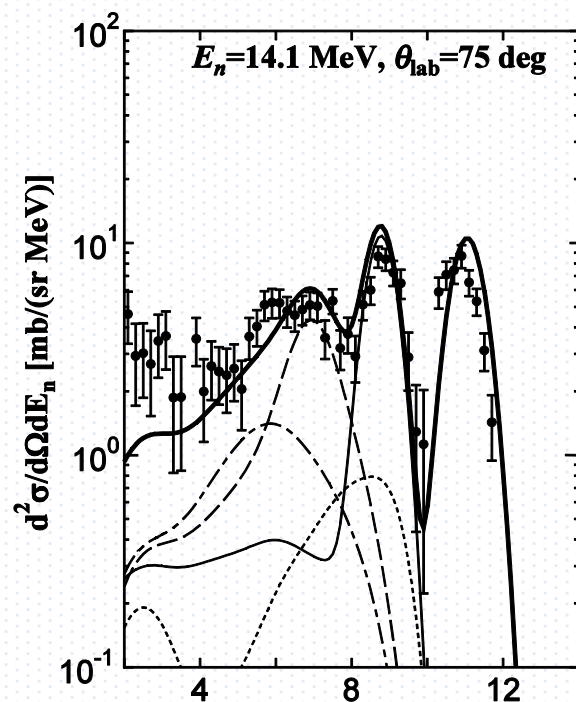
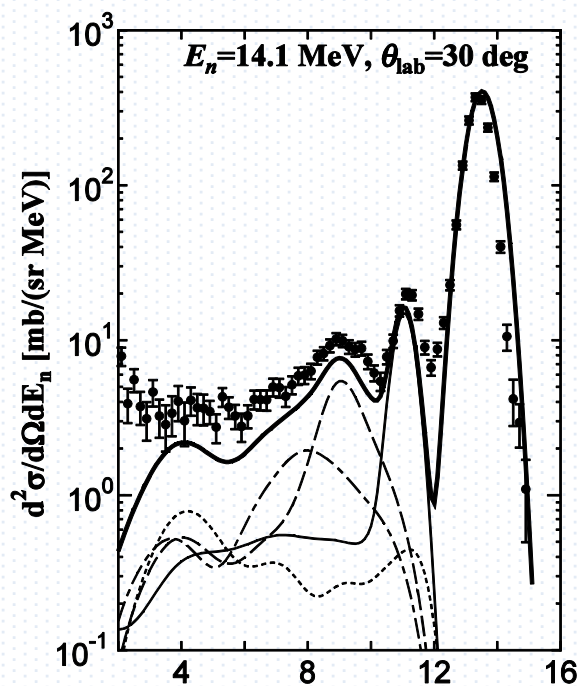


Neutron emitted spectrum represents the excited structure of ${}^6\text{Li}$, and CDCC calculation well reproduce the data.



${}^6\text{Li}$ 4-body CDCC analysis

CDCC Analysis of ${}^6\text{Li}(n, n')d\alpha$



まとめ

- 不安定核の関与する反応解析においてCDCC法は非常に有用な反応理論である。
- CDCC法は3体分解反応だけでなく4体分解反応の解析にも適用できる。
- CDCC法ではクーロン分解を核力分解との干渉を含め正確に取り扱うことが可能。
- CDCC法は不安定核解析だけでなく、工学面の分野においても非常に有用な方法となっている。