量子スピン系における Lieb-Robinson bounds
〜厳密統計力学入門〜

松井卓

九州大学数理学研究院

July 28.2015

予定

以下の項目を説明

- **イジング模型の平衡状態** & **量子イジング模型の基底状態.**

予定

以下の項目を説明

- **イジング模型の平衡状態** & **量子イジング模型の基底状態.**
- **作用素環と無限自由度の量子スピン系.**

予定

以下の項目を説明

- **イジング模型の平衡状態** & **量子イジング模型の基底状態**.
- **作用素環と無限自由度の量子スピン系**.
- Lieb-Robinson Bounds **の基礎**.

予定

以下の項目を説明

- **イジング模型の平衡状態** & **量子イジング模型の基底状態**.
- **作用素環と無限自由度の量子スピン系**.
- Lieb-Robinson Bounds **の基礎**.
- **ギャップのある基底状態 一次元系の場合**（matrix product state **の一般化**）.

予定

以下の項目を説明

- **イジング模型の平衡状態** & **量子イジング模型の基底状態**.
- **作用素環と無限自由度の量子スピン系**.
- Lieb-Robinson Bounds **の基礎**.
- **ギャップのある基底状態 一次元系の場合**（matrix product state **の一般化**）.
- **中心極限定理と量子系の揺らぎが定める** CCR **代数**.

予定

以下の項目を説明

- **イジング模型の平衡状態** & **量子イジング模型の基底状態.**
- **作用素環と無限自由度の量子スピン系.**
- Lieb-Robinson Bounds **の基礎.**
- **ギャップのある基底状態 一次元系の場合**（matrix product state **の一般化**）.
- **中心極限定理と量子系の揺らぎが定める** CCR **代数.**
- **ギャップのある基底状態 二次元系の場合**　Kitaev **模型を中心として**

古典的イジング模型

$\mathbf{Z}$ = 整数全体， $\mathbf{Z}^2 = \{\, (i, j) \mid i, j \in \mathbf{Z} \,\}$

$$\Lambda = \Lambda_L = \{k = (k_1, k_2) \in \mathbf{Z}^2 \mid |k_1| \leq L/2,\ |k_2| \leq L/2\,\}$$

$k = (k_1, k_2)$, $l = (l_1, l_2) \in \mathbf{Z}^2$ に対して

$$|\, k - l \,| = |k_1 - l_1| + |k_2 - l_2|$$

$\sigma^{(k)} = \pm 1$ ($k \in \mathbf{Z}^2$) : スピン変数

$$X = \prod_{k \in \mathbf{Z}^2} \{-1.1\}$$

$$X_{\Lambda_L} = \prod_{k \in \Lambda_L} \{-1.1\}$$

スピン配置 spin configuration

イジング模型のハミルトニアン

$H_L^{Ising}(h)(\sigma)$: Λ_L 上でのハミルトニアン

$$H_L^{Ising}(h)(\sigma) = -\sum_{((k,l))\subset\Lambda_L,} \sigma^{(k)}\sigma^{(l)} - h\sum_{k\in\Lambda_L} \sigma^{(k)}$$

$((k,l))$: 最近接格子点の組 nearest neighbor pair $|k-l| = 1$
h : 外場の強さ

イジング模型の熱平衡状態

T : 温度，k : ボルツマン定数，
$\beta = 1/kT$:逆温度 inverse temperature
$F(\sigma)$: （有限個の）スピンの変数の関数

イジング模型の熱平衡状態

T：温度，k：ボルツマン定数，
$\beta = 1/kT$:逆温度 inverse temperature
$F(\sigma)$: （有限個の）スピンの変数の関数
$F(\sigma)$ の期待値：

$$\langle F(\sigma)\rangle_L^{(\beta,h)} = \frac{1}{Z_L^{(\beta,h)}} \sum_{\sigma\in X_{\Lambda_L}} e^{-\beta H_L^{Ising}(h)(\sigma)} F(\sigma),$$

$$Z_L^{(\beta,h)} = \sum_{\sigma\in X_{\Lambda_L}} e^{-\beta H_L^{Ising}(h)(\sigma)}$$

一点相関関数:

$$\left(\sigma^{(k)}\right)_L^{(\beta,h)} = \frac{1}{Z_L^{(\beta,h)}} \sum_{\sigma} e^{-\beta H_L^{Ising}(h)(\sigma)} \sigma^{(k)}$$

二点相関関数:

$$\left(\sigma^{(k)}\sigma^{(l)}\right)_L^{(\beta,h)} = \frac{1}{Z_L^{(\beta,h)}} \sum_{\sigma} e^{-\beta H_L^{Ising}(h)(\sigma)} \sigma^{(k)}\sigma^{(l)}$$

Theorem

任意の外部磁場 h，任意の逆温度 β に対して熱力学的極限が存在．

$$\lim_{L\to\infty} (F(\sigma))_L^{(\beta,h)} = (F(\sigma))^{(\beta,h)}$$

臨界逆温度：β_c （一つだけ），

Theorem

任意の外部磁場 h，任意の逆温度 β に対して熱力学的極限が存在．

$$\lim_{L\to\infty}\left(F(\sigma)\right)_L^{(\beta,h)} = \left(F(\sigma)\right)^{(\beta,h)}$$

臨界逆温度 : β_c （一つだけ），

(i) $0 < \beta \le \beta_c$:

$$\lim_{h\downarrow 0}\left(f(\sigma)\right)^{(\beta,h)} = \lim_{h\uparrow 0}\left(f(\sigma)\right)^{(\beta,h)} = \left(f(\sigma)\right)^{(\beta,0)}$$

Theorem

任意の外部磁場 h，任意の逆温度 β に対して熱力学的極限が存在．

$$\lim_{L\to\infty} (F(\sigma))_L^{(\beta,h)} = (F(\sigma))^{(\beta,h)}$$

臨界逆温度：β_c **（一つだけ），**

(i) $0 < \beta \le \beta_c$:

$$\lim_{h\downarrow 0} (f(\sigma))^{(\beta,h)} = \lim_{h\uparrow 0} (f(\sigma))^{(\beta,h)} = (f(\sigma))^{(\beta,0)}$$

(ii) $\beta > \beta_c$:

$$\lim_{h\downarrow 0} \left(\sigma^{(k)}\right)^{(\beta,h)} = -\lim_{h\uparrow 0} \left(\sigma^{(k)}\right)^{(\beta,h)} > 0 \tag{1}$$

Z_2 対称性：$\sigma^{(j)} \Rightarrow -\sigma^{(j)}$ でハミルトニアンが不変

$$h = 0, \qquad H_L^{Ising}(0)(-\sigma) = H_L^{Ising}(h)(\sigma)$$

特に

$\mathbf{Z}_2$ 対称性：$\sigma^{(j)} \Rightarrow -\sigma^{(j)}$ でハミルトニアンが不変

$$h = 0, \qquad H_L^{Ising}(0)(-\sigma) = H_L^{Ising}(h)(\sigma)$$

特に

$$\left(\sigma^{(k)}\right)^{(\beta,0)} = 0$$

$\mathbb{Z}_2$ 対称性：$\sigma^{(j)} \Rightarrow -\sigma^{(j)}$ でハミルトニアンが不変

$$h = 0, \qquad H_L^{Ising}(0)(-\sigma) = H_L^{Ising}(h)(\sigma)$$

特に

$$\left(\sigma^{(k)}\right)^{(\beta,0)} = 0$$

- 低温度で磁化のヒステリシス
- $\mathbb{Z}_2$ 対称性の自発的対称性の破れ

Z_2 対称性：$\sigma^{(j)} \Rightarrow -\sigma^{(j)}$ でハミルトニアンが不変

$$h = 0, \qquad H_L^{Ising}(0)(-\sigma) = H_L^{Ising}(h)(\sigma)$$

特に

$$\left(\sigma^{(k)}\right)^{(\beta,0)} = 0$$

- **低温度で磁化のヒステリシス**
- **Z_2 対称性の自発的対称性の破れ**

ヒステリシスは無限遠の境界条件の効果である．

境界条件付きの平衡状態 $h=0$

$W_L(\sigma)$: 境界エネルギー

$$W_L(\sigma) = -\sum_{\substack{((k,l))\cap\Lambda_L\neq\emptyset \\ ((k,l))\cap\Lambda_L^c\neq\emptyset}} \sigma^{(k)}\sigma^{(l)}$$

境界条件付きの平衡状態 $h = 0$

$W_L(\sigma)$: 境界エネルギー

$$W_L(\sigma) = -\sum_{\substack{((k,l))\cap\Lambda_L\neq\emptyset \\ ((k,l))\cap\Lambda_L^c\neq\emptyset}} \sigma^{(k)}\sigma^{(l)}$$

± 境界条件の元での平衡状態:

境界条件付きの平衡状態 $h = 0$

$W_L(\sigma)$: 境界エネルギー

$$W_L(\sigma) = - \sum_{\substack{((k,l))\cap\Lambda_L\neq\emptyset \\ ((k,l))\cap\Lambda_L^c\neq\emptyset}} \sigma^{(k)}\sigma^{(l)}$$

± 境界条件の元での平衡状態:

$$(F(\sigma))_{L,\pm} = \frac{1}{Z_{L,\pm}} \sum_{\sigma:\sigma^{(k)}=\pm1,k\in\Lambda_L^c} e^{-\beta(H_L^{\mathrm{Ising}}(0)(\sigma)+W_L(\sigma))} F(\sigma),$$

$$Z_{L,\pm} = \sum_{\sigma:\sigma^{(k)}=\pm1,k\in\Lambda_L^c} e^{-\beta(H_L^{\mathrm{Ising}}(0)(\sigma)+W_L(\sigma))}.$$

境界条件付きの平衡状態 $h = 0$

$W_L(\sigma)$：境界エネルギー

$$W_L(\sigma) = -\sum_{\substack{((k,l))\cap\Lambda_L\neq\emptyset \\ ((k,l))\cap\Lambda_L^c\neq\emptyset}} \sigma^{(k)}\sigma^{(l)}$$

± 境界条件の元での平衡状態:

$$(F(\sigma))_{L,\pm} = \frac{1}{Z_{L,\pm}} \sum_{\sigma:\sigma^{(k)}=\pm1, k\in\Lambda_L^c} e^{-\beta(H_L^{\mathrm{Ising}}(0)(\sigma)+W_L(\sigma))} F(\sigma),$$

$$Z_{L,\pm} = \sum_{\sigma:\sigma^{(k)}=\pm1, k\in\Lambda_L^c} e^{-\beta(H_L^{\mathrm{Ising}}(0)(\sigma)+W_L(\sigma))}.$$

Λ_L の内部：全ての可能なスピン配置を取り，

境界条件付きの平衡状態 $h=0$

$W_L(\sigma)$: **境界エネルギー**

$$W_L(\sigma) = -\sum_{\substack{((k,l))\cap\Lambda_L\neq\emptyset \\ ((k,l))\cap\Lambda_L^c\neq\emptyset}} \sigma^{(k)}\sigma^{(l)}$$

± 境界条件の元での平衡状態:

$$(F(\sigma))_{L,\pm} = \frac{1}{Z_{L,\pm}} \sum_{\sigma:\sigma^{(k)}=\pm 1, k\in\Lambda_L^c} e^{-\beta(H_L^{\mathrm{Ising}}(0)(\sigma)+W_L(\sigma))} F(\sigma),$$

$$Z_{L,\pm} = \sum_{\sigma:\sigma^{(k)}=\pm 1, k\in\Lambda_L^c} e^{-\beta(H_L^{\mathrm{Ising}}(0)(\sigma)+W_L(\sigma))}.$$

Λ_L **の内部：全ての可能なスピン配置を取り，**
Λ_L **の外部：スピン配置は 1 または -1 に固定**

Theorem

$h = 0$ 任意の逆温度 β に対して熱力学的極限

$$\lim_{L\to\infty} (F(\sigma))_{L,\pm} = (F(\sigma))_{\pm}^{(\beta)},$$

が存在する.

Theorem

$h = 0$ 任意の逆温度 β に対して熱力学的極限

$$\lim_{L\to\infty} (F(\sigma))_{L,\pm} = (F(\sigma))_{\pm}^{(\beta)},$$

が存在する.

(i) $0 < \beta \leq \beta_c$ **高温相**

$$(F(\sigma))_{+}^{(\beta)} = (F(\sigma))_{-}^{(\beta)} = (F(\sigma))^{(\beta,0)},$$

Theorem

$h=0$ 任意の逆温度 β に対して熱力学的極限

$$\lim_{L\to\infty} (F(\sigma))_{L,\pm} = (F(\sigma))_{\pm}^{(\beta)},$$

が存在する.

(i) $0<\beta\le\beta_c$ **高温相**

$$(F(\sigma))_{+}^{(\beta)} = (F(\sigma))_{-}^{(\beta)} = (F(\sigma))^{(\beta,0)},$$

(ii) $\beta>\beta_c$ **低温相**

$$(F(\sigma))_{+}^{(\beta)} = \lim_{h\downarrow 0}\left(\sigma^{(k)}\right)^{(\beta,h)},\quad (F(\sigma))_{-}^{(\beta)} = \lim_{h\uparrow 0}\left(\sigma^{(k)}\right)^{(\beta,h)}$$

$$(F(\sigma))^{(\beta,0)} = 1/2\left\{\ (F(\sigma))_{+}^{(\beta)} + (F(\sigma))_{-}^{(\beta)}\ \right\}, \tag{2}$$

無限遠でスピンが+1 の境界条件の熱平衡状態

=

外部磁場を上（下）からゼロへ持ってゆく極限

無限遠でスピンが+1 の境界条件の熱平衡状態

=

外部磁場を上（下）からゼロへ持ってゆく極限

イジング模型の相転移は
無限遠の境界条件の影響で起こる.

二つ方法

- $h = 0$, $\pm$ 境界条件の元で二次元イジング模型は可解模型.

二つ方法

- $h = 0$, ± 境界条件の元で二次元イジング模型は可解模型．
- より解析的な方法（Peirls の議論，相関不等式，パーコレーション etc.）

二つ方法

- $h = 0$, $\pm$ 境界条件の元で二次元イジング模型は可解模型．
- より解析的な方法（Peirls の議論，相関不等式，パーコレーション etc.）

代表的な不等式

二つ方法

- $h = 0$, ± 境界条件の元で二次元イジング模型は可解模型．
- より解析的な方法（Peirls の議論，相関不等式，パーコレーション etc.）

代表的な不等式

$$H(J,h) = -\sum_{i \neq j \in \Lambda} J_{ij}\sigma^{(i)}\sigma^{(j)} - \sum_{k \in \Lambda} h_k \sigma^{(k)}$$

二つ方法

- $h = 0$, ± 境界条件の元で二次元イジング模型は可解模型．
- より解析的な方法（Peirls の議論，相関不等式，パーコレーション etc.）

代表的な不等式

$$H(J,h) = -\sum_{i\neq j\in\Lambda} J_{ij}\sigma^{(i)}\sigma^{(j)} - \sum_{k\in\Lambda} h_k\sigma^{(k)}$$

$$(F(\sigma))_{J,h} = \frac{\sum_\sigma e^{-H(J,h)}F(\sigma)}{Z}$$

Griffiths の第一 不等式

Griffiths の第一 不等式

$$J_{ij} \geq 0, \quad h_k \geq 0, \; \sigma(A) = \prod_{k \in A} \sigma^{(k)} \quad A \subset \mathbf{Z}^{\mathbf{d}}$$

Griffiths の第一 不等式

$$J_{ij} \geq 0, \quad h_k \geq 0, \ \sigma(A) = \prod_{k \in A} \sigma^{(k)} \quad A \subset \mathbf{Z}^{\mathbf{d}}$$

$$\left(\sigma(A) \right)_{J,h} \geq 0$$

Griffiths の第一 不等式

$$J_{ij} \geq 0, \quad h_k \geq 0, \ \sigma(A) = \prod_{k\in A} \sigma^{(k)} \quad A \subset \mathbf{Z}^{\mathrm{d}}$$

$$(\ \sigma(A)\ )_{J,h} \geq 0$$

Fortuin-Kasteleyn-Ginibre 不等式

Griffiths の第一 不等式

$J_{ij} \geq 0, \quad h_k \geq 0$，$\sigma(A) = \prod_{k \in A} \sigma^{(k)} \quad A \subset \mathbf{Z}^{\mathrm{d}}$

$$\langle\, \sigma(A) \,\rangle_{J,h} \geq 0$$

Fortuin-Kasteleyn-Ginibre 不等式

$J_{ij} \geq 0, \quad h_k \in \mathbf{R}$，$\quad g(\sigma)$ と $f(\sigma)$ は広義増加（非減少）関数

Griffiths の第一 不等式

$J_{ij} \geq 0, \quad h_k \geq 0$，$\sigma(A) = \prod_{k \in A} \sigma^{(k)} \quad A \subset \mathbf{Z}^{\mathrm{d}}$

$$\langle \sigma(A) \rangle_{J,h} \geq 0$$

Fortuin-Kasteleyn-Ginibre 不等式

$J_{ij} \geq 0, \quad h_k \in \mathbf{R}$，　$g(\sigma)$ と $f(\sigma)$ は広義増加（非減少）関数

$$\langle f(\sigma) g(\sigma) \rangle_{J,h} - \langle f(\sigma) \rangle_{J,h} \langle g(\sigma) \rangle_{J,h} \geq 0$$

$d = 1$ 相転移なし

$d = 1$ 相転移なし　$\Leftarrow$　境界が有限だから

$d = 1$ 相転移なし　$\Leftarrow$　境界が有限だから

高次元 $3 \leq d$ での並進不変性の破れ，

$d = 1$ 相転移なし　$\Leftarrow$　境界が有限だから

高次元 $3 \le d$ での並進不変性の破れ，

臨界指数?

量子イジング模型の基底状態

一次元格子 $\mathbb{Z}$ の量子イジング模型

量子イジング模型の基底状態

一次元格子 $\mathbb{Z}$ の量子イジング模型

$\sigma_\alpha^{(k)}$, $\alpha = x, y, z$, $k \in \mathbb{Z}$ (格子点 k 上のパウリスピン行列)

量子イジング模型の基底状態

一次元格子 Z の量子イジング模型

$\sigma_\alpha^{(k)}, \ \ \alpha = x, y, z, \ \ k \in \mathrm{Z}$ (格子点 k 上のパウリスピン行列)

$$(\sigma_\alpha^{(k)})^2 = 1,$$

$$\sigma_x^{(k)}\sigma_y^{(k)} = -\sigma_y^{(k)}\sigma_x^{(k)} = i\sigma_z^{(k)},$$

$$\left[\sigma_\alpha^{(k)}, \sigma_\beta^{(l)}\right] = 0, \qquad (k \neq l),$$

量子イジング模型の基底状態

一次元格子 Z の量子イジング模型

$\sigma_\alpha^{(k)}, \quad \alpha = x, y, z, \quad k \in \mathbb{Z}$ (格子点 k 上のパウリスピン行列)

$$(\sigma_\alpha^{(k)})^2 = 1,$$

$$\sigma_x^{(k)} \sigma_y^{(k)} = -\sigma_y^{(k)} \sigma_x^{(k)} = i\sigma_z^{(k)},$$

$$\left[\sigma_\alpha^{(k)}, \sigma_\beta^{(l)}\right] = 0, \qquad (k \neq l),$$

量子イジング模型のハミルトニアン

量子イジング模型の基底状態

一次元格子 Z の量子イジング模型

$\sigma_\alpha^{(k)}, \quad \alpha = x, y, z, \quad k \in \mathbb{Z}$ (格子点 k 上のパウリスピン行列)

$$(\sigma_\alpha^{(k)})^2 = 1,$$

$$\sigma_x^{(k)} \sigma_y^{(k)} = -\sigma_y^{(k)} \sigma_x^{(k)} = i\sigma_z^{(k)},$$

$$\left[\sigma_\alpha^{(k)}, \sigma_\beta^{(l)}\right] = 0, \qquad (k \neq l),$$

量子イジング模型のハミルトニアン

$$H_{[L,M]} = -\lambda \sum_{k=L}^{M} \sigma_x^{(k)} - \sum_{k=L}^{M-1} \sigma_z^{(k)} \sigma_z^{(k+1)},$$

量子イジング模型の基底状態

一次元格子 Z の量子イジング模型

$\sigma_\alpha^{(k)}$, $\alpha = x, y, z$, $k \in \mathbb{Z}$ (格子点 k 上のパウリスピン行列)

$$(\sigma_\alpha^{(k)})^2 = 1,$$

$$\sigma_x^{(k)}\sigma_y^{(k)} = -\sigma_y^{(k)}\sigma_x^{(k)} = i\sigma_z^{(k)},$$

$$\left[\sigma_\alpha^{(k)}, \sigma_\beta^{(l)}\right] = 0, \qquad (k \neq l),$$

量子イジング模型のハミルトニアン

$$H_{[L,M]} = -\lambda \sum_{k=L}^{M} \sigma_x^{(k)} - \sum_{k=L}^{M-1} \sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(k+1)},$$

λ: 縦方向への外場の強さ.

$e^{-\beta H_{[L,M]}}$ 全ての行列成分が正.

$e^{-\beta H_{[L,M]}}$ 全ての行列成分が正．

Theorem (Perron-Frobenius の定理)

A: 全ての成分が正の実対称行列．

$e^{-\beta H_{[L,M]}}$ 全ての行列成分が正．

Theorem (Perron-Frobenius の定理)

A: 全ての成分が正の実対称行列．

$\Rightarrow$

A の最大固有値は非退化（重複度が１），

$e^{-\beta H_{[L,M]}}$ 全ての行列成分が正.

Theorem (Perron-Frobenius の定理)

A: 全ての成分が正の実対称行列.

$\Rightarrow$

A の最大固有値は非退化（重複度が１）,

最大固有値の固有ベクトル:

$e^{-\beta H_{[L,M]}}$ 全ての行列成分が正．

Theorem (Perron-Frobenius の定理)

A: 全ての成分が正の実対称行列．

$\Rightarrow$

A の最大固有値は非退化（重複度が１），

最大固有値の固有ベクトル:

全ての成分が正であるベクトル（の定数倍）．

$e^{-\beta H_{[L,M]}}$ 全ての行列成分が正．

Theorem (Perron-Frobenius の定理)

A: 全ての成分が正の実対称行列．

$\Rightarrow$

A の最大固有値は非退化（重複度が１），

最大固有値の固有ベクトル:

全ての成分が正であるベクトル（の定数倍）．

特に

$e^{-\beta H_{[L,M]}}$ 全ての行列成分が正．

Theorem (Perron-Frobenius の定理)

A: 全ての成分が正の実対称行列．

$\Rightarrow$

A の最大固有値は非退化（重複度が１），

最大固有値の固有ベクトル:

全ての成分が正であるベクトル（の定数倍）．

特に
有限系で量子イジング模型の基底状態は一意的

$\Omega_{[L,M]}$: $H_{[L,M]}$ の基底状態ベクトル

$\Omega_{[L,M]}$: $H_{[L,M]}$ の基底状態ベクトル

$\Delta_{[L,M]} > 0$: スペクトル・ギャップ

= 基底状態エネルギーと励起エネルギーの間のギャップ

$\Omega_{[L,M]}$: $H_{[L,M]}$ の基底状態ベクトル

$\Delta_{[L,M]} > 0$: スペクトル・ギャップ

= 基底状態エネルギーと励起エネルギーの間のギャップ

局所物理量 Q に対し

$$(\Omega_{[L,M]}, Q\Omega_{[L,M]}) = \omega_{[L,M]}(Q)$$

とおく.

Theorem

全ての λ で

$$\lim_{L\to-\infty, M\to\infty} \omega_{[L,M]}(Q) = \omega(Q),$$

が存在

Theorem

全ての λ で

$$\lim_{L\to-\infty, M\to\infty} \omega_{[L,M]}(Q) = \omega(Q),$$

が存在

(i) $\lambda_{\mathrm{cr}} < \lambda$:

Theorem

全ての λ で

$$\lim_{L\to-\infty, M\to\infty} \omega_{[L,M]}(Q) = \omega(Q),$$

が存在

(i) $\lambda_{\mathrm{cr}} < \lambda$:

ギャップは（システムサイズによらず）開く．

Theorem

全ての λ で

$$\lim_{L\to-\infty, M\to\infty} \omega_{[L,M]}(Q) = \omega(Q),$$

が存在

(i) $\lambda_{\mathrm{cr}} < \lambda$:

ギャップは（システムサイズによらず）開く．

$$0 < \Delta < \Delta_{[L,M]}$$

Theorem

全ての λ で

$$\lim_{L\to-\infty, M\to\infty} \omega_{[L,M]}(Q) = \omega(Q),$$

が存在

(i) $\lambda_{\mathrm{cr}} < \lambda$:

ギャップは（システムサイズによらず）開く．

$$0 < \Delta < \Delta_{[L,M]}$$

ω は純粋状態であり，

Theorem

全ての λ で

$$\lim_{L\to-\infty, M\to\infty} \omega_{[L,M]}(Q) = \omega(Q),$$

が存在

(i) $\lambda_{\mathrm{cr}} < \lambda$:

ギャップは（システムサイズによらず）開く．

$$0 < \Delta < \Delta_{[L,M]}$$

ω **は純粋状態であり，**

ω **の二点相関関数は指数的減衰．**

Theorem

全ての λ で

$$\lim_{L\to-\infty, M\to\infty} \omega_{[L,M]}(Q) = \omega(Q),$$

が存在

(i) $\lambda_{\mathrm{cr}} < \lambda$:

ギャップは（システムサイズによらず）開く．

$$0 < \Delta < \Delta_{[L,M]}$$

ω は純粋状態であり，

ω の二点相関関数は指数的減衰．

$$\omega(\sigma_z^{(i)}\sigma_z^{(j)}) \leq Ce^{-m|i-j|}$$

Theorem

(ii) $\mathbf{0} < \lambda < \lambda_{cr}$:

Theorem

(ii) $0 < \lambda < \lambda_{cr}$:

(a) **スペクトル・ギャップは漸近的に閉じる**:

$$\lim_{(M-L)\to\infty} \Delta_{[L,M]} = 0.$$

Theorem

(ii) $0 < \lambda < \lambda_{cr}$:

(a) **スペクトル・ギャップは漸近的に閉じる**:

$$\lim_{(M-L)\to\infty} \Delta_{[L,M]} = 0.$$

(b) **長距離秩序がある.**

$$\omega(\sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(l)}) - \omega(\sigma_z^{(k)})\omega(\sigma_z^{(l)}) \geq c,$$

となる（Z_2 不変性により $\omega(\sigma_z^{(k)}) = 0$）.

Theorem

(ii) $0 < \lambda < \lambda_{cr}$:

(a) **スペクトル・ギャップは漸近的に閉じる**:

$$\lim_{(M-L)\to\infty} \Delta_{[L,M]} = 0.$$

(b) **長距離秩序がある．**

$$\omega(\sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(l)}) - \omega(\sigma_z^{(k)})\omega(\sigma_z^{(l)}) \geq c,$$

となる（Z_2 不変性により $\omega(\sigma_z^{(k)}) = 0$）．

(c) ω **は純粋状態ではない．**

Theorem

(d) $\boldsymbol{\xi_{[L,M]} \perp \Omega_{[L,M]}}$

Theorem

(d) $\xi_{[L,M]} \perp \Omega_{[L,M]}$

$$\Omega^{\pm}_{[L,M]} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\Omega_{[L,M]} \pm \xi_{[L,M]}\}$$

$$\omega^{\pm}_{[L,M]}(Q) = \left(\Omega^{\pm}_{[L,M]}, Q\Omega^{\pm}_{[L,M]}\right),$$

Theorem

(d) $\xi_{[L,M]} \perp \Omega_{[L,M]}$

$$\Omega^{\pm}_{[L,M]} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\Omega_{[L,M]} \pm \xi_{[L,M]}\}$$

$$\omega^{\pm}_{[L,M]}(Q) = \left(\Omega^{\pm}_{[L,M]}, Q\Omega^{\pm}_{[L,M]}\right),$$

$$\omega^{\pm}(Q) = \lim_{\substack{L\to-\infty \\ M\to\infty}} \omega^{\pm}_{[L,M]}(Q),$$

$$\omega(Q) = \frac{1}{2}(\omega^{+}(Q) + \omega^{-}(Q)),$$

(Q は局所物理量)

イジング模型の相転移と
量子イジング模型の基底状態の縮退

イジング模型の相転移と
量子イジング模型の基底状態の縮退

Jordan-Wigner 変換で自由フェルミ粒子系と等価
(量子１次元の場合のみ)

イジング模型の相転移と
量子イジング模型の基底状態の縮退

Jordan-Wigner 変換で自由フェルミ粒子系と等価
(量子１次元の場合のみ）

d+1 次元古典イジング模型の平衡状態
≡
d 次元の量子イジング模型の基底状態

イジング模型の相転移と
量子イジング模型の基底状態の縮退

Jordan-Wigner 変換で自由フェルミ粒子系と等価
(量子１次元の場合のみ)

d+1 次元古典イジング模型の平衡状態
≡
d 次元の量子イジング模型の基底状態

(相関関数のファイマン積分的表示)

Lesson

有限系では励起状態に見える状態も
無限自由度の系になると基底状態
のように見えることがある.

Lesson

**有限系では励起状態に見える状態も
無限自由度の系になると基底状態
のように見えることがある.**

End of Part 1