3. Lieb-Robinson Bounds

松井卓

九州大学数理学研究院

July 29 2015

境界条件に関してコメント

$$H_\Lambda = \sum_{X \subset \Lambda} \Psi(X), \quad \Psi(X) = \Psi^*(X) \in \mathcal{A}_X$$

無限体積の（形式的）ハミルトニアン

境界条件に関してコメント

$$H_{\Lambda} = \sum_{X \subset \Lambda} \Psi(X), \quad \Psi(X) = \Psi^{*}(X) \in \mathcal{A}_X$$

無限体積の（形式的）ハミルトニアン

$$H = \sum_{X \subset \mathbf{Z}^{\mathbf{d}}} \Psi(X), \quad \Psi(X) = \Psi^{*}(X)$$

境界条件に関してコメント

$$H_\Lambda = \sum_{X\subset\Lambda} \Psi(X), \quad \Psi(X) = \Psi^*(X) \in \mathcal{A}_X$$

無限体積の（形式的）ハミルトニアン

$$H = \sum_{X\subset \mathbf{Z}^{\mathbf{d}}} \Psi(X), \quad \Psi(X) = \Psi^*(X)$$

$$\delta(Q) = [\, H \,,\, Q \,] = \lim_{\Lambda\to \mathbf{Z}^{\mathbf{d}}} [\, H_\Lambda \,,\, Q \,]$$

境界条件に関してコメント

$$H_\Lambda = \sum_{X \subset \Lambda} \Psi(X), \quad \Psi(X) = \Psi^*(X) \in \mathcal{A}_X$$

無限体積の（形式的）ハミルトニアン

$$H = \sum_{X \subset \mathbf{Z}^d} \Psi(X), \quad \Psi(X) = \Psi^*(X)$$

$$\delta(Q) = [H, Q] = \lim_{\Lambda \to \mathbf{Z}^d} [H_\Lambda, Q]$$

基底状態 $\varphi(Q^* \delta(Q)) \geq 0 \quad Q \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$

境界条件を変えてみる.

境界条件を変えてみる． $H_\Lambda + W_\Lambda$

$$\lim_{\Lambda \to Z^d} [\ H_\Lambda + W_\Lambda\ ,\ Q\ ] = \delta(Q)$$

境界条件を変えてみる． $H_\Lambda + W_\Lambda$

$$\lim_{\Lambda \to \mathbf{Z}^d} [\ H_\Lambda + W_\Lambda \ , \ Q \ ] = \delta(Q)$$

$\tilde{\Omega}_\Lambda$：　$H_\Lambda + W_\Lambda$ の有限体積基底状態ベクトル

境界条件を変えてみる．$H_\Lambda + W_\Lambda$

$$\lim_{\Lambda \to \mathbf{Z}^d} [\ H_\Lambda + W_\Lambda \ ,\ Q\ ] = \delta(Q)$$

$\tilde{\Omega}_\Lambda$：　$H_\Lambda + W_\Lambda$ の有限体積基底状態ベクトル

$$\lim_{\Lambda \to \mathbf{Z}^d} \left(\tilde{\Omega}_\Lambda, Q \tilde{\Omega}_\Lambda \right) = \tilde{\varphi}(Q)$$

も不等式

$$\tilde{\varphi}(Q^* \delta(Q)) \geq 0$$

をみたす．

Lieb-Robinson Bounds とは

$$H = \sum_k h_k$$

簡単のため最近接並進不変相互作用

Lieb-Robinson Bounds とは

$$H = \sum_k h_k$$

簡単のため最近接並進不変相互作用

$$e^{itH} Q e^{-itH} = \sum_N \frac{(it)^N}{N!} [H, [H, [H, \cdots, [H, Q]]] \cdots]]$$

Lieb-Robinson Bounds とは

$$H = \sum_k h_k$$

簡単のため最近接並進不変相互作用

$$e^{itH} Q e^{-itH} = \sum_N \frac{(it)^N}{N!} [H, [H, [H, \cdots, [H, Q]]] \cdots]]$$

Lieb-Robinson Bound

Lieb-Robinson Bounds とは

$$H = \sum_k h_k$$

簡単のため最近接並進不変相互作用

$$e^{itH} Q e^{-itH} = \sum_N \frac{(it)^N}{N!} [H, [H, [H, \cdots, [H, Q]]] \cdots]]$$

Lieb-Robinson Bound

$$\| \left[e^{itH} Q e^{-itH}, R \right] \| \leq C(Q, R) e^{|t|\xi - M\, d(X,Y)}$$

$$Q \in \mathcal{A}_X \quad R \in \mathcal{A}_Y$$

$$d(X, Y) = \min \{ |k - l| \ | k \in X, l \in Y \}$$

相互作用

ハミルトニアン

$$H = \sum_{X \subset \mathbf{Z}^{\mathrm{d}}} \Psi(X), \quad \Psi(X) = \Psi(X)^* \in \mathcal{A}_X,$$

相互作用

ハミルトニアン

$$H=\sum_{X\subset\mathbf{Z}^{\mathrm{d}}}\Psi(X),\quad \Psi(X)=\Psi(X)^{*}\in\mathcal{A}_{X},$$

H : 相互作用 $\{\Psi(X)\}$ に付随したハミルトニアンと呼ぶ．

相互作用

ハミルトニアン

$$H = \sum_{X \subset \mathbf{Z}^d} \Psi(X), \quad \Psi(X) = \Psi(X)^* \in \mathcal{A}_X,$$

H : **相互作用** $\{\Psi(X)\}$ **に付随したハミルトニアンと呼ぶ.**

相互作用 $\{\Psi(X)\}$ **は** Finite Range：

相互作用

ハミルトニアン

$$H = \sum_{X \subset \mathbf{Z}^{\mathrm{d}}} \Psi(X), \quad \Psi(X) = \Psi(X)^* \in \mathcal{A}_X,$$

H : **相互作用** $\{\Psi(X)\}$ **に付随したハミルトニアンと呼ぶ.**

相互作用 $\{\Psi(X)\}$ **は** Finite Range**：**
X **の半径が** R **より大きいとき** $\Psi(X) = 0$

相互作用

ハミルトニアン

$$H = \sum_{X \subset \mathbf{Z}^{\mathrm{d}}} \Psi(X), \quad \Psi(X) = \Psi(X)^* \in \mathcal{A}_X,$$

H : **相互作用** $\{\Psi(X)\}$ **に付随したハミルトニアンと呼ぶ.**

相互作用 $\{\Psi(X)\}$ **は** Finite Range**：**
X **の半径が** R **より大きいとき** $\Psi(X) = 0$

相互作用 $\{\Psi(X)\}$ **は並進不変：**

相互作用

ハミルトニアン

$$H = \sum_{X \subset \mathbf{Z}^{\mathrm{d}}} \Psi(X), \quad \Psi(X) = \Psi(X)^* \in \mathcal{A}_X,$$

H : **相互作用** $\{\Psi(X)\}$ **に付随したハミルトニアンと呼ぶ．**

相互作用 $\{\Psi(X)\}$ **は** Finite Range：
X **の半径が** R **より大きいとき** $\Psi(X) = 0$

相互作用 $\{\Psi(X)\}$ **は並進不変：**$\tau_k(\Psi(X)) = \Psi(X + k)$

以下では，簡単のため相互作用が並進不変であるとする．

$$\Lambda = \left\{ k = (k_1, k_2, \cdots, k_d) \in \mathrm{Z}^{\mathrm{d}} \mid |k_j| \le L/2,\ (j = 1, \cdots d) \right\}.$$

以下では，簡単のため相互作用が並進不変であるとする．

$$\Lambda = \left\{ k = (k_1, k_2, \cdots, k_d) \in \mathbf{Z}^{\mathbf{d}} \mid |k_j| \leq L/2, \ (j = 1, \cdots d) \right\}.$$

$$H_\Lambda = \sum_{X \subset \Lambda} \Psi(X), \quad \Psi(X) = \Psi(X)^* \in \mathcal{A}_X,$$

以下では，簡単のため相互作用が並進不変であるとする．

$$\Lambda = \left\{ k = (k_1, k_2, \cdots, k_d) \in \mathrm{Z}^{\mathrm{d}} \ \middle| \ |k_j| \le L/2, \ (j = 1, \cdots d) \right\}.$$

$$H_\Lambda = \sum_{X \subset \Lambda} \Psi(X), \quad \Psi(X) = \Psi(X)^* \in \mathcal{A}_X,$$

$$\alpha_t^{(\Lambda)}(Q) = e^{itH_\Lambda} Q e^{-itH_\Lambda}, \quad Q \in \mathcal{A},$$

とおく．

定理 (Lieb-Robinson Bound)

$F_{(\mu)}(r) = e^{-\mu r}(1 + r)^{-(d+1)}$ とし，

定理 (Lieb-Robinson Bound)

$F_{(\mu)}(r) = e^{-\mu r}(1+r)^{-(d+1)}$ とし，

$$\|\Psi\|_{\mathrm{int}}^{(\mu)} = \sup_{j,k \in \mathrm{Z^d}} \sum_{X : X \ni j,k} \frac{\|\Psi(X)\|}{F_{(\mu)}(|j-k|)}$$

定理 (Lieb-Robinson Bound)

$F_{(\mu)}(r) = e^{-\mu r}(1+r)^{-(d+1)}$ とし，

$$||\Psi||_{\mathrm{int}}^{(\mu)} = \sup_{j,k \in \mathrm{Z}^{\mathrm{d}}} \sum_{X : X \ni j,k} \frac{||\Psi(X)||}{F_{(\mu)}(|j-k|)}$$

$||\Psi||_{\mathrm{int}}$ が有限を仮定

定理 (Lieb-Robinson Bound)

$F_{(\mu)}(r) = e^{-\mu r}(1+r)^{-(d+1)}$ とし，

$$\|\Psi\|_{\mathrm{int}}^{(\mu)} = \sup_{j,k\in \mathrm{Z}^{\mathrm{d}}} \sum_{X:X\ni j,k} \frac{\|\Psi(X)\|}{F_{(\mu)}(|j-k|)}$$

$\|\Psi\|_{\mathrm{int}}$ が有限を仮定

$A \in \mathcal{A}_X$ と $B \in \mathcal{A}_Y$ に対して

定理 (Lieb-Robinson Bound)

$F_{(\mu)}(r) = e^{-\mu r}(1+r)^{-(d+1)}$ とし，

$$\|\Psi\|_{\mathrm{int}}^{(\mu)} = \sup_{j,k\in \mathrm{Z}^{\mathrm{d}}} \sum_{X: X\ni j,k} \frac{\|\Psi(X)\|}{F_{(\mu)}(|j-k|)}$$

$\|\Psi\|_{\mathrm{int}}$ が有限を仮定

$A \in \mathcal{A}_X$ と $B \in \mathcal{A}_Y$ に対して

$$\begin{aligned} & \| [\ B \ , \ e^{itH_\Lambda} A e^{-itH_\Lambda} \ ] \| \\ \leq \ & 2\|A\| \, \|B\| \ \min (\, |\partial_\Psi X| \, , \, |\partial_\Psi Y| \,) \, e^{-\mu[d(X,Y)-v_\Psi |t|]} \end{aligned}$$

が成り立つ．

ただし，

ただし，$|\partial_\Psi X|$ と

ただし，$|\partial_\Psi X|$ と Lieb-Robinson 群速度 v_Ψ は以下で定義

ただし，$|\partial_\Psi X|$ と Lieb-Robinson 群速度 v_Ψ は以下で定義

$$S_\Lambda(X) = \{Z \subset \Lambda : Z \cap X \neq \emptyset \text{ および } Z \cap X^c \neq \emptyset\},$$

$$S(X) = S_{\mathbf{Z}^{\mathrm{d}}}(X)$$

ただし，$|\partial_\Psi X|$ と Lieb-Robinson 群速度 v_Ψ は以下で定義

$$S_\Lambda(X) = \{Z \subset \Lambda : Z \cap X \neq \emptyset \text{ および } Z \cap X^c \neq \emptyset\},$$

$$S(X) = S_{\mathbf{Z}^d}(X)$$

$$\partial_\Psi X = \{x \in X | Z \in S(X) \text{ で } x \in Z \text{ かつ } \Psi(Z) \neq 0 \text{ が存在 }\}$$

ただし，$|\partial_\Psi X|$ と Lieb-Robinson 群速度 v_Ψ は以下で定義

$$S_\Lambda(X) = \{Z \subset \Lambda : Z \cap X \neq \emptyset \text{ および } Z \cap X^c \neq \emptyset\},$$

$$S(X) = S_{\mathbf{Z}^{\mathbf{d}}}(X)$$

$$\partial_\Psi X = \{x \in X | Z \in S(X) \text{ で } x \in Z \text{ かつ } \Psi(Z) \neq 0 \text{ が存在 }\}$$

$$C_\mu = 2^{d+1} \sum_{j \in \mathbf{Z}^{\mathbf{d}}} e^{\mu |j|} (1 + |j|)^{-(d+1)}$$

ただし，$|\partial_\Psi X|$ と Lieb-Robinson 群速度 v_Ψ は以下で定義

$$S_\Lambda(X) = \{Z \subset \Lambda : Z \cap X \neq \emptyset \text{ および } Z \cap X^c \neq \emptyset\},$$

$$S(X) = S_{\mathbf{Z}^{\mathrm{d}}}(X)$$

$$\partial_\Psi X = \{x \in X | Z \in S(X) \text{ で } x \in Z \text{ かつ } \Psi(Z) \neq 0 \text{ が存在 }\}$$

$$C_\mu = 2^{d+1} \sum_{j \in \mathbf{Z}^{\mathrm{d}}} e^{\mu|j|}(1+|j|)^{-(d+1)}$$

$$v_\Psi = \frac{2C_\mu \|\Psi\|_{\mathrm{int},\mu}}{\mu}$$

無限自由度でハイゼンベルク時間発展

無限自由度でハイゼンベルク時間発展

次の極限は C^* ノルムで収束.

$$\lim_{\Lambda \to \mathbf{Z}^d} \alpha_t^{(\Lambda)}(Q) = \alpha_t(Q)$$

無限自由度でハイゼンベルク時間発展

次の極限は C^* ノルムで収束.

$$\lim_{\Lambda \to \mathrm{Z^d}} \alpha_t^{(\Lambda)}(Q) = \alpha_t(Q)$$

さらに任意の $A \in \mathcal{A}_X$ と $B \in \mathcal{A}_Y$ に対して

無限自由度でハイゼンベルク時間発展

次の極限は C^* ノルムで収束.

$$\lim_{\Lambda\to\mathbf{Z}^d} \alpha_t^{(\Lambda)}(Q) = \alpha_t(Q)$$

さらに任意の $A \in \mathcal{A}_X$ と $B \in \mathcal{A}_Y$ に対して

$$\|[\,Q\,,\ \alpha_t(R)\,]\| \le \frac{2\|Q\|\,\|R\|}{C}\left(e^{2C\|\Psi\|_{\mathrm{int}}|t|} - 1\right) D(X,Y),$$

$$Q \in \mathcal{A}_X, \quad R \in \mathcal{A}_Y,$$

ギャップのある基底状態（有限系）

ギャップのある系の扱いの２つの流儀

ギャップのある基底状態（有限系）

ギャップのある系の扱いの２つの流儀

$\Lambda \subset \mathbf{Z}^{\mathrm{d}}$ 上の系

ギャップのある基底状態（有限系）

ギャップのある系の扱いの２つの流儀

$\Lambda \subset Z^d$ 上の系
ギャップのある系　＝

ギャップのある基底状態（有限系）

ギャップのある系の扱いの２つの流儀

$\Lambda \subset \mathrm{Z}^{\mathrm{d}}$ 上の系
ギャップのある系　＝
H_Λ の基底状態に近くなる状態のスペクトルと
励起状態のエネルギーの間にシステムサイズによらない
ギャップがある

ギャップのある基底状態（有限系）

ギャップのある系の扱いの２つの流儀

$\Lambda \subset \mathrm{Z}^{\mathrm{d}}$ 上の系
ギャップのある系　＝
H_Λ の基底状態に近くなる状態のスペクトルと
励起状態のエネルギーの間にシステムサイズによらない
ギャップがある

漸近的基底状態のエネルギー $I_\Lambda = [E_\Lambda, E_\Lambda + \delta_\Lambda]$

ギャップのある基底状態（有限系）

ギャップのある系の扱いの２つの流儀

$\Lambda \subset \mathrm{Z}^{\mathrm{d}}$ 上の系
ギャップのある系　＝
H_Λ の基底状態に近くなる状態のスペクトルと
励起状態のエネルギーの間にシステムサイズによらない
ギャップがある

漸近的基底状態のエネルギー $I_\Lambda = [E_\Lambda, E_\Lambda + \delta_\Lambda]$

$$\lim_{\Lambda \to \mathrm{Z}^{\mathrm{d}}} \delta_\Lambda = 0$$

ギャップのある基底状態（有限系）

ギャップのある系の扱いの２つの流儀

$\Lambda \subset \mathrm{Z}^{\mathrm{d}}$ 上の系
ギャップのある系　＝
H_Λ の基底状態に近くなる状態のスペクトルと
励起状態のエネルギーの間にシステムサイズによらない
ギャップがある

漸近的基底状態のエネルギー $I_\Lambda = [E_\Lambda, E_\Lambda + \delta_\Lambda]$

$$lim_{\Lambda \to \mathrm{Z}^{\mathrm{d}}} \delta_\Lambda = 0$$

励起状態のスペクトル ν ：　$E_\Lambda + \gamma \leq \nu$

ギャップのある基底状態（有限系）

ギャップのある系の扱いの２つの流儀

$\Lambda \subset Z^d$ 上の系
ギャップのある系　＝
H_Λ の基底状態に近くなる状態のスペクトルと
励起状態のエネルギーの間にシステムサイズによらない
ギャップがある

漸近的基底状態のエネルギー $I_\Lambda = [E_\Lambda, E_\Lambda + \delta_\Lambda]$

$$\lim_{\Lambda \to Z^d} \delta_\Lambda = 0$$

励起状態のスペクトル ν ：　$E_\Lambda + \gamma \leq \nu$
γ：システムサイズによらない定数

ギャップのある基底状態（無限自由度）

基底状態 φ

ギャップのある基底状態（無限自由度）

基底状態　φ　$\Rightarrow H_\varphi$　繰り込まれたハミルトニアン

ギャップのある基底状態（無限自由度）

基底状態　φ　$\Rightarrow H_\varphi$　繰り込まれたハミルトニアン
$\mathrm{sp}(H_\varphi)$ H_φ のスペクトル

ギャップのある基底状態（無限自由度）

基底状態　φ　$\Rightarrow H_\varphi$　繰り込まれたハミルトニアン
$\mathrm{sp}(H_\varphi)$ H_φ のスペクトル

定義

φ がギャップを持つ基底状態 Gapped Ground State

ギャップのある基底状態（無限自由度）

基底状態 φ $\Rightarrow H_\varphi$ **繰り込まれたハミルトニアン**
$\mathrm{sp}(H_\varphi)$ H_φ **のスペクトル**

定義

φ **がギャップを持つ基底状態** Gapped Ground State
$\Longleftrightarrow$

ギャップのある基底状態（無限自由度）

基底状態　φ　$\Rightarrow H_\varphi$　繰り込まれたハミルトニアン
$\mathrm{sp}(H_\varphi)$ H_φ のスペクトル

定義

φ がギャップを持つ基底状態 Gapped Ground State

$\Longleftrightarrow$

(i) H_φ の基底状態ベクトルは縮退がない．

ギャップのある基底状態（無限自由度）

基底状態　φ　$\Rightarrow H_\varphi$　繰り込まれたハミルトニアン
$\mathrm{sp}(H_\varphi)$ H_φ のスペクトル

定義
φ がギャップを持つ基底状態 Gapped Ground State
$\iff$

(i) H_φ の基底状態ベクトルは縮退がない．

(ii) $\mathrm{sp}(H_\varphi) \subset \{0\} \cup [\gamma, \infty)$

φ がギャップを持つ基底状態 $\Longleftrightarrow$

φ がギャップを持つ基底状態 $\Longleftrightarrow$

$$\varphi(Q^*\delta(Q)) \geq \gamma(\varphi(Q^*Q) - \varphi(Q^*)\varphi(Q)), \quad Q \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$$

φ がギャップを持つ基底状態 $\iff$

$$\varphi(Q^*\delta(Q)) \geq \gamma(\varphi(Q^*Q) - \varphi(Q^*)\varphi(Q)), \quad Q \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$$

基底状態の縮退があり，励起エネルギーとの間に
スペクトル・ギャップがある

φ がギャップを持つ基底状態 $\Longleftrightarrow$

$$\varphi(Q^* \delta(Q)) \geq \gamma(\varphi(Q^* Q) - \varphi(Q^*)\varphi(Q)), \quad Q \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$$

基底状態の縮退があり，励起エネルギーとの間に
スペクトル・ギャップがある $\Longleftrightarrow$

φ がギャップを持つ基底状態 $\Longleftrightarrow$

$$\varphi(Q^*\delta(Q)) \geq \gamma(\varphi(Q^*Q) - \varphi(Q^*)\varphi(Q)), \quad Q \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$$

基底状態の縮退があり，励起エネルギーとの間に
スペクトル・ギャップがある $\Longleftrightarrow$

$$\varphi(Q^*\delta(\delta(Q))) \geq \gamma(\varphi(Q^*\delta(Q))$$

相関関数の指数的減衰

相対論的場の量子論の局所性（R.Haag）：

$$\mathcal{A} = \cup_{\Lambda \subset \mathbf{R}^{1+3}} \mathcal{A}_\Lambda$$

相関関数の指数的減衰

相対論的場の量子論の局所性（R.Haag）：

$$\mathcal{A} = \cup_{\Lambda \subset \mathbf{R}^{1+3}} \mathcal{A}_\Lambda$$

Λ_1 と Λ_2 ：時間的に分離（光を送って情報交換できない）

相関関数の指数的減衰

相対論的場の量子論の局所性（R.Haag）：

$$\mathcal{A} = \cup_{\Lambda \subset \mathbf{R}^{1+3}} \mathcal{A}_\Lambda$$

Λ_1 **と** Λ_2 **：時間的に分離（光を送って情報交換できない）**

$$[\mathcal{A}_{\Lambda_1}, \mathcal{A}_{\Lambda_2}] = 0$$

K.Fredenhagen のクラスター定理

相関関数の指数的減衰

相対論的場の量子論の局所性（R.Haag）：

$$\mathcal{A} = \cup_{\Lambda \subset \mathbf{R}^{1+3}} \mathcal{A}_{\Lambda}$$

Λ_1 と Λ_2 ：時間的に分離（光を送って情報交換できない）

$$[\mathcal{A}_{\Lambda_1}, \mathcal{A}_{\Lambda_2}] = 0$$

K.Fredenhagen のクラスター定理

相対論的局所場の量子論では，ギャップのある基底状態で二点関数は指数的に減衰

相関関数の指数的減衰

相対論的場の量子論の局所性（R.Haag）：

$$\mathcal{A} = \cup_{\Lambda \subset \mathbf{R}^{1+3}} \mathcal{A}_\Lambda$$

Λ_1 と Λ_2 ：時間的に分離（光を送って情報交換できない）

$$[\mathcal{A}_{\Lambda_1}, \mathcal{A}_{\Lambda_2}] = 0$$

K.Fredenhagen のクラスター定理

相対論的局所場の量子論では，ギャップのある基底状態で二点関数は指数的に減衰

量子スピン系では？

定理

$\Psi(X)$：並進不変相互作用．

$$\|\Psi\|_{\mathrm{int}}^{(\mu)} = \sup_{x} \sum_{X:0.x\in X} \|\Psi(X)\| e^{\mu|x|}(1+|x|)^{(d+1)} < \infty$$

$$x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathrm{Z^d}, \quad |\mathrm{x}| = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{d}} |\mathrm{x_k}|$$

定理

$\Psi(X)$: 並進不変相互作用.

$$\|\Psi\|_{\text{int}}^{(\mu)} = \sup_{x} \sum_{X:0,x\in X} \|\Psi(X)\| e^{\mu|x|}(1+|x|)^{(d+1)} < \infty$$

$x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathrm{Z}^{\mathrm{d}}, \quad |\mathrm{x}| = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{d}} |\mathrm{x_k}|$

H : $\Psi(X)$ からから定まるハミルトニアン

定理

$\Psi(X)$: 並進不変相互作用.

$$\|\Psi\|_{\mathrm{int}}^{(\mu)} = \sup_x \sum_{X:0.x\in X} \|\Psi(X)\| e^{\mu|x|}(1+|x|)^{(d+1)} < \infty$$

$$x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathrm{Z}^{\mathrm{d}}, \quad |\mathrm{x}| = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{d}} |\mathrm{x_k}|$$

H : $\Psi(X)$ からから定まるハミルトニアン
φ : ギャップ γ を持つ基底状態.

$$\begin{aligned} &|\varphi(AB) - \varphi(A)\varphi(B)| \\ \leq \ & C(\Psi, X, Y)\ \|A\|\ \|B\|\ e^{-\nu d(X,Y)}, \\ &A \in \mathcal{A}_X, \quad B \in \mathcal{A}_Y, \end{aligned}$$

定理

$\Psi(X)$: 並進不変相互作用．

$$\|\Psi\|_{\mathrm{int}}^{(\mu)} = \sup_{x} \sum_{X:0.x\in X} \|\Psi(X)\| e^{\mu|x|}(1+|x|)^{(d+1)} < \infty$$

$x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathrm{Z^d}, \quad |\mathrm{x}| = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{d}} |\mathrm{x_k}|$

H : $\Psi(X)$ からから定まるハミルトニアン
φ：ギャップ γ を持つ基底状態．

$$|\varphi(AB) - \varphi(A)\varphi(B)|$$
$$\leq \quad C(\Psi, X, Y) \;\; \|A\| \;\; \|B\| \;\; e^{-\nu d(X,Y)},$$
$$A \in \mathcal{A}_X, \quad B \in \mathcal{A}_Y,$$

$C(\Psi, X, Y)$， ν は以下で定まる

$$\nu = \frac{\mu/2 \ \cdot \gamma}{4\|\Psi\|^{(\mu)} C_d + \gamma}$$

$$C(\Psi, X, Y) = \left[1 + \sqrt{\frac{1}{\nu d(X,Y)}} + K_d \min\left(|\partial_\Psi X| , \ |\partial_\Psi Y| \right) \right]$$

（ C_d と K_d は格子の次元から定まる定数 ）

Lieb-Robinson Bounds（他の version)

(i) 時間に依存するハミルトニアン

$$H_\Lambda(t) = \sum_{X \subset \Lambda} \Psi_X(t)$$

$$\frac{d}{dt} U(t,0) = i H_\Lambda(t) U(t,0), \quad U(0,0) = 1$$

Lieb-Robinson Bounds（他の version)

(i) 時間に依存するハミルトニアン

$$H_\Lambda(t) = \sum_{X \subset \Lambda} \Psi_X(t)$$

$$\frac{d}{dt}U(t,0) = iH_\Lambda(t)U(t,0), \quad U(0,0) = 1$$

応用

ギャップのある基底状態（全体）の相図（ground state phase diagram）

quasi-adiabatic transformation+ Lieb-Robinson Bound

(ii) Lindblads **作用素**

$$L_k(Q) = a_k^* Q a_k - 1/2\{a_k^* a_k, Q\}$$

$$L(Q) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^{\mathbf{d}}} L_k(Q)$$

$$S_t(Q) = e^{tL}$$

量子系でのマルコフ過程（Glauber dynamics）**の類似**

End of Part 3