Gapped Ground States in 1+1 dim

松井卓

九州大学数理学研究院

July 29 2015

Matrix Product State の歴史

Matrix Product State の歴史

非可換マルコフ連鎖 L.Accardi 1979

Matrix Product State の歴史

非可換マルコフ連鎖 L.Accardi 1979

マルコフ連鎖（離散時間）≡ 一次元イジング模型

Matrix Product State の歴史

非可換マルコフ連鎖 L.Accardi 1979

マルコフ連鎖（離散時間）≡ 一次元イジング模型

量子版？

Matrix Product State の歴史

非可換マルコフ連鎖 L.Accardi 1979

マルコフ連鎖（離散時間）≡ 一次元イジング模型

量子版？

完全正値写像 $E : M_2(\mathrm{C}) \otimes \mathrm{M}_2(\mathrm{C}) \to \mathrm{M}_2(\mathrm{C}),$

$$E(Q \otimes R) \in M_2(\mathrm{C}) \quad \mathrm{Q}, \mathrm{R} \in \mathrm{M}_2(\mathrm{C})$$

Matrix Product State の歴史

非可換マルコフ連鎖 L.Accardi 1979

マルコフ連鎖（離散時間）≡ 一次元イジング模型

量子版？

完全正値写像 $E : M_2(\mathrm{C}) \otimes \mathrm{M}_2(\mathrm{C}) \rightarrow \mathrm{M}_2(\mathrm{C}),$

$$E(Q \otimes R) \in M_2(\mathrm{C}) \quad \mathrm{Q}, \mathrm{R} \in \mathrm{M}_2(\mathrm{C})$$

$\psi : M_2(\mathrm{C})$ **の状態** $\psi(E(Q \otimes 1)) = \psi(Q)$

Matrix Product State の歴史

非可換マルコフ連鎖 L.Accardi 1979

マルコフ連鎖（離散時間）≡ 一次元イジング模型

量子版？

完全正値写像 $E : M_2(\mathrm{C}) \otimes \mathrm{M}_2(\mathrm{C}) \to \mathrm{M}_2(\mathrm{C}),$

$$E(Q \otimes R) \in M_2(\mathrm{C}) \quad \mathrm{Q}, \mathrm{R} \in \mathrm{M}_2(\mathrm{C})$$

$\psi : M_2(\mathrm{C})$ **の状態** $\psi(E(Q \otimes 1)) = \psi(Q)$

$$\begin{aligned} & \varphi(Q_1 \otimes Q_2 \cdots Q_n \otimes 1 \cdots) \\ = \quad & \psi(E(Q_1 \otimes E(Q_2 \otimes E(Q_2 \cdots E(Q_n \otimes 1)) \cdots)) \end{aligned}$$

Matrix Product State の歴史

非可換マルコフ連鎖 L.Accardi 1979

マルコフ連鎖（離散時間）≡ 一次元イジング模型

量子版？

完全正値写像 $E : M_2(\mathrm{C}) \otimes \mathrm{M}_2(\mathrm{C}) \to \mathrm{M}_2(\mathrm{C}),$

$$E(Q \otimes R) \in M_2(\mathrm{C}) \quad \mathrm{Q, R} \in \mathrm{M}_2(\mathrm{C})$$

$\psi : M_2(\mathrm{C})$ **の状態** $\psi(E(Q \otimes 1)) = \psi(Q)$

$$\begin{aligned} & \varphi(Q_1 \otimes Q_2 \cdots Q_n \otimes 1 \cdots) \\ = \quad & \psi(E(Q_1 \otimes E(Q_2 \otimes E(Q_2 \cdots E(Q_n \otimes 1)) \cdots)) \end{aligned}$$

興味深い平衡状態（KMS 状態）を構成できない．

(ii) 1dim 反強磁性ハイゼンベルク模型の Haldane 予想
（ 1980 年代前半）

(ii) 1dim 反強磁性ハイゼンベルク模型の Haldane 予想（1980 年代前半）

(a) スピンが半奇数のはギャップの無い励起状態がある，

(ii) 1dim 反強磁性ハイゼンベルク模型の Haldane 予想（ 1980 年代前半）

(a) スピンが半奇数のはギャップの無い励起状態がある，

(b) スピンが整数の場合はスペクトルギャップがある

(ii) 1dim 反強磁性ハイゼンベルク模型の Haldane 予想（ 1980 年代前半）
(a) スピンが半奇数のはギャップの無い励起状態がある，
(b) スピンが整数の場合はスペクトルギャップがある

(iii) AKLT 模型　$S = 1$ の時 1987 年

(ii) 1dim 反強磁性ハイゼンベルク模型の Haldane 予想（ 1980 年代前半）
(a) スピンが半奇数のはギャップの無い励起状態がある，
(b) スピンが整数の場合はスペクトルギャップがある

(iii) AKLT 模型　$S = 1$ の時 1987 年

$$H = \sum_k \left\{ S^{(k)} \cdot S^{(k+1)} + \frac{1}{3} (S^{(k)} \cdot S^{(k+1)})^2 \right\}$$

Valence Bond Solid State

(ii) 1dim 反強磁性ハイゼンベルク模型の Haldane 予想
（1980 年代前半）
(a) スピンが半奇数のはギャップの無い励起状態がある，
(b) スピンが整数の場合はスペクトルギャップがある

(iii) AKLT 模型 $S = 1$ の時 1987 年

$$H = \sum_k \left\{ S^{(k)} \cdot S^{(k+1)} + \frac{1}{3} (S^{(k)} \cdot S^{(k+1)})^2 \right\}$$

Valence Bond Solid State
(a) $SU(2)$ 不変，基底状態はギャップを持つ．

(ii) 1dim 反強磁性ハイゼンベルク模型の Haldane 予想（1980 年代前半）
(a) スピンが半奇数のはギャップの無い励起状態がある，
(b) スピンが整数の場合はスペクトルギャップがある

(iii) AKLT 模型　$S = 1$ の時 1987 年

$$H = \sum_k \left\{ S^{(k)} \cdot S^{(k+1)} + \frac{1}{3} (S^{(k)} \cdot S^{(k+1)})^2 \right\}$$

Valence Bond Solid State
(a) $SU(2)$ 不変，基底状態はギャップを持つ．
(b) frustration free

周期的境界条件の元での AKLT 模型の基底状態（行列積表示）

$$\Omega_N = \sum_{\{s\}} tr(A^{s_1} A^{s_2} \cdots A^{s_n}) \,|\, s_1 s_2 \cdots s_n \rangle$$

$$A^+ = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma^+, \quad A^0 = \frac{-1}{\sqrt{3}}\sigma^z, \quad A^- = -\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma^-$$

周期的境界条件の元での AKLT 模型の基底状態（行列積表示）

$$\Omega_N = \sum_{\{s\}} tr(A^{s_1} A^{s_2} \cdots A^{s_n}) \,|\, s_1 s_2 \cdots s_n \rangle$$

$$A^+ = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma^+, \quad A^0 = \frac{-1}{\sqrt{3}}\sigma^z, \quad A^- = -\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma^-$$

(iii) M.Fannes, B.Nachtergaele, R.Werner 1989-91

周期的境界条件の元での AKLT 模型の基底状態（行列積表示）

$$\Omega_N = \sum_{\{s\}} tr(A^{s_1} A^{s_2} \cdots A^{s_n}) \mid s_1 s_2 \cdots s_n \rangle$$

$$A^+ = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma^+, \quad A^0 = \frac{-1}{\sqrt{3}}\sigma^z, \quad A^- = -\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma^-$$

(iii) M.Fannes, B.Nachtergaele, R.Werner 1989-91

Valence Bond Solid State (MPS) = Quantum Markov State

周期的境界条件の元での AKLT 模型の基底状態（行列積表示）

$$\Omega_N = \sum_{\{s\}} tr(A^{s_1} A^{s_2} \cdots A^{s_n}) \mid s_1 s_2 \cdots s_n \rangle$$

$$A^+ = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma^+, \quad A^0 = \frac{-1}{\sqrt{3}}\sigma^z, \quad A^- = -\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma^-$$

(iii) M.Fannes, B.Nachtergaele, R.Werner 1989-91

Valence Bond Solid State (MPS) = Quantum Markov State
parent Hamiltonian $H = \sum_k P_k$

4.2. frustration free ground state と MPS

MPS の定義（M.Fannes, B.Nachtergaele, R.Werner 流）

4.2. frustration free ground state と MPS

MPS の定義（M.Fannes, B.Nachtergaele, R.Werner 流）

$\mathcal{K}$: k 次元ヒルベルト空間，

4.2. frustration free ground state と MPS

MPS の定義（M.Fannes, B.Nachtergaele, R.Werner 流）

$\mathcal{K}$: k 次元ヒルベルト空間，

$$V_k \in \mathcal{B}(\mathcal{K}), (k = 1, 2, \cdots n) \quad , \sum_{k=1}^{n} V_k V_k^* = 1$$

4.2. frustration free ground state と MPS

MPS の定義（M.Fannes, B.Nachtergaele, R.Werner 流）

$\mathcal{K}$: k 次元ヒルベルト空間,

$$V_k \in \mathcal{B}(\mathcal{K}), (k = 1, 2, \cdots n) \quad , \sum_{k=1}^{n} V_k V_k^* = 1$$

$$c = (c_1, \cdots c_n) \in \mathrm{C}^{\mathrm{n}}, \quad \xi \in \mathcal{K}$$

4.2. frustration free ground state と MPS

MPS の定義（M.Fannes, B.Nachtergaele, R.Werner 流）

$\mathcal{K}$: k 次元ヒルベルト空間,

$$V_k \in \mathcal{B}(\mathcal{K}), (k = 1, 2, \cdots n) \quad , \sum_{k=1}^{n} V_k V_k^{*} = 1$$

$c = (c_1, \cdots c_n) \in \mathrm{C}^{\mathrm{n}}, \quad \xi \in \mathcal{K}$

$$V(c \otimes \xi) = \sum_{l=1}^{n} c_l V_l \xi \, , \quad V^{*}\xi = (V_1\xi, V_2\xi, \cdots V_n\xi) \, ,$$

4.2. frustration free ground state と MPS

MPS の定義（M.Fannes, B.Nachtergaele, R.Werner 流）

$\mathcal{K}$: k 次元ヒルベルト空間,

$$V_k \in \mathcal{B}(\mathcal{K}), (k = 1, 2, \cdots n) \quad , \sum_{k=1}^{n} V_k V_k^* = 1$$

$$c = (c_1, \cdots c_n) \in \mathbf{C}^n, \quad \xi \in \mathcal{K}$$

$$V(c \otimes \xi) = \sum_{l=1}^{n} c_l V_l \xi \,, \quad V^* \xi = (V_1 \xi, V_2 \xi, \cdots V_n \xi) \,,$$

$$V : \mathbf{C}^n \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{K}, \quad V^* : \mathcal{K} \to \mathbf{C}^n \otimes \mathcal{K}$$

4.2. frustration free ground state と MPS

MPS の定義（M.Fannes, B.Nachtergaele, R.Werner 流）

$\mathcal{K}$: k 次元ヒルベルト空間,

$$V_k \in \mathcal{B}(\mathcal{K}), (k = 1, 2, \cdots n) \quad , \sum_{k=1}^{n} V_k V_k^* = 1$$

$$c = (c_1, \cdots c_n) \in \mathrm{C}^{\mathrm{n}}, \quad \xi \in \mathcal{K}$$

$$V(c \otimes \xi) = \sum_{l=1}^{n} c_l V_l \xi \, , \quad V^* \xi = (V_1 \xi, V_2 \xi, \cdots V_n \xi) \, ,$$

$$V : \mathrm{C}^n \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{K}, \;\; V^* : \mathcal{K} \to \mathrm{C}^n \otimes \mathcal{K}$$

$$VV^* = 1$$

$\boldsymbol{E}: M_n(\mathrm{C}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K}) \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$: **完全正値写像**

$$E(A \otimes B) = VA \otimes BV^*, \quad E(1 \otimes 1) = 1$$
$$A \in M_n(\mathrm{C}),\ B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$$

E: $M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K}) \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$: 完全正値写像

$$E(A \otimes B) = VA \otimes BV^*, \quad E(1 \otimes 1) = 1$$
$$A \in M_n(\mathbb{C}),\ B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$$

ψ: $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ の忠実な状態（密度行列の固有値は全て正）

$E: M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K}) \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$: 完全正値写像

$$E(A \otimes B) = VA \otimes BV^*, \quad E(1 \otimes 1) = 1$$
$$A \in M_n(\mathbb{C}),\ B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$$

ψ: $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ の忠実な状態（密度行列の固有値は全て正）

$$\psi(E(1 \otimes A)) = \psi(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$$

$\{\mathcal{K}, E, \psi\}$ により Matrix Product State

$$
\begin{aligned}
& \varphi(1 \otimes Q_1 \otimes Q_2 \cdots Q_m \otimes 1 \cdots) \\
= \quad & \psi(E(Q_1 \otimes E(Q_2 \otimes \cdots \otimes E(Q_m \otimes 1) \cdots)
\end{aligned}
$$

が定まる.

$\{\mathcal{K}, E, \psi\}$ により Matrix Product State

$$
\begin{aligned}
& \varphi(1 \otimes Q_1 \otimes Q_2 \cdots Q_m \otimes 1 \cdots) \\
= \quad & \psi(E(Q_1 \otimes E(Q_2 \otimes \cdots \otimes E(Q_m \otimes 1) \cdots)
\end{aligned}
$$

が定まる.

Remark

$\{\mathcal{K}, E, \psi\}$ により Matrix Product State

$$
\begin{aligned}
& \varphi(1 \otimes Q_1 \otimes Q_2 \cdots Q_m \otimes 1 \cdots) \\
= \quad & \psi(E(Q_1 \otimes E(Q_2 \otimes \cdots \otimes E(Q_m \otimes 1) \cdots)
\end{aligned}
$$

が定まる.

Remark

(i) AKLT **模型** $\mathcal{K} = \mathbf{C}^2$, $V^* : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^3 \otimes \mathbf{C}^2$
$SU(2)$ intertwiner

$$V^* \;:\; 1/2 \to 1 \otimes 1/2 = 3/2 \oplus 1/2$$

$\{\mathcal{K}, E, \psi\}$ により Matrix Product State

$$
\begin{aligned}
& \varphi(1 \otimes Q_1 \otimes Q_2 \cdots Q_m \otimes 1 \cdots) \\
= \quad & \psi(E(Q_1 \otimes E(Q_2 \otimes \cdots \otimes E(Q_m \otimes 1) \cdots)
\end{aligned}
$$

が定まる．

Remark

(i) AKLT 模型　$\mathcal{K} = \mathbf{C}^2$，$V^* : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^3 \otimes \mathbf{C}^2$
$SU(2)$ intertwiner

$$V^* \ : \ 1/2 \to 1 \otimes 1/2 = 3/2 \oplus 1/2$$

(ii) $dim\mathcal{K} = \infty$ ならば、どのような並進不変状態もこの形で表すことが出来る．

Theorem (M.Fannes,B.Nachtergaele,R.Werner 1989&1991)

Theorem (M.Fannes,B.Nachtergaele,R.Werner 1989&1991)

(i) MPS **が純粋状態である** $\Longleftrightarrow$

Theorem (M.Fannes,B.Nachtergaele,R.Werner 1989&1991)

(i) MPS が純粋状態である $\Longleftrightarrow$
$V_1, V_2 \cdots V_n$ と可換な $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ は $Q = c1$ に限る.

Theorem (M.Fannes,B.Nachtergaele,R.Werner 1989&1991)

(i) MPS が純粋状態である $\Longleftrightarrow$
$V_1, V_2 \cdots V_n$ と可換な $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ は $Q = c\mathbf{1}$ に限る.

(ii) φ : 純粋な MPS であるとする.

Theorem (M.Fannes,B.Nachtergaele,R.Werner 1989&1991)

(i) MPS が純粋状態である $\Longleftrightarrow$
$V_1, V_2 \cdots V_n$ と可換な $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ は $Q = c1$ に限る.

(ii) φ : 純粋な MPS であるとする.
φ は parent Hamiltonian の frustration free ground state
つまり

Theorem (M.Fannes,B.Nachtergaele,R.Werner 1989&1991)

(i) MPS が純粋状態である $\Longleftrightarrow$
$V_1, V_2 \cdots V_n$ と可換な $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ は $Q = c1$ に限る.

(ii) φ : 純粋な MPS であるとする.
φ は parent Hamiltonian の frustration free ground state
つまり

$$H = \sum_j P_j, \quad P_j = P_j^* = P_j^2$$

Theorem (M.Fannes,B.Nachtergaele,R.Werner 1989&1991)

(i) MPS が純粋状態である $\Longleftrightarrow$
$V_1, V_2 \cdots V_n$ と可換な $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ は $Q = c1$ に限る.

(ii) φ : 純粋な MPS であるとする.
φ は parent Hamiltonian の frustration free ground state
つまり

$$H = \sum_j P_j, \quad P_j = P_j^* = P_j^2$$

(iii) parent Hamiltonian はスペクトル・ギャップを持つ.

Theorem (M.Fannes,B.Nachtergaele,R.Werner 1989&1991)

(i) MPS が純粋状態である $\iff$
$V_1, V_2 \cdots V_n$ と可換な $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ は $Q = c1$ に限る.

(ii) φ : 純粋な MPS であるとする.
φ は parent Hamiltonian の frustration free ground state
つまり

$$H = \sum_j P_j, \quad P_j = P_j^* = P_j^2$$

(iii) parent Hamiltonian はスペクトル・ギャップを持つ.

(iv) 相関関数は指数的に減衰

Frustration Free Ground State = MPS

仮定

finite range **並進不変ハミルトニアン**

Frustration Free Ground State = MPS

仮定

finite range **並進不変ハミルトニアン**

$$h_j \in \mathcal{A}_{[j,j+r]}$$

$$H_{[a,b]} = \sum_{j=a}^{b-r} h_j \qquad h_j \geq 0$$

Frustration Free Ground State = MPS

仮定

finite range **並進不変ハミルトニアン**

$$h_j \in \mathcal{A}_{[j,j+r]}$$

$$H_{[a,b]} = \sum_{j=a}^{b-r} h_j \qquad h_j \geq 0$$

$$1 \leq \sup_{a<b} \, dim \ker H_{[a,b]} < M < \infty$$

$$\ker H_{[a,b]} = \{\xi \mid H_{[a,b]}\xi = 0\}$$

ここで $\xi \in \mathrm{C}^{\mathrm{n}} \otimes \cdots \otimes \mathrm{C}^{\mathrm{n}}$ ($r + 1$ **回テンソルを取る**)

Theorem (T.M. 1999)

H の周期的純粋基底状態は MPS.

Theorem (T.M. 1999)
H の周期的純粋基底状態は MPS.

Remark

Theorem (T.M. 1999)
H の周期的純粋基底状態は MPS.

Remark

(i) 並進不変でない純粋基底状態は例外的に存在.

Theorem (T.M. 1999)
H の周期的純粋基底状態は MPS.

Remark

(i) 並進不変でない純粋基底状態は例外的に存在.

$$H = \sum_k \left\{ 1 - \sigma_z^{(k)} \sigma_z^{(k+1)} \right\}$$

Theorem (T.M. 1999)
H の周期的純粋基底状態は MPS.

Remark

(i) 並進不変でない純粋基底状態は例外的に存在.

$$H = \sum_k \left\{ 1 - \sigma_z^{(k)} \sigma_z^{(k+1)} \right\}$$

(ii) 並進不変 MPS には対称性に関して制限がある.

MPS の対称性

MPS の対称性
Corollary

MPS の対称性

Corollary

$$S = 1/2$$

MPS の対称性

Corollary

$S = 1/2$

MPS の対称性

Corollary

$S = 1/2$

(a) 純粋な Matrix Product State は $SU(2)$ 不変でないか

MPS の対称性

Corollary

$S = 1/2$

(a) 純粋な Matrix Product State は $SU(2)$ 不変でないか

(b) 並進対称性が破れ（格子の並進に関して）周期２の周期的基底状態が現れる．

MPS の対称性

Corollary

$S = 1/2$

(a) 純粋な Matrix Product State は $SU(2)$ 不変でないか

(b) 並進対称性が破れ（格子の並進に関して）周期２の周期的基底状態が現れる．
(Spin ladder 系の legs の数が奇数の時も同様)

MPS の対称性

Corollary

$S = 1/2$

(a) 純粋な Matrix Product State は $SU(2)$ 不変でないか

(b) 並進対称性が破れ（格子の並進に関して）周期２の周期的基底状態が現れる．
(Spin ladder 系の legs の数が奇数の時も同様)

このような MPS の対称性に関する性質は
一般のギャップのある基底状態でも成立するだろうか？

Entanglement Entropy

ここでも 1+1 dim 量子スピン系 $\mathcal{A}$ を考える．

Entanglement Entropy

ここでも 1+1 dim 量子スピン系 $\mathcal{A}$ を考える．

φ: $\mathcal{A}$ の状態，

Entanglement Entropy

ここでも 1+1 dim 量子スピン系 $\mathcal{A}$ を考える．

φ: $\mathcal{A}$ **の状態，**
$\varphi_{[a,b]}$: φ **の** $\mathcal{A}_{[a,b]}$ **への制限，**

Entanglement Entropy

ここでも 1+1 dim 量子スピン系 $\mathcal{A}$ を考える．

φ: $\mathcal{A}$ の状態，
$\varphi_{[a,b]}$: φ の $\mathcal{A}_{[a,b]}$ への制限，　$\rho_{[a,b]}(\varphi)$: $\varphi_{[a,b]}$ の密度行列

Entanglement Entropy

ここでも 1+1 dim 量子スピン系 $\mathcal{A}$ を考える．

φ: $\mathcal{A}$ の状態，
$\varphi_{[a,b]}$: φ の $\mathcal{A}_{[a,b]}$ への制限，　$\rho_{[a,b]}(\varphi)$: $\varphi_{[a,b]}$ の密度行列

entanglement entropy = $\varphi_{[a,b]}$ の量子エントロピー

$$s_{[a,b]}(\varphi) = -tr(\rho_{[a,b]}(\varphi) \ln(\rho_{[a,b]}(\varphi)))$$

Entanglement Entropy

ここでも 1+1 dim 量子スピン系 $\mathcal{A}$ を考える.

φ: $\mathcal{A}$ **の状態,**
$\varphi_{[a,b]}$: φ **の** $\mathcal{A}_{[a,b]}$ **への制限,** $\rho_{[a,b]}(\varphi)$: $\varphi_{[a,b]}$ **の密度行列**

entanglement entropy = $\varphi_{[a,b]}$ **の量子エントロピー**

$$s_{[a,b]}(\varphi) = -tr(\rho_{[a,b]}(\varphi)\ln(\rho_{[a,b]}(\varphi)))$$

φ **が純粋状態であるとき,** (Ω_φ **の** GNS **ベクトル)**

Entanglement Entropy

ここでも 1+1 dim 量子スピン系 $\mathcal{A}$ を考える．

φ: $\mathcal{A}$ の状態，
$\varphi_{[a,b]}$: φ の $\mathcal{A}_{[a,b]}$ への制限，　$\rho_{[a,b]}(\varphi)$: $\varphi_{[a,b]}$ の密度行列

entanglement entropy = $\varphi_{[a,b]}$ の量子エントロピー

$$s_{[a,b]}(\varphi) = -tr(\rho_{[a,b]}(\varphi)\ln(\rho_{[a,b]}(\varphi)))$$

φ が純粋状態であるとき，(Ω φ の GNS ベクトル)

$$\Omega = \sum_k \lambda_k \ \eta^{(k)}_{[a,b]} \otimes \xi^{(k)}_{[a,b]^c}$$

Entanglement Entropy

ここでも 1+1 dim 量子スピン系 $\mathcal{A}$ を考える.

φ: $\mathcal{A}$ **の状態,**
$\varphi_{[a,b]}$: φ **の** $\mathcal{A}_{[a,b]}$ **への制限,**　$\rho_{[a,b]}(\varphi)$: $\varphi_{[a,b]}$ **の密度行列**

entanglement entropy = $\varphi_{[a,b]}$ **の量子エントロピー**

$$s_{[a,b]}(\varphi) = -tr(\rho_{[a,b]}(\varphi)\ln(\rho_{[a,b]}(\varphi)))$$

φ **が純粋状態であるとき,(**Ω φ **の** GNS **ベクトル)**

$$\Omega = \sum_k \lambda_k \; \eta^{(k)}_{[a,b]} \otimes \xi^{(k)}_{[a,b]^c}$$

$$s_{[a,b]}(\varphi) = -\sum_k \lambda_k^2 \ln \lambda_k^2$$

Entanglement Entropy

ここでも 1+1 dim 量子スピン系 $\mathcal{A}$ を考える.

φ: $\mathcal{A}$ の状態,
$\varphi_{[a,b]}$: φ の $\mathcal{A}_{[a,b]}$ への制限, $\rho_{[a,b]}(\varphi)$: $\varphi_{[a,b]}$ の密度行列

entanglement entropy = $\varphi_{[a,b]}$ の量子エントロピー

$$s_{[a,b]}(\varphi) = -tr(\rho_{[a,b]}(\varphi) \ln(\rho_{[a,b]}(\varphi)))$$

φ が純粋状態であるとき, (Ω φ の GNS ベクトル)

$$\Omega = \sum_k \lambda_k \; \eta^{(k)}_{[a,b]} \otimes \xi^{(k)}_{[a,b]^c}$$

$$s_{[a,b]}(\varphi) = -\sum_k \lambda_k^2 \ln \lambda_k^2$$

φ が積状態にどの程度近いかを表す.

entanglement entropy の area law

entanglement entropy の area law（有界性）が成立

entanglement entropy の area law

entanglement entropy の area law（有界性）が成立

$\Longleftrightarrow$

entanglement entropy の area law

entanglement entropy の area law（有界性）が成立

$$\Longleftrightarrow \quad \sup_{0 \leq a < b < \infty} s_{[a,b]}(\varphi) < C$$

entanglement entropy の area law

entanglement entropy の area law（有界性）が成立

$$\iff \sup_{0 \le a < b < \infty} s_{[a,b]}(\varphi) < C$$

(i) 純粋並進普遍 Matrix Product State では area law 成立

entanglement entropy の area law

entanglement entropy の area law（有界性）が成立

$$\Longleftrightarrow \quad \sup_{0\le a<b<\infty} s_{[a,b]}(\varphi) < C$$

(i) 純粋並進普遍 Matrix Product State では area law 成立
(ii) (gapless) XY 模型

$$H = -\sum_k \left\{ \sigma_x^{(k)} \sigma_x^{(k+1)} + \sigma_y^{(k)} \sigma_y^{(k+1)} \right\}$$

entanglement entropy の area law

entanglement entropy の area law（有界性）が成立

$$\Longleftrightarrow \quad \sup_{0 \le a < b < \infty} s_{[a,b]}(\varphi) < C$$

(i) 純粋並進普遍 Matrix Product State では area law 成立
(ii) (gapless) XY 模型

$$H = -\sum_k \left\{ \sigma_x^{(k)} \sigma_x^{(k+1)} + \sigma_y^{(k)} \sigma_y^{(k+1)} \right\}$$

基底状態では $s_{[1,n]}(\varphi) = O(\ln n)$（厳密解）

entanglement entropy の area law

entanglement entropy の area law（有界性）が成立

$$\Longleftrightarrow \quad \sup_{0 \le a < b < \infty} s_{[a,b]}(\varphi) < C$$

(i) 純粋並進普遍 Matrix Product State では area law 成立
(ii) (gapless) XY 模型

$$H = -\sum_k \left\{ \sigma_x^{(k)} \sigma_x^{(k+1)} + \sigma_y^{(k)} \sigma_y^{(k+1)} \right\}$$

基底状態では $s_{[1,n]}(\varphi) = O(\ln n)$（厳密解）
entanglement entropy の有界性 (area law) は成り立たない．

entanglement entropy の area law

entanglement entropy の area law（有界性）が成立

$$\Longleftrightarrow \quad \sup_{0\le a<b<\infty} s_{[a,b]}(\varphi) < C$$

(i) 純粋並進普遍 Matrix Product State では area law 成立
(ii) (gapless) XY 模型

$$H = -\sum_k \left\{\sigma_x^{(k)}\sigma_x^{(k+1)} + \sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(k+1)}\right\}$$

基底状態では $s_{[1,n]}(\varphi) = O(\ln n)$（厳密解）
entanglement entropy の有界性 (area law) は成り立たない．

一般に，一次元系のギャップのある基底状態では成立

定理

(M.Hastings2007, F.Brandao, & M. Horodecki 2014)

定理

(M.Hastings2007, F.Brandao, & M. Horodecki 2014)

φ: $\mathfrak{A}$ の状態

定理

(M.Hastings2007, F.Brandao, & M. Horodecki 2014)

φ: $\mathfrak{A}$ の状態

entanglement entropy **の有界性は以下の場合に成立する.**

定理

(M.Hastings2007, F.Brandao, & M. Horodecki 2014)

φ: $\mathfrak{A}$ の状態
entanglement entropy **の有界性は以下の場合に成立する.**

(i) φ : finite range **並進不変ハミルトニアンのギャップを持つ基底状態である.**

定理

(M.Hastings2007, F.Brandao, & M. Horodecki 2014)

φ: $\mathfrak{A}$ の状態
entanglement entropy **の有界性は以下の場合に成立する．**

(i) φ : finite range **並進不変ハミルトニアンのギャップを持つ基底状態である．**

(ii) φ **は並進不変純粋状態で二点相関関数は以下の意味で指数的に減衰する．**

$$|\varphi(AB) - \varphi(A)\varphi(B)| \leq Ce^{-Mr}||A|| \cdot ||B||$$

$A \in \mathfrak{A}_{(-\infty,-r]\cup[a+r,\infty)}$, $B \in \mathfrak{A}_{[0,a]}$,

エントロピーは２つの状態の距離を計る

有限量子系の状態 φ，ψ の密度行列をそれぞれ ρ, η

エントロピーは２つの状態の距離を計る

有限量子系の状態 φ**,** ψ **の密度行列をそれぞれ** ρ, η

相対エントロピー $s(\varphi, \psi) = tr(\rho(\ln\rho - \ln\eta))$

エントロピーは２つの状態の距離を計る

有限量子系の状態 φ, ψ の密度行列をそれぞれ ρ, η

相対エントロピー $s(\varphi, \psi) = tr(\rho(\ln\rho - \ln\eta))$

$$1/2\|\varphi - \psi\| \leq s(\varphi, \psi)$$

エントロピーは２つの状態の距離を計る

有限量子系の状態 φ, ψ の密度行列をそれぞれ ρ, η

相対エントロピー $s(\varphi, \psi) = tr(\rho(\ln\rho - \ln\eta))$

$$1/2\|\varphi - \psi\| \leq s(\varphi, \psi)$$

ここで $\|\varphi - \psi\| = \sup\{\ |\ \varphi(Q) - \psi(Q)\ |\ \ \|Q\| \leq 1\}$

エントロピーは２つの状態の距離を計る

有限量子系の状態 φ，ψ の密度行列をそれぞれ ρ, η

相対エントロピー $s(\varphi, \psi) = tr(\rho(\ln\rho - \ln\eta))$

$$1/2\|\varphi - \psi\| \leq s(\varphi, \psi)$$

ここで $\|\varphi - \psi\| = \sup\{ \mid \varphi(Q) - \psi(Q) \mid \ \|Q\| \leq 1\}$

$\varphi : \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ の純粋状態

エントロピーは２つの状態の距離を計る

有限量子系の状態 φ, ψ の密度行列をそれぞれ ρ, η

相対エントロピー $s(\varphi, \psi) = tr(\rho(\ln\rho - \ln\eta))$

$$1/2\|\varphi - \psi\| \leq s(\varphi, \psi)$$

ここで $\|\varphi - \psi\| = \sup\{\ |\varphi(Q) - \psi(Q)|\ \ \|Q\| \leq 1\}$

$\varphi : \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ の純粋状態 $\psi = \varphi|_{\mathcal{A}_1} \otimes \varphi|_{\mathcal{A}_2}$ biparite system

エントロピーは２つの状態の距離を計る

有限量子系の状態 φ, ψ **の密度行列をそれぞれ** ρ, η

相対エントロピー $s(\varphi, \psi) = tr(\rho(\ln\rho - \ln\eta))$

$$1/2\|\varphi - \psi\| \leq s(\varphi, \psi)$$

ここで $\|\varphi - \psi\| = \sup\{\ |\ \varphi(Q) - \psi(Q)\ |\ \ \|Q\| \leq 1\}$

$\varphi : \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ **の純粋状態** $\psi = \varphi|_{\mathcal{A}_1} \otimes \varphi|_{\mathcal{A}_2}$ biparite system

$$s(\varphi, \psi) = 2s(\varphi|_{\mathcal{A}_1})$$

1+1 次元の量子スピン系の基底状態では

1+1 次元の量子スピン系の基底状態では
entanglement entropy の area law

1+1 次元の量子スピン系の基底状態では
entanglement entropy の area law ⇒

1+1 次元の量子スピン系の基底状態では
entanglement entropy の area law ⇒

φ と $\psi_{(-\infty,0]} \otimes \psi_{[1,\infty)}$ は無限遠で区別不能

状態の準同値性

状態の準同値性

φ_1 と φ_2 が準同値 = φ_1 と φ_2 が ∞ で区別できないこと,

状態の準同値性

φ_1 と φ_2 が準同値 = φ_1 と φ_2 が ∞ で区別できないこと，

$\epsilon > 0$ に対して, ある $n \in \mathbb{Z}$) があり

状態の準同値性

φ_1 と φ_2 が準同値 = φ_1 と φ_2 が ∞ で区別できないこと，

$\epsilon > 0$ に対して, ある $n \in \mathbb{Z}$) があり

$$|\varphi_1(Q) - \varphi_2(Q)| < \epsilon \|Q\|, \quad Q \in \mathcal{A}_{(-\infty,-n]\cup[n,\infty)}$$

準同値の例 (Spin 1/2)

$$\psi_+(\sigma_z) = 1, \ \ \psi_-(\sigma_z) = -1,$$

準同値の例 (Spin 1/2)

$$\psi_+(\sigma_z) = 1,\ \ \psi_-(\sigma_z) = -1,\ \psi_j^q(\sigma_z) = \frac{1-q^{2j}}{1+q^{2j}}\ (0 < q < 1)$$

準同値の例 (Spin 1/2)

$$\psi_+(\sigma_z) = 1, \quad \psi_-(\sigma_z) = -1, \; \psi_j^q(\sigma_z) = \frac{1-q^{2j}}{1+q^{2j}} \; (0 < q < 1)$$

$$\varphi_\pm = (\otimes_{j=-\infty}^{\infty} \psi_\pm), \quad \varphi_0 = (\otimes_{j<0} \psi_-) \otimes (\otimes_{j \geq 0} \psi_+)$$

$$\varphi_q = \otimes_{j \in Z} \psi_j^q$$

準同値の例 (Spin 1/2)

$$\psi_+(\sigma_z) = 1, \quad \psi_-(\sigma_z) = -1, \psi_j^q(\sigma_z) = \frac{1-q^{2j}}{1+q^{2j}} \ (0 < q < 1)$$

$$\varphi_\pm = (\otimes_{j=-\infty}^{\infty} \psi_\pm), \quad \varphi_0 = (\otimes_{j<0} \psi_-) \otimes (\otimes_{j\geq 0} \psi_+)$$

$$\varphi_q = \otimes_{j \in Z} \psi_j^q$$

(1) $\varphi_+, \varphi_-, \varphi_0$ 準同値でない

準同値の例 (Spin 1/2)

$$\psi_+(\sigma_z) = 1, \ \ \psi_-(\sigma_z) = -1, \psi_j^q(\sigma_z) = \frac{1-q^{2j}}{1+q^{2j}} \ (0 < q < 1)$$

$$\varphi_\pm = (\otimes_{j=-\infty}^{\infty} \psi_\pm), \ \ \varphi_0 = (\otimes_{j<0}\psi_-) \otimes (\otimes_{j\geq 0}\psi_+)$$

$$\varphi_q = \otimes_{j\in Z}\psi_j^q$$

(1) $\varphi_+, \varphi_-, \varphi_0$ 準同値でない
(2) φ_0 と φ_q は準同値

entanglement entropy の area law ⇒ generalized MPS.

$$V : \mathbf{C}^n \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{K}, \quad V^* : \mathcal{K} \to \mathbf{C}^n \otimes \mathcal{K}, \qquad VV^* = 1$$

entanglement entropy の area law ⇒ generalized MPS.

$$V : \mathbf{C}^n \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{K}, \quad V^* : \mathcal{K} \to \mathbf{C}^n \otimes \mathcal{K}, \qquad VV^* = 1$$

$$E(A \otimes B) = VA \otimes BV^*, \qquad E(1 \otimes 1) = 1$$

$$A \in M_n(\mathbf{C}), \; B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$$

entanglement entropy の area law ⇒ generalized MPS.

$$V : \mathbf{C}^n \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{K}, \quad V^* : \mathcal{K} \to \mathbf{C}^n \otimes \mathcal{K}, \qquad VV^* = 1$$

$$E(A \otimes B) = VA \otimes BV^*, \qquad E(1 \otimes 1) = 1$$
$$A \in M_n(\mathbf{C}), \ B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$$

ψ: $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ の忠実な状態，$\psi(E(A \otimes 1)) = \psi(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$

$$\begin{aligned} & \varphi(1 \otimes Q_1 \otimes Q_2 \cdots Q_m \otimes 1 \cdots) \\ = \quad & \psi(E(Q_1 \otimes E(Q_2 \otimes \cdots \otimes E(Q_m \otimes 1) \cdots) \end{aligned}$$

entanglement entropy の area law ⇒ generalized MPS.

$$V : \mathbf{C}^n \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{K}, \quad V^* : \mathcal{K} \to \mathbf{C}^n \otimes \mathcal{K}, \qquad VV^* = 1$$

$$E(A \otimes B) = VA \otimes BV^*, \qquad E(1 \otimes 1) = 1$$
$$A \in M_n(\mathbf{C}), \; B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$$

ψ: $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ の忠実な状態，$\psi(E(A \otimes 1)) = \psi(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$

$$\begin{aligned} & \varphi(1 \otimes Q_1 \otimes Q_2 \cdots Q_m \otimes 1 \cdots) \\ = \quad & \psi(E(Q_1 \otimes E(Q_2 \otimes \cdots \otimes E(Q_m \otimes 1) \cdots) \end{aligned}$$

$V_1, V_2 \cdots V_n$ と可換な $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ は $Q = c1$ に限る.

定理

ギャップのある基底状態 の対称性

Corolllary

スピン $S = 1/2$ (または S 半奇数),
φ : a $SU(2)$ 並進不変ハミルトニアンの $SU(2)$ 不変純粋基底状態
$\Rightarrow$

定理

ギャップのある基底状態 の対称性

Corolllary
スピン $S = 1/2$ (または S 半奇数),
φ : a $SU(2)$ 並進不変ハミルトニアンの $SU(2)$ 不変純粋基底状態
$\Rightarrow$
(a) スペクトルギャップがない
または

定理

ギャップのある基底状態 の対称性

Corolllary
スピン $S = 1/2$ (または S 半奇数),
φ : a $SU(2)$ **並進不変ハミルトニアンの** $SU(2)$ **不変純粋基底状態**
$\Rightarrow$
(a) **スペクトルギャップがない**

または

(b) **並進不変性が破れる** (Dimer **化**)

End of Part 4