

D ブレイン物理の進展

畑 浩之

京都大学 大学院理学研究科 物理学第二教室

この Talk では、超弦理論の基本構成要素である D ブレインとそれにまつわる非素粒子論的応用について、非専門家、特にこのセッションの座長 (低温実験/超伝導屋さん) に、“気持ち” を分かってもらえるように話をしたい。

この Talk では、超弦理論の基本構成要素である D ブレインとそれにまつわる非素粒子論的応用について、非専門家、特にこのセッションの座長 (低温実験/超伝導屋さん) に、“気持ち” を分かってもらえるように話をしたい。

なお、以下では、 $c = \hbar = k_B = 1$ の単位系を用いる。
従って、次元の関係は

$$[\text{質量}] = [\text{エネルギー}] = [\text{温度}] = \frac{1}{[\text{長さ}]} = \frac{1}{[\text{時間}]}$$

また、しばしば $2 = \pi = 1$ の単位系も使う。

超弦理論の基本構成要素

- スtringとDブレーン -

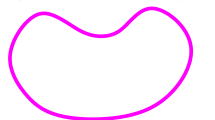
[予備知識]

- 超弦理論は $9 + 1$ 次元時空上の理論です。
- 超対称性 (supersymmetry) とは、ボソンとフェルミオンを入れ替える対称性。

超弦理論の基本構成要素 I: ストリング



開弦 (open string)

$$\sim \ell_s \sim 10^{-33} \text{cm}$$
A magenta closed string loop, resembling a horizontal figure-eight or a distorted circle.

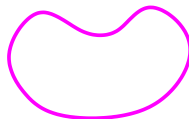
閉弦 (closed string)

超弦理論の基本構成要素 I: ストリング



開弦 (open string)

$$\sim \ell_s \sim 10^{-33} \text{cm}$$



閉弦 (closed string)

ストリングの内部運動



振動/回転エネルギー

⇒ 色々な質量・スピンの粒子

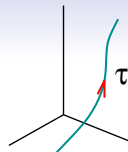
$$\text{質量}^2 = 0, 1/\ell_s^2, 2/\ell_s^2, \dots$$

特に、

- 開弦 $\Rightarrow$ ゲージ (Yang-Mills) 場: $A_\mu(x)_a^b$
- 閉弦 $\Rightarrow$ 重力子 (graviton): $g_{\mu\nu}(x)$

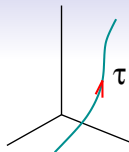
点粒子の作用

$$S_{\text{点粒子}} = -m \underbrace{\int d\tau \sqrt{-(\dot{x}^\mu(\tau))^2}}_{\text{世界線の長さ}}$$



点粒子の作用

$$S_{\text{点粒子}} = -m \underbrace{\int d\tau \sqrt{-(\dot{X}^\mu(\tau))^2}}_{\text{世界線の長さ}}$$

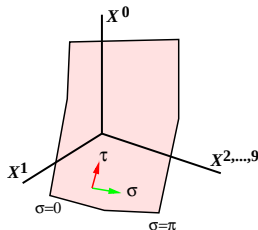
ストリングの作用

$$S_{\text{南部-後藤}} = -T \underbrace{\int d\tau \int_0^\pi d\sigma \sqrt{-\det h_{ab}(\tau, \sigma)}}_{\text{世界面の面積}}$$

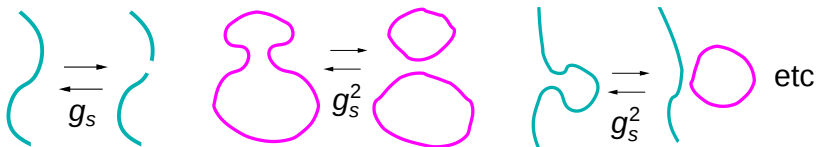
$$T = \frac{1}{\ell_s^2} = \text{ひもの張力}$$

$$h_{ab} = \partial_a X^\mu(\tau, \sigma) \partial_b X^\mu(\tau, \sigma)$$

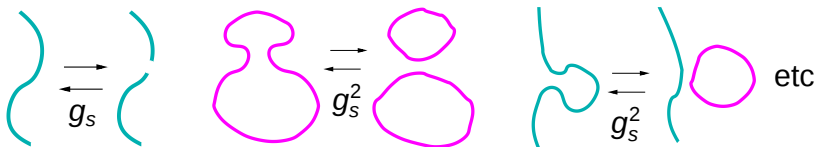
$$(a, b = \tau, \sigma)$$



ストリングの相互作用 (g_s : ストリング結合定数)



ストリングの相互作用 (g_s : ストリング結合定数)



相互作用するストリングの世界面



超弦理論の基本構成要素 II: D ブレイン

超弦理論の基本構成要素 II: D ブレイン

D ブレイン (D-brane $\Leftarrow$ membrane) とは

超弦理論の基本構成要素 II: D ブレイン

D ブレイン (D-brane $\Leftarrow$ membrane) とは

- 開弦がその端点を置くことが出来る物体
(D

p-ブレイン は空間方向に *p* 次元的に広がっている)



開弦の端点での境界条件は

D ブレインが広がった方向: Neumann 条件

D ブレインに垂直な方向: **D**irichlet 条件

超弦理論の基本構成要素 II: D ブレイン

D ブレイン (D-brane $\Leftarrow$ membrane) とは

- 開弦がその端点を置くことが出来る物体
(D

p-ブレイン は空間方向に *p* 次元的に広がっている)



開弦の端点での境界条件は

D ブレインが広がった方向: Neumann 条件

D ブレインに垂直な方向: **D**irichlet 条件

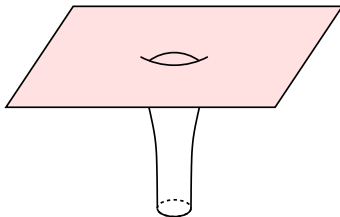
- ストリング理論におけるソリトンの物体

$$\text{D}p\text{-ブレイン張力} = \text{単位体積当りの質量} = \frac{1}{g_s} \frac{1}{\ell_s^{p+1}}$$

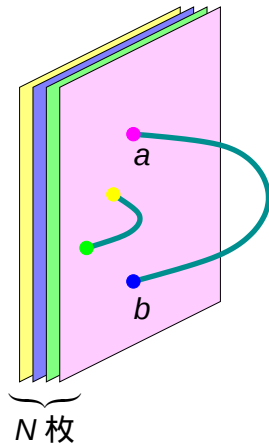
- 超弦理論の低エネルギー有効理論である超重力理論においてはDp-ブレーンを表す古典解が存在:

$$ds_{D3}^2 = \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)^{-1/2} \underbrace{\left(-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)}_{\text{ブレーンの広がった } 3+1 \text{ 次元}} \\ + \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)^{1/2} \underbrace{\left(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2\right)}_{\text{ブレーンに垂直な } 6 \text{ 次元}}$$

$$R = (4\pi g_s N)^{1/4} \ell_s \quad N = \text{D3 ブレーンの枚数}$$

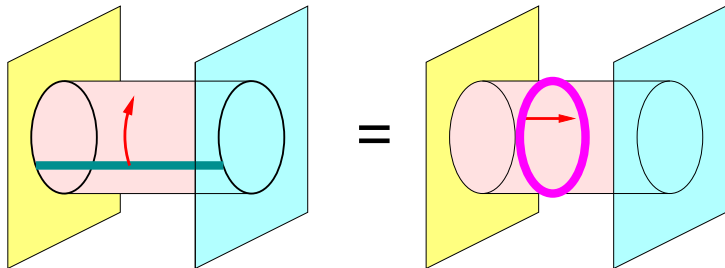


- Dp ブレインが N 枚重なった系における開弦系の低エネルギー極限 (massless 場のみを残す) は、 $p+1$ 次元超対称 $U(N)$ Yang-Mills 理論



$$\ni A_\mu(x)^a{}_b, \Phi_I(x)^a{}_b, \dots$$
$$(a, b = 1, 2, \dots, N)$$

- D ブレインは閉弦を吸ったり吐いたりする:



AdS/CFT 対応

AdS/CFT 対応

[Maldacena 1997]

AdS

$\text{AdS}_5 \times S^5$ 時空上の
Type IIB 超弦理論

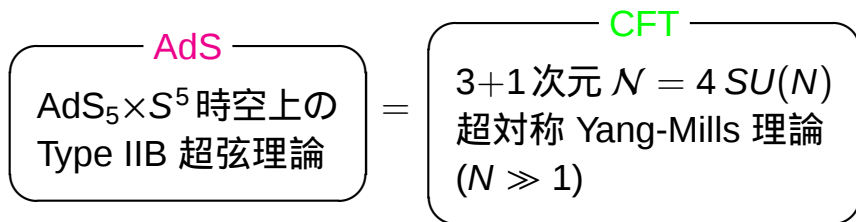
=

CFT

3+1 次元 $\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$
超対称 Yang-Mills 理論
($N \gg 1$)

AdS/CFT 対応

[Maldacena 1997]



- 超弦理論を用いて、ゲージ理論の解析が出来る。
特に、

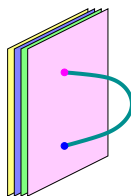
超重力近似での摂動計算 $\Leftrightarrow$ 強結合の Yang-Mills 理論

- 次元の異なる二つの理論が等価
 $\Rightarrow$ ホログラフィー (holography)

3 + 1 次元 $N = 4$ $SU(N)$ 超対称 Yang-Mills 理論

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g_{\text{YM}}^2} \text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu}^2 + (D_\mu \Phi_I)^2 + \bar{\lambda} \not{D} \lambda + [\Phi_I, \Phi_J]^2 + \bar{\lambda} \Gamma^I \Phi_I \lambda \right\}$$

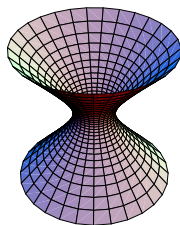
- $N = 4 \Rightarrow$ 超対称性が 4 個 $\Rightarrow$ 発散がほとんど無い
 $\Rightarrow$ 共形場理論 (CFT; 理論固有の長さが無い)
 現実の QCD 等 (非 CFT) とはかなり異なる理論
- N 枚の重なった D3 ブレイン上の低エネルギー有効理論



A_μ : ゲージ場
 Φ_I : スカラー場 (6 個)
 λ : Weyl フェルミオン (4 個)

- $g_{\text{YM}}^2 = 4\pi g_s$

AdS₅ × S⁵ 時空上の Type IIB 超弦理論



×



5 次元 Anti de-Sitter 時空

5 次元球面 (半径 R)

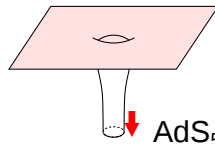
$$\text{半径 } R = (4\pi g_s N)^{1/4} \ell_s$$

という 9 + 1 次元時空上の閉弦理論

AdS₅ × S⁵

N 枚の重なった D3 ブレインを表す
超重力古典解のホライズン近傍

$$(r \ll R)$$



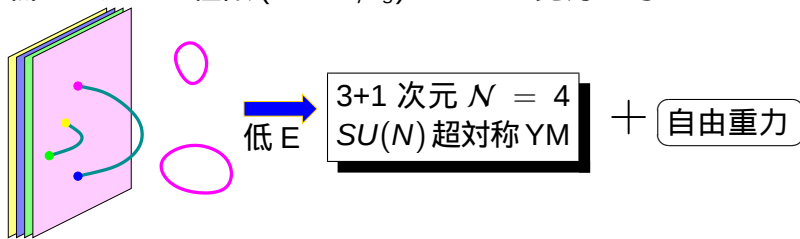
AdS₅ × S⁵

何故等価か?の気持ち

「Type IIB 超弦理論+N 枚の D3 ブレイン」の
低エネルギー極限 ($E \ll 1/\ell_s$) を二つの見方で考える:

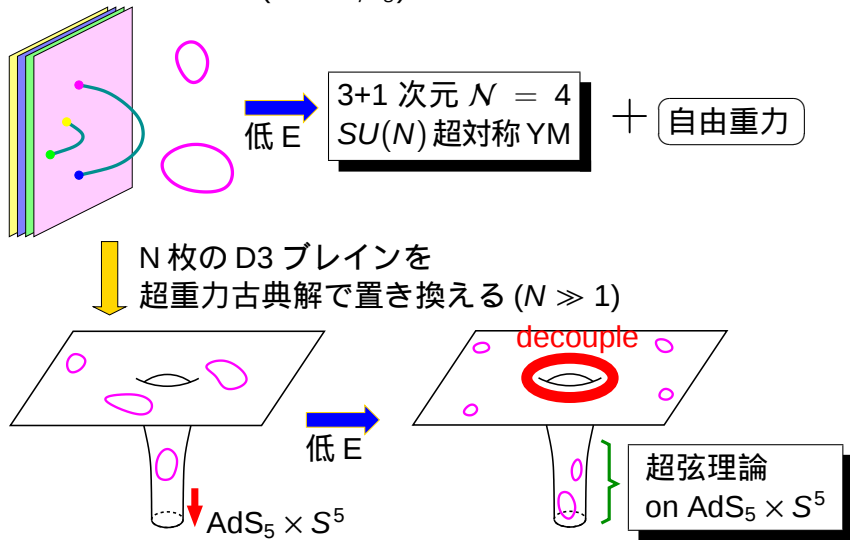
何故等価か?の気持ち

「Type IIB 超弦理論+N 枚の D3 ブレイン」の
低エネルギー極限 ($E \ll 1/\ell_s$) を二つの見方で考える:



何故等価か?の気持ち

「Type IIB 超弦理論+N 枚の D3 ブレイン」の
低エネルギー極限 ($E \ll 1/\ell_s$) を二つの見方で考える:



対応の証拠

AdS/CFT 対応の「証明」は未だ存在しないが、たくさんの「証拠」がある:

- 二つの理論の対称性に対応: 例えば、 $SO(4, 2) \times SO(6)$

	超弦理論	Yang-Mills
$SO(4, 2)$	AdS_5 の“回転”	Conformal 変換
$SO(6)$	S^5 の回転	6 個のスカラー ϕ_i の回転

- 超弦理論の状態と超対称 YM 理論の演算子の間の (限られた) 対応
- ある種の相関関数、等々

強結合理論と弱結合理論の間の対応 $\Rightarrow$ 一般に難しい
等価性を具体的に検証しすぎると、御利益が無くなる!

AdS/CFT 対応の具体的表式

GKP-Witten 関係式

-
-
-
-

省略

AdS/CFT 対応の応用

- 超弦理論の物理他分野での活用 -

Yang-Mills ガスのエントロピー

有限温度の場合、超弦理論の住む時空は

$$ds^2 = \underbrace{\frac{r^2}{R^2} \left(-\textcolor{red}{f(r)} dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \right) + \frac{R^2}{r^2 \textcolor{red}{f(r)}} dr^2}_{\text{AdS black hole}} + \underbrace{R^2 d\Omega_5^2}_{S^5}$$

$$\textcolor{red}{f(r)} \equiv 1 - \frac{\textcolor{red}{r_0^4}}{r^4} \quad \left[r_0 = 0 \Rightarrow \text{AdS}_5(T = 0) \right]$$

Yang-Mills ガスのエントロピー

有限温度の場合、超弦理論の住む時空は

$$ds^2 = \underbrace{\frac{r^2}{R^2} \left(-f(r) dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \right) + \frac{R^2}{r^2 f(r)} dr^2}_{\text{AdS black hole}} + \underbrace{R^2 d\Omega_5^2}_{S^5}$$

$$f(r) \equiv 1 - \frac{r_0^4}{r^4} \quad \left[r_0 = 0 \Rightarrow \text{AdS}_5(T = 0) \right]$$

ホライズン $r = r_0$ での「とんがり特異性」が無い
 $\Rightarrow$ 定数 r_0 と温度 T の関係

$$ds^2_{r \simeq r_0} \simeq \frac{R^2}{r_0^2} \left(d\rho^2 + \frac{4r_0^2}{R^4} \rho^2 d\tau^2 \right) \quad \text{cone diagram} \quad \left[r = r_0 + \frac{\rho^2}{r_0}, t = -i\tau \right]$$

$$\Rightarrow \text{周期性: } \frac{2r_0}{R^2} \tau \sim \frac{2r_0}{R^2} \tau + 2\pi \quad \text{cone diagram} \quad \Rightarrow T = \frac{r_0}{\pi R^2}$$

Beckenstein-Hawking エントロピー

$$S = \frac{A}{4G_{10}}$$

A : ホライズン体積, G_{10} : (10 次元)Newton 定数

Beckenstein-Hawking エントロピー

$$S = \frac{A}{4G_{10}}$$

A : ホライズン体積, G_{10} : (10 次元)Newton 定数

今の場合、

$$A = \left(\frac{r_0}{R}\right)^3 V_3 \times \underbrace{\pi^3 R^5}_{S^5 \text{ 面積}} = \pi^6 R^8 T^3 V_3$$

$\uparrow$
 $x_{1,2,3}$ 体積

$$G_{10} = 2\pi^6 g_s^2 \ell_s^8, \quad R = (4\pi g_s N)^{1/4} \ell_s$$

を用いて

強結合効果?

$$S = \frac{\pi^2}{2} N^2 T^3 V_3 = \frac{3}{4} \times \underbrace{S_{\text{free SYM}}}_{\left((2+6)\frac{2}{45} + 4 \cdot 2\frac{7}{180}\right) \pi^2 N^2 T^3 V_3}$$

Yang-Mills 流体の shear viscosity

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} - \mathcal{P}^{\mu\alpha}\mathcal{P}^{\nu\beta} \left[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{shear viscosity}}}{\eta} \left(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha - \frac{2}{3}g_{\alpha\beta}\partial_\gamma u^\gamma \right) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bulk viscosity}}}{\zeta} g_{\alpha\beta}\partial_\gamma u^\gamma \right]$$

$u^\mu = (\gamma, \gamma\mathbf{v})$: 4 元速度ベクトル場, $\mathcal{P}^{\mu\alpha} = g^{\mu\alpha} + u^\mu u^\alpha$

Yang-Mills 流体の shear viscosity

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} - \mathcal{P}^{\mu\alpha}\mathcal{P}^{\nu\beta} \left[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{shear viscosity}}}{\eta} \left(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha - \frac{2}{3}g_{\alpha\beta}\partial_\gamma u^\gamma \right) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bulk viscosity}}}{\zeta} g_{\alpha\beta}\partial_\gamma u^\gamma \right]$$

$u^\mu = (\gamma, \gamma\mathbf{v})$: 4 元速度ベクトル場, $\mathcal{P}^{\mu\alpha} = g^{\mu\nu} + u^\mu u^\alpha$

Kubo formula

$$\eta = - \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \text{Im } G_R(\omega)$$

$$G_R(\omega) = -i \int d^3x \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \underbrace{\langle [T_{12}(t, \mathbf{x}), T_{12}(0, \mathbf{0})] \rangle_\beta}_{\text{超弦理論で計算}}$$

超弦理論で計算

Yang-Mills 流体の shear viscosity

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} - \mathcal{P}^{\mu\alpha}\mathcal{P}^{\nu\beta} \left[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{shear viscosity}}}{\eta} \left(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha - \frac{2}{3}g_{\alpha\beta}\partial_\gamma u^\gamma \right) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bulk viscosity}}}{\zeta} g_{\alpha\beta}\partial_\gamma u^\gamma \right]$$

$u^\mu = (\gamma, \gamma\mathbf{v})$: 4 元速度ベクトル場, $\mathcal{P}^{\mu\alpha} = g^{\mu\nu} + u^\mu u^\alpha$

Kubo formula

$$\eta = - \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \text{Im } G_R(\omega)$$

$$G_R(\omega) = -i \int d^3x \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \underbrace{\langle [T_{12}(t, \mathbf{x}), T_{12}(0, \mathbf{0})] \rangle_\beta}_{\text{超弦理論で計算}}$$

お答え: $\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi} \quad \left(s = \frac{S}{V_3} = \frac{\pi^2}{2} N^2 T^3 \right) \Leftarrow \text{Lower bound?}$

その他

- Hall conductivity ($\text{AdS}_4 \times S^7$; M 理論)

$$\sigma_{xy} = - \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \underbrace{G_R^{xy}(\omega)}_{J_x-J_y \text{ Green 関数}} \stackrel{\text{AdS}_4/\text{CFT}_3 \text{ 対応}}{\downarrow} \frac{\rho}{B} \quad [\mathbf{B} = (0, 0, B)]$$

- Fractional Quantum Hall Effect
- Holographic Superconductor
- Holographic 冷却原子気体 (非相対論的 AdS/CFT)



まとめ

まとめ

- 超弦理論 (AdS/CFT 対応) は、ゲージ理論の強結合領域の解析に対する強力な道具。

まとめ

- 超弦理論 (AdS/CFT 対応) は、ゲージ理論の強結合領域の解析に対する強力な道具。
- より現実的な (No 超対称性, 物質場) Holographic 模型も構築されつつある [e.g., 酒井-杉本模型]。

まとめ

- 超弦理論 (AdS/CFT 対応) は、ゲージ理論の強結合領域の解析に対する強力な道具。
- より現実的な (No 超対称性, 物質場) Holographic 模型も構築されつつある [e.g., 酒井-杉本模型]。
- 座長が超弦理論を学ばないといけなくなる日も近い。

まとめ

- 超弦理論 (AdS/CFT 対応) は、ゲージ理論の強結合領域の解析に対する強力な道具。
- より現実的な (No 超対称性, 物質場) Holographic 模型も構築されつつある [e.g., 酒井-杉本模型]。
- 座長が超弦理論を学ばないといけなくなる日も近い。
- しかし、素粒子論本来の「究極理論としての超弦理論」の飛躍も待たれる!

ご清聴ありがとうございました。