Campbell-Baker-Hausdorff 公式の導出

富谷昭夫[*1]
素粒子論研究室（物理学専攻）
http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~akio/

目次

1 Campbell-Baker-Hausdorff 公式の導出

A, B を非可換な物とする $(AB \neq BA)$。この時、以下の公式が成り立つ[*2]。

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \cdots \tag{1.1}$$

$$e^A e^B = \exp\left[A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A - B, [A, B]] \cdots\right] \tag{1.2}$$

まず、(1.1) を示し、同様の方法で (1.2) を示す。
ここで、$[A, B] \equiv AB - BA$ する。

1.1 $e^A B e^{-A}$ の導出

まず以下の実数 t の関数 $f(t)$ を定義する。

$$f(t) = e^{tA} B e^{-tA} \tag{1.3}$$

$f(1) =$(1.1) である。$f(t)$ をテイラー展開して $t = 1$ を代入して公式を導出する。まず、$f(t)$ を t で微分する。$(e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA}A$ を用いると

$$\begin{aligned}
f'(t) &= (e^{tA} B e^{-tA})' && (1.4)\\
&= (e^{tA})' B e^{-tA} + e^{tA} B (e^{-tA})' && (1.5)\\
&= e^{tA} A B e^{-tA} - e^{tA} B A e^{-tA} && (1.6)\\
&= e^{tA} (AB - BA) e^{-tA} && (1.7)\\
&= e^{tA} [A, B] e^{-tA} && (1.8)
\end{aligned}$$

同様に

$$f''(t) = e^{tA} [A, [A, B]] e^{-tA} \tag{1.9}$$

である。ここから

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2!} f''(0) t^2 + \cdots \tag{1.10}$$

*1 akio@het.phys.sci.osaka-u.ac.jp
*2 ここで指数関数は $\exp[A] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ と級数和で定義する。

に代入して、

$$f(t) = B + t[A,B] + \frac{1}{2!}t^2[A,[A,B]] + \cdots \tag{1.11}$$

なので $t=1$ とおくと、結果が得られる。

$$e^A B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \cdots \tag{1.12}$$

1.2　$e^A e^B$ の導出

1.2.1　定義

$e^A e^B = e^C$ とおいて C の具体形を求める。実数 t の関数 $f(t), g(t)$ を定義する。

$$f(t) \equiv e^{tA}e^{tB} \equiv e^{g(t)} \tag{1.13}$$

$$g(t) = \log[e^{tA}e^{tB}] \tag{1.14}$$

$f(t)$ のテイラー展開を求めたのち、$g(t)$ の定義に代入して $g(t)$ のテイラー展開を求めて $t=1$ とする[*3]。

1.2.2　使う公式

$$\log(1+X) = X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3 + \cdots \tag{1.15}$$

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \tag{1.16}$$

$$(A+B)^3 = A^3 + AAB + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + BBA + B^3 \tag{1.17}$$

$$[AB, C] = A[B,C] + [A,C]B \tag{1.18}$$

1.2.3　$f(t)$ の微分とテイラー展開

$$f'(t) = e^{tA}(A+B)e^{tB} \tag{1.19}$$

$$f''(t) = e^{tA}A(A+B)e^{tB} + e^{tA}(A+B)Be^{tB} \tag{1.20}$$

$$= e^{tA}(A^2 + 2AB + B^2)e^{tB} \tag{1.21}$$

$$= e^{tA}(A^2 + AB + B^2 + AB + BA - BA)e^{tB} \tag{1.22}$$

$$= e^{tA}\big((A+B)^2 + [A,B]\big)e^{tB} \tag{1.23}$$

$$f'''(t) = e^{tA}\big((A+B)^3 + A[A,B] + [A^2,B] + [A,B]B + [A,B^2]\big)e^{tB} \tag{1.24}$$

よってテイラー展開は、

$$f(t) = 1 + (A+B)t + \frac{1}{2}\big((A+B)^2 + [A,B]\big)t^2 \tag{1.25}$$

$$+ \frac{1}{3!}\big((A+B)^3 + A[A,B] + [A^2,B] + [A,B]B + [A,B^2]\big)t^3 + \cdots \tag{1.26}$$

$$\equiv 1 + F(t) \tag{1.27}$$

[*3] キュミュラント展開、1PI 有効作用の計算と同じ感じ。

ここで、以下の文字を定義する。

$$(1) = (A+B) \tag{1.28}$$

$$(2) = \frac{1}{2}\big((A+B)^2 + [A,B]\big) \tag{1.29}$$

$$(3) = \frac{1}{3!}\big((A+B)^3 + A[A,B] + [A^2,B] + [A,B]B + [A,B^2]\big) \tag{1.30}$$

つまり (n) は、$f(t)$ の n 次の係数を表す。

$$f(t) = 1 + (1)t + (2)t^2 + (3)t^3 + \cdots \tag{1.31}$$

$$F(t) = (1)t + (2)t^2 + (3)t^3 + \cdots \tag{1.32}$$

1.2.4　$g(t)$ のテイラー展開

$g(t)$ は、

$$g(t) = \log[f(t)] \tag{1.33}$$

$$= \log[1 + F(t)] \tag{1.34}$$

$$= F(t) - \frac{1}{2}F(t)^2 + \frac{1}{3}F(t)^3 + \cdots \tag{1.35}$$

この式を t^3 まで求める。

$$F(t) \sim (1),(2),(3) \tag{1.36}$$

$$F(t)^2 \sim (1)^2,(1)(2),(2)(1) \tag{1.37}$$

$$F(t)^3 \sim (1)^3 \tag{1.38}$$

つまり、t^3 までで象徴的に書くと、

$$g(t) = (1)t + t^2[(2) - \frac{1}{2}(1)^2] + t^3[(3) - \frac{1}{2}\{(1)(2)+(2)(1)\} + \frac{1}{3}(1)^3] + \cdots \tag{1.39}$$

となる。t の係数ごとに

$$a = (1) \tag{1.40}$$

$$b = (2) - \frac{1}{2}(1)^2 \tag{1.41}$$

$$c = (3) - \frac{1}{2}\{(1)(2)+(2)(1)\} + \frac{1}{3}(1)^3 \tag{1.42}$$

と置く。すなわち、

$$g(t) = ta + t^2 b + t^3 c + \cdots \tag{1.43}$$

である。a,b,c は、それぞれ地道に計算をすると

$$a = A + B \tag{1.44}$$

$$b = \frac{1}{2}[A,B] \tag{1.45}$$

$$c = \frac{1}{12}[A-B,[A,B]] \tag{1.46}$$

となる。以上をまとめると、

$$e^A e^B = \exp\left[A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[A-B,[A,B]] + \cdots\right] \tag{1.47}$$