

座標変換に伴うヤコビアン

富谷昭夫*

April 25, 2025

Abstract

このノートでは、座標変換に伴うヤコビアンについて説明する。

1 Introduction

1.1 一般論

物理学では、座標変換を行うことが多々ある。このノートでは具体的にデカルト座標と極座標について触れていく。デカルト座標 (x, y) と極座標 (r, θ) との関係は、

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (1)$$

である。これは、デカルト座標 (x, y) が与えられたとき、その x と y に上記式を代入して極座標 (r, θ) での表記を得る。

上記の式をあえて関数のように書くと、

$$\begin{cases} x(r, \theta) = r \cos \theta \\ y(r, \theta) = r \sin \theta \end{cases} \quad (2)$$

となり、 r, θ を与えると x, y が得られることがよく分かる。つまり、 r, θ を独立変数とみなしたことに相当する。座標変換は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{座標変換}} \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

ともかける。

さて、天下りのだが微小変換を考えることにする。微小な範囲では変換は線形になるため、線形代数の線形変換が役立つ。 (x, y) の微小量を (dx, dy) 、極座標 (r, θ) の微小量を $(dr, d\theta)$ とする。このとき2つの変換が以下の変換行列 J で結ばれるとする。

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}}_{=J} \begin{bmatrix} dr \\ d\theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

*東京女子大学 akio@yukawa.kyoto-u.ac.jp

この J をヤコビアン (Jacobian) という。問題は、このヤコビアン J がどのように計算できるか、である。

ここで更に天下りであるが、ヤコビアン J は以下になることが知られている (いわゆる全微分というものである)。見た目が見慣れないかもしれないが、

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}}_{=J} \begin{bmatrix} dr \\ d\theta \end{bmatrix} \quad (5)$$

となる。これを行列でなく書くと、

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta \quad (6)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta \quad (7)$$

となる。これは全微分の式そのものである。この式をよく見てみると、たとえば上の式は、

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta \quad (8)$$

であり、 dr などを「約分」すると、 dx のようになるためよく分かると思う。これは x を r と θ の2変数関数として見たときに少しずつ変化させて全体の変化量を見積もっていることに相当する (全微分)。

1.2 本当に必要なもの

さて、今は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} \quad (9)$$

の座標変換をみた。ただ、計算の都合で必要なのは、

$$\text{どうやって } dx \text{ などを } dr \text{ や } d\theta \text{ の言葉に直すか} \quad (10)$$

である。つまり必要なのはヤコビアン J^{-1} である。

$$\begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (11)$$

の変換が必要である。つまり x, y の関数としての r, θ

$$\begin{cases} r(x, y) = ? \\ \theta(x, y) = ? \end{cases} \quad (12)$$

が必要である。微小変換には、これを用いて

$$\begin{bmatrix} dr \\ d\theta \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix}}_{=J^{-1}} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad (13)$$

が必要である。右辺 J^{-1} の構成パーツである

$$\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (14)$$

をどうやって求めよう？

まず x, y の関数としての r, θ は、原理的には

$$\begin{cases} r(x, y) &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta(x, y) &= \arctan \frac{y}{x} \end{cases} \quad (15)$$

で求まるが、これの x や y での偏微分は計算したくない。そこで以下のような裏技を使う。

1.3 本当に必要なものの計算法

もとの極座標変換の式等をぐっと睨むと (比を取ったり 2 乗したりすると)、

$$\begin{cases} r^2 &= x^2 + y^2 \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} \end{cases} \quad (16)$$

であることがわかる ($\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$)。あえて関数のように書くと

$$\begin{cases} (r(x, y))^2 &= x^2 + y^2 \\ \tan(\theta(x, y)) &= \frac{y}{x} \end{cases} \quad (17)$$

である。これらの x, y での偏微分は比較的簡単で

$$\frac{\partial r^2}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial r^2}{\partial y} = 2y \quad (18)$$

$$\frac{\partial \tan \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial \tan \theta}{\partial y} = \frac{1}{x} \quad (19)$$

である。ここでこれらを用いて r の x での微分を求めてみる。これは連鎖律 (合成関数の微分) を用いて r を r^2 の関数とみなして

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial r^2} \frac{\partial r^2}{\partial x} \quad (20)$$

とかける。 $\frac{\partial r^2}{\partial x} = 2x$ はわかっている。そして、ここで $\frac{\partial r}{\partial r^2} = \frac{dr}{dr^2}$ と常微分になることに注意する。これは r^2 と r が 1 変数関数の関係であるからである。すると、

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{dr}{dr^2} \underbrace{\frac{\partial r^2}{\partial x}}_{=2x} \quad (21)$$

となる。そして

$$\frac{dr}{dr^2} = \frac{1}{\frac{dr^2}{dr}} \quad (22)$$

を用いる。1変数関数での逆関数はこれが成立する (逆関数の微分公式)。そしてこれの分母はもちろん $\frac{dr^2}{dr} = 2r$ である。すなわち、

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2r} 2x = \frac{x}{r} \quad (23)$$

である。そして $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ をもちいると、右辺から r を消去して x, y の式にできて

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (24)$$

とわかる！ (もちろん、律儀に偏微分に対する合成関数の微分を用いても同じ結果になる)。なので同様にして

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (26)$$

という事がわかる。のこりは、

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (27)$$

である。こちらも同様に計算してみよう。

合成関数の微分をうまく使って、

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial \tan \theta} \frac{\partial \tan \theta}{\partial x} \quad (28)$$

となる。 $\frac{\partial \tan \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$ をつかうと、

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\partial \theta}{\partial \tan \theta} \frac{y}{x^2} \quad (29)$$

である。右辺の1つ目は、先ほどと同様に、

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tan \theta} = \frac{d\theta}{d \tan \theta} = \frac{1}{\frac{d \tan \theta}{d\theta}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \theta}} = \cos^2 \theta \quad (30)$$

であり、

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\cos^2 \theta \frac{y}{x^2} \quad (31)$$

となる。あとは右辺を x, y で書き換えて $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ つまり、 $\cos^2 \theta = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ であるので、

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad (32)$$

である¹。同様に、 $\partial\theta/\partial y$ は

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \underbrace{\frac{\partial\theta}{\partial \tan\theta}}_{=\frac{x^2}{x^2+y^2}} \underbrace{\frac{\partial \tan\theta}{\partial y}}_{=\frac{1}{x}} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad (33)$$

となる。

結果をまとめると、

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (34)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad (35)$$

となる。これが求めたいヤコビアン J^{-1} の要素であった。

¹次元解析をすると、確かに単位的にもあっている。