双極子に関するノート

富谷 昭夫
akio @ het.phys.sci.osaka-u.ac.jp

July 15, 2014

1 電場と静電ポテンシャルの関係

静電ポテンシャルを $\phi(x,y,z)$、電場を $\vec{E}(x,y,z)$ とすると

$$\vec{E}(x,y,z) = -\vec{\nabla}\phi(x,y,z) \tag{1.1}$$

という関係が成り立つ。静電ポテンシャルは、スカラー量なので座標によらない。静電ポテンシャルが求まっていれば電場はその微分で与えられるので、点電荷が空間に配置されている状況など、静電ポテンシャルが簡単にわかるのであればそちらを求める[*1]。∇(というか grad) は、使う座標系によって適切なものを使う必要がある。

2 双極子とは？

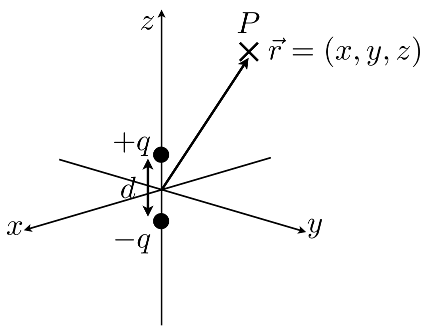

図:空間に置かれた 2 つの点電荷

図のような状況を考える。すなわち、距離 d だけ離した 2 つの点電荷の作る点 P における電場、もしくは静電ポテンシャルを考える。点 P における静電ポテンシャル $\phi(x,y,z)$ は、2 つの電荷の作るポテンシャルの和 (重ねあわせの原理) によって与えられる。

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{(z-d/2)^2+x^2+y^2}} + \frac{-q}{\sqrt{(z+d/2)^2+x^2+y^2}}\right] \tag{2.1}$$

この式を微分すれば、電場が求まる。

さて、ここで d が微小だけ離れている場合、つまり $d \ll |\vec{r}|$ を考える。もし $d=0$ であれば 2 つの電荷の作る静電ポテンシャルが互いに打ち消しあう。しかし、少しでも離れている場合は、d のベキ級数に展開でき、評価できるだろう。この無限小だけ離れた 2 つの点電荷を双極子と呼ぶ。

[*1] ただし、電場にはガウスの法則が成り立つのでそちらのほうが求めやすいことはある。

まず、分母の d を含む部分を見てみると、次のように展開できる。

$$\left(z-\frac{d}{2}\right)^2 = z^2 - zd + \cancel{d}^2/4 \approx z^2 - zd \tag{2.2}$$

ただしここで d が小さいことを使った。さらに原点から点 P までの距離 r を導入する。

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{2.3}$$

すると、ポテンシャルの根号の中は次のようになる。

$$\left(z-\frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2 \approx r^2 - zd = r^2\left(1-\frac{zd}{r^2}\right) \tag{2.4}$$

すると第 1 項の距離に関する部分は、次のようになる。

$$\frac{1}{\sqrt{(z-d/2)^2+x^2+y^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{r^2\left(1-\frac{zd}{r^2}\right)}} \tag{2.5}$$

$$= \frac{1}{r}\left(1-\frac{zd}{r^2}\right)^{-1/2} \tag{2.6}$$

この最後の行をテイラー展開 (今は単なる一般の二項展開) を 2 次まで行う。

$$\frac{1}{r}\left(1+\frac{1}{2}\frac{zd}{r^2}\right) \tag{2.7}$$

同様に第二項も評価すると、

$$\frac{1}{\sqrt{(z+d/2)^2+x^2+y^2}} \approx \frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{2}\frac{zd}{r^2}\right) \tag{2.8}$$

この 2 つの差が求める静電ポテンシャルである。

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3}qd \tag{2.9}$$

ここで現れた qd を双極子モーメントと呼ぶ[*2]。3 次元極座標では、z 軸と $\vec{r}$ のなす角を θ として $z/r = \cos\theta$ であるので、双極子の作る静電ポテンシャルは次のようにも書ける。

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} \tag{2.10}$$

つまり、双極子の作るポテンシャルは点電荷と違い、$1/(\text{距離})^2$ に比例する! そして、角度 θ に依存する。さらに $\vec{p}$ を $-q$ から $+q$ へ向かうベクトル ($p\cos\theta = \vec{p}\cdot\vec{e}_r$) とすると

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \tag{2.11}$$

ともかける。電場は、(2.9) もしくは、(2.10) などを任意の座標でのナブラ ∇(というか grad) を用いて計算すれば良い。ちなみにデカルト座標での $1/r^n$ の微分には、(2.3) と微分の連鎖律が有用である。

参考文献

ファインマン他、1969 年「ファインマン物理学 III 電磁気」P66 − P68、岩波書店

[*2] ここでの定義はファインマン物理学に従った。