エディントンのイプシロンの和公式

富谷昭夫[*]

March 2, 2025

Abstract

このノートでは、3 階のエディントンのイプシロン ϵ_{ijk} の和公式を見ていく。名称については Wikipedia 等参照のこと。

Contents

[*]東京女子大学 akio@yukawa.kyoto-u.ac.jp

1　導入

3階のエディントンのイプシロン、イプシロンテンソルは

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (ijk\,\text{が偶置換}) \\ -1 & (ijk\,\text{が奇置換}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{1}$$

である。ただし ijk は $1, 2, 3$ である。

2　和公式

3階のエディントンのイプシロンを考える。天下り的だが、和公式は以下である。

$$\sum_{i} \epsilon_{in_1n_2}\epsilon_{im_1m_2} = \sum_{\sigma\in S_2} \mathrm{sgn}\,(\sigma)\delta_{n_1m_{\sigma(1)}}\delta_{n_2m_{\sigma(2)}} \tag{2}$$

S_2 は2次の対称群である[1]。行列式の定義と同じ形なので覚えやすい。
　右辺を展開すると、

$$\sum_{i} \epsilon_{in_1n_2}\epsilon_{im_1m_2} = \delta_{n_1m_1}\delta_{n_2m_2} - \delta_{n_1m_2}\delta_{n_2m_1} = \det\begin{bmatrix}\delta_{n_1m_1} & \delta_{n_1m_2} \\ \delta_{n_2m_1} & \delta_{n_2m_2}\end{bmatrix} \tag{4}$$

行列式が現れる。

3　応用1

ここでは、ベクトルの外積が、

$$(\vec{a}\times\vec{b})_k = \sum_{ij} \epsilon_{ijk} a_i b_j \tag{5}$$

と書けることをもちいて、

$$V = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \tag{6}$$

という積を考える (ベクトル三重積)。これは公式をつかうと、

$$V_h = \left(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\right)_h, \tag{7}$$

$$= \sum_{ij} \epsilon_{hij} a_i (\vec{b}\times\vec{c})_j, \tag{8}$$

$$= \sum_{ij} \epsilon_{hij} a_i \sum_{nm} \epsilon_{jmn} b_m c_n, \tag{9}$$

[1] いま、別の例として2階のエディントンのイプシロンを考えるとこの公式は、

$$\sum_{i} \epsilon_{in_1}\epsilon_{im_1} = \sum_{\sigma\in S_1} \mathrm{sgn}\,(\sigma)\delta_{n_1m_{\sigma(1)}} = \delta_{n_1m_1} \tag{3}$$

という自明な式が出てくる。2階のエディントンのイプシロンはパウリ行列 σ_2 を用いて $\mathrm{i}\sigma_2$ であり、2乗がマイナスの単位行列になることと無矛盾になっている。

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{inm} \Big(\sum_j \epsilon_{jhi}\epsilon_{jmn} \Big) a_i b_m c_n, && (10)\\
&= \sum_{inm} \Big(\delta_{hm}\delta_{in} - \delta_{hn}\delta_{im} \Big) a_i b_m c_n, && (11)\\
&= \sum_i a_i b_h c_i - \sum_i a_i b_i c_h, && (12)\\
&= \Big((\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \Big)_h && (13)
\end{aligned}
$$

となる。

4 応用 2

公式、

$$
\sum_i \epsilon_{in_1n_2}\epsilon_{im_1m_2} = \delta_{n_1m_1}\delta_{n_2m_2} - \delta_{n_1m_2}\delta_{n_2m_1} \qquad (14)
$$

で更に $n_1 = m_1 = j$ として和を取ろう。

$$
\begin{aligned}
\sum_{ij} \epsilon_{ijn_2}\epsilon_{ijm_2} &= \sum_j (\delta_{jj}\delta_{n_2m_2} - \delta_{jm_2}\delta_{n_2j}), && (15)\\
&= \sum_{j=1}^{3} \delta_{jj}\delta_{n_2m_2} - \sum_j \delta_{jm_2}\delta_{n_2j}, && (16)\\
&= 3\delta_{n_2m_2} - \delta_{n_2m_2}, && (17)\\
&= 2\delta_{n_2m_2}. && (18)
\end{aligned}
$$

となる。

5 一般公式

$N+1$ 階のエディィントンのイプシロンを考える。

$$
\sum_i \epsilon_{in_1n_2\cdots n_N}\epsilon_{im_1m_2\cdots m_N} = \sum_{\sigma\in S_N} \mathrm{sgn}\,(\sigma)\delta_{n_1m_{\sigma(1)}}\delta_{n_2m_{\sigma(2)}}\cdots\delta_{n_Nm_{\sigma(N)}} \qquad (19)
$$

S_N は N 次の対称群である