

Ver. 平成 24 年 2 月 6 日 8:16pm

修士論文

ミニマルウォーキングテクニカラーの実現に向
けての格子シミュレーション

学籍番号 24B10039

富谷昭夫
素粒子論研究室（物理学専攻）

平成 24 年 2 月 6 日

<http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~akio/filebox/master.pdf>

概要

現在 LHC が稼動し電弱対称性の破れが盛んに研究されている。この論文では、初めに電弱対称性の破れのヒントを与えるペスキン - 竹内のパラメータについてレビューを行う。そしてそれを用いて QCD ライクなテクニカラーの破綻を説明する。次に、電弱対称性の破れ起源を説明する理論として、ミニマルウォーキングテクニカラーモデルを紹介する。このモデルでは強結合領域での計算が必須なのでその方法として格子ゲージ理論を紹介し、最後にこのモデルでの仮定である固定点の探索をシミュレーションを用いて進める上で見つかった困難とその解決法、展望について述べる。

Contents

Ch.1	はじめに	4
1.1	はじめに	4
第 I 部 Beyond The Standard Model		6
Ch.2	標準理論	7
2.1	標準理論	7
2.1.1	記法等について	7
2.1.2	ゲージ理論	8
2.1.3	非可換ゲージ理論における共変微分	9
2.1.4	非可換ゲージ理論	11
2.2	3つの力	11
2.3	自発的対称性の破れとヒッグス機構	12
2.3.1	ゴールドストンの定理	12
2.3.2	ヒッグス機構	13
2.3.3	非可換ゲージ理論でのヒッグス機構	18
2.4	電弱対称性の自発的破れ	18
2.4.1	電弱対称性の破れ: $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$	18
2.4.2	弱い相互作用の低エネルギー有効理論	23
2.4.3	Star quantity	25
2.4.4	STU パラメータ	30
Ch.3	テクニカラーモデル	32
3.1	テクニカラーの動機	32
3.2	QCD を用いた電弱対称性の破れ	33
3.3	テクニカラーモデル	34
3.4	ETC	35
3.5	テクニカラーモデルの難点	36
3.5.1	FCNC	36
3.5.2	古い TC モデルでの S パラメータ	37
3.6	Walking Technicolor	43

Ch.4	摂動論からの固定点の予言	45
4.1	摂動論的くりこみ群	45
4.1.1	β 関数	45
4.2	摂動論からの固定点の予言	45
 第 II 部 Field Theory on the Lattice		48
Ch.5	格子上の場の理論	49
5.1	理論のユークリッド化	49
5.2	格子理論と連続理論の関係	50
5.3	ゲージ場の格子正則化	51
5.3.1	格子ゲージ理論	51
5.4	スタaggerドフェルミオン	55
5.4.1	スタaggerドフェルミオン	56
5.4.2	$SU(2)$ での $N_f = 2$ のスタaggerドフェルミオン	56
Ch.6	非摂動論的な有効結合定数の定義	60
6.1	非摂動論的なくりこまれた結合定数の定義	60
6.2	TPL スキーム	60
6.2.1	ポリャコフループ	60
6.2.2	捻れた周期境界条件	61
6.2.3	捻れた平面波展開	61
6.2.4	Feynman Rule	63
6.2.5	TPL	65
Ch.7	ステップスケーリング	70
7.1	Setp Scaling	70
Ch.8	先行研究	75
8.1	先行研究	75
 第 III 部 Results and Discussions		77
Ch.9	結果と結論、今後の課題	78
9.1	理論のまとめとデータ	78
9.2	解析	82
9.3	シミュレーション結果	82
9.4	問題点と解法	83
9.5	結論	85
9.6	今後の課題	85

付録 A	A_{FB} の計算	88
A.1	散乱断面積	88
A.1.1	ファインマンルールとの関係	91
A.2	A_{FB}	91
A.2.1	トレース公式	94
A.2.2	トレースの分類	94
A.2.3	トレース積の分類	95
A.2.4	結合定数に起因する係数	96
A.2.5	不変振幅の表式	97
A.2.6	A_{FB} の表式	97
付録 B	格子ゲージ理論のシミュレーション	99
B.1	経路積分による定式化	99
B.2	詳細釣り合いを満たすマルコフ過程	100
B.2.1	マルコフ鎖	100
B.2.2	ハイブリッドモンテカルロ法	102
B.2.3	HMC の適用	106
B.3	誤差の評価	108
B.3.1	方法	108
B.3.2	証明	109
付録 C	ステップスケーリング関数と β 関数の関係	112
C.1	β 関数とステップスケーリング関数	112
	謝辞	114
	関連図書	114

Ch.1 はじめに

1.1 はじめに

1TeV 以下の物理は、標準理論によってよく記述されている。標準理論は、ゲージ原理に基づいたゲージ理論とフェルミオンとスカラー場で構成されている。ゲージ群は、 $SU(3)_{\text{color}} \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ であるが、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ というゲージ対称性は低エネルギーでは自発的に破れており、我々が目にする電磁気学のゲージ対称性 $U(1)_{\text{EM}}$ となっている。このゲージ対称性の破れは、ヒッグス場と呼ばれるスカラー場が何らかの理由で真空期待値を得ることにより引き起こされる。これをヒッグスメカニズムと呼ぶ。この時、もとのヒッグス場の一部は、Z ボソン、W ボソンに吸収され、余った自由度がヒッグスボソンとして観測される。

スカラー粒子であるヒッグスボソンが複合粒子である可能性を考えてみる。擬スカラー粒子であるパイ中間子は、陽子、中性子、電子と並んでかつて、素粒子だと思われてきた。現在我々は、クォークが素粒子で、パイ中間子は、アップクォークとダウルクォークのカラー相互作用による束縛状態であることを知っている。それと同様にヒッグスボソンも我々の知らないフェルミオンの、新たなゲージ相互作用による束縛状態の可能性は無いだろうか？こういったモデルをテクニカラーモデルと言う [1]。このモデルは、QCD を元に、Weinberg らによって提唱されたが、現在は電弱相互作用の精密測定などにより否定されている。しかし、その理論計算には、QCD と同じ振る舞いをする、という仮定がされている。これは必要な仮定ではなく、QCD とは異なった振る舞いをするモデルであってもいい。また、そういったモデルは存在しうる。

QCD の漸近自由性、QED のランダウポール、標準理論の大統一など、理論の性質は、摂動論を用いて β 関数を書き下し、エネルギースケールに対する有効結合定数の振る舞いによって調べることが出来る。 β 関数は、有効結合定数がエネルギー増加に伴ってどれだけ成長するか？を表している。もし、 β 関数が 0 になる有効結合定数の値が存在すれば、そこでは、理論がエネルギー、系のスケールに依らずそれにより、共形場理論になると考えられている。

非可換ゲージ理論における β 関数は、ゲージ群、フェルミオンの数、フェルミオンの表現、によっている。また摂動 2-loop の β 関数を用いて、ある組み合わせでは、結合定数 g が 0 で無い所で β 関数が 0 になる、すなわち非自明な零点を持つ事が知られている。もし、零点があればテクニカラーモデルは、前の仮定から外れ、またその他の実験からの制限も満たすことが出来る。このような β 関数の非自明な零点を持つテクニカラーモデルをウォーキングテクニカラー (WT) モデルという。その中でも、ゲージ群を $SU(2)$ 、随伴表現のフェルミオンが 2 個というモデルがある。これをミニマルウォーキングテクニカラー (MWTC) モデルと呼ぶ。

しかしながら、この非自明な β 関数の零点、くりこみ群の固定点は、結合定数が大きい、つまり摂動論の使えない領域に存在する。固定点が本当に存在するかは、非摂動論的な方法で調べる必要がある。

MWTC モデルが現実的なモデルになるためには、固定点が存在しなければならず、そしてその固定点の存在は、非摂動論的に調べる必要がある。そこで我々は、QCD の非摂動論的な計算に用いられてきた格子ゲージ理論のシミュレーションを用いてこの固定点を探した。そのために、非摂動論的な有効結合定数を定義し、また、ステップスケールリングによってくりこみ群の様子を探った。

この論文では、まず標準理論の電弱理論、ヒッグスメカニズム、ST パラメータについてレビューし、そののちに MWTC のレビューを行う。そして格子ゲージ理論の手法について紹介し、最後にシミュレーション結果を載せ、現在の問題点、解決法について議論する。

第I部

Beyond The Standard Model

Ch.2 標準理論

2.1 標準理論

2.1.1 記法等について

まず、以下で用いる表記を羅列しておく。

計量

$$(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

質量 m の自由スカラー場のプロパゲーター

$$D_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

質量 m の自由ディラック場のプロパゲーター

$$S(p) = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

自由ゲージ場のプロパゲーター

$$G_{\mu\nu}(p) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$$

γ^5

$$\begin{aligned}\gamma^5 &\equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\ (\gamma^5)^2 &= 1 \\ (\gamma^5)^\dagger &= \gamma^5\end{aligned}$$

フェルミオンカレント

$$\begin{aligned}j^\mu &= \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \\ j^{5\mu} &= \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)\end{aligned}$$

2.1.2 ゲージ理論

マクスウェル理論は以下のラグランジアンを持つ。

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.1.1)$$

ただし、 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ である。この理論は、以下のゲージ変換に対して不変である。

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha(x) \quad (2.1.2)$$

ただし、 g は結合定数である。この対称性をゲージ対称性といい、このような対称性を持つ理論をゲージ理論という。これからは、この対称性を逆に原理とみなして理論を構成する。質量項 $m^2 A_\mu^2$ は、ゲージ対称性を破るのでゲージ場は、質量を持つことができない。また、スカラー場の $\frac{\lambda}{4!}\phi^4$ 項のようなゲージ場同士の自己結合は存在しない。ディラック方程式に従うフェルミオンは、以下のラグランジアンを持つ。

$$\mathcal{L}_{\text{fermion}} = \bar{\psi}(x)(i\partial - m)\psi(x) \quad (2.1.3)$$

ただし、 $\partial = \gamma^\mu\partial_\mu$ である。このラグランジアンは、フェルミオンを適当な位相回転する下で不変である。

$$\psi(x) \rightarrow e^{\pm i\alpha}\psi(x) \quad (2.1.4)$$

また、 $m = 0$ のとき $P_\pm = \frac{1 \pm \gamma^5}{2}$ を用いて右巻き、左巻きフェルミオンを別々に回すカイラル対称性も持つ。

$$\psi(x) \rightarrow e^{\pm i\alpha\gamma^5}\psi(x) \quad (2.1.5)$$

一般にフェルミオンとゲージ場を同時に記述するラグランジアンは以下で与えられる。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{fermion}} \quad (2.1.6)$$

$$= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\partial - m)\psi \quad (2.1.7)$$

しかし、このラグランジアンは、フェルミオンの大域的な位相回転不変性をゲージ化した、すなわち $\alpha \rightarrow \alpha(x)$ とした変換、ゲージ変換の下で不変でない。ゲージ対称性を持たせることは可能で、微分 ∂_μ を共変微分 $\partial_\mu - igA_\mu \equiv D_\mu$ に置き換えれば良い。つまり、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(iD - m)\psi \quad (2.1.8)$$

は、ゲージ対称性を持つ。この理論を量子化した理論は、Quantum Electro Dynamics (QED) と呼ばれ、多くの成功を収めた。ゲージ理論の特徴は、フェルミオンへの結合の仕方が決まっているので、ラグランジアンとただひとつの結合定数 g とフェルミオンの質量

m を与えると後は、散乱断面積等が予言できてしまう事である。

ゲージ対称性のある場の量子論は、くりこみ可能であり、ゲージ対称性がなくなると、くりこみ可能性は保証されないため、ゲージ対称性は非常に重要である。

非可換ゲージ理論とは、一般化されたゲージ理論で、QED では場の値は数であるのに対し、非可換ゲージ理論では、行列に値を持つ。 $SU(N_c)$ ゲージ理論なら

$$A_\mu(x) = \sum_a A_\mu^a(x) T_a \quad (2.1.9)$$

と、行列¹である T_a を用いて展開できる。ゲージ場が行列になるのに伴って、フェルミオンも一般に多成分になる。この成分の数は、 N_c に依るのはもちろん、フェルミオンの表現にも依る。

$$\psi_{(\text{QED})} \rightarrow \psi_{(\text{YM})} = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi \\ \vdots \\ \psi \end{pmatrix} \quad (2.1.10)$$

例として、ゲージ群を $SU(2)$ としてフェルミオンがその基本表現であるとする。

$$A_\mu = \sum_a A_\mu^a T_a, \quad T_a = \frac{1}{2} \sigma_a, \quad (a = 1, 2, 3) \quad (2.1.11)$$

$$(\not{D}\psi)_i = \mathbf{1}_{ij} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_j - ig \sum_a A_\mu^a (T_a)_{ij} \psi_j, \quad (i = 1, 2) \quad (2.1.12)$$

ただし、 σ_a はパウリ行列である。また、ゲージ群が $SU(2)$ としてフェルミオンがその随伴表現であるとする、

$$A_\mu = \sum_a A_\mu^a T_a, \quad T_a = \frac{1}{2} \sigma_a \quad (2.1.13)$$

$$(\not{D}\psi)_a = \gamma^\mu \partial_\mu \psi_a + g \sum_{bc} A_\mu^b \psi_c \varepsilon_{abc} \quad (2.1.14)$$

と、フェルミオンがカラーの足 a を持つ。

2.1.3 非可換ゲージ理論における共変微分

群の要素 A に対し、 $\rho(A)$ を群の表現とする。まず ψ^i に対するゲージ変換を以下のように導入する。

$$\delta\psi^i = i\rho(\Lambda(x))^i_j \psi^j \quad (2.1.15)$$

ただし、 $\Lambda(x)$ は、ゲージ変換を表すゲージ群の元である。場の微分のゲージ変換は、

$$\delta(\partial_\mu \psi^i) = \partial(\delta\psi^i) \quad (2.1.16)$$

$$= i\rho(\Lambda) \partial_\mu \psi^i + (\partial_\mu \rho(\Lambda))^i_j \psi^j \quad (2.1.17)$$

¹(リー代数の随伴表現の基底)

となりゲージ不変でない。ゲージ場のゲージ変換は、 $\delta A_\mu = -D_\mu \Lambda$ とする。ただし、 $D_\mu := \partial_\mu \Lambda - i[A_\mu, \Lambda]$ である。共変微分を

$$D_\mu \psi := \partial_\mu \psi - i\rho(A_\mu)\psi$$

と定める。この共変微分のゲージ変換を調べと

$$\begin{aligned} & \delta(\partial_\mu \psi - i\rho(A_\mu)\psi) \\ &= i\rho(\Lambda)\partial_\mu \psi - i\rho(A_\mu)i\Lambda\psi - i(-i)\rho(A_\mu)\rho(\Lambda)\psi + i(-i)\rho(\Lambda)\rho(A_\mu)\psi \\ &= i\rho(\Lambda)\partial_\mu \psi + \rho(\Lambda)\rho(A_\mu)\psi \\ &= i\Lambda(\partial_\mu - i\rho(A_\mu))\psi \end{aligned}$$

となり共変微分は、ゲージ変換に対して不変である。 ρ として随伴表現をとると、 ρ は次を満たす²ものとして定義される。

$$\rho(A_\mu)\psi = [A_\mu, \psi] \quad (2.1.18)$$

すると、随伴表現に対しての共変微分は、

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - i[A_\mu, \psi] \quad (2.1.19)$$

となる。“カラー”の基底で共変微分を展開すると、

$$(D_\mu \psi)^a T_a = \partial_\mu \psi^a T_a - i[A_\mu^b T_b, \psi^c T_c] \quad (2.1.20)$$

後ろの交換関係は、行列の意味であるので、係数である A_μ^a と ψ^c はくり出せる。交換関係は、 $SU(2)$ ならばその構造定数である反対称テンソルをもちいて、

$$[T_a, T_b] = i\varepsilon_{abc} T_c \quad (2.1.21)$$

なので、

$$(D_\mu \psi)^a T_a = \partial_\mu \psi^a T_a + A_\mu^b \psi^c \varepsilon_{abc} T_c \quad (2.1.22)$$

ここで、 $A_\mu \rightarrow gA_\mu$ として結合定数を復活させ、基底 T_a 等を書かないことにすると以下が得られる³。

$$(D_\mu \psi)^a = \partial_\mu \psi^a + gA_\mu^b \psi^c \varepsilon_{abc} \quad (2.1.23)$$

²ad とも書く

³添字の上下があかしいが、上げ下げはクロネッカーのデルタなので問題ない

2.1.4 非可換ゲージ理論

上記の議論をまとめるとフェルミオンの結合した非可換ゲージ理論の作用は、

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}\text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \quad (2.1.24)$$

と与えられる。この作用は、くりこみ可能である。 ψ はフェルミオンを表し、 D^μ は共変微分である。 $F_{\mu\nu}$ は、非可換ゲージ理論の場の強さで、

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \quad (2.1.25)$$

最後の項が、非可換ゲージ理論特有の項で、行列の非可換性を反映し、QED ラグランジアンに無かったゲージ場同士の相互作用を導く。

このラグランジアンは、以下のゲージ変換に対して不変である。

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \Omega(x)\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}(x)\Omega^\dagger(x) \\ A_\mu &\rightarrow \frac{1}{ig}\Omega(x)\partial_\mu\Omega^\dagger(x) + \Omega(x)A_\mu\Omega^\dagger(x) \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

ここで局所ゲージ変換関数 $\Omega(x)$ を $SU(N_c)$ の元だとすると、 $SU(N_c)$ ゲージ理論になる。

2.2 3つの力

ここでは、標準理論の概要を述べる。よく知られているように標準理論は、重力を除く、強い力、弱い力、電磁気力を $SU(3)_{\text{color}} \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ理論として記述する。これにクォークとレプトンというフェルミオンを結合させたものが標準理論の全てである。クォークは、(アップ、ダウン)、(チャーム、ストレンジ)、(トップ、ボトム) と、それぞれの組が質量以外区別できない世代という構造をなし、 $SU(3)$ の 3 表現で、カラー相互作用をする。対してレプトンは、(電子、電子ニュートリノ)、(ミューオン、ミューニュートリノ)、(タウ、タウニュートリノ) とクォークと同様に世代構造を作るが、こちらは、1 表現でカラー相互作用をしない。

また、質量のないフェルミオンは、右巻きと左巻きに分離できる。同じ世代のクォークとレプトンがそれぞれ別々に左巻きの粒子が 2 重項を組み $SU(2)$ 相互作用をする。また、各粒子には、電荷を Q 、アイソスピン⁴の第 3 成分を I_3 とした時 $Q = I_3 + Y$ で定義されるハイパーチャージ Y をもっている。このハイパーチャージによって $U(1)_Y$ 相互作用をする。ゲージ変換が右巻き左巻きで異なるため、フェルミオンはゲージ不変な質量項を持つことができない⁵。また、 $SU(2)_L$ や $U(1)_Y$ のゲージボソンはゲージ不変性により質量を持つことができない。すなわち、 $SU(3)_{\text{color}} \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ理論にフェルミオンを結合させただけの理論では、どの粒子も質量がなく光速で飛び交うことになる。

⁴カラー相互作用で区別できない各世代の組。例えばアップとダウンの組

⁵マヨラナであれば、右巻き同士、左巻き同士で質量項を作れるが、電荷を持つことができない。

この $SU(2)$ カイラルゲージ対称性と $U(1)$ ゲージ対称性は、低エネルギーでは、 $U(1)_{EM}$ に破れている。この破れを引き起こしているのが、ヒッグス粒子である。以下では、その電弱対称性の破れのメカニズムについて述べる。

2.3 自発的対称性の破れとヒッグス機構

2.3.1 ゴールドストンの定理

ここでは、具体的に $O(2)$ シグマモデルを考えていく。 $O(N)$ モデルの自由度は、 $\frac{N(N-1)}{2}$ なので $O(2)$ の自由度は、1 である。実スカラー場を $\sigma(x)$ と $\pi(x)$ とする。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi^i)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 - \frac{\lambda}{4}[(\phi^i)^2]^2 \quad (2.3.1)$$

ただし、 $\phi^i(x) = {}^T(\sigma(x) \ \pi(x))$ とした。この理論は R^{ij} を 2×2 の直交行列として

$$\phi^i \rightarrow R^{ij}(\theta)\phi^j \quad (2.3.2)$$

という対称性がある。この対称性の無限小変換は、 $R^{ij} = \mathbf{1}^{ij} + \theta \frac{dR^{ij}(\theta)}{d\theta}|_{\theta=0}$ である。すると、ネーターの定理からネーター流は、 $j^\mu = i[(\partial^\mu\sigma)\pi - (\partial^\mu\pi)\sigma]$ となる。ここから保存荷 Q は、0 成分の空間積分なので、 $Q = \int d^3x j^0 = i \int d^3x [(\partial^0\sigma)\pi - (\partial^0\pi)\sigma]$ となる。場と保存荷の交換関係は以下ようになる。

$$\begin{aligned} [\pi(0), Q] &= -i\sigma(0) \\ [\sigma(0), Q] &= i\pi(0) \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

ここでスカラー場の交換関係 $[\phi^i(\vec{x}), \phi^j(\vec{y})] = i\delta^{ij}\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$ を用いた。

ここで、

$$\begin{aligned} \langle 0|\sigma(0)|0\rangle &= v \\ \langle 0|\pi(0)|0\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

を仮定する。このとき (2.3.3) の期待値を求めてみる。

$$-iv = \langle 0|[\sigma(0), Q]|0\rangle \quad (2.3.5)$$

$$= \langle 0|\pi(0)Q|0\rangle - \langle 0|Q\pi(0)|0\rangle \quad (2.3.6)$$

ここで、 $Q|0\rangle = 0$ であるときには、つまりこの変換が真空の対称性である時には $v = 0$ しかない事に注意する。ここでは、 $v \neq 0$ としたいので $Q|0\rangle \neq 0$ とする。

$\pi(0)$ と Q の間に $\pi(p)$ の \vec{p} の固有状態の完全系 $\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3(2p^0)} |\pi(p)\rangle \langle \pi(p)|$ を挿入する。

$$-iv = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3(2p^0)} [\langle 0|\pi(0)|\pi(p)\rangle \langle \pi(p)|Q|0\rangle - \langle 0|Q|\pi(p)\rangle \langle \pi(p)|\pi(0)|0\rangle] \quad (2.3.7)$$

ここで、系の並進対称性を仮定すると以下の変形が出来る。

$$\langle 0|Q|\pi(p)\rangle = \int dx^3 \langle 0|j^0(x)|\pi(p)\rangle \quad (2.3.8)$$

$$= \int dx^3 \langle 0|j^0(0)|\pi(p)\rangle e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-p^0x^0)} \quad (2.3.9)$$

$$= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}) \langle 0|j^0(0)|\pi(p)\rangle e^{-ip^0x^0} \quad (2.3.10)$$

すると (2.3.7) は、以下になる。

$$-iv = \int \frac{d^3p}{2p^0} \delta^{(3)}(\vec{p}) [\langle 0|\pi(0)|\pi(p)\rangle \langle \pi(p)|j^0(0)|0\rangle e^{ip^0x^0} - \langle 0|j^0(0)|\pi(p)\rangle \langle \pi(p)|\pi(0)|0\rangle e^{-ip^0x^0}]$$

さらに規格化を $\langle 0|\pi(0)|\pi(p)\rangle = 1$ とすると

$$-iv = \int \frac{d^3p}{2p^0} \delta^{(3)}(\vec{p}) [\langle \pi(p)|j^0(0)|0\rangle e^{ip^0x^0} - \langle 0|j^0(0)|\pi(p)\rangle e^{-ip^0x^0}] \quad (2.3.11)$$

(2.3.11) の等号が成り立つには、 $\langle 0|j^0(0)|\pi(p)\rangle = ivp^0$ であれば良い。これはローレンツ不変性と並進対称性から以下であることが分かる。

$$\langle 0|j^\mu(x)|\pi(p)\rangle = ivp^\mu e^{-ipx} \quad (2.3.12)$$

これが (2.3.12) がゴールドストンの定理である。これは系の性質が変わり、オペレータの期待値 (2.3.4) が 0 でなくなる、つまり自発的に対称性が破れた時にいつでも成り立つ。このとき現れる粒子は (2.3.12) の発散を見ても、つまり p_μ をかけると、左辺は保存量なので対称性がアノマリイによって壊れていないかぎり 0 であり、また右辺は $\propto p^2 = m^2$ である。すなわち、このネーターカレントに結びついている粒子の質量は 0 であることが分かる。これを南部-ゴールドストーン (NG) ボゾンという。

(2.3.12) のネーター流が異なる足を持っている場合、つまり $J^{\alpha\mu}$ となってる場合を考えてみる。このとき以下のように拡張できる。

$$\langle 0|j^{\mu a}(x)|\pi_b(p)\rangle = -iF^a_b p^\mu e^{-ipx} \quad (2.3.13)$$

場の理論において、もしこの 0 質量の粒子がラグランジアンに入っていなかった場合、南部 - ヨナラシニオ模型 [3] の様に複合粒子として生成する必要がある。

2.3.2 ヒッグス機構

前小節で扱った対称性は、(2.3.2) の様に時空点の座標 x に依存しない大局的な変換だった。 $\theta \rightarrow \theta(x)$ の様に座標による局所的な対称性、つまりゲージ変換だとなんのかを見る。まず大局的な $U(1)$ 対称性を持つ複素スカラー場の系を考えていく。

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi)^\dagger (\partial_\mu \phi) - m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{2} \phi^4 \quad (2.3.14)$$

ただし、 ϕ は複素スカラーである。このラグランジアンは、場 ϕ の次の大域的 $U(1)$ 変換に対して不変である。

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \phi(x) \quad (2.3.15)$$

この対称性変換を局所的 $U(1)$ 変換に、つまり $\alpha \rightarrow \alpha(x)$ と座標に依るようにしてみる。

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi(x) \quad (2.3.16)$$

するとこの局所的な変換に対しては、微分項が不変でないことが分かる。

$$\partial_\mu(e^{i\alpha(x)} \phi(x)) = e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \phi(x) + ie^{i\alpha(x)} \phi(x) \partial_\mu \alpha(x) \quad (2.3.17)$$

そこで、共変微分 $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$ を導入する。

$$\begin{aligned} D_\mu(e^{i\alpha(x)} \phi(x)) &= (\partial_\mu - iA_\mu)(e^{i\alpha(x)} \phi(x)) \\ &= \partial_\mu(e^{i\alpha(x)} \phi(x)) - iA_\mu(e^{i\alpha(x)} \phi(x)) \\ &= e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \phi(x) + ie^{i\alpha(x)} \phi(x) \partial_\mu \alpha(x) - iA_\mu e^{i\alpha(x)} \phi(x) \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

これは、絶対値の2乗を取ると再び共変微分に戻る。なので、局所的な $U(1)$ 対称性を持つ複素スカラーのラグランジアンは、ゲージ場の運動項も加えると以下である。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (D^\mu \phi)^*(D_\mu \phi) - m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{2} \phi^4 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= (D^\mu \phi)^*(D_\mu \phi) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - V(\phi) \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

ここで m^2 を $-\mu^2$ としてみる。すると、スカラー場の感じるポテンシャル $V(\phi)$ の底が $\phi = 0$ では無くなる。 $V(\phi) = -\mu^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^4$ を ϕ について微分するとポテンシャルの底 $dV(\phi)/d\phi|_{\phi=\phi_0} = 0$ は、以下である事がわかる。

$$\phi_0 = \left(\frac{\mu^2}{\lambda} \right)^{1/2} \equiv \langle \phi \rangle \quad (2.3.20)$$

ポテンシャルの底が基底状態(真空)を与える。この真空まわりで展開し、そこからの励起(粒子)を得よう。まず、場を次のように分解する。

$$\phi = \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + i\phi_2(x)) \quad (2.3.21)$$

ただし、 ϕ_1 と ϕ_2 は実である。するとポテンシャルは、以下の様書き換えられる。

$$\begin{aligned} V(\phi) &= -\frac{\mu^4}{2\lambda} + \frac{\sqrt{2}\mu^2}{2}\phi_1^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\lambda\mu^2}\phi_1^3 + \frac{\sqrt{2\lambda\mu^2}}{2}\phi_1\phi_2^2 \\ &\quad + \frac{\lambda}{8}\phi_1^2 + \frac{\lambda}{4}\phi_1^2\phi_2^2 + \frac{\lambda}{8}\phi_2^4 \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

つまり ϕ_1 は、 $m = \sqrt{2\mu}$ の質量をもつ粒子になり、 ϕ_2 は、質量項を持たない NG ボゾンになる。つぎに、スカラー場の運動項 $|D_\mu\phi|^2$ について考える。基底状態が変更された時、場は以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} |D_\mu\phi|^2 &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + e^2 A_\mu A^\mu \phi_2^2 - e(\partial_\mu\phi_1)A^\mu\phi_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 + e^2 A_\mu A^\mu \phi_0^2 + \frac{e^2}{2} A_\mu A^\mu \phi_1^2 \\ &\quad + \sqrt{2}e\partial_\mu\phi_2 A^\mu\phi_0 + \sqrt{2}e^2 A_\mu A^\mu \phi_0\phi_1 + \frac{e}{2}\partial_\mu\phi_2 A^\mu\phi_1 \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 + \sqrt{2}e\partial_\mu\phi_2 A^\mu\phi_0 + e^2 A_\mu A^\mu \phi_0^2 + \dots \quad (2.3.24)$$

前式の最後の項は、ゲージ場 A_μ の 2 次になっており、これはゲージ場の質量項になっている。すなわち、

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L} &= \frac{1}{2}m_A^2 A_\mu A^\mu \\ m_A^2 &= 2e^2\phi_0^2 \end{aligned}$$

ゲージ場は、ゲージ対称性のために質量を持ってない。しかし、今は $\phi_0 \neq 0$ のため有限の質量を得た。何が起こったのかは、以下のようにして確認できる。まず、一般に場の理論においてプロパゲーターの真空偏極による補正は、以下のように振る舞う。 $\bar{G}_{\mu\nu}$ を補正を受けたプロパゲーター、 $G_{\mu\nu}$ を自由場のプロパゲーター、 $i\Pi^{\mu\nu}$ を 1 粒子既約な真空偏極とすると、

$$\bar{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + G_{\mu\lambda} i\Pi^{\lambda\rho} G_{\rho\nu} + \dots$$

と書ける。 $\Pi^{\mu\nu}$ をスピン 1 の成分 (横波成分) とスピン 0 の成分 (縦波成分) に分解する。

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \Pi^{(1)}(q^2) + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \Pi^{(0)}(q^2) \quad (2.3.25)$$

ξ ゲージでゲージ場のプロパゲーターは、

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu}(q) &= \frac{-i}{q^2 + i\epsilon} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \\ &= \frac{-i}{q^2 + i\epsilon} \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + \frac{-i\xi}{q^2 + i\epsilon} \left(\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

ここで、 $g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}$ は横波成分への射影になっていることに注意する。すなわち q_μ をかけると消える。射影の性質を用いると補正を受けたプロパゲーターは以下のように書ける。

$$\bar{G}_{\mu\nu} = \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \left[\frac{-i}{q^2 + i\epsilon} + \frac{-i}{q^2 + i\epsilon} i\Pi^{(1)}(q^2) \frac{-i}{q^2 + i\epsilon} + \dots \right] \\ + \left(\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \left[\frac{-i\xi}{q^2 + i\epsilon} + \frac{-i\xi}{q^2 + i\epsilon} i\Pi^{(0)}(q^2) \frac{-i\xi}{q^2 + i\epsilon} + \dots \right] \quad (2.3.27)$$

$$= \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \frac{-i}{q^2 + i\epsilon} \left[1 + i\Pi^{(1)}(q^2) \frac{-i}{q^2 + i\epsilon} + \dots \right] \\ + \left(\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \frac{-i\xi}{q^2 + i\epsilon} \left[1 + i\Pi^{(0)}(q^2) \frac{-i\xi}{q^2 + i\epsilon} + \dots \right] \quad (2.3.28)$$

$$= \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \frac{-i}{q^2 + i\epsilon} \left[1 - i\Pi^{(1)}(q^2) \frac{-i}{q^2 + i\epsilon} \right]^{-1} \\ + \left(\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \frac{-i\xi}{q^2 + i\epsilon} \left[1 - i\Pi^{(0)}(q^2) \frac{-i\xi}{q^2 + i\epsilon} \right]^{-1} \quad (2.3.29)$$

$$= \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \frac{-i}{q^2 + i\epsilon} \frac{1}{1 - i\Pi^{(1)}(q^2) \frac{-i}{q^2 + i\epsilon}} + \left(\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \frac{-i\xi}{q^2 + i\epsilon} \frac{1}{1 - i\Pi^{(0)}(q^2) \frac{-i\xi}{q^2 + i\epsilon}} \quad (2.3.30)$$

$$= \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \frac{-i}{q^2 - \Pi^{(1)}(q^2) + i\epsilon} + \left(\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \frac{-i\xi}{q^2 - \xi\Pi^{(0)}(q^2) + i\epsilon} \quad (2.3.31)$$

(2.3.31) の第 2 式は、ゲージ変換のパラメータを含むので物理的でなく、散乱振幅等の物理量の計算結果には現れない。 $\Pi^{(1)}(q^2)$ を 0 周りでテイラー展開すると、

$$\Pi^{(1)}(q^2) = \Pi^{(1)}(0) + q^2 \left. \frac{d\Pi^{(1)}(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0} + \dots \quad (2.3.32)$$

となる。これを (2.3.31) の第一項に代入すると、

$$= \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \frac{-i}{q^2 - \Pi^{(1)}(0) - q^2 \left. \frac{d\Pi^{(1)}(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0} + \dots + i\epsilon} + \dots \quad (2.3.33)$$

$$= \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \frac{-i}{q^2 \left(1 - \frac{\Pi^{(1)}(0)}{q^2} - \left. \frac{d\Pi^{(1)}(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0} \right) + \dots + i\epsilon} + \dots \quad (2.3.34)$$

$$\sim \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \frac{-i}{q^2 \left(1 - \frac{\Pi^{(1)}(0)}{q^2} \right) + i\epsilon} + \dots \quad (2.3.35)$$

(2.3.25) に代入してみると、

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \Pi^{(1)}(q^2) + \dots \quad (2.3.36)$$

$$= \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \left(\Pi^{(1)}(0) + q^2 \frac{d\Pi^{(1)}(q^2)}{dq^2} \Big|_{q^2=0} + \dots \right) + \dots \quad (2.3.37)$$

$$= \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \Pi^{(1)}(0) + \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) q^2 \frac{d\Pi^{(1)}(q^2)}{dq^2} \Big|_{q^2=0} + \dots \quad (2.3.38)$$

$$\ni \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \Pi^{(1)}(0) \quad (2.3.39)$$

となり、 $\Pi^{\mu\nu}(q)$ の言葉で言うと極があるという事である事が分かる。2次元シュウインガーモデルではアノマリーからこの質量が与えられる。アノマリー以外では、この極は理論にある0質量粒子から与えられる。

ファインマンルールを (2.3.22) と (2.3.23) から読み取る。 $\sqrt{2}e\phi_0 A_\mu \partial^\mu \phi_2$ という項から得られるファインマンルールは、 $i\sqrt{2}(-i)e\phi_0 q^\mu = m_A q^\mu$ と書ける。これは、ゲージ場と結合することにより、ゲージ場が NG ボゾンに変わる相互作用、または逆の過程を表す。またゲージ場の質量項 $\frac{1}{2}m_A^2 A_\mu A^\mu$ は、 $im_A^2 g^{\mu\nu}$ というファインマンルールに対応する。質量の無いスカラー粒子のプロパゲーターは $\frac{i}{q^2}$ と書けることに注意すると、真空偏極への寄与は最低次で、

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = im_A^2 g^{\mu\nu} + (m_A q^\mu) \frac{i}{q^2} (-m_A q^\nu) \quad (2.3.40)$$

$$= im_A^2 \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \quad (2.3.41)$$

となつて、ゼロ質量粒子がゲージ場と結合してる時には、その粒子が極をつくり、質量項をつくる⁶。

ここで、(2.3.22) と (2.3.23) を見てみる。実は、 $\phi_2(x)$ はゲージ自由度を用いて消去できる。つまり $\alpha(x)$ が各時空点で自由に選べる事を用いる。 $\phi_2(x)$ は $\phi(x)$ の虚数部分を表す。 $\phi(x)$ のゲージ変換は、(2.3.16) で与えられる様に位相を回転させる物であるので、ゲージ変換によって $\phi(x)$ は常に実にとれ、このとき ϕ_2 は常に0である。このゲージをユニタリゲージという。NG ボゾンはいなくなったわけではなく、質量を持ったゲージ場の縦波成分として食われた。

実は、余分なスカラー場は必要ない。ゲージ場が NG ボゾンに変わる過程があればいいが、(2.3.13) を見ると、自発的に破れた対称性のネーター流があれば代わりになる事がわかる。ファインマンルールを読み取ると、その過程のヴァーテクスは $-gk^\mu F^a_j$ となる。これを用いて (2.3.40) とその上で行ったことを繰り返せば良い。さらに、この理論の中に質量ゼロの粒子がなかったとしても、複合粒子でも構わない。後で紹介するテクニカラーにおいてこの考え方を用いる。

⁶ゲージ不変性のワード高橋恒等式からこの極がない事がしめせるのでゲージ対称性がある場合には、量子論でもゲージ場のプロパゲーターには極が生成されない。

2.3.3 非可換ゲージ理論でのヒッグス機構

非可換ゲージ理論では A_μ は行列になるので、共変微分を通してゲージ場と結合するスカラー場がある場合には多成分になる。ゲージ群を G とする。そのスカラー場を ϕ_i としよう。このとき群 G は ϕ をもって $\phi_i \rightarrow (1 + i\alpha^a t^a)_{ij} \phi_j$ と表現されているとする。 ϕ_i 実としておき、もし n 個の複素場なら $2n$ 個の実場で書き換えておく。 t^a は、純虚数で反対称なので、 $t_{ij}^a = iT_{ij}^a$ としておくと T^a は実で反対称になる。共変微分は、

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &= (\partial_\mu - igA_\mu^a t^a)_{ij} \phi_j \\ &= (\partial_\mu + gA_\mu^a T^a)_{ij} \phi_j \end{aligned}$$

となるので、運動項は以下である。

$$\frac{1}{2}(D_\mu \phi)^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + gA_\mu^a (\partial_\mu \phi_i) T_{ij}^a \phi_j + \frac{1}{2}g^2 A_\mu^a A^{b\mu} (T^a \phi)_i (T^b \phi)_j \quad (2.3.42)$$

ここで、ある ϕ_i が真空期待値を得たとしよう。

$$\langle \phi_i \rangle = (\phi_0)_i$$

この真空期待値の周りで展開する。すると、ゲージ場の質量項は、

$$m_{ab}^2 = g^2 (T^a \phi_0)_i (T^b \phi_0)_i \quad (2.3.43)$$

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{1}{2} m_{ab}^2 A_\mu^a A^{b\mu} \quad (2.3.44)$$

質量行列の対角成分をみると、

$$m_{aa}^2 = g^2 (T^a \phi_0)^2 \geq 0 \quad (2.3.45)$$

となりゲージ場の質量項が半正定値を取る事がわかる。また $T^a \phi_0 = 0$ の時には、この生成子の方向のゲージ場は質量を得ない。 $T^a \phi_0 = 0$ という事は、この T^a は真空をかえない。つまり対称性である。逆に $T^a \phi_0 \neq 0$ の時、この T^a は真空をかえる。つまり対称性が破れている事を示す。

また、非可換ゲージ理論の場合でも、真空偏極への寄与は可換の時と同様である。

2.4 電弱対称性の自発的破れ

2.4.1 電弱対称性の破れ: $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$

ゲージ場の質量項

この小節では、グラシヨウ・ワインバーグ・サラム (GWS) 理論のレビューを行う。まずゲージ群として $SU(2)$ 、 $U(1)$ を持つゲージ場 4 つ A_μ^a ($a = 1, 2, 3$) と B_μ 、スカラー場 ϕ を考える。スカラー場 ϕ は、 $U(1)$ の下でチャージ $\frac{1}{2}$ と振る舞う様にする。

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha^a \tau^a} e^{i\frac{\beta}{2}} \phi \quad (2.4.1)$$

ただし $\tau^a = \frac{\sigma^a}{2}$ は、規格化したパウリ行列である。このスカラー場をヒッグス場という。これを以下のようにパラメータ付ける

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \xi_2 + i\xi_1 \\ \phi^0 - i\xi_3 \end{pmatrix} \quad (2.4.2)$$

しかし、 $SU(2)$ ゲージ変換の自由度を用いるとゲージ変換により、2重項の上を消去し、かつ下を実数にできる。以後このユニタリティゲージを取ることにする。そして、 ϕ が真空期待値を得るとする。

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (2.4.3)$$

この真空の対称性を調べる。群の無限小変換の生成子を δ_α 、 δ_β とし、 $\delta = \delta_\alpha + \delta_\beta$ とする。まず場の無限小変換を考える。

$$\delta_\alpha \phi = i\alpha^a \tau^a \phi \quad (2.4.4)$$

$$\delta_\beta \phi = \frac{i}{2} \beta \mathbf{1} \phi \quad (2.4.5)$$

真空の変換は、

$$\sqrt{2}\delta_\alpha \phi_0 = i\frac{1}{2}\alpha^1 \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} + i\frac{1}{2}\alpha^2 \begin{pmatrix} -iv \\ 0 \end{pmatrix} + i\frac{1}{2}\alpha^3 \begin{pmatrix} 0 \\ -v \end{pmatrix} \quad (2.4.6)$$

$$\sqrt{2}\delta_\beta \phi_0 = i\frac{1}{2}\beta \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (2.4.7)$$

$\alpha^1 = \alpha^2 = 0, \alpha^3 = \beta$ という組で $\delta\phi = 0$ となる。すなわち、この理論の4つのゲージ場の内、組合せにより、1つをゼロ質量に出来る。のこりの3つはスカラー場により質量を得る。

実際にゲージ場の質量項を導出する。スカラー場の共変微分は以下である。

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - igA_\mu^a \tau^a - i\frac{1}{2}g'B_\mu) \phi \quad (2.4.8)$$

ただしゲージ場 A_μ^a, B_μ の結合定数を g, g' とした。この運動項で ϕ を $\langle \phi \rangle$ に置き換えた項の2乗から質量項がでるのでそのみ考える。

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v & 0 \end{pmatrix} (gA_\mu^a \tau^a + \frac{1}{2}g'B_\mu) (gA^{b\mu} \tau^b + \frac{1}{2}g'B^\mu) \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \frac{v^2}{4} (g^2(A_\mu^1)^2 + g^2(A_\mu^2)^2 + (-gA_\mu^3 + g'B_\mu)^2) \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

ここで、場の線形結合を取りなおしゲージ場の質量行列を対角化する。

$$W_\mu^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 \mp iA_\mu^2) \quad (2.4.10)$$

$$Z_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(gA_\mu^3 - g'B_\mu) \quad (2.4.11)$$

それぞれの場の質量は、

$$m_W = \frac{gv}{2} \quad (2.4.12)$$

$$m_Z = \sqrt{g^2 + g'^2} \frac{v}{2} \quad (2.4.13)$$

で与えられる。残りの自由度は、

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (gA_\mu^3 + g'B_\mu) \quad (2.4.14)$$

であり、これは電磁気学のベクトルポテンシャルで質量を持たない。ハイパーチャージを Y 、アイソスピンを T^a として、共変微分は、

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T^a - ig'YB_\mu \quad (2.4.15)$$

である。 W_μ^\pm 、 Z_μ^0 、 A_μ の言葉で書くと、アイソスピンの昇降演算子を $T^\pm = T^1 \pm iT^2$ として、

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-) - i\frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} Z_\mu (g^2 T^3 - g'^2 Y) - i\frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} A_\mu (T^3 + Y) \quad (2.4.16)$$

と分かる。 A_μ の前に付いている結合定数が素電荷に対応するので、

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

とわかり、また電荷 $Q = T^3 + Y$ という関係は、弱い相互作用における中野西島ゲルマン則である。弱い相互作用のパラメータとして、ワインバーグ角を以下で定義する。

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad (2.4.17)$$

すなわち、

$$\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (2.4.18)$$

$$\sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (2.4.19)$$

である。このワインバーグ角を用いて共変微分を書き直すと以下になる。

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-) - i\frac{g}{\cos \theta_W} Z_\mu (T^3 - \sin^2 \theta_W Q) - ieA_\mu Q \quad (2.4.20)$$

この共変微分を通してゲージボソンは、フェルミオン、ヒッグスポソンと相互作用する。

まとめると、GWS 理論のインプットは3つであり、結合定数 g 、 g' 、真空期待値 v である。これらの組の代わりに別の3つをとっても等価である。

ここで、後の議論に用いる ρ パラメータを定義しておく。

$$\rho = \frac{m_W^2}{m_Z^2 \cos \theta_W} \quad (2.4.21)$$

これは標準模型を調べる実験で重要になる。ツリーレベルでは $\rho = 1$ となり、実験からも $\rho \sim 1$ がわかっている。つまり、標準模型のループ補正が小さいことを示す。

フェルミオンとの結合

W ボゾンは、左巻きフェルミオンとしか結合しない。古典的なレベルでは、右巻きと左巻きフェルミオンとがゲージ場と異なる結合様式を持っていても問題は生じない⁷。以下では、世代を1つとして考えていく⁸。

フェルミオンは γ^5 を用いて以下のようにカイラリティごとに分解できる。

$$\psi_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi \quad (2.4.22)$$

$$\psi_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi \quad (2.4.23)$$

共役なフェルミオンは、 $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ で定義されるので、

$$\bar{\psi}_R = \bar{\psi} \frac{1 - \gamma^5}{2} \quad (2.4.24)$$

$$\bar{\psi}_L = \bar{\psi} \frac{1 + \gamma^5}{2} \quad (2.4.25)$$

となる。あとで詳しく述べるが、右巻きフェルミオンと左巻きフェルミオンはゲージ場の違う表現になる。

ここで質量項以外のフェルミオンの運動項を右巻き、左巻きの表示で書いてみる。

$$\bar{\psi}(i\cancel{\partial})\psi = \bar{\psi}_R(i\cancel{\partial})\psi_R + \bar{\psi}_L(i\cancel{\partial})\psi_L \quad (2.4.26)$$

となり、右巻き左巻きが分離する。一方で質量項は $(\gamma^5)^2 = 1$ に注意すると、

$$m\bar{\psi}\psi = m\bar{\psi} \frac{1 - \gamma^5}{2} \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi \quad (2.4.27)$$

$$= m\bar{\psi}_R\psi_L \quad (2.4.28)$$

となり、右巻き左巻きフェルミオンが結合している。ここで、問題が起こる。なぜなら右巻きと左巻きでゲージ変換が異なっているので質量項はゲージ不変性を破ってしまう。実はフェルミオンの質量項は、ヒッグスとの湯川結合から与えられる事になる。つまりヒッグス場を ϕ 、湯川結合定数を y と書くと、GWS 理論では、右巻きフェルミオンは、1重項、左巻きフェルミオンとヒッグス場は2重項として $SU(2)$ ゲージ変換を受けるのでゲージ不変な質量項は、

$$\mathcal{L} = y\bar{\psi}_L \cdot \phi\psi_R + \text{h.c.} \quad (2.4.29)$$

として、 ϕ が真空期待値を得ることで質量が生成される。しかしこの論文では、湯川結合やクォークの質量固有状態とゲージ固有状態のズレを表す小林・益川行列を扱わないので、以後質量項を考えないことにする。

⁷量子効果をあらかず三角ダイアグラムを含むループダイアグラムからアノマリーと呼ばれる古典論で存在する対称性が壊れてしまう現象が起こりうる。ただし標準理論ではクォークが3色、レプトンが無色、クォークとレプトンの二重項の数が絶妙に調整され、結果、クォークとレプトンの世代の数が同じであればアノマリーがキャンセルすることが示されている。

⁸世代が増えても質量以外は区別がつかないのでそのままコピーを増やせば良い。だが宇宙論、LEPの実験から Z ボゾンより軽いニュートリノの世代数はほぼ3だとわかっている。

今も述べたが、 $SU(2)$ ゲージ変換に対して右巻きフェルミオンは変換せず、左巻きフェルミオンは、2重項の様に変換する。また、 $U(1)_Y$ の変換性は以下のようにして決まる。中野西島ゲルマン則 $Q = T_3 + Y$ があるので、アイソスピン T_3 を決めるとハイパーチャージ Y が決められてしまう。右巻きフェルミオンに対しては、 $T^3 = 0$ すなわち $Y = Q$ とする。また左巻きフェルミオンは、

$$E_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad (2.4.30)$$

$$Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad (2.4.31)$$

とアイソスピンが割り当てられる (上が $+\frac{1}{2}$ 、下が $-\frac{1}{2}$)。ただし、 ν_e は電子ニュートリノ、 e^- は電子、 u はアップクォーク、 d はダウンクォークである。まとめると、以下のチャージがフェルミオンに割り当てられる。この表のハイパーチャージが等しいもの同士が2重

	Q	T_3	Y
ν_{eL}	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
e_L^-	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
u_L	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
d_L	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
e_R^-	-1	0	-1
u_R	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
d_R	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
ν_{eR}	0	0	0

表 2.1: フェルミオンのチャージの割り当て

項として変換する。右巻きニュートリノは、チャージを持たないので相互作用せず見えない。実際には、質量が存在し見ることはそれを通して存在が確認されているが以降では無視する。

するとフェルミオン部分は、

$$\mathcal{L}_{\text{fermion}} = \bar{E}_L(i\mathcal{D})E_L + \bar{e}_R(i\mathcal{D})e_R + \bar{Q}_L(i\mathcal{D})Q_L + \bar{u}_R(i\mathcal{D})u_R + \bar{d}_R(i\mathcal{D})d_R \quad (2.4.32)$$

この内の1つの共変微分を具体的に書くと、 A_μ^a 、 B_μ の表記で、

$$\bar{Q}_L(i\mathcal{D})Q_L = \bar{Q}_L i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - igA_\mu^a T^a - i\frac{1}{6}g'B_\mu \right) Q_L \quad (2.4.33)$$

となる。これをゲージ場の質量固有状態で書きなおすと、(2.4.17) を用いた煩雑な計算の後、

$$\bar{Q}_L(i\mathcal{D})Q_L \sim \begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{d}_L \end{pmatrix} \gamma^\mu \left[Z_\mu \begin{pmatrix} u_L(\frac{g}{2}\cos\theta_W - \frac{g'}{6}\sin\theta_W) \\ d_L(-\frac{g}{2}\cos\theta_W - \frac{g'}{6}\sin\theta_W) \end{pmatrix} + A_\mu \begin{pmatrix} u_L(\frac{g}{2}\sin\theta_W + \frac{g'}{6}\cos\theta_W) \\ d_L(-\frac{g}{2}\sin\theta_W + \frac{g'}{6}\cos\theta_W) \end{pmatrix} \right] \quad (2.4.34)$$

と書ける。同様の計算を他の項にも施すと、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{fermion}} = & \bar{E}_L(i\cancel{\partial})E_L + \bar{e}_R(i\cancel{\partial})e_R + \bar{Q}_L(i\cancel{\partial})Q_L + \bar{u}_R(i\cancel{\partial})u_R + \bar{d}_R(i\cancel{\partial})d_R \\ & + g(W_\mu^+ J_W^{\mu+} + W_\mu^- J_W^{\mu-} + Z_\mu^0 J_Z^\mu) + eA_\mu J_{\text{EM}}^\mu \end{aligned} \quad (2.4.35)$$

ただし、

$$J_W^{\mu+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L + \bar{u}_L\gamma^\mu d_L) \quad (2.4.36)$$

$$J_W^{\mu-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{e}_L\gamma^\mu \nu_L + \bar{d}_L\gamma^\mu u_L) \quad (2.4.37)$$

$$\begin{aligned} J_Z^\mu = & \frac{1}{\cos\theta_W} \left[\bar{\nu}_L\gamma^\mu \left(\frac{1}{2}\right) \nu_L + \bar{e}_L\gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + \sin^2\theta_W\right) e_L + \bar{e}_R\gamma^\mu (\sin^2\theta_W) e_R \right. \\ & + \bar{u}_L\gamma^\mu \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right) \nu_L + \bar{u}_R\gamma^\mu \left(-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right) u_R \\ & \left. + \bar{d}_L\gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right) d_L + \bar{d}_R\gamma^\mu \left(\frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right) d_R \right] \end{aligned} \quad (2.4.38)$$

$$J_{\text{EM}}^\mu = \bar{e}\gamma^\mu (-1) e + \bar{u}\gamma^\mu \left(+\frac{2}{3}\right) u + \bar{d}\gamma^\mu \left(-\frac{1}{3}\right) d \quad (2.4.39)$$

J_{EM}^μ は、たしかに電磁気学の電流になっている。

2.4.2 弱い相互作用の低エネルギー有効理論

弱い相互作用は、低エネルギーで以下のラグランジアンで記述される。

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_W + \mathcal{L}_Z \quad (2.4.40)$$

$$\mathcal{L}_W = \frac{4G_F}{\sqrt{2}}(\bar{e}_L\gamma^\mu \nu_L + \bar{d}_L\gamma^\mu u_L)(\bar{\nu}_L\gamma_\mu e_L + \bar{u}_L\gamma_\mu d_L) \quad (2.4.41)$$

$$\mathcal{L}_Z = \frac{4G_F}{\sqrt{2}}\rho \left(\sum_f \bar{f}\gamma^\mu (T^3 - \sin^2\theta_W Q) f \right)^2 \quad (2.4.42)$$

ただし f はすべてのフェルミオンを走る。 \mathcal{L}_W は、荷電カレントによる相互作用、 \mathcal{L}_Z は中性カレントによる相互作用をあらわし、 ρ はその相互作用の相対的強さを決める定数である⁹。 Q は電荷、 G_F は次元 ($[\text{GeV}]^{-2}$) を持った結合定数でフェルミ定数と呼ばれる。ここで、 $SU(2)$ ゲージカレントを以下のように定義する。

$$J^{\mu a} = \sum_f \bar{f}\gamma^\mu T^a f \quad (2.4.43)$$

すると、有効ラグランジアンは以下ようになる。

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} [(J^{\mu 1})^2 + (J^{\mu 2})^2 + \rho(J^{\mu 3} - \sin^2\theta_W J_{\text{EM}}^\mu)^2] \quad (2.4.44)$$

⁹実験から $\rho \simeq 1$ とわかっている。

このラグランジアンはくりこみ可能ではない。そこでラグランジアンを G_F とカレントとカレントの相互作用を見てみると、結合定数とプロパゲーター、ただし質量のある粒子の低エネルギーでのもの、の役割をしていると思える。

$$G_F \sim \frac{g}{q^2 - m^2} \Big|_{q^2 \rightarrow 0}$$

実際に、(2.4.36-2.4.39) と、ゲージ場のプロパゲーターがユニタリティゲージ¹⁰で

$$\langle W^{\mu+} W^{\nu-} \rangle = \frac{g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m_W^2}}{q^2 - m_W^2} \quad (2.4.45)$$

$$\langle Z^\mu Z^\nu \rangle = \frac{g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m_Z^2}}{q^2 - m_Z^2} \quad (2.4.46)$$

で与えられる事をもちいると GWS 理論では、

$$\mathcal{L}_W^{(\text{GWS})} = \frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} J_W^{\mu+} \left[\frac{g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m_W^2}}{q^2 - m_W^2} \right] J_W^{\nu-} \quad (2.4.47)$$

$$\mathcal{L}_Z^{(\text{GWS})} = \frac{e^2}{\sin^2 \theta_W \cos^2 \theta_W} (J^{\mu 3} - \sin^2 \theta_W J_{\text{EM}}^\mu) \left[\frac{g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m_Z^2}}{q^2 - m_Z^2} \right] (J^{\nu 3} - \sin^2 \theta_W J_{\text{EM}}^\nu) \quad (2.4.48)$$

と分かる。対応関係は、 $\mathcal{L}_W^{(\text{GWS})}$ と $\mathcal{L}_Z^{(\text{GWS})}$ で $q^2 \rightarrow 0$ で \mathcal{L}_{eff} と比較すると、

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{e^2}{8 \sin^2 \theta_W m_W^2} \quad (2.4.49)$$

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} \rho = \frac{e^2}{8 \sin^2 \theta_W \cos^2 \theta_W m_Z^2} \quad (2.4.50)$$

もしくは、

$$G_F = \frac{1}{\sqrt{2} v^2}, \quad \rho = 1 \quad (2.4.51)$$

と分かる。

ここでボゾンプロパゲーターの分子にある $q^\mu q^\nu$ の項は、外線の運動方程式を用いると、外線に現れる粒子の質量 m_f に比例する。ここで、 $m_Z, m_W \sim 100 \text{ GeV}$ であるので、 m_f がトップクォークでない限り、ボトムクォークでも 5 GeV なので $\frac{m_f^2}{m_Z^2} \sim 0.0025$ となり無視できる¹¹。このときには、

$$\mathcal{L}_W^{(\text{GWS})} = \frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} J_W^{\mu+} \left[\frac{1}{q^2 - m_W^2} \right] J_{W\mu-} \quad (2.4.52)$$

$$\mathcal{L}_Z^{(\text{GWS})} = \frac{e^2}{\sin^2 \theta_W \cos^2 \theta_W} (J^{\mu 3} - \sin^2 \theta_W J_{\text{EM}}^\mu) \left[\frac{1}{q^2 - m_Z^2} \right] (J_\mu^3 - \sin^2 \theta_W J_{\mu\text{EM}}) \quad (2.4.53)$$

¹⁰ゴーストが分離するゲージで、ツリーレベルの計算には便利ではあるが、くりこみ可能性が自明でない。

¹¹外線にトップクォークが出るような時は考えなおさないとけない。

と書ける。これが古典的な GWS のラグランジアンである。ここに出てきたパラメータはすべて裸の量であり、くりこまれるべき量であることに注意する。

2.4.3 Star quantity

ここでは実験と比較しやすいケネディ-リンの“星付き量”(Star quantities)を定義する。

まず、GWS 理論のインプットは3つで、 $SU(2)$ の結合定数 g と $U(1)$ の結合定数 g' として真空期待値 v である。この3つですべての量が予言可能になる。

しかし、実験で精密に測れるのは上で挙げた3つの量ではない。そこで理論のインプットとして精密測定されている、量子ホール効果などから決められる微細構造定数 α 、 Z ボゾンの質量 m_Z 、そしてミュオンの寿命から決められるフェルミ定数 G_F を代わりに用いることにする。具体的には、 g 、 g' 、 v と α 、 m_Z 、 G_F の関係式を用いれば良い。

ケネディ-リンの星付き量は、前節に出てきた有効ラグランジアンに入っている結合定数 e を運動量や量子補正の入った量として $e_0 \rightarrow e_*(q)$ 、 $\sin^2 \theta_W \rightarrow s_*^2(q)$ 、 $\cos^2 \theta_W \rightarrow c_*^2(q)$ と置き換えて定義する¹²。フェルミオンを明示的に書き $L = \frac{1-\gamma^5}{2}$ として中性カレントに関係する項は、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} = & e_*^2 Q Q' (\bar{f} \gamma_\mu f) \frac{1}{q^2} (\bar{f}' \gamma^\mu f') \\ & + \frac{e_*^2}{s_*^2 c_*^2} (\bar{f} \gamma_\mu [I_3 L - s_*^2 Q] f) \frac{Z_*}{q^2 - m_*^2} (\bar{f}' \gamma_\mu [I_3 L - s_*^2 Q] f') \end{aligned} \quad (2.4.54)$$

と書ける。ただし Z_* は Z ボゾンの場のくりこみ定数で f 、 f' はすべてのフェルミオンを意味し、 Q は電荷、 I_3 はアイソスピンの第3成分である。また、この節で出てくる m_0 は前節でてきたラグランジアンに入ってる裸の Z ボゾンの質量 m_Z を意味し、この節で m_Z と書いた時は測定された値を意味することにする。

星付き量と量子補正の効果 $\Pi(q^2)$ と結びつける。以下に出てくる e などは裸の量である。ゲージボゾンの量子補正は以下のゲージボゾンの2次の項を誘導する。

$$\frac{1}{2} \Pi_{\gamma\gamma} g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu + \frac{1}{2} \Pi_{ZZ} g_{\mu\nu} Z^\mu Z^\nu + \Pi_{Z\gamma} g_{\mu\nu} Z^\mu A^\nu + \Pi_{WW} g_{\mu\nu} W^{+\mu} W^{-\nu} \quad (2.4.55)$$

ただし、 $q^\mu q^\nu$ に比例する項は、外線に当たると外線に現れるフェルミオンの質量に比例すると同時にゲージボゾンの質量に反比例し、効かないとして落とした。1ループでの散乱への寄与で効く項は以下ようになる。

$$\mathcal{L}_{eff} = \left(e Q \bar{f} \gamma_\mu f \quad \frac{e}{c_s} \bar{f} \gamma_\mu (I_3 L - s^2 Q) f \right) \begin{pmatrix} q^2 - \Pi_{\gamma\gamma} & -\Pi_{Z\gamma} \\ -\Pi_{Z\gamma} & q^2 - m_0^2 - \Pi_{ZZ} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e Q \bar{f}' \gamma^\mu f' \\ \frac{e}{c_s} \bar{f}' \gamma^\mu (I_3 L - s^2 Q) f' \end{pmatrix} \quad (2.4.56)$$

¹²繰り返すが、前節に出てきた θ_W は、 g 、 g' を用いて定義されていた。以下でも、どの実験値用いて定義されているかを明確する必要がある。しかし星付き量と Π を比較するまでの暫くの間は、定義されているものとして扱う。

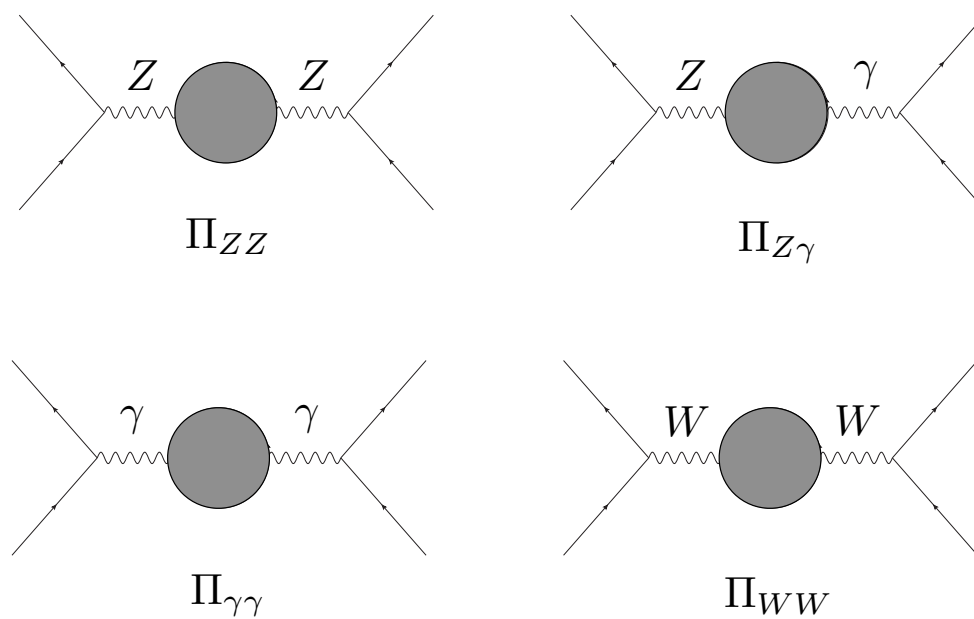


図 2.1: 真空偏極

ただし $s = (\sin \theta_W)_{\text{bare}}$ 、 $c = (\cos \theta_W)_{\text{bare}}$ 、 $e = \left(\frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right)_{\text{bare}}$ とおいた。ここで真ん中

の行列を G と名付けておくと、以下のように変形できる。

$$G \equiv \begin{pmatrix} q^2 - \Pi_{\gamma\gamma} & -\Pi_{Z\gamma} \\ -\Pi_{Z\gamma} & q^2 - m_0^2 - \Pi_{ZZ} \end{pmatrix}^{-1} \quad (2.4.57)$$

$$= \left[\begin{pmatrix} q^2 - \Pi_{\gamma\gamma} & 0 \\ 0 & q^2 - m_0^2 - \Pi_{ZZ} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \Pi_{Z\gamma} \\ \Pi_{Z\gamma} & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \quad (2.4.58)$$

$$= \begin{pmatrix} q^2 - \Pi_{\gamma\gamma} & 0 \\ 0 & q^2 - m_0^2 - \Pi_{ZZ} \end{pmatrix}^{-1} \left[\mathbf{1} - \begin{pmatrix} 0 & \Pi_{Z\gamma} \\ \Pi_{Z\gamma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^2 - \Pi_{\gamma\gamma} & 0 \\ 0 & q^2 - m_0^2 - \Pi_{ZZ} \end{pmatrix}^{-1} \right]^{-1} \quad (2.4.59)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{q^2 - \Pi_{\gamma\gamma}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q^2 - m_0^2 - \Pi_{ZZ}} \end{pmatrix} \left[\mathbf{1} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Pi_{Z\gamma}}{q^2 - m_0^2 - \Pi_{ZZ}} \\ \frac{\Pi_{Z\gamma}}{q^2 - \Pi_{\gamma\gamma}} & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \quad (2.4.60)$$

$$\cong \begin{pmatrix} \frac{1}{q^2 - \Pi_{\gamma\gamma}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q^2 - m_0^2 - \Pi_{ZZ}} \end{pmatrix} \left[\mathbf{1} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Pi_{Z\gamma}}{q^2 - m_0^2 - \Pi_{ZZ}} \\ \frac{\Pi_{Z\gamma}}{q^2 - \Pi_{\gamma\gamma}} & 0 \end{pmatrix} \right] \quad (2.4.61)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{q^2 - \Pi_{\gamma\gamma}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q^2 - m_0^2 - \Pi_{ZZ}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{q^2 - \Pi_{\gamma\gamma}} \frac{\Pi_{Z\gamma}}{q^2 - m_0^2 - \Pi_{ZZ}} \\ \frac{\Pi_{Z\gamma}}{q^2 - \Pi_{\gamma\gamma}} \frac{1}{q^2 - m_0^2 - \Pi_{ZZ}} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.62)$$

$$\cong \begin{pmatrix} \frac{1}{q^2 - \Pi_{\gamma\gamma}} & \frac{\Pi'_{Z\gamma}}{q^2 - m_0^2 - \Pi_{ZZ}} \\ \frac{\Pi'_{Z\gamma}}{q^2 - m_0^2 - \Pi_{ZZ}} & \frac{1}{q^2 - m_0^2 - \Pi_{ZZ}} \end{pmatrix} \quad (2.4.63)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{q^2(1 - \Pi'_{\gamma\gamma})} & \frac{\Pi'_{Z\gamma}}{q^2 - m_0^2 - \Pi_{ZZ}} \\ \frac{\Pi'_{Z\gamma}}{q^2 - m_0^2 - \Pi_{ZZ}} & \frac{1}{q^2 - m_0^2 - \Pi_{ZZ}} \end{pmatrix} \quad (2.4.64)$$

ただし途中で、分母の $\Pi_{\gamma\gamma}$ は1ループの寄与ではないとして落とした。また $\Pi_{**} \equiv \frac{\Pi_{**}}{q^2}$ とした。これを (2.4.56) に代入し星付き量 (2.4.54) と比較できる形に変形すると以下である。

$$\mathcal{L}_{eff} = \begin{pmatrix} eQ\bar{f}\gamma_\mu f & \frac{e}{cs}\bar{f}\gamma_\mu(I_3L - s^2Q)f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{q^2(1 - \Pi'_{\gamma\gamma})} & \frac{\Pi'_{Z\gamma}}{q^2 - m_0^2 - \Pi_{ZZ}} \\ \frac{\Pi'_{Z\gamma}}{q^2 - m_0^2 - \Pi_{ZZ}} & \frac{1}{q^2 - m_0^2 - \Pi_{ZZ}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} eQ\bar{f}'\gamma^\mu f' \\ \frac{e}{cs}\bar{f}'\gamma^\mu(I_3L - s^2Q)f' \end{pmatrix} \quad (2.4.65)$$

$$\cong \frac{e^2}{1 - \Pi'_{\gamma\gamma}} Q\bar{f}\gamma_\mu f \frac{1}{q^2} Q'\bar{f}'\gamma^\mu f' + \frac{e^2}{c^2s^2} \bar{f}\gamma_\mu [I_3L - (s^2 - cs\Pi_{Z\gamma})Q] f \frac{1}{q^2 - m_0^2 - \Pi_{ZZ}} \bar{f}'\gamma_\mu [I_3L - (s^2 - cs\Pi_{Z\gamma})Q'] f' \quad (2.4.66)$$

ここで Z のくりこみ条件を考える。 Z のプロパゲーター $\frac{1}{q^2 - m_0^2 - \Pi_{ZZ}(q^2)}$ の極は $q^2 = m_Z^2$ にあるべきである。なので

$$m_Z^2 - m_0^2 - \Pi_{ZZ}(m_Z^2) = 0 \quad (2.4.67)$$

これにより裸の質量 m_0 を取り除く。ここで、 $\Pi_{ZZ}(q^2)$ を m_Z^2 まわりでテイラー展開すると、

$$q^2 - m_0^2 - \Pi_{ZZ}(q^2) = q^2 - m_Z^2 - (q^2 - m_Z^2) \left. \frac{d\Pi_{ZZ}}{dq^2} \right|_{q^2=m_Z^2} - \Pi_{\text{res}}(q^2) \quad (2.4.68)$$

$$\cong \left(1 - \left. \frac{d\Pi_{ZZ}}{dq^2} \right|_{q^2=m_Z^2} \right) (q^2 - m_Z^2 - \Pi_{\text{res}}(q^2)) \quad (2.4.69)$$

ここで、 $\Pi_{\text{res}}(q^2)$ は、 $O((q^2 - m_Z^2)^2)$ の寄与を書いたがこれは、

$$\Pi_{\text{res}}(q^2) = \Pi_{ZZ}(q^2) - \Pi_{ZZ}(m_Z^2) - (q^2 - m_Z^2) \left. \frac{d\Pi_{ZZ}}{dq^2} \right|_{q^2=m_Z^2} \quad (2.4.70)$$

である。(2.4.69) をみてみると、 Z ボゾンの波動関数くりこみがわかる。

以上により、2つの \mathcal{L}_{eff} 、つまり、運動量などに依存する星付き量で書いた (2.4.54) と Π で書いた (2.4.66) を比較できるようになった。

$$\begin{aligned} \frac{1}{e_\star^2} &= \frac{1}{e^2} (1 - \Pi'_{\gamma\gamma}) \\ s_\star^2 &= s^2 - cs - \Pi'_{Z\gamma} \\ Z_\star &= \frac{e^2}{c_\star^2 s_\star^2} \left(1 + \left. \frac{d\Pi_{ZZ}}{dq^2} \right|_{q^2=m_Z^2} \right) \\ m_\star^2 &= m_Z^2 + \Pi_{\text{res}} \end{aligned}$$

理論のインプット (測定量) は α 、 m_Z 、 G_F 、そしてそれから決められる θ_W なのでそれを用いて書きなおすと、

$$\frac{1}{e_\star^2} \cong \frac{1}{4\pi\alpha} (1 - [\Pi'_{\gamma\gamma}(q^2) - \Pi'_{\gamma\gamma}(0)]) \quad (2.4.71)$$

$$s_\star^2 = s^2 - cs - \Pi'_{Z\gamma} \quad (\text{そのまま}) \quad (2.4.72)$$

$$Z_\star \cong 1 - \Pi'_{\gamma\gamma} + \left. \frac{d\Pi_{ZZ}}{dq^2} \right|_{q^2=m_Z^2} - \frac{c^2 - s^2}{cs} \Pi'_{Z\gamma} \quad (2.4.73)$$

$$m_\star^2 = m_Z^2 + \Pi_{ZZ}(q^2) - \Pi_{ZZ}(m_Z^2) - (q^2 - m_Z^2) \left. \frac{d\Pi_{ZZ}}{dq^2} \right|_{q^2=m_Z^2} \quad (2.4.74)$$

左辺は、直接測ることができ、右辺の3つの量、第2式以外は精密に測れているので、 Π の効果を見ることが出来る。さらに s_\star を除くものは全て有限である。 s_\star の式 (2.4.72) は右辺にそのまま裸の値を持ち有限かどうか不明であるので、 Z ボゾンのプロパゲーターの極での $e_\star(m_Z)$ 定義された θ_W を用いて定義する。

$$\sin 2\theta_W|_Z \equiv \left[\frac{e_\star^2(m_Z^2)}{\sqrt{2}G_F m_Z^2} \right]^{1/2} \quad (2.4.75)$$

精密測定される値 α と m_Z^2 、 G_F と真空偏極 Π 、裸の量 v 、 s 、 e との関係は以下のようになる。

$$4\pi\alpha = e^2(1 + \Pi'_{\gamma\gamma}(0)) \quad (2.4.76)$$

$$m_Z^2 = \frac{e^2 v^2}{4c^2 s^2} + \Pi_{ZZ}(M_Z^2) \quad (2.4.77)$$

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2v^2} \left(1 - \frac{\Pi_{WW}}{c^2 m_Z^2} \right) \quad (2.4.78)$$

以上から $\theta_W|_Z$ と s は、以下のように関係する。

$$\sin^2 \theta_W|_Z = s^2 + \delta(s^2) \quad (2.4.79)$$

$$= s^2 + 2cs \cdot \delta\theta_W \quad (2.4.80)$$

ここでは微分の連鎖則を用いた。最後に現れた $\delta\theta_W$ は以下の等式を用いる。

$$\delta(\ln(\sin 2\theta)) = \frac{\delta \sin 2\theta}{\sin 2\theta} \quad (2.4.81)$$

$$= \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} \cdot 2\delta\theta \quad (2.4.82)$$

$$= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta} \delta\theta \quad (2.4.83)$$

すると、

$$\delta\theta_W = \frac{cs}{c^2 - s^2} \delta(\ln(\sin 2\theta_W)) \quad (2.4.84)$$

なので $\theta_W|_Z$ と s の関係式は、

$$\sin^2 \theta_W|_Z = s^2 + \frac{2c^2 s^2}{c^2 - s^2} \delta(\ln(\sin 2\theta_W)) \quad (2.4.85)$$

$\sin 2\theta_W$ は α, G_F, m_Z^2 の関数であるので、微分の連鎖則より、

$$\sin^2 \theta_W|_Z = s^2 + \frac{2c^2 s^2}{c^2 - s^2} \left(\frac{\delta\alpha}{\alpha} - \frac{\delta G_F}{G_F} - \frac{\delta m_Z^2}{m_Z^2} \right) \quad (2.4.86)$$

$$= s^2 + \frac{2c^2 s^2}{c^2 - s^2} \left(\Pi'_{\gamma\gamma} - \frac{\Pi_{WW}(0)}{c^2 m_Z^2} - \frac{\Pi_{ZZ}(m_Z^2)}{m_Z^2} \right) \quad (2.4.87)$$

この s^2 を $s_*^2 = s^2 - cs\Pi'_{Z\gamma}$ に代入して、

$$s_*^2 = \sin^2 \theta_W|_Z - \frac{2c^2 s^2}{c^2 - s^2} \left(\Pi'_{\gamma\gamma} - \frac{\Pi_{WW}(0)}{c^2 m_Z^2} - \frac{\Pi_{ZZ}(m_Z^2)}{m_Z^2} \right) - cs\Pi'_{Z\gamma}(q^2) \quad (2.4.88)$$

s_* は、次で与えられる A_{FB}^f で求めることができる。

$$A_{FB}^f \equiv \frac{\int_0^1 d\cos\theta \frac{d\sigma(e^-e^+ \rightarrow f\bar{f})}{d\cos\theta} - \int_{-1}^0 d\cos\theta \frac{d\sigma(e^-e^+ \rightarrow f\bar{f})}{d\cos\theta}}{\int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{d\sigma(e^-e^+ \rightarrow f\bar{f})}{d\cos\theta}} \quad (2.4.89)$$

これは、電子と陽電子の正面衝突によってフェルミオン f と \bar{f} が生じた時に、もとの電子から見て前方に飛び出すものと、後方に飛び出すものとの差をとったものである。右辺は、 Q_f を粒子 f の電荷、 I_{3f} をアイソスピンの第3成分として、

$$= \frac{3}{4} \left[\frac{\left(-\frac{1}{2} + s_*^2\right)^2 - (s_*^2)^2}{\left(-\frac{1}{2} + s_*^2\right)^2 + (s_*^2)^2} \right] \left[\frac{(I_{3f} + s_*^2 Q_f)^2 - (s_*^2 Q_f)^2}{(I_{3f} + s_*^2 Q_f)^2 + (s_*^2 Q_f)^2} \right] \quad (2.4.90)$$

となるので A_{FB}^f から s_*^2 が求められる¹³。

この節の最後に、ループからの寄与である $\Pi_{\gamma\gamma}$ 、 $\Pi_{Z\gamma}$ 、 Π_{ZZ} から結合定数をくくりだしてオーダー1の量として以下を定義する¹⁴。

$$\Pi_{\gamma\gamma} = e^2 \Pi_{QQ} \quad (2.4.91)$$

$$\Pi_{Z\gamma} = \frac{e^2}{cs} (\Pi_{3Q} - s^2 \Pi_{QQ}) \quad (2.4.92)$$

$$\Pi_{ZZ} = \frac{e^2}{c^2 s^2} (\Pi_{33} - 2s^2 \Pi_{3Q} + s^4 \Pi_{QQ}) \quad (2.4.93)$$

$$\Pi_{WW} = \frac{e^2}{cs} \Pi_{11} \quad (2.4.94)$$

ただし、 $U(1)_{EM}$ は破れていないので、 $\Pi_{11} = \Pi_{22}$ である。

右辺の量は理論、つまりラグランジアンを与えられれば具体的に計算可能である。例えば標準理論を用いて計算することも可能である。

2.4.4 STU パラメータ

GWS 理論への補正として真空偏極 $\Pi_{ij}(q^2)$ 、 $i, j = 1, 2, 3, Q$ を考えた。これの独立なとり方を考える。 i, j のとり方は全部で $\frac{4 \times 4}{2} = 8$ 通りある。前節では以下の組み合わせが現れた。

$$(1, 1) = (2, 2)$$

$$(3, 3)$$

$$(3, Q)$$

$$(Q, Q)$$

このうち、 $U(1)_{EM}$ のカレントは保存するので、 $\Pi_{QQ}(0) = \Pi_{3Q}(0) = 0$ となり、自由度は2つ減り $8 - 2 = 6$ 個になる。GWS 理論ではインプットは3つ必要だった。GWS 理論はくりこみ可能なので3つのパラメータを用いてくりこむことになる。一般に真空偏極には発散が現れるのでこの3つに対応するものは値が決まってしまうので $6 - 3 = 3$ つだけが独立(かつ有限)になる。これが S, T, U パラメータである。

¹³付録参照

¹⁴ Π_{ij} の i, j に対応するのは、 $SU(2)$ の足 $a = 1, 2, 3$ と $U(1)$ を意味する Q である。

$\Pi_{ij}(q^2)$ を $q^2 \sim 0$ でテイラー展開すると、

$$\Pi_{ij}(q^2) = \Pi_{ij}(0) + \left. \frac{d\Pi_{ij}(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0} q^2 + \dots \quad (2.4.95)$$

理論を考えるスケールを M としておく。すなわちこの展開は、 $q^2/M^2 = 0$ の周りの展開であるとする。すると、最初の2項はそれぞれ $O(M^2)$ 、 $O(q^2)$ で寄与する。しかし第3項目以降は、次数が $O((q^2)^2/M^2)$ 以上の寄与になるので効かない。

以上の事実を用いて S, T, U パラメータを定義する。くりこまなくても有限になる組み合わせは、星付き量を取り扱った時を参考にして、

$$\alpha S \equiv 4e^2 [\Pi'_{33}(0) - \Pi'_{3Q}(0)] \quad (2.4.96)$$

$$\alpha T \equiv \frac{e^2}{c^2 s^2 m_Z^2} [\Pi_{11}(0) - \Pi_{33}(0)] \quad (2.4.97)$$

$$\alpha U \equiv 4e^2 [\Pi'_{11}(0) - \Pi'_{33}(0)] \quad (2.4.98)$$

ここで、 $\Pi'_{ij}(0) = \left. \frac{d\Pi_{ij}(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0}$ と再定義した。これは $O((q^2)^2/M^2)$ を無視すると、先ほどの定義 $\Pi'_{ij}(0) = \frac{\Pi_{ij}(q^2)}{q^2}$ に等しい。

前節の星付き量を S, T, U と結びつける。これは、星付き量と真空偏極 Π の関係式より $O((q^2)^2/M^2)$ 無視する近似で以下である。

$$\frac{1}{e_\star^2} - \frac{1}{4\pi\alpha} \simeq 0 \quad (2.4.99)$$

$$s_\star^2 - \sin^2 \theta_W|_Z \simeq \frac{\alpha}{c^2 - s^2} \left[\frac{1}{4} S - c^2 s^2 T \right] \quad (2.4.100)$$

$$Z_\star - 1 = \frac{\alpha}{4c^2 s^2} S \quad (2.4.101)$$

$$m_\star^2 - m_Z^2 \simeq 0 \quad (2.4.102)$$

さらに導出はしないが、中性カレントと荷電カレントの低エネルギー有効理論から、 $\rho_\star(0) - 1 = \alpha T$ であることがわかる。

実際に、ヒッグスを除いた標準理論からの S パラメータへの寄与はトップクォーク、ボトムクォークの質量を m_t, m_b として、

$$S^{\text{SM}} = \frac{1}{6\pi} \left[1 - \frac{1}{3} \ln \frac{m_t}{m_b} \right] \quad (2.4.103)$$

と計算される。 $m_t = 175(\text{GeV})$ 、 $m_b = 5(\text{GeV})$ とすると、おおよそ $S^{\text{SM}} \sim 0.0098$ となる。 S パラメータの測定値は、2010年の Particle data book によると、 $S^{\text{exp}} = 0.01 \pm 0.10(-0.08)$ である。

この章をまとめると、GWS 理論は、くりこみ可能なゲージ理論であり、実験値を説明できるが、ループ効果を考えるとヒッグスセクターからは、 S パラメータに対し負の寄与が必要であるということである。

Ch.3 テクニカラーモデル

3.1 テクニカラーの動機

我々は、標準理論におけるゲージ対称性の破れによく類似した、超伝導体や QCD におけるカイラル対称性の破れを知っている。超伝導体は、巨視的には、ギンツブルグ・ランダウ理論でよく記述されている。このとき巨視的な波動関数 Ψ で理論が記述される。しかし、微視的な理論である BCS 理論によるとこれは基本的な自由度ではなく、クーパー対の密度を表すに過ぎない。クーパー対の凝縮がゲージ対称性の自発的破れを引き起こしている。

また、かつてパイオンは(疑)スカラーの素粒子だと思われていたが、現在は、クォークこそが基本自由度であり、パイオンはその複合粒子に過ぎない。

以下のような面白い関係が存在する。ゲージ相互作用を無視するとヒッグス場は $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 対称性を持つ。前章でてきた、ゲージ固定する前のヒッグス場 (2.4.2)

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \xi_2 + i\xi_1 \\ \phi^0 - i\xi_3 \end{pmatrix}$$

を思い出してみる。右辺を

$$M \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^0 + \vec{\tau} \cdot \vec{\xi}) \quad (3.1.1)$$

ここで $\vec{\tau} = (\tau^1, \tau^2, \tau^3)$ はパウリ行列である。 $SU(2)_L$ だけゲージ化してみる。このとき、共変微分を $D_\mu M = \partial_\mu M - igW_\mu^a \frac{\tau^a}{2} M + ig' MB_\mu \frac{\tau^3}{2}$ とすると、ヒッグスのラグランジアンは、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \text{tr} [D_\mu M^\dagger D^\mu M] - \frac{m_M^2}{2} \text{tr}[M^\dagger M] - \frac{\lambda}{4} \text{tr}[M^\dagger M]^2 \quad (3.1.2)$$

となる。これはシグマモデルのラグランジアンであり、かつてパイオンを記述するのに用いたものである。そして質量項の符号を逆であると仮定することにより GWS 理論の枠組みに乗ることが出来る。現在において、シグマモデルのラグランジアンがパイオンを記述するといったときには、低エネルギー有効理論という意味でしか無く、より高エネルギーではクォークというフェルミオンで記述されているという事を考えると、ヒッグスもそうではないか?と思うのは自然である。

テクニカラーモデルとは、象徴的に言うと、

ヒッグス粒子 = テクニフェルミオンの複合粒子

というモデルである。ただし、テクニフェルミオンの複合粒子は、スカラー以外にもベクトル状態などがあるので、新粒子の質量スペクトルを導く。

標準理論は、現実世界を 1TeV より下のエネルギースケールでよく記述している。しかし、これが最終理論だとは考えられていない。その理由は、標準理論の最後のパズルピースであるヒッグス粒子に次の問題点が存在することである。・ヒッグスの 2 次発散問題・ヒッグスの 4 点結合の自明性・フレーバーの起源の謎などである。テクニカラー理論およびエクステンデッドテクニカラー (ETC) を用いるとその問題が解決できる。

以下ではまず、ヒッグス場を導入しなくても電弱対称性を破ることが出来ることを示す。そののち、それを元にテクニカラー理論を導入し、さらになぜ破綻するのかを議論する。そして最後に改良されたテクニカラー理論についての可能性について考える [4]。

3.2 QCD を用いた電弱対称性の破れ

この節では、多くの問題を起こすヒッグス場なしで電弱対称性を破ることを考える。 $n_G = 3$ をクォークとレプトンの世代として標準的な $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ のラグランジアンを書き下す。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{STD}} = & \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^A G^{\mu\nu A} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{\mu\nu a} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^0 W^{\mu\nu 0} \\ & + \sum_{i=1}^{n_G} \left(\bar{q}_{i\alpha L} i\gamma_\mu D_{\alpha\beta}^\mu q_{i\beta L} + \bar{u}_{i\alpha R} i\gamma_\mu D_{\alpha\beta}^\mu u_{i\beta R} + \bar{d}_{i\alpha R} i\gamma_\mu D_{\alpha\beta}^\mu d_{i\beta R} \right. \\ & \left. + \bar{L}_{iL} i\gamma_\mu D^\mu L_{iL} + \bar{l}_{iR} i\gamma_\mu D^\mu l_{iR} \right) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

ここで、 $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ はカラー $SU(3)$ の足で、グルーオンの QCD 相互作用は、 $g^{A=1,2,\dots,8}$ 、また電弱の $SU(2)$ ゲージボソンは、 $W^{a=1,2,4}$ で、 W^0 は $U(1)$ のものである。 $SU(3)$ 、 $SU(2)$ 、 $U(1)$ のゲージ結合定数はそれぞれ、 g_s 、 g 、 g' としておく。場の強さのテンソルは、グルーオンは $G_{\mu\nu}^A = \partial_\mu g_\nu^A - \partial_\nu g_\mu^A + g_s f_{ABC} g_\mu^B g_\nu^C$ である。クォークの 2 重項に対しての共変微分は、 $D_{\alpha\beta}^\mu = (\partial^\mu - ig/2\tau_a W^{a\mu} - ig'/6W^{0\mu})\delta_{\alpha\beta} - ig_s(\lambda_A/2)$

ここで、電弱相互作用を一旦忘れてみる。するとラグランジアンは以下の大域的なカイラル-フレーバー対称性を持つ¹。

$$\mathcal{G}_\chi = SU(2n_G)_L \times SU(2n_G)_R \quad (3.2.2)$$

そして QCD 相互作用は、低エネルギーで自発的にカイラル対称性を破る。

$$\langle \Omega | \bar{u}_{i\alpha L} u_{j\beta R} | \Omega \rangle = \langle \Omega | \bar{d}_{i\alpha L} d_{j\beta R} | \Omega \rangle = -\delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \Delta_q \quad (3.2.3)$$

対称性が、対角な $SU(2n_G)_V$ まで落ちる。すると $4n_G^2 - 1$ 個の擬スカラーの NG ボゾンが出る。□によると低エネルギーで $\Delta_q \sim 4\pi f_\pi^3$ と与えられる。ただし $f_\pi = 93\text{MeV}$ はパイオンの崩壊定数である。

¹例えば 1 世代モデルの時、 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ の対称性がある。

ここで電弱相互作用を思い出す。 $SU(2) \times U(1)$ のクォークカレントと NG ボゾンの結合定数は、 $\sqrt{n_G} f_\pi$ で与えられる。質量のない粒子は、真空偏極 $\Pi_{\mu\nu}^{ab}$ の極として現れるので $q^2 = 0$ の付近では、

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(q) = (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \left(\frac{g_A g_b n_G f_\pi^2}{4q^2} \right) + \text{正則な項} \quad (3.2.4)$$

ここで、 $a, b = 0, 1, 2, 3$ で $g_0 = g', g_{1,2,3} = -g$ とした。電弱対称性は、 $SU(2) \times U(1) \rightarrow U(1)_{EM}$ となる。このとき、標準模型と同じように場の組み換えを行う。

$$W^\pm = \frac{W^1 \mp iW^2}{\sqrt{2}}, \quad Z = \frac{gW^3 - g'W^0}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (3.2.5)$$

この時にゲージボゾンの質量は NG ボゾンの寄与から

$$m_W = \frac{1}{2} g \sqrt{n_G} f_\pi, \quad m_Z = \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} \sqrt{n_G} f_\pi \quad (3.2.6)$$

となる。のこりの光子についても $A = (g'W^3 + gW^0)/\sqrt{g^2 + g'^2}$ と同様になり、かつ質量を得ない。NG ボゾンは、 Z や W の縦波として吸われた。以上をダイナミカルヒッグスメカニズムと呼ぶ [5]。

しかし、このモデルは明らかに破綻している。なぜなら、 m_Z と m_W の質量が実験値に比べ 1000 倍ほど軽すぎるからだ。また、残ってるカイラルフレーバー対称性も大きすぎる。更にレプトンはカラー相互作用をしないので質量を得ることができない。

ただ、唯一 ρ パラメータについては成功していて、

$$\rho = \frac{m_W^2}{m_Z^2 \cos^2 \theta_W} = 1 \quad (3.2.7)$$

となり、実験値 $\rho \sim 1$ と非常によく合う。この予言の原因をたどってみると、元の対称性 \mathcal{G}_X がカストディアル対称性 $SU(2) \times SU(2)$ を含み、さらにこれが $SU(2) \times U(1)$ を含むからだ分かる。

3.3 テクニカラーモデル

上に挙げたモデルの問題を解決するのはそんなに難しくない。つまり、エネルギースケールである f_π が電弱スケールで、更にレプトンもゲージ群の非自明な表現になるような新たな漸近自由なゲージ相互作用を導入すれば良い。このゲージ群を G_{TC} と書き、このようなモデルをテクニカラーモデルと呼ぶ。このゲージ相互作用の結合定数を α_{TC} と書いておく。この結合定数は、数百 GeV より下では、QCD と同じように強くなるとする。そこでテクニフェルミオンがテクニカラー相互作用により凝縮を起し電弱対称性が破れると考えるのである。以下では単純な場合を考えていく。

N_D を右巻き、左巻きテクニフェルミオンの 2 重項 $T_{iL,R} = (U_i, D_i)_{L,R}$ の数としておく。 T_L が電弱 $SU(2)$ の 2 重項として、 T_R が 1 重項として変換するとする²。テクニフェルミ

²つまり、クォークと同じ。違いは、カラー相互作用するかテクニカラー相互作用をするか、である、

オンは、質量 0 とするので、以下のカイラル-フレーバー対称性を持つ。

$$G_\chi = SU(2N_D)_L \times SU(2N_D)_R \supset SU(2)_L \times SU(2)_R \quad (3.3.1)$$

α_{TC} が低エネルギーで大きくなると、テクニフェルミオンは凝縮する。

$$\langle \Omega | \bar{U}_{i\alpha L} U_{j\beta R} | \Omega \rangle = \langle \Omega | \bar{D}_{i\alpha L} D_{j\beta R} | \Omega \rangle = -\delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \Delta_T \quad (3.3.2)$$

対称性は、 $S_\chi = SU(2N_D) \supset SU(2)_V$ まで落ちる。なので、NG ボゾンは崩壊定数を F_{π_T} として $4N_D^2 - 1$ 個出ることになる。 $\Delta_T \sim 4\pi F_{\pi_T}^3$ を仮定する。すると前の議論と同様に

$$m_W = \frac{1}{2} g \sqrt{N_D} F_{\pi_T}, \quad m_Z = \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} \sqrt{N_D} F_{\pi_T} = m_W / \cos \theta_W \quad (3.3.3)$$

となる。対称性が G_χ から S_χ へ破れるスケールを Λ_{TC} として以下のものであるとしておく。

$$F_{\pi_T} = F_\pi / \sqrt{N_D} \quad (3.3.4)$$

$$\Lambda_{TC} = O(F_{\pi_T}) \quad (3.3.5)$$

以上により、問題を起こすヒッグス場なしで電弱対称性を破り、かつ、 ρ パラメータも正しく再現するモデルが構築できたことになる。

クォークがカイラル対称性を破り、ハドロンの世界になるという現象とまったく同じメカニズムで電弱対称性の破れが説明できたことになる。

ただし、未だにレプトン、クォークのフレーバーについては問題が残っている。これを解決するのがエクステンデッドテクニカラー (ETC) である。

3.4 ETC

標準理論では、フェルミオンの質量はヒッグスとの湯川結合で与えられる。しかしテクニカラー理論においては、スカラーヒッグスがラグランジアンに入っていないので、湯川結合がなく、すべてのフェルミオンは質量 0 のままである。さらに、テクニフェルミオンのカイラル対称性の自発的破れでは、残る対称性が多すぎるのが難点であった。

QCD パイオンの時を思い返してみると、パイオンは質量 0 であるべきであるが、GWS から来る僅かな質量により、QCD を通して 140MeV 程度の質量を得る。カイラル対称性は、GWS 理論からの質量により、厳密な対称性ではなくなっている。

これを参考にしてみると、テクニカラー理論にも上の理論があり、それが対称性を破っていると考えるのは自然である。上の理論をエクステンデッドテクニカラー (ETC) と呼ぶ。ETC のエネルギースケールを M_{ETC} 、その破れのスケールを Λ_{ETC} とする。ETC 相互作用は、テクニフェルミオン、クォーク、レプトンをも結びつける (図 3.1)。ETC の詳細を考えない事にするが、それでもテクニカラースケールでは、以下の相互作用が誘導される。

$$\alpha_{ab} \frac{\bar{T} \lambda^a T \bar{\psi} \lambda^b \psi}{\Lambda_{ETC}^2} + \beta_{ab} \frac{\bar{T} \lambda^a T \bar{T} \lambda^b T}{\Lambda_{ETC}^2} + \gamma_{ab} \frac{\bar{\psi} \lambda^a \psi \bar{\psi} \lambda^b \psi}{\Lambda_{ETC}^2} + \dots \quad (3.4.1)$$

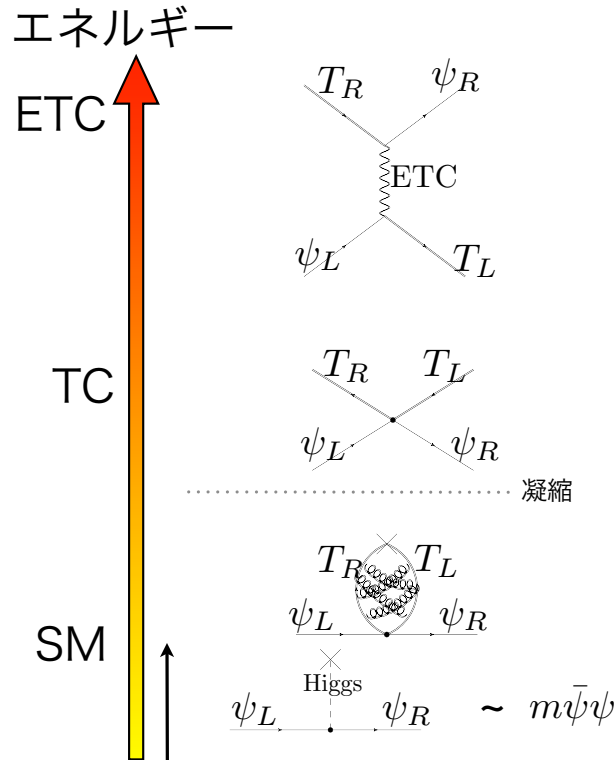


図 3.1: ETC と TC そして SM。 T はテクニフェルミオン、 ψ は標準理論のフェルミオン。 T_R と T_L の間に飛んでいる線はテクニグルーオンである。

ここで λ は ETC の生成子である。この α_{ab} を含む項から、テクニカラーの凝縮の後に標準理論のフェルミオンの質量が誘導される。

$$m_q \sim \frac{g_{ETC}^2}{M_{ETC}^2} \langle \bar{T}T \rangle_{ETC} \quad (3.4.2)$$

m_q は、標準理論のフェルミオンの質量で、 g_{ETC} は ETC スケールでの ETC の結合定数である。また、 $\langle \bar{T}T \rangle_{ETC}$ は ETC スケールでのテクニカラー凝縮の値である。

3.5 テクニカラーモデルの難点

ここからは、なぜテクニカラーモデルが死んだと言われるかについて述べる。そこから制限のかからないモデル、ミニマルウォーキングテクニカラーへの緒をつかむ。

3.5.1 FCNC

前節の (3.4.1) の γ_{ab} の項は、標準理論のフェルミオン間の 4 点相互作用を表す。この項により、フェルミオンフレーバーを変えるカレント FCNC (Flavor changing neutral current)

が出てくる。FCNC は、実験により厳しく制限されている。しかし、ETC を考えるモデルであると、クォーク質量と同程度の大きさで FCNC が起こってしまう。異なるエネルギースケールの物理を結びくりこみ群の考え方³に従うと、

$$\langle \bar{T}T \rangle_{ETC} = \exp \left(\int_{\Lambda_{TC}}^{\Lambda_{ETC}} d(\ln \mu) \gamma_m(\alpha(\mu)) \right) \langle \bar{T}T \rangle_{TC} \quad (3.5.1)$$

といった具合にテクニカラー凝縮の値が変化する。もし、テクニカラー理論が QCD と同じ様な理論であれば、

$$\alpha(\mu) \propto \frac{1}{\ln(\mu)}, \quad (\mu > \Lambda_{TC}) \quad (3.5.2)$$

この時、テクニフェルミオンの質量項の異常次元は $\gamma_m \propto \alpha(\mu)$ すると、テクニカラーの凝縮は、くりこみ群に従って

$$\langle \bar{T}T \rangle_{ETC} \sim \ln \left(\frac{\Lambda_{ETC}}{\Lambda_{TC}} \right)^{\gamma_m} \langle \bar{T}T \rangle_{TC} \quad (3.5.3)$$

となり、3桁違えば3倍等、対数的に大きくなる。オーダーは変わらないのでナイーブな議論では、これを無視し、

$$m_q \sim \frac{g_{ETC}^2}{M_{ETC}^2} \Lambda_{TC}^3, \quad \langle \bar{T}T \rangle_{TC} \sim \Lambda_{TC}^3 \quad (3.5.4)$$

そうすると、FCNC とクォーク質量が共に Λ_{ETC} 連動してしまう。

3.5.2 古い TC モデルでの S パラメータ

以下では、ペスキン - 竹内の S パラメータをテクニカラー理論で求める時に用いた QCD の和の規則についてレビューする。

QCD の和則

ここでは、QCD の和則 (QCD sum rule) についてレビューする。和の規則は、1. 解析性、2. ハドロン描像での知見、3. $q^2 \rightarrow \infty$ での摂動論、を結びつけ新たな情報を得るという物である。ペスキン - 竹内のパラメータに必要な真空偏極は、以下の形をしていた。

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = -i \int d^4x e^{-ikx} \langle 0 | J_\mu(x) J_\nu(0) | 0 \rangle \quad (3.5.5)$$

$$= (g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) \Pi(k^2) + k_\mu k_\nu \text{ の項} \quad (3.5.6)$$

$\Pi(k^2)$ を $k^2 = s$ の関数と見た時、特異性は $\text{Re}[s] > 0$ の領域にしか現れない事を仮定する (図 3.2)。この時に s が大きい所でどうなっているかを調べる。まず $\int d^4x e^{-ikx} \langle 0 | \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \bar{\psi} \gamma_\nu \psi | 0 \rangle$ の次元が 2、 $(q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)$ の次元も 2 であることを考えると $\Pi(s)$ は漸近的に q^2 よりは

³[2]、次章参照

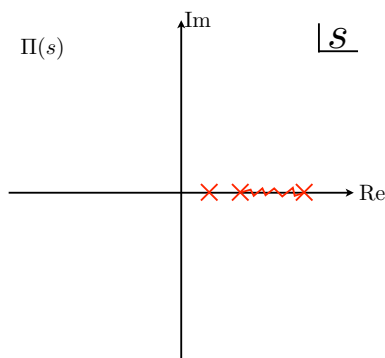


図 3.2: $\Pi(k^2)$ を $s = k^2$ の関数と見た時の複素平面での振る舞い。バツ印は極を表す。特異性が s の実軸正の所にのみ現れる。

やく成長しない事がわかる。 q^2 が大きい所では、摂動論が使えるので、その寄与を見てみると 1 ループでは、ベクトル、軸性ベクトルからそれぞれ、

$$V \cdots \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \text{tr}(\gamma^\mu \frac{1}{\not{k} + \not{l}} \gamma^\nu \frac{1}{\not{l}}) \quad (3.5.7)$$

$$A \cdots \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^5 \frac{1}{\not{k} + \not{l}} \gamma^\nu \gamma^5 \frac{1}{\not{l}}) \quad (3.5.8)$$

という寄与が出る。しかし $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ 、 $(\gamma^5)^2 = 1$ なのでベクトルカレントと軸性ベクトルカレントの寄与はキャンセルする。高次についても同様である。従って差が出るとすれば非摂動効果である。 q^2 の特異性に基づいて、対称性で許される項を並べて展開すると、

$$\langle \int d^4 x e^{iqx} V_\mu(x) V_\nu(0) \rangle \sim \langle C^1(q)_{V/A} I(0) g_{\mu\nu} \rangle + \langle C^2(q)_{V/A} \frac{m \bar{\psi} \psi}{q^2} g_{\mu\nu} \rangle + \langle \frac{(F_{\mu\nu})^2}{q^2} \rangle + \cdots \quad (3.5.9)$$

ここで、各項を見てみると、右辺第 2 項は元が質量のない理論なら出現し得ない項であり、第 3 項は、特異性により消えるはずである。つまり第 1 項から寄与が現れる。そして $\Pi_{VV}(s) - \Pi_{AA}(s)$ を考えてみると、これは無限遠で $1/s$ よりはやく大きくなる。図 3.3 の積分経路に従って以下の積分を考える。

$$\oint_C \frac{ds}{2\pi i} \frac{1}{s - Q^2} (\Pi_{VV}(s) - \Pi_{AA}(s)) \quad (3.5.10)$$

ただし、 $C = C_1 + C_2 + C_3$ 、 Q は経路の内側の点である。すると、(3.5.10) の積分は留数定理により以下の変形できる。

$$\Pi_{VV}(Q^2) - \Pi_{AA}(Q^2) = \left(\int_{C_1} \frac{ds}{2\pi i} + \int_{C_2} \frac{ds}{2\pi i} \right) \frac{1}{s - Q^2} (\Pi_{VV}(s) - \Pi_{AA}(s)) \quad (3.5.11)$$

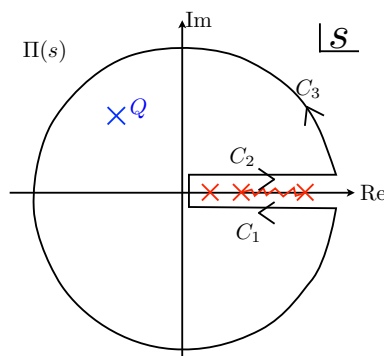


図 3.3: 積分経路

ここで、 C_3 の積分の寄与が無遠慮で落とせる事を用いた。 $\Pi_{AA-VV} = \Pi_{VV} - \Pi_{AA}$ とし、変形して⁴、

$$\Pi_{AA-VV}(Q^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{2\pi i} \frac{1}{s - Q^2} (\Pi_{VV-AA}(s + i\epsilon) - \Pi_{VV-AA}(s - i\epsilon)) \quad (3.5.12)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{\pi} \frac{\text{Im}(\Pi_{VV-AA}(s))}{s - Q^2} \quad (3.5.13)$$

となる。ただし積分の下限は、最低質量状態より下にとる。この関係式を分散関係式とよぶ。ここで、あとで示す以下の関係式を用いる。

$$\Pi(k) = \text{実部} - i \sum_n \pi \delta(k^2 - m_{H_n}^2) m_{H_n}^2 f_{H_n}^2 \quad (3.5.14)$$

ただし、 H_n は n 番目のハドロン状態を表し、 f_{H_n} はそのハドロンの崩壊定数である。この式でベクトル-ベクトルの寄与を作り、そこから軸性ベクトルの寄与を引いて虚部を取ると、

$$\text{Im}[\Pi_{VV-AA}(q^2)] = -s\pi \sum_n [f_{V_n}^2 \delta(s - m_{V_n}^2) - f_{A_n}^2 \delta(s - m_{A_n}^2)] \quad (3.5.15)$$

となり、分散関係の分子をハドロンのスペクトルを用いてかけた。以下の Π' を前章の様に定義する。

$$\Pi_{VV-AA}(q^2) \equiv q^2 (\Pi'_{VV}(q^2) - \Pi'_{AA}(q^2)) - \Pi_{AA}(0) \quad (3.5.16)$$

⁴ 不変振幅 $\mathcal{M}(q^2)$ に対して $s = q^2$ として、 s の複素関数と見てみる。 $\text{Re}[s]$ 以外で解析的なとき、

$$\mathcal{M}(s) = [\mathcal{M}(s^*)]^*$$

を課すと、 $\mathcal{M}(s) = \text{Re}[\mathcal{M}(s)] + i\text{Im}[\mathcal{M}(s)]$ として、

$$\begin{aligned} \text{Re}[\mathcal{M}(s + i\epsilon)] &= \text{Re}[\mathcal{M}(s - i\epsilon)] \\ \text{Im}[\mathcal{M}(s + i\epsilon)] &= -\text{Im}[\mathcal{M}(s - i\epsilon)] \end{aligned}$$

とわかるので、これを用いる。

ただし最後の項はパイオンによる寄与である。分散関係を用いると、

$$\Pi_{VV-AA}(q^2) = q^2 \int_0^\infty \frac{ds}{\pi} \frac{\text{Im}(\Pi'_{VV}(s) - \Pi'_{AA}(s))}{s - q^2} - \Pi_{AA}(0) \quad (3.5.17)$$

そして両辺で $q^2 \rightarrow \infty$ としてみると、左辺は $O(q^{-4})$ で 0 になる事がわかる。一方右辺は、

$$\text{R.H.S} = - \int \frac{ds}{\pi} \text{Im}(\Pi'_{VV}(s) - \Pi'_{AA}(s)) - \Pi_{AA}(0) \quad (3.5.18)$$

$$- \frac{1}{q^2} \int \frac{ds}{\pi} s \text{Im}(\Pi'_{VV}(s) - \Pi'_{AA}(s)) \quad (3.5.19)$$

$$+ O\left(\frac{1}{q^4}\right) \quad (3.5.20)$$

なので、第 1 項 = 0 と第 2 項 = 0 がそれぞれ要請される。(3.5.15) より、第 1 項は、

$$\sum_n (f_{V_n}^2 - f_{A_n}^2) = f_\pi^2 \quad (3.5.21)$$

第 2 項からは、

$$\sum_n (m_{V_n}^2 f_{V_n}^2 - m_{A_n}^2 f_{A_n}^2) = 0 \quad (3.5.22)$$

とわかる。これがワインバーグの和の規則である。QCD はアイソスピン対称性をもつが、テクニカラーも同様だとする。このとき、

$$J_3^\mu = \frac{1}{2}(J_V^\mu - J_A^\mu) \quad (3.5.23)$$

$$J_Q^\mu = J_V^\mu + J_Y^\mu \quad (3.5.24)$$

なので、

$$\Pi_{33} = \frac{1}{4}(\Pi_{VV} + \Pi_{AA}) \quad (3.5.25)$$

$$\Pi_{3Q} = \frac{1}{2}\Pi_{VV} \quad (3.5.26)$$

ここで、 S パラメータの定義に代入すると、

$$S = -4\pi[\Pi'_{VV}(q^2) - \Pi'_{AA}(q^2)]|_{q^2=0} \quad (3.5.27)$$

となる。これに今までの分散関係、スペクトルの式を用いると、

$$S = 4\pi \sum_n \left(\frac{f_{\rho_n}^2}{m_{\rho_n}^2} - \frac{f_{a_{1n}}^2}{m_{a_{1n}}^2} \right) \quad (3.5.28)$$

ただし ρ は最低質量のベクトル粒子とその励起状態で、 a_1 は最低質量の軸性ベクトル粒子の寄与である。ここで QCD の実験結果引用すると、高エネルギー側でベクトル粒子と軸性ベクトル粒子の寄与はキャンセルする事が知られている。これは高エネルギー側で正しい

摂動論の結果からも納得出来る。そこに先ほどの和の規則を適用する。高エネルギーからの寄与が無いので、最初の励起状態の寄与のみを取り入れることにする。この時には、 $f_\rho^2 - f_{a_1}^2 = f_\pi^2$ そして $m_\rho^2 f_\rho^2 - m_{a_1}^2 f_{a_1}^2 = 0$ となる。すると f_ρ^2 と $f_{a_1}^2$ について解けて

$$f_\rho^2 = \frac{m_{a_1}^2}{m_{a_1}^2 - m_\rho^2} f_\pi^2 \quad (3.5.29)$$

$$f_{a_1}^2 = \frac{m_\rho^2}{m_{a_1}^2 - m_\rho^2} f_\pi^2 \quad (3.5.30)$$

QCD の実験結果は大雑把に

$$f_\pi = 93\text{MeV} \quad (3.5.31)$$

$$m_\rho = 770\text{MeV} \quad (3.5.32)$$

$$m_{a_1} = 1000\text{MeV} \quad (3.5.33)$$

である。QCD と同じダイナミクスがテクニカラーが起こっていると仮定する。すると、エネルギースケールが違うだけなので、 $f_\pi = 250\text{GeV}$ とすれば良く、大体 2500 倍してみると、

$$f_\pi = 250\text{GeV} \quad (3.5.34)$$

$$m_\rho \sim 200\text{GeV} \quad (3.5.35)$$

$$m_{a_1} \sim 2.5\text{TeV} \quad (3.5.36)$$

となる⁵。よって S パラメータは、

$$S \cong 4\pi \left(\frac{f_\rho^2}{m_\rho^2} - \frac{f_{a_1}^2}{m_{a_1}^2} \right) \quad (3.5.37)$$

$$= 4\pi \frac{f_\pi^2}{m_\rho^2} \left(1 + \frac{m_\rho^2}{m_{a_1}^2} \right) \quad (3.5.38)$$

$$\sim 0.29218 \dots \quad (3.5.39)$$

となる。ゲージ群を $SU(N)$ に拡張しラージ N 展開などより系統だった手法でも大きな正の S パラメータを予言してしまい、これにより、テクニカラーは死んだと言われる。

スペクトルについて

ここでは (3.5.14) を示す。まず一般のハドロンのカレントの相関関数を定義する。

$$I_{\mu\nu}(k) = \int d^4x e^{ikx} \langle 0 | T [V_\mu(x) V_\nu(0)] | 0 \rangle \quad (3.5.40)$$

⁵全スケールを 2500 倍しても比の形なので実は関係がなかった。

そして時間順序積を分解し、中間にハドロンの完全系を挟む⁶。

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty dt e^{(ik^0 - \epsilon)t} \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \sum_n \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\hat{p}} \langle 0|V_\mu(x)|H_n(\vec{p})\rangle \langle H_n(\vec{p})|V_\nu(0)|0\rangle \\
&+ \int_{-\infty}^0 dt e^{(ik^0 + \epsilon)t} \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \sum_n \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\hat{p}} \langle 0|V_\nu(0)|H_n(\vec{p})\rangle \langle H_n(\vec{p})|V_\mu(x)|0\rangle \quad (3.5.41)
\end{aligned}$$

ただし $\hat{p}^0 = \sqrt{m_{H_n}^2 + \vec{p}^2}$ である。また、 $(-\hat{k})^0 = \sqrt{m_{H_n}^2 + (-\vec{k})^2} = \hat{k}^0$ ここで系の並進対称性を仮定し $V_\mu(x) = e^{ixP} V_\mu(0) e^{-ixP}$ としてみる。すると第1項ではハドロンの状態に作用して $V_\mu(0) e^{-ix\hat{p}}$ 、第2項でも同様にして $V_\nu(0) e^{ix\hat{p}}$ となる。 δ 関数の定義を用いると以下ようになる。

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}(k) &= \sum_n \int_0^\infty dt e^{(ik^0 - i\hat{k}^0 - \epsilon)t} \frac{1}{2\hat{k}^0} \langle 0|V_\mu(0)|H_n(\vec{k})\rangle \langle H_n(\vec{k})|V_\nu(0)|0\rangle \\
&+ \sum_n \int_{-\infty}^0 dt e^{(ik^0 + i\hat{k}^0 + \epsilon)t} \frac{1}{2\hat{k}^0} \langle 0|V_\nu(0)|H_n(\vec{k})\rangle \langle H_n(\vec{k})|V_\mu(0)|0\rangle \quad (3.5.42)
\end{aligned}$$

そして t 積分を実行すると、

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}(k) &= \sum_n \frac{-1}{ik^0 - i\hat{k}^0 - \epsilon} \frac{1}{2\hat{k}^0} \langle 0|V_\mu(0)|H_n(\vec{k})\rangle \langle H_n(\vec{k})|V_\nu(0)|0\rangle \\
&+ \sum_n \frac{+1}{ik^0 + i\hat{k}^0 + \epsilon} \frac{1}{2\hat{k}^0} \langle 0|V_\nu(0)|H_n(\vec{k})\rangle \langle H_n(\vec{k})|V_\mu(0)|0\rangle \quad (3.5.43)
\end{aligned}$$

と分かる。 k^0 を含む最初の分数について以下が成り立つ。

$$\frac{\pm 1}{ik^0 \pm i\hat{k}^0 \pm \epsilon} = \frac{\mp i}{k^0 \pm \hat{k}^0 \mp i\epsilon} = \mp i \left[\mathcal{P} \left(\frac{1}{k^0 \pm \hat{k}^0} \right) \pm i\pi\delta(k^0 \pm \hat{k}^0) \right] \quad (3.5.44)$$

$$= \mp i\mathcal{P} \left(\frac{1}{k^0 \pm \hat{k}^0} \right) + \pi\delta(k^0 \pm \hat{k}^0) \quad (3.5.45)$$

ただし \mathcal{P} は主値の意味である。これを用いると以下ようになる。

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}(k) &= \sum_n \left\{ i\mathcal{P} \left(\frac{1}{k^0 - \hat{k}^0} \right) + \pi\delta(k^0 - \hat{k}^0) \right\} \frac{1}{2\hat{k}^0} \langle 0|V_\mu(0)|H_n(\vec{k})\rangle \langle H_n(\vec{k})|V_\nu(0)|0\rangle \\
&+ \sum_n \left\{ -i\mathcal{P} \left(\frac{1}{k^0 + \hat{k}^0} \right) + \pi\delta(k^0 + \hat{k}^0) \right\} \frac{1}{2\hat{k}^0} \langle 0|V_\nu(0)|H_n(\vec{k})\rangle \langle H_n(\vec{k})|V_\mu(0)|0\rangle \quad (3.5.46)
\end{aligned}$$

さて、中間状態としてベクトルメソンが効くとして考えを進めることにする。このとき、状態を以下のように置く。

$$\langle 0|V_\mu(0)|H_n(\vec{k})\rangle \Rightarrow \langle 0|V_\mu(0)|\vec{k}, \epsilon(k)\rangle \equiv m_{H_n} f_{H_n} \epsilon_\mu^\lambda(k) \quad (3.5.47)$$

⁶箱の中にハドロンを入れて離散的な状態を定義して体積を無限大にして状態を定義する。

ただし $\epsilon_\mu^{(\lambda)}$ は偏極ベクトルであり、 $\sum_{(\lambda)} \epsilon_\mu^{(\lambda)} \epsilon_\nu^{(\lambda)*} = -(g_{\mu\nu} - \frac{\hat{k}_\mu \hat{k}_\nu}{\hat{k}^2})$ をみたす。中間状態ではすべての偏極が平等に現れるとして以下のように出来る。

$$I_{\mu\nu}(k) = \sum_n \left\{ i\mathcal{P} \left(\frac{1}{k^0 - \hat{k}^0} \right) + \pi\delta(k^0 - \hat{k}^0) \right\} \frac{-1}{2\hat{k}^0} (g_{\mu\nu} - \frac{\hat{k}_\mu \hat{k}_\nu}{\hat{k}^2}) m_{H_n}^2 f_{H_n}^2 \\ + \sum_n \left\{ -i\mathcal{P} \left(\frac{1}{k^0 + \hat{k}^0} \right) + \pi\delta(k^0 + \hat{k}^0) \right\} \frac{-1}{2\hat{k}^0} (g_{\mu\nu} - \frac{-\hat{k}_\mu -\hat{k}_\nu}{-\hat{k}^2}) m_{H_n}^2 f_{H_n}^2 \quad (3.5.48)$$

実部、虚部に分け、 δ 関数の性質⁷を用いて

$$I_{\mu\nu}(k) = \text{虚部} - \sum_n \pi\delta((k^0)^2 - (\hat{k}^0)^2) (g_{\mu\nu} - \frac{\hat{k}_\mu \hat{k}_\nu}{\hat{k}^2}) m_{H_n}^2 f_{H_n}^2 \quad (3.5.49)$$

さらに $\delta((k^0)^2 - (\hat{k}^0)^2) = \delta((k^0)^2 - \hat{k}^2 - m_{H_n}^2) = \delta(k^2 - m_{H_n}^2)$ なのでこれにかけられる \hat{k} は k に置き換えて良い。

$$I_{\mu\nu}(k) = \text{虚部} - \sum_n \pi\delta(k^2 - m_{H_n}^2) (g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) m_{H_n}^2 f_{H_n}^2 \quad (3.5.50)$$

真空偏極 $\Pi_{\mu\nu}$ の定義は $I_{\mu\nu}$ の i 倍なので結局、足のついていない寄与は、

$$\Pi(k) = \text{実部} - i \sum_n \pi\delta(k^2 - m_{H_n}^2) m_{H_n}^2 f_{H_n}^2 \quad (3.5.51)$$

となる。

3.6 Walking Technicolor

前節での議論は、すべてQCDと同じダイナミクスを仮定してきた。ならば、QCDとは異なる振る舞いをする非可換ゲージ理論⁸が存在すれば良いと考えられる。つまり、高エネルギー側で漸近自由性をもつが、低エネルギー側で有効結合定数が発散しない、もっと極端には、成長すらしめない、すなわち低エネルギー側でくりこみ群の固定点が存在する理論で有ればよい。この様に、くりこみ群の固定点を仮定するテクニカラー理論をウォーキングテクニカラー (WT; Walking Technicolor) と呼ぶ。

まず、クォーク質量と小さなFCNCの両立だが、質量に相当する

$$\langle \bar{T}T \rangle_{ETC} = \exp \left(\int_{\Lambda_{TC}}^{\Lambda_{ETC}} d(\ln \mu) \gamma_m(\alpha(\mu)) \right) \langle \bar{T}T \rangle_{TC}$$

⁷ $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x - a) + \delta(x + a)]$ ただし $a \neq 0$

⁸ 高エネルギー側で有効結合定数が発散する理論は、理論が自明性を含んでいる。なので少なくとも今知られている場の理論においては、非可換ゲージ理論であるべきである。

が Λ_{ETC} に直接依存しなければ良い。 α が定数 α^* ならば、異常次元 $\gamma(\alpha(\mu))$ も定数 $\gamma_m^*(\alpha^*)$ になり、

$$\begin{aligned}\langle \bar{T}T \rangle_{ETC} &= \exp \left(\gamma_m^*(\alpha^*) \int_{\Lambda_{TC}}^{\Lambda_{ETC}} d(\ln \mu) \right) \\ &= \left(\frac{\Lambda_{ETC}}{\Lambda_{TC}} \right)^{\gamma_m^*(\alpha^*)} \langle \bar{T}T \rangle_{TC}\end{aligned}$$

$\gamma_m^*(\alpha^*) \sim 1$ の時、 Λ_{ETC} と Λ_{TC} が 3 桁違えば、凝縮の値も 3 桁ずれることになり、質量と FCNC の連動をなくすことが出来る。

さらに S パラメータについては、先行研究 [13] を引用する。彼らは、固定点が存在する様な理論のスペクトルをシュウィンガーダイソン方程式を固定点の周りでラダー近似して次の関係式を得た。

$$m_A^2 - m_V^2 \simeq \frac{F_\pi}{F_A} [m_V^2 - 2a\Sigma(0)^2] \quad (3.6.1)$$

つまり、ワインバーグの和の規則が固定点の存在により一部変更を受ける。ただし、 $\Sigma(0)$ はテクニフェルミオンの自己エネルギーで a は正のオーダー 1 の定数であり、 $\Sigma(0) \approx 2\pi F_\pi / \sqrt{N_{TC}}$ を用いた。すると、 S パラメータは、

$$S \simeq 4\pi F_\pi^2 \left[\frac{1}{m_V^2} + \frac{1}{m_A^2} - \frac{2a\Sigma(0)^2}{m_V^2 m_A^2} \right] \quad (3.6.2)$$

となる。これにより S パラメータの問題は、必ずしも問題ではなくなった⁹。

次節では、固定点の存在する理論が摂動論の範囲内で予想されることを説明する。

⁹実際に問題になり得るかは、数値計算等で精査すべきである。

Ch.4 摂動論からの固定点の予言

4.1 摂動論的くりこみ群

4.1.1 β 関数

場の理論は、摂動の高次で発散する。これを取り除くのが(摂動論的な)くりこみである。くりこみは、無限大を取り除くのでどれだけの量を有限に残すか自由度が存在し、それを固定するのがくりこみ条件である。くりこみ条件には、エネルギースケール μ の指定とその時の結合定数の指定が必要である。その結合定数をくりこまれた結合定数 (Renormalized coupling constant) g_R と呼ぶ。しかし、くりこみ条件の指定は人為的なモノなので、自然はそれに依らないはずである。異なるエネルギースケールで異なるくりこまれた結合定数を持つ理論が同様の理論を表し、それぞれのスケールでグリーン関数が同様の摂動展開形を持つという要請をすると、有効結合定数 $g(\mu)$ を定義することが出来る。この様に理論のエネルギー依存性を調べると、くりこみ群という概念が出てくる。くりこみ群とは、エネルギースケールを動かす変換を群の演算する群である¹。

β 関数とは、有効結合定数 $g(\mu)$ のエネルギー依存性をあらわす。

$$\beta(g) = \frac{dg(\mu)}{d\log(\mu)} \quad (4.1.1)$$

β 関数は、理論が与えられると摂動展開で求める事ができる。 β 関数が正ならエネルギーが大きくなると、有効結合定数 $g(\mu)$ もそれに従って大きくなる。また、 β 関数が負ならエネルギーが大きくなると、有効結合定数 $g(\mu)$ もそれに従って小さくなり、ついには $g(\mu) = 0$ と自由理論になる。これを漸近自由性とよぶ。

くりこみ群の変換は通常、高エネルギー側から低エネルギー側へ行う。このくりこみ群変換で結合定数が動かない領域が存在すれば、くりこみ群の赤外固定点 (Infrared Fixed point; IRFP) であると言う (図 4.1)。

4.2 摂動論からの固定点の予言

QCD のみでなく非可換ゲージ理論のより一般の β 関数を考えてみる。表現 r のディラックフェルミオンが N_f フレーバーが $SU(N)$ ゲージ理論に入っているとき、[7] によると、摂動 2-loop までの β 関数は以下で与えられる。

$$\beta(g) = -\frac{\beta_0}{(4\pi)^2}g^3 - \frac{\beta_1}{(4\pi)^4}g^5 \quad (4.2.1)$$

¹ただし、逆元が無いので、正確には半群である。

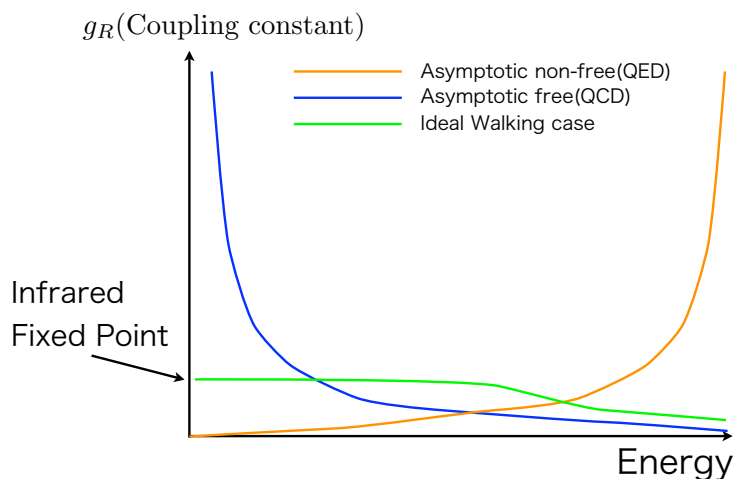


図 4.1: 理論による結合定数のエネルギー依存性

β_0 と β_1 は、表現 r とゲージ群 G 、フレーバー数 N_f に依存して

$$\beta_0 = \frac{11}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}T(r)N_f \quad (4.2.2)$$

$$\beta_1 = \frac{34}{3}C_2^2(G) - \frac{20}{3}C_2(G)T(r)N_f - 4C_2(r)T(r)N_f \quad (4.2.3)$$

である。ここで $N_f = 2$ 、 $G = SU(2)$ 、 $r = \text{adjoint}$ としてみる。すると表 4.1 から $T(r) = N = 2$ 、 $C_2(r) = N = 2 = C_2(G)$ と分かり、 β_0 と β_1 は、

$$\beta_0 = 2 \quad (4.2.4)$$

$$\beta_1 = -40 \quad (4.2.5)$$

と求まる。 β 関数の非自明な ($g \neq 0$) 固定点を g^* とすると、上記の関係式と $\beta(g^*) = 0$ から

$$(g^*)^2 = \frac{(4\pi)^2}{20} \sim 7.89 \quad (4.2.6)$$

と求まり、上記のパラメータの時、理論に赤外固定点があると分かる。フレーバー、ゲージ群がともに非可換ゲージ理論では最小であることから、このモデルをミニマルウォーキングテクニカラーという。(図 4.2)[6]。

しかし $g^* \gg 1$ なので摂動の予言は意味を持たない。実際にこの固定点が存在するかは、非摂動的な手法を用いる必要がある。そこで我々は、格子ゲージ理論の数値シミュレーションによってこの固定点の探索を行った。

前章で議論したとおり、テクニカラー理論が現実的であるには、ETC が必須である。しかし、少なくとも TC 理論だけで、赤外固定点が存在し、異常次元 γ^* が十分大きくない

といけない。この研究では、テクニカラーセクターのみで、つまり質量0のテクニフェルミオンとテクニグルーオン場 (SU(2) のゲージ場) のみでシミュレーションを行い赤外固定点の探索を行った。

表 4.1:

r	$T(r)$	$C_2(r)$	$d(r)$
Fund	$\frac{1}{2}$	$\frac{N^2-1}{2N}$	N
Adj	N	N	$N^2 - 1$

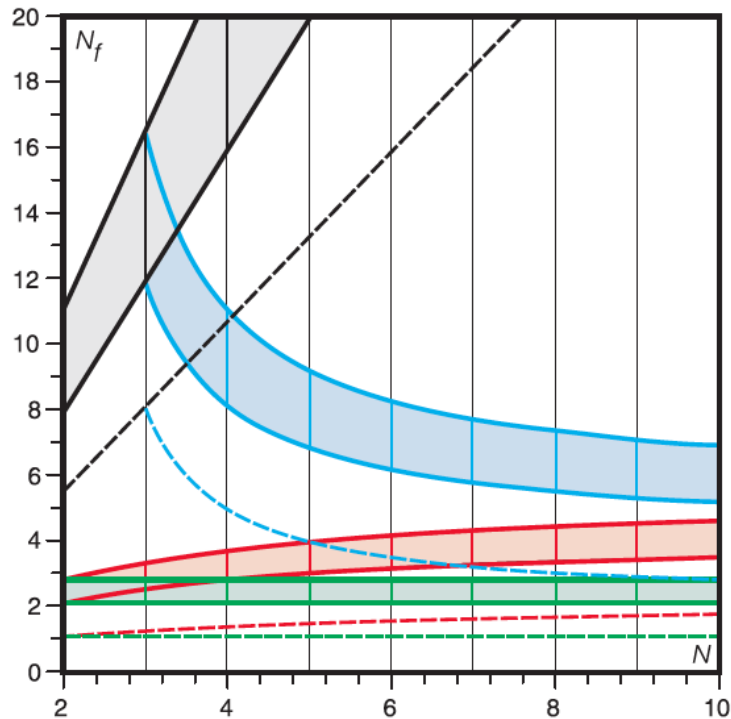


図 4.2: コンフォーマルウィンドウ。縦軸がフレーバー数で横軸が“カラー”の数。灰色の帯が基本表現、青が反対称表現、赤が対称表現、緑が随伴表現である。この帯に入っていると赤外固定点を持つ可能性がある。帯の上は、漸近自由性のなくなる線で下限は、カイラル対称性の破れが起こらない線。点線は、バンクス・ザックス固定点が存在する [6]。

第II部

Field Theory on the Lattice

Ch.5 格子上の場の理論

連続理論において、非可換ゲージ理論の赤外での振る舞いを調べるには摂動論は使えない。この時に重要なツールになるのが格子ゲージ理論である。格子ゲージ理論の特徴は、ゲージ対称性を保ったまま理論を正則化できることである。格子理論と連続理論は、くりこみ群でつながっているので、格子上で物理を調べることは、連続理論で物理を調べる事に等価である。さらに格子理論の利点は、有限自由度である事からシミュレーションを用いることにより非摂動的に精密に物理量を求めることができる。

格子ゲージ理論において自由度はゲージ場 A_μ ではなく、以下で述べるようにリンク変数と呼ばれるウィルソンラインが基本的な自由度になる。また、格子上でフェルミオンを記述するには連続理論にはない障害が存在する。この章では、[8][9] を元に格子上で場の理論を展開する方法を述べる。

5.1 理論のユークリッド化

格子上に場の理論を構成するので、まず理論をユークリッド化する事を考える。QED を例に考えることにする。QED の作用は、以下で与えられる。

$$S_{\text{QED}} = -\frac{1}{4} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \int d^4x \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \quad (5.1.1)$$

この作用に i を掛けて指数関数の方に載せそれを重みとして経路積分を行えば、QED の計算ができる。次の置き換えによりユークリッド化する¹。

$$\begin{cases} x^0 \rightarrow -ix_4 \\ A^0 \rightarrow +iA_4 \end{cases} \quad (5.1.2)$$

この置き換えによりゲージ場の作用は、以下になる。

$$S_G = \frac{i}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (5.1.3)$$

ただし μ, ν は 1, 2, 3, 4 を走る。これにより $\exp(iS_G)$ は A_μ に関して指数関数的に減少する関数になった。共変微分は、ユークリッド化しても変更は受けずに $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ で

¹ピュアゲージの時には、 $A_\mu = \partial_\mu \Lambda(x)$ である。 $x^0 \rightarrow -ix_4$ とすると、 $\partial_0 \rightarrow +i\partial_4$ となることからこの組み合わせで正しい。

ある。\$i\$ をくくりだしてまとめるとユークリッド化した QED の作用は以下になる。

$$S_{\text{QED}}^{(\text{eucl})} = S_G^{(\text{eucl})} + S_F^{(\text{eucl})} \quad (5.1.4)$$

$$S_G^{(\text{eucl})} = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (5.1.5)$$

$$S_F^{(\text{eucl})} = \int d^4x \bar{\psi} (\not{D} + m) \psi \quad (5.1.6)$$

この作用に \$i^2 = -1\$ をかけ、重みとして経路積分を行えば良い。非可換ゲージ理論でも同様に行うことができる。

5.2 格子理論と連続理論の関係

格子化された理論と、連続理論の関係について述べる。連続極限は、格子間隔 \$a\$ を 0 にする極限であるが、場の理論という立場からすると、連続理論と格子理論は、くりこみ群で結ばれていて、その変換自身が連続極限に対応してといえる。

これに関連する重要な話題として、漸近自由な理論は、格子化しても連続極限を取ることができる、という事である。格子間隔を \$a\$ とする。理論の最小の長さを与えるこのパラメータはエネルギー次元は \$-1\$ であり、\$a^{-1}\$ は理論における最大のエネルギーを表すことになり、“カットオフスケール” を与える。例えば、QCD の \$\beta\$ 関数は次の式で与えられる。

$$\beta(g) = \mu \frac{dg(\mu)}{d\mu} = -b_0 g^3(\mu) - b_1 g^5(\mu) + \dots \quad (5.2.1)$$

ただし、\$b_0 = \frac{11}{16\pi^2}\$、\$b_1 = \frac{102}{16\pi^2}\$ である。\$\beta\$ 関数を理論の“カットオフスケール” \$1/a\$ から \$\Lambda_L\$ まで² 積分する。

$$\int_{1/a}^{\Lambda_L} \frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{2b_0} \int_{g_0}^{\infty} \frac{dg^2}{g^4(\mu)(1 + \frac{b_1}{b_0} g^2(\mu))} \quad (5.2.2)$$

\$g_0\$ は“カットオフスケール” \$1/a\$ で定義された“裸”の結合定数である³。すなわち \$g(1/a) = g_0\$ である。このとき、

$$\ln(\Lambda_L a) = -\frac{1}{2b_0 g_0^2} - \frac{b_1}{2b_0^2} \ln(b_0 g_0^2) + O(1)$$

つまり、

$$\Lambda_L a = (b_0 g_0)^{-\frac{b_1}{2b_0^2}} e^{-\frac{1}{2b_0 g_0^2}} \quad (5.2.3)$$

なので、

$$a \rightarrow 0 \quad (5.2.4)$$

$$\Leftrightarrow g_0^2 \rightarrow 0 \quad (5.2.5)$$

²ここで \$\Lambda_L\$ は有効結合定数が発散するエネルギーとして選んだ。\$1/g(\Lambda_L) = 0\$

³カットオフスケールとは、理論が定義されるエネルギースケールだったので。自然な定義である。今は格子正則化によって理論が定義されている。

と、連続極限 (カットオフ無限大) で裸の結合定数 g_0 が 0 ときちんと定義されている。言い換えれば、くりこみ群の紫外固定点が $g = 0$ である事である。このとき、参照しているエネルギースケールでは非自明な有効結合定数が存在し、非自明な連続理論が実現できる。

5.3 ゲージ場の格子正則化

5.3.1 格子ゲージ理論

Lattice QED

格子上のゲージ理論を考えたいが、格子上の場の理論なので場は、格子点上で定義されることになる。このとき、

1. 格子上でもゲージ対称性を壊さない。
2. 単純な連続極限で古典的な作用に戻る。

の 2 つを指導原理にしておく。

連続な場の理論で、フェルミオン同士が有限だけ離れた $\bar{\psi}(x)\psi(y)$ という量を考えてみる。この量をゲージ不変に出来るだろうか？実際にゲージ変換してみると、ゲージ変換の関数を $G(x)$ と書くと、

$$\bar{\psi}(x)\psi(y) \rightarrow \bar{\psi}(x)G^{-1}(x)G(y)\psi(y) \quad (5.3.1)$$

となる。間に現れた量がキャンセルすれば良い。そこで、ウィルソンライン (シュウィンガーの線積分) と言われる量、

$$U(x, y) = e^{ie \int_x^y dz_\mu A_\mu(z)} \quad (5.3.2)$$

を考える。 $U(x, y)$ は $U(1)$ の要素であることに注意する。 A_μ をゲージ変化すると、 $A_\mu - i\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$ となり $U(x, y) \rightarrow G(x)U(x, y)G(y)^{-1}$ である。予め $\bar{\psi}(x)\psi(y)$ の間に挟んでおくと、以下の双一次形式は、ゲージ変換に対して不変になる。

$$\bar{\psi}(x)U(x, y)\psi(y) \rightarrow \bar{\psi}(x)e^{ie \int_x^y dz_\mu A_\mu(z)}\psi(y) \quad (5.3.3)$$

次に、格子点間隔ほど離れてる点を考えるために無限小だけ x から離れた y として $y = x + \epsilon$ を考える。

$$\bar{\psi}(x)\psi(x + \epsilon) \rightarrow \bar{\psi}(x)U(x, x + \epsilon)\psi(x + \epsilon) \quad (5.3.4)$$

$$\bar{\psi}(x + \epsilon)\psi(x) \rightarrow \bar{\psi}(x + \epsilon)U^\dagger(x, x + \epsilon)\psi(x) \quad (5.3.5)$$

ただし、無限小しか離れていないので、

$$U(x, x + \epsilon) = e^{ie\epsilon \cdot A(x)} \quad (5.3.6)$$

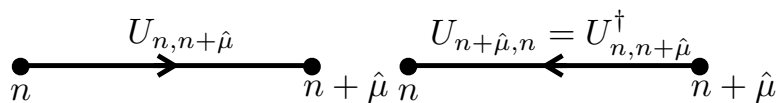


図 5.1: リンク変数

となる。格子点の座標を無次元の数の組 $n = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ とし、 μ 方向の単位ベクトルを $\hat{\mu}$ と書くことにしよう。さらに $U(x, x + \hat{\mu}) = U_{n, n+\hat{\mu}}$ とする。これをリンク変数と呼ぶことにする。このとき、

$$U_{n+\hat{\mu}, n} = U_{n, n+\hat{\mu}}^\dagger \quad (5.3.7)$$

$U(1)$ ゲージ変換を考えよう。 $U_{n, n+\hat{\mu}} = e^{i\phi_\mu(n)}$ と書ける。ただし $\phi_\mu(n)$ は位相で $\phi_\mu(n) = [0, 2\pi]$ である。 a を格子間隔、 c を後で決める定数として $\phi_\mu(n) = caA_\mu(n)$ としよう。 a が十分小さい時には、

$$U_{n, n+\hat{\mu}} = 1 + icaA_\mu \quad (5.3.8)$$

つまり $c = e$ とすれば正しく連続極限に一致することが分かる。そこで、

$$U_\mu(n) \equiv U_{n, n+\hat{\mu}} = e^{ieaA_\mu(n)} \quad (5.3.9)$$

と置き、これもリンク変数と呼ぶ。格子上の作用 $S_G^{(\text{lat})}$ は、ゲージ不変に作りたい。なのでウィルソンライン (リンク変数) でループを作る⁴。そこで以下の量を考える。

$$U_{\mu\nu}(n) = U_\mu(n)U_\nu(n + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(n + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(n) \quad (5.3.10)$$

この量をプラケット (plaquette) と呼ぶ。ここで (5.3.10) を格子間隔 a が小さいとして展

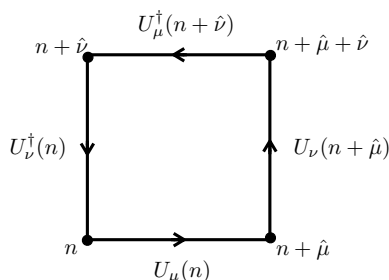


図 5.2: プラケット

開してみる。(5.3.9) より、

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}(n) &= \exp(ieaA_\mu(n)) \times \exp(ieaA_\nu(n + \hat{\mu})) \\ &\quad \times \exp(-ieaA_\mu(n + \hat{\nu})) \times \exp(-ieaA_\nu(n)) \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

$$= \exp[iea \{(A_\nu(n + \hat{\mu}) - A_\nu(n)) - (A_\mu(n + \hat{\nu}) - A_\mu(n))\}] \quad (5.3.12)$$

$$= e^{iea^2 F_{\mu\nu}(n)} \quad (5.3.13)$$

⁴QED の時は、ループでなくてのゲージ不変であるが、非可換ゲージ理論の時はループにする必要がある。

ただし、

$$F_{\mu\nu}(n) = \frac{1}{a} [\{(A_\nu(n + \hat{\mu}) - A_\nu(n)) - (A_\mu(n + \hat{\nu}) - A_\mu(n))\}] \quad (5.3.14)$$

と置いた。これは連続極限 ($a \rightarrow 0$) でゲージ場の微分を含む $F_{\mu\nu}(x)$ に戻る。
更に以下の量の $a \rightarrow 0$ での展開を考える。

$$\frac{1}{e^2} \sum_n \sum_{\mu < \nu} \left[1 - \frac{1}{2} (U_{\mu\nu}(n) + U_{\mu\nu}^\dagger(n)) \right] \quad (5.3.15)$$

$$= \frac{1}{e^2} \sum_n \sum_{\mu < \nu} \left[1 - \frac{1}{2} \left(e^{iea^2 F_{\mu\nu}(n)} + e^{-iea^2 F_{\mu\nu}(n)} \right) \right] \quad (5.3.16)$$

$$= \frac{1}{e^2} \sum_n \sum_{\mu < \nu} \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 + iea^2 F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} e^2 a^4 F_{\mu\nu}^2 + \dots + 1 - iea^2 F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} e^2 a^4 F_{\mu\nu}^2 + \dots \right) \right] \quad (5.3.17)$$

$$= \sum_n \sum_{\mu < \nu} a^4 \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(n) F_{\mu\nu}(n) + O(a^6) \quad (5.3.18)$$

$$= \sum_n a^4 \sum_{\mu, \nu} \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(n) F_{\mu\nu}(n) + O(a^6) \quad (5.3.19)$$

すなわち $a \rightarrow 0$ で

$$\frac{1}{e^2} \sum_n \sum_{\mu < \nu} \left[1 - \frac{1}{2} (U_{\mu\nu}(n) + U_{\mu\nu}^\dagger(n)) \right] \approx \int d^4x \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \quad (5.3.20)$$

と分かる。なので格子上のゲージ場の作用として、

$$S_G[U] = \frac{1}{e^2} \sum_P \left[1 - \frac{1}{2} (U_P + U_P^\dagger) \right] \quad (5.3.21)$$

と取ることとする。ただし P は、境界 P を持つプラケットの中のリンク変数の正の方向の積を表す。

Lattice QCD

これからは、非可換ゲージ理論を格子上的にのせる事を考える。第I部でも述べたが、多成分である非可換ゲージ理論に拡張は、

$$\psi \rightarrow \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \vdots \\ \psi^N \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} \rightarrow \left(\bar{\psi}^1 \quad \dots \quad \bar{\psi}^N \right) \quad (5.3.22)$$

とすれば良い。 G を $SU(N)$ の元とすると、大域的な変換は、 $\psi(x) \rightarrow G\psi(x)$ 、 $\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)G^{-1}$ となり、非可換ゲージ理論は、この変換をゲージ化した変換の下で不変であるという理論であり、このときゲージ場 $A_\mu(x)$ は実数ではなく行列に値を取るようになる。

QED を格子に載せた方法をそのまま拡張することを考える。非可換ゲージ理論では、対応するリンク変数 $U_\mu(n)$ は行列に値を取るようになるが再び

$$U_\mu = e^{i\phi_\mu(n)} \quad (5.3.23)$$

とおこう。ただし $\phi_\mu(n)$ は、 $SU(N)$ のリー代数に属するエルミート行列である。正しく連続極限に一致するかは別として、再びブラケットを用意する。

$$U_{\mu\nu}(n) = U_\mu(n)U_\nu(n + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(n + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(n) \quad (5.3.24)$$

この量のトレースはウィルソンループなので非可換ゲージの下でもゲージ不変な量になっている。格子上の非可換ゲージ理論の作用を S_G と書くことにする。

$$S_G = c \text{tr} \sum_n \sum_{\mu < \nu} \left[1 - \frac{1}{2}(U_{\mu\nu}(n) + U_{\mu\nu}^\dagger(n)) \right] \quad (5.3.25)$$

ただし、 c は連続極限が正しく規格化されるように決める定数である。 $U(1)$ の時と同様に

$$\phi_\mu(n) = g_0 a A_\mu(n) \quad (5.3.26)$$

と置く。ただし g_0 は裸の結合定数、 a は格子間隔である。格子上の場のテンソルを $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ とし、

$$U_{\mu\nu}(n) = e^{ig_0 a^2 \mathcal{F}_{\mu\nu}(n)} \quad (5.3.27)$$

と置く。 $a \rightarrow 0$ での展開には次の Baker-Campbell-Hausdorff の公式を用いる。

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A,B] + \dots}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \phi_\mu(n + \nu) &\approx \phi_\mu(n) + a \partial_\nu \phi_\mu(n) + \dots \\ &\approx g_0 a A_\mu(n) + g_0 a^2 \partial_\nu A_\mu(n) + \dots \end{aligned} \quad (5.3.28)$$

を用いると、 $a \rightarrow 0$ で $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ は、

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(n) \xrightarrow{a \rightarrow 0} F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig_0 [A_\mu, A_\nu] \quad (5.3.29)$$

となることがわかる。ここで

$$S_G^{(cont)} = \frac{1}{2} \text{tr} \int d^4x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (5.3.30)$$

として、

$$S_G \rightarrow c \frac{g_0^2}{2} S_G^{(cont)} \quad (5.3.31)$$

で一致するように c を決めるとすると $c = 2/g_0^2$ と分かる。 $N > 1$ に対して、

$$S_G^{SU(N)} = \beta \sum_P \left[1 - \frac{1}{2N} \text{tr}(U_P + U_P^\dagger) \right] \quad (5.3.32)$$

とすると、 $\beta = \frac{2N}{g_0^2}$ となる。 $SU(N)$ の基底を λ と書き、規格化は $\text{tr}(\lambda^B \lambda^C) = 2\delta_{BC}$ とした時にこの基底を用いて $F_{\mu\nu}$ を展開する。

$$F_{\mu\nu} = \sum_B F_{\mu\nu}^B \frac{\lambda^B}{2} \quad (5.3.33)$$

この時、連続理論の作用は、

$$S_G^{(cont)} = \frac{1}{2} \text{tr} \int d^4x \left(\sum_B F_{\mu\nu}^B \frac{\lambda^B}{2} \right) \left(\sum_D F_{\mu\nu}^D \frac{\lambda^D}{2} \right) \quad (5.3.34)$$

$$= \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^B F_{\mu\nu}^B \quad (5.3.35)$$

である。

以上により、格子上でゲージ理論が展開できるようになった。

5.4 スタッガードフェルミオン

格子上にフェルミオンを載せる事を考える時に、以下の定理が存在する。

ニールセン・二宮の定理

以下を満たす格子上のフェルミオンを構成したとする。

1. 並進対称性
2. カイラル対称性
3. エルミート性
4. 双一次形式
5. 局所性

このとき、カイラリティ+ と - の粒子が同数だけ出現する。すなわちダブラーが生じる。

ダブラーとは、元々理論に入っていたフェルミオンに、加え、格子化した副作用として出てきてしまった余分なフェルミオンであり、ダイナミクスに影響を与えうる。これは、時空を格子化した時に運動量が周期性を帯びることによる。

格子上でフェルミオンを構成するためには、何か厳密な対称性を犠牲にするか、ダブラーを認めなければならない。

格子上のフェルミオンとして、ウィルソンフェルミオン、スタッガードフェルミオン、さらにドメインウォールフェルミオン、オーバーラップフェルミオンなどが知られている。ウィルソンフェルミオンは、格子作用特有の a/L の連続極限で消える項を加えることでカイラル対称性を顕に壊してダブラーを封じている。後者2つは、“格子上の”カイラル対称性を厳密に保つが、ここでは触れない。以下で説明するスタッガードフェルミオンは、ダブラーをフレーバーと解釈し理論を記述することにより厳密なカイラル対称性もつ。

5.4.1 スタッガードフェルミオン

スタッガードフェルミオンは、以下の格子上の作用で記述される。

$$S^{stag} = \frac{1}{2} \sum_{x\mu} \eta_\mu(x) \left[\bar{\chi}(x) \left(U_\mu(x) \chi(x + \hat{\mu}) - U_\mu^\dagger(x - \hat{\mu}) \chi(x - \hat{\mu}) \right) \right] \quad (5.4.1)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{x,y} \bar{\chi}(x) D(x,y) \chi(y) \quad (5.4.2)$$

ただし、 χ は1成分のフェルミオンをあらわす。また、 $\eta_\mu(x)$ はスタッガードフェイズと呼ばれディラック行列の構造を

$$\eta_\mu(x) = (-1)^{x_1 + \dots + x_{\mu-1}} \quad (5.4.3)$$

と表現する。また、

$$D(x,y) = \sum_{\mu} \eta_\mu(x) \left\{ U_\mu^{ab}(x) \delta_{x+\hat{\mu},y} - U_\mu^{\dagger ab}(x - \hat{\mu}) \delta_{x-\hat{\mu},y} \right\} \quad (5.4.4)$$

である。このとき対応する連続理論では、 $N_f = 2^{[d/2]} = 4$ の理論を構成する [8][9]。

$$S^{stag} = \frac{1}{\mathcal{N}_0^2} \sum_{N,\mu} \bar{\psi}(N) \left[(\gamma_\mu \otimes \mathbf{1}) \frac{\nabla_\mu}{2} + (\gamma_5 \otimes t_\mu t_5) \frac{\nabla_\mu^2}{2} + m(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right] \psi(N) \quad (5.4.5)$$

ただし $Na = x$ 、 $t_a = \gamma_a$ 、 \mathcal{N}_0^2 は規格化定数、 $\hat{\psi}$ は格子間隔 a で無次元化したディラックフェルミオンである。

5.4.2 $SU(2)$ での $N_f = 2$ のスタッガードフェルミオン

ここでは $SU(2)$ 非可換ゲージ理論で $N_f = 2$ のスタッガードフェルミオンを実現する方法の概要を述べる。

擬フェルミオン法

まずシミュレーションでフェルミオンを計算する方法である擬フェルミオンについて簡単に述べる。格子シミュレーションは計算機を用いて行われるので、グラスマン数である

フェルミオンを直接扱えない。そこで、フェルミオンを先に積分してしまう。そして積分結果である $\det[D(U) + m]$ を考え、外場中のフェルミオンを表現し、その後ゲージ場で積分することになる。以下では簡単のために、 N_f フレーバーのフェルミオンだけの系を考える。すると、

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp(-\bar{\psi}D_{N_f}\psi) = \det[D_{N_f}] \quad (5.4.6)$$

となる。ただし、

$$\bar{\psi}D_{N_f}\psi \equiv \sum_{i,j}^{N_f} \int d^4x \bar{\psi}_j(x) \mathcal{D}_{ij} \psi_i(x) \quad (5.4.7)$$

という表記を用いた。このとき $\mathcal{D}\psi = \prod_i^{N_f} \mathcal{D}\psi_i$ である。

ディラック演算子はフレーバーについて対角なので、

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp(-\bar{\psi}D_{N_f}\psi) = \left(\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp(-\bar{\psi}D_1\psi) \right)^{N_f} \quad (5.4.8)$$

$$= \det[D_1]^{N_f} \quad (5.4.9)$$

N_f が偶数の時を考える。 $D^\dagger = \gamma^5 D \gamma^5$ と $\det[AB] = (\det A)(\det B)$ 、 $(\gamma^5)^2 = 1$ より、

$$\det[D_1]^{N_f} = \det[D_1 D_1]^{N_f/2} \quad (5.4.10)$$

$$= \det[D_1^\dagger D_1]^{N_f/2} \quad (5.4.11)$$

とできる。 $(\det A)^{-1} = \det[A^{-1}]$ と、グラスマン数のガウス積分が \det を出すのに対し、ただの数のガウス積分は $1/\det$ を出す事を思い出すと、

$$\det[D_1^\dagger D_1]^{N_f/2} = (\det[D_1^\dagger D_1]^{-N_f/2})^{-1} \quad (5.4.12)$$

$$\propto \int \mathcal{D}\phi^\dagger \mathcal{D}\phi \exp(-\phi^\dagger [D_1^\dagger D_1]_{N_f/2}^{-1} \phi) \quad (5.4.13)$$

ただし、 ${}^T\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_f/2})$ とおいた。この $N_f/2$ 個の複素ボソンを擬フェルミオンと呼ぶ。まとめると、

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp(-\bar{\psi}D_{N_f}\psi) \propto \int \mathcal{D}\phi^\dagger \mathcal{D}\phi \exp(-\phi^\dagger [D_1^\dagger D_1]_{N_f/2}^{-1} \phi) \quad (N_f \text{ は偶数}) \quad (5.4.14)$$

となる。

$N_f = 2$ のスタッガードフェルミオン

ここからは、具体的にスタッガードフェルミオンのディラック演算子 D_{stag} を考え、かつ $m = 0$ としておく⁵。 D_{stag} は、連続理論で縮退した $N_f = 4$ の理論を記述する。なので

⁵ $m \neq 0$ でも話は変わらない

$\det[D_{stag}^{1/2}]$ が計算できれば、連続理論で $N_f = 2$ が実現できることになる。まず、擬フェルミオンでスタッガードフェルミオンを表現する事を考える。

$$(\det[D_{stag}])^2 \propto (\det[D_{stag}^\dagger D_{stag}]) \quad (5.4.15)$$

$$\propto \int \mathcal{D}\phi^\dagger \mathcal{D}\phi \exp(-\phi^\dagger [D_{stag}^\dagger D_{stag}]^{-1} \phi) \quad (5.4.16)$$

ここで、次の表記を導入する。

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^e \\ \phi^o \end{pmatrix} \quad (5.4.17)$$

$$\phi^\dagger = \begin{pmatrix} (\phi^e)^\dagger & (\phi^o)^\dagger \end{pmatrix} \quad (5.4.18)$$

$$(5.4.19)$$

ここで ϕ^e は偶数番目の、 ϕ^o は奇数番目の格子上の擬フェルミオンを表す。 D_{stag} の具体的な表式を見ると、 D_{stag} は以下の構造を持つ事が分かる。

$$D_{stag} = \begin{pmatrix} 0 & D_{eo} \\ D_{oe} & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_{stag}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & D_{oe}^\dagger \\ D_{eo}^\dagger & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち、

$$D_{stag}^\dagger D_{stag} \equiv \begin{pmatrix} (D^\dagger D)_{ee} & 0 \\ 0 & (D^\dagger D)_{oo} \end{pmatrix} \quad (5.4.20)$$

となり、 $D_{stag}^\dagger D_{stag}$ では、奇数格子点上の擬フェルミオンと偶数格子点上の擬フェルミオンの寄与が完全に分離する。式で書くと、

$$(\det[D_{stag}])^2 \propto \int \mathcal{D}\phi^\dagger \mathcal{D}\phi \exp(-\phi^\dagger [D_{stag}^\dagger D_{stag}]^{-1} \phi) \quad (5.4.21)$$

$$= \left(\int \mathcal{D}\phi^{e\dagger} \mathcal{D}\phi^e \exp(-\phi^{e\dagger} [(D^\dagger D)_{ee}]^{-1} \phi^e) \right) \times (e \leftrightarrow o) \quad (5.4.22)$$

ここで、偶数サイトの寄与と奇数サイトの寄与が全く同じである、という事実を用いる⁶。

$$(\det[D_{stag}])^2 \propto \left(\int \mathcal{D}\phi^{e\dagger} \mathcal{D}\phi^e \exp(-\phi^{e\dagger} [(D^\dagger D)_{ee}]^{-1} \phi^e) \right)^2 \quad (5.4.23)$$

$D^\dagger D$ は正定なので、符号の不定性なしに、

$$\det[D_{stag}] \propto \int \mathcal{D}\phi^{e\dagger} \mathcal{D}\phi^e \exp(-\phi^{e\dagger} [(D^\dagger D)_{ee}]^{-1} \phi^e) \quad (5.4.24)$$

⁶これは、 $D^\dagger D$ が、偶数サイト同士、奇数サイトどうししか結ばず、混じり合わない事により全く同じ系のコピーが2つになるため。

と書ける。こうして、スタッガードフェルミオンを格子に載せることができた。

ここで、 $SU(2)$ の表現が実表現しかない事を用いる⁷ために $\phi = \phi_R + i\phi_I$ と分解する。

$$\det[D_{stag}] \propto \int d\phi_R^e d\phi_I^e \exp\left(-\phi_R^{e\dagger}[(D^\dagger D)_{ee}]^{-1}\phi_R^e + (R \leftrightarrow I)\right) \quad (5.4.25)$$

$$= \left[\int d\phi_R^e \exp\left(-\phi_R^{e\dagger}[(D^\dagger D)_{ee}]^{-1}\phi_R^e\right) \right]^2 \quad (5.4.26)$$

すなわち、

$$\det[D_{stag}]^{1/2} \propto \int d\phi_R^e \exp\left(-\phi_R^{e\dagger}[(D^\dagger D)_{ee}]^{-1}\phi_R^e\right) \quad (5.4.27)$$

右辺の量は数値計算で、擬フェルミオンを偶数サイトの寄与だけ拾いそしてその実部をとることで求められる。一方で左辺の量は $N_f = 4/2 = 2$ のフェルミオンを記述している。以上の方法により、スタッガードフェルミオンを用いて $N_f = 2$ のシミュレーションを行った。

⁷ある生成子の表現を T_a とおく。ある行列 S を用いて $ST_a S^{-1} = -T_a^*$ を満たせる時、表現が実であるという。 $SU(2)$ の表現はすべて実であることが知られている。随伴表現の時は、実際に行列の要素はすべて実数になる (3次元回転行列)。

Ch.6 非摂動論的な有効結合定数の定義

6.1 非摂動論的なくりこまれた結合定数の定義

ある考えたい物理量を \mathcal{O} とする。量子論において物理量は、期待値を取られるべきものである。期待値を求める操作は、摂動論とは関係ない。その期待値を $\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{NP}}$ と呼ぶことにする。(NP は、Non-Perturbative の意味である。)

一方、場の量子論において通常物理量を求めるには、結合定数による摂動論を用いて計算する。裸の結合定数で定義された理論の摂動の最低次を $\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{tree}}$ とよぶことにする。ここで g_0 を裸の結合定数として、物理量が $\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{tree}} = kg_0^2$ と表されるものだとする。ただし k は系による因子である。このとき、くりこまれた結合定数を

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{NP}} \equiv kg_R^2 \quad (6.1.1)$$

と定義する。

すると、もし何らかの非摂動論的な方法で物理量の期待値を求められたとき、tree で求めた k を用いて (6.1.1) により、くりこまれた結合定数を

$$g_R^2 = \frac{1}{k} \langle \mathcal{O} \rangle_{\text{NP}} \quad (6.1.2)$$

のように求めることができることになる。

以下では、 $\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{NP}}$ を非摂動論的な方法である、格子ゲージ理論のシミュレーションを用いて求める事を念頭におき、物理量 \mathcal{O} を具体的に考え、因子 k を各物理量に対して求める。

6.2 TPL スキーム

ここでは、物理量 \mathcal{O} として、捻れた周期境界条件を課したポリャコフラインを用いることにする。この方法を TPL スキーム (Twisted Polyakov loop Scheme) と呼ぶことにする。以下では、非摂動論的なくりこまれた結合定数を求めるのに TPL を用いる準備として、格子上での摂動論の最低次での k を求める。

6.2.1 ポリャコフループ

まず、通常のポリャコフループを定義する。格子空間を $L^3 \times T$ とする。ただし、 T と L は整数である。そして周期境界条件をとる。このとき時間方向のポリャコフループは以

下で定義される。

$$P_t(x, y, z) = \text{tr} [U_t(x, y, z, 0)U_t(x, y, z, 1) \cdots U_t(x, y, z, T)] \quad (6.2.1)$$

$$= \text{tr} \left[\prod_{j=0}^T U_t(x, y, z, j) \right] \quad (6.2.2)$$

つまり、時間方向のリンク変数の積であり、周期境界条件とトレースによりこの量はゲージ不変である。以下では格子サイズを L^4 とする。

6.2.2 捻れた周期境界条件

ポリアコフループの 0 モードを消すために、捻れた (Twisted な) 境界条件を用いる。つまりリンク変数に対しての境界条件として、以下をもちいることにする。

$$\begin{cases} U_\mu(x + \hat{\nu}L) = \Omega_\nu U_\mu(x) \Omega_\nu^\dagger, & \hat{\nu} = \hat{x}, \hat{y} \\ U_\mu(x + \hat{\nu}L) = U_\mu(x), & \hat{\nu} = \hat{z}, \hat{t} \end{cases} \quad (6.2.3)$$

ただし Ω_ν は以下を満たすものとする。

$$\begin{aligned} (\Omega_\nu)^{N_c} &= (-)^{N_c-1} \mathbf{1} \\ \Omega_x \Omega_y &= z \Omega_y \Omega_x \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

ただし、 $z = \exp\left(\frac{2\pi i k}{N_c}\right)$ (つまり 1 の n 乗根)、 Ω_ν は $SU(N_c)$ の元である。上記の条件は、リンク変数が t 、 z 方向に格子サイズだけ進んだ時、余計な位相がかけられるということである。リンク変数でなく、ゲージ場自身の境界条件をどうすべきだろうか。 $U_\mu(x) = \exp(ig_0 A_\mu(x))$ とすると¹以下のようにすれば良いことがわかる。

$$\begin{cases} A_\mu(x + \hat{\nu}L) = \Omega_\nu A_\mu(x) \Omega_\nu^\dagger, & \hat{\nu} = \hat{x}, \hat{y} \\ A_\mu(x + \hat{\nu}L) = A_\mu(x), & \hat{\nu} = \hat{z}, \hat{t} \end{cases}$$

6.2.3 捻れた平面波展開

ゲージ場を平面波展開 (フーリエ展開) を考える。これは作用を運動量表示シフトパゲーターを作る時に必要である。しかし今の場合、境界条件により普通の平面波展開することができない。そこで、両立するために以下の展開を考える。

$$A_\mu(x) \equiv \frac{1}{L^4} \sum_k \Gamma_k \tilde{A}_\mu(k) e^{ikx + ik_\mu/2} \quad (6.2.5)$$

¹この章では、格子間隔を a として、 $aA(x) \equiv \hat{A}(x)$ として無次元化しこれを再び $A(x)$ と呼びなおしている。また、格子サイズ L も a を用いて無次元化したものを L と呼びなおしている。

ゲージ場 A_μ の μ 成分なら、平面波から $e^{ik_\mu/2}$ だけずらした波で展開する。 $\tilde{A}_\mu(k)$ と Γ_k は、カラーの足を持っているが書かないことにする。ただし、

$$\Omega_\nu \Gamma_k \Omega_\nu^\dagger = e^{ik_\nu L} \Gamma_k, \quad \hat{\nu} = \hat{x}, \hat{y} \quad (6.2.6)$$

$$k_\nu \equiv k_\nu^{\text{ph}} + k_\nu^\perp \quad (6.2.7)$$

$$\begin{cases} k_\nu^{\text{ph}} = \frac{2\pi}{L} n_\nu^{\text{ph}} & -\frac{L}{2} \leq n_\nu^{\text{ph}} < \frac{L}{2} \\ k_\nu^\perp = \frac{2\pi}{N_c L} n_\nu^\perp & n_\nu^\perp = 0, 1, \dots, N_c - 1 \end{cases} \quad (6.2.8)$$

$$\Gamma_k \equiv \Omega_x^{-n_y^\perp} \Omega_y^{n_x^\perp} z^{(n_x^\perp + n_y^\perp + 1)(n_x^\perp + n_y^\perp)/2} \quad (6.2.9)$$

最後の式は、 Γ_k が $SU(N_c)$ の元であることを示している。

証明

ここで、

$$\Omega_\nu \Gamma_k \Omega_\nu^\dagger = e^{ik_\nu L} \Gamma_k, \quad \hat{\nu} = \hat{x}, \hat{y}$$

を示す。まず $\nu = x$ のとき、

$$\Omega_x \Gamma_k \Omega_x^\dagger = \Omega_x^{-n_y^\perp} \Omega_x \Omega_y^{n_x^\perp} \Omega_x^\dagger z^{(n_x^\perp + n_y^\perp + 1)(n_x^\perp + n_y^\perp)/2}$$

ここで、 $\Omega \Omega^\dagger = 1$ なので、 $\Omega_x \Omega_y^{n_x^\perp} \Omega_x^\dagger = (\Omega_x \Omega_y \Omega_x^\dagger)^{n_x^\perp} = z^{n_x^\perp} \Omega_y^{n_x^\perp}$ より、

$$= z^{n_x^\perp} \Gamma_k$$

となる。一方でまた、

$$\begin{aligned} e^{ik_x L} &= e^{i\frac{2\pi}{L}(n_x^{\text{ph}} + \frac{1}{N_c} n_x^\perp)L} = e^{i\frac{2\pi}{N_c} n_x^\perp} \\ &= z^{n_x^\perp} \quad (k = 1) \end{aligned}$$

次に、 $\nu = y$ のときは、

$$\begin{aligned} \Omega_y \Gamma_k \Omega_y^\dagger &= \Omega_y \Omega_x^{-n_y^\perp} \Omega_y^\dagger \Omega_y^{n_x^\perp} z^{(n_x^\perp + n_y^\perp + 1)(n_x^\perp + n_y^\perp)/2} \\ &= (\Omega_y \Omega_x \Omega_y^\dagger)^{-n_y^\perp} \Omega_y^{n_x^\perp} z^{(n_x^\perp + n_y^\perp + 1)(n_x^\perp + n_y^\perp)/2} \end{aligned}$$

$\Omega_x \Omega_y = z \Omega_y \Omega_x$ より $\Omega_y \Omega_x = \bar{z} \Omega_x \Omega_y$ なので、

$$= (\bar{z})^{-n_y^\perp} \Gamma_k = z^{n_y^\perp} \Gamma_k$$

さらに $e^{ik_y L} = z^{n_y^\perp}$ なので成り立つ。

証明

$n_x^\perp \rightarrow n_x^\perp + N_c$ とした時でも Γ_k の唯一性が損なわれない事を示す。

$$\begin{aligned}\Gamma'_k &\equiv \Omega_x^{-n_y^\perp} \Omega_y^{n_x^\perp + N_c} z^{(n_x^\perp + n_y^\perp + 1)(n_x^\perp + n_y^\perp)/2} \\ &= \Omega_x^{n_y^\perp} \Omega_y^{n_x^\perp} (-1)^{N_c - 1} z^{(n_x^\perp + n_y^\perp + 1)(n_x^\perp + n_y^\perp)/2} z^{N_c(n_x^\perp + n_y^\perp + 1/2)} z^{N_c^2/2} \\ &= \Gamma_k (-1)^{N_c - 1} (z^{N_c})^{n_x^\perp + n_y^\perp} z^{\frac{N_c(N_c + 1)}{2}}\end{aligned}$$

定義により $z^{N_c} = 1$ なので、

$$\begin{aligned}&= \Gamma_k (-1)^{N_c - 1} z^{\frac{N_c(N_c + 1)}{2}} \\ &= \Gamma_k \exp[\pi i(N_c - 1)] \exp\left[\frac{2\pi i}{N_c} \frac{N_c(N_c + 1)}{2}\right] \\ &= \Gamma_k \exp[\pi i(N_c - 1) + \pi i(N_c + 1)] \\ &= \Gamma_k\end{aligned}$$

よって唯一に定まる。

6.2.4 Feynman Rule

この節では摂動論を展開するために、捻れた境界条件の下でのゲージ場のプロパゲーターの表式を得る。まず、格子上のゲージ作用は、以下で与えられる。

$$S_g = \frac{2}{g_0^2} \sum_x \sum_{\mu > \nu} \text{Re tr} \left[1 - U_\mu(x) U_\nu(x + \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x) \right] \quad (6.2.10)$$

このリンク変数を展開し、作用をゲージ場で書きなおす。まず、

$$\begin{aligned}&U_\mu(x) U_\nu(x + \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x) \\ &\approx \exp[i g_0 (A_\mu(x) - A_\mu(x + \hat{\nu}) - A_\nu(x) + A_\nu(x + \hat{\mu}))] \\ &\equiv \exp[i g_0 X_{\mu\nu}(x)]\end{aligned} \quad (6.2.11)$$

この表式を作用 S_g に入れる。

$$\begin{aligned}S_g &\approx \frac{2}{g_0^2} \sum_x \sum_{\mu > \nu} \text{Re tr} \left[1 - \left(1 + i g_0 X_{\mu\nu}(x) + \frac{(i g_0)^2}{2} X_{\mu\nu}^2(x) \right) \right] \\ &= \sum_x \sum_{\mu > \nu} \text{Re tr} (X_{\mu\nu}^2(x)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_x \sum_{\mu > \nu} \text{tr} (X_{\mu\nu}^2(x))\end{aligned} \quad (6.2.12)$$

ここで、 A_μ の式を $X_{\mu\nu}$ に代入する。

$$\begin{aligned} X_{\mu\nu}(x) &= \frac{1}{L^4} \sum_k \Gamma_k \left\{ \tilde{A}_\mu(k) e^{ikx+ik_\mu/2} (1 - e^{ik_\nu}) - \tilde{A}_\nu(k) e^{ikx+ik_\nu/2} (1 - e^{ik_\mu}) \right\} \\ &= \frac{1}{L^4} \sum_k e^{ikx+i(k_\mu+k_\nu)/2} \left[(e^{ik_\mu/2} - e^{-ik_\mu/2}) \tilde{A}_\nu(k) - (e^{ik_\nu/2} - e^{-ik_\nu/2}) \tilde{A}_\mu(k) \right] \Gamma_k \\ &= \frac{1}{L^4} \sum_k e^{ikx+i(k_\mu+k_\nu)/2} \left(\hat{k}_\mu \tilde{A}_\nu(k) - \hat{k}_\nu \tilde{A}_\mu(k) \right) \Gamma_k \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

ただし $\hat{k} = 4 \sum_\mu \sin\left(\frac{k_\mu}{2}\right)$ とおいた。よってゲージ作用 S_g は運動量表示で、 Γ は行列の足があるのでトレースになり、以下ようになる。

$$S_g = -\frac{1}{2L^8} \sum_k \sum_q \sum_x e^{i(k+q)x+i(k+q)_\mu/2+i(k+q)_\nu/2} \quad (6.2.14)$$

$$\times \text{tr}(\Gamma_k \Gamma_q) \left(\hat{k}_\mu \tilde{A}_\nu(k) - \hat{k}_\nu \tilde{A}_\mu(k) \right) \left(\hat{q}_\mu \tilde{A}_\nu(q) - \hat{q}_\nu \tilde{A}_\mu(q) \right) \quad (6.2.15)$$

トレース $\text{tr}(\Gamma_k \Gamma_q)$ は、 Ω を用いて以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} \text{tr}(\Gamma_k \Gamma_q) &= \text{tr} \left(\Omega_x^{-n_y^\perp} \Omega_y^{n_x^\perp} \Omega_x^{-m_y^\perp} \Omega_y^{m_x^\perp} \right) \\ &\quad \times z^{(n_x^\perp+n_y^\perp+1)(n_x^\perp+n_y^\perp)/2} z^{(m_x^\perp+m_y^\perp+1)(m_x^\perp+m_y^\perp)/2} \\ &= \delta_{n_x^\perp+m_x^\perp,0} \delta_{n_y^\perp+m_y^\perp,0} z^{(n_x^\perp+n_y^\perp)^2} \text{tr} \left(\Omega_x^{-n_y^\perp} \Omega_y^{n_x^\perp} \Omega_x^{n_y^\perp} \Omega_y^{-n_x^\perp} \right) \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

Ω_μ の表式を用いて最後のトレースを求める。

$$\Omega_y \Omega_x^{n_y^\perp} \Omega_y^{-1} = (\Omega_y \Omega_x \Omega_y^{-1})^{n_y^\perp} = \bar{z}^{n_y^\perp} \Omega_x^{n_y^\perp} \quad (6.2.17)$$

なので、

$$\Omega_y^{n_x^\perp} \Omega_x^{n_y^\perp} \Omega_y^{-n_x^\perp} = \bar{z}^{n_x^\perp n_y^\perp} \Omega_x^{n_y^\perp} \quad (6.2.18)$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \text{tr}(\Gamma_k \Gamma_q) &= N_c \delta_{k^\perp+q^\perp,0}^{(2)} z^{(n_x^\perp)^2+n_x^\perp n_y^\perp+(n_y^\perp)^2} \\ &\equiv N_c \delta_{k^\perp+q^\perp,0}^{(2)} z^{(n^\perp, n^\perp)} \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

よって作用は、

$$S_g = -\frac{N_c}{2L^4} \sum_k \left(\hat{k}_\mu \tilde{A}_\nu(k) - \hat{k}_\nu \tilde{A}_\mu(k) \right) \left(-\hat{k}_\mu \tilde{A}_\nu(-k) + \hat{k}_\nu \tilde{A}_\mu(-k) \right) z^{(n^\perp, n^\perp)} \quad (6.2.20)$$

ただし $\hat{k}^2 = 4 \sum_\mu \sin^2 \frac{k_\mu}{2}$ 、 $(k_\mu = k_\mu^{\text{ph}} + k_\mu^\perp)$ である。 $A \cdots A$ の形にすると、挟まれた部分の逆数がプロバゲーターになる。

$$S_g = \frac{1}{2} \frac{2N_c}{L^4} \sum_k \tilde{A}_\mu(-k) \left(\delta_{\mu\nu} \hat{k}^2 - \hat{k}_\mu \hat{k}_\nu \right) \tilde{A}_\nu(k) z^{\frac{1}{2}(n^\perp, n^\perp)} \quad (6.2.21)$$

ここから、ゲージ場のプロパゲーターを求めることができるが、以下に注意する。
すなわち $A_\mu(x)$ は、 $SU(N_c)$ の元なので $\text{tr}(A_\mu) = 0$ でなければならないが、ゲージ場 $A_\mu(x)$ の展開式は (6.2.5)、さらに $\Gamma_{k^\perp} = 0$ なので、 $n^\perp = 0 \pmod{N}$ に対して $\tilde{A}_\mu(k^{\text{ph}}, k^\perp) = 0$ でなければならない。それを踏まえ $\chi_{k^\perp} \equiv 1 - \delta_{k^\perp, 0}$ とすると、

$$\langle \tilde{A}_\mu(-k) \tilde{A}_\nu(k) \rangle = \frac{L^4}{2N_c} \delta_{(q+k)^{\text{ph}}, 0}^{(4)} \delta_{(q+k)^\perp, 0}^{(2)} \chi_{k^\perp} z^{-\frac{1}{2}(n^\perp, n^\perp)} \frac{1}{\hat{k}^2} \delta_{\mu\nu} \quad (6.2.22)$$

となる。これにより摂動計算ができるようになった。

6.2.5 TPL

TPL の相関関数の比を g_R の定義に用いるので、摂動から k を求める。
そのためにもまず、TPL を定義する。 x 方向の TPL は、

$$P_x(y, z, t) \equiv \text{tr} \left(\left[\prod_{j=0}^{L-1} U_x(x = j, y, z, t) \right] \Omega_x \right) e^{-\frac{2\pi i}{N_c L} y} \quad (6.2.23)$$

と定義される。これは、境界条件と無矛盾である。

証明

まず定義より、

$$P_x(y+L, z, t) = \text{tr} \left(\left[\prod_{j=0}^{L-1} U_x(x=j, y+L, z, t) \right] \Omega_x \right) e^{-\frac{2\pi i}{N_c L}(y+L)}$$

トレースの内側は U_x に対する境界条件を入れ、またトレースの外側の指数関数の L の部分は z の定義により z^{-1} と分かるので、

$$= \text{tr} \left(\left[\prod_{j=0}^{L-1} \Omega_y U_x(x=j, y, z, t) \Omega_y^\dagger \right] \Omega_x \right) e^{-\frac{2\pi i}{N_c L} y} z^{-1}$$

$\Omega_y \Omega_y^\dagger = 1$ より、

$$= \text{tr} \left(\Omega_y \left[\prod_{j=0}^{L-1} U_x(x=j, y, z, t) \right] \Omega_y^\dagger \Omega_x \right) e^{-\frac{2\pi i}{N_c L} y} z^{-1}$$

トレースの巡回性、 $\Omega_y^\dagger \Omega_x \Omega_y = z \Omega_x$ より、

$$\begin{aligned} &= \text{tr} \left(\left[\prod_{j=0}^{L-1} U_x(x=j, y, z, t) \right] \Omega_x \right) e^{-\frac{2\pi i}{N_c L} y} \\ &= P_x(y, z, t) \end{aligned}$$

ポリアコフープを g_0 の 1 次まで摂動展開する。

$$\begin{aligned} P_x(y, z, t) &= \text{tr} \left(\left[\prod_{j=0}^{L-1} U_x(x=j, y, z, t) \right] \Omega_x \right) e^{-\frac{2\pi i}{N_c L} y} \\ &= \text{tr} \left(\left[\prod_{x=0}^{L-1} (1 + ig_0 A_x(x, y, z, t) + \dots) \right] \Omega_x \right) e^{-\frac{2\pi i}{N_c L} y} \\ &= \sum_{x=0}^{L-1} ig_0 \text{tr} (A_x(x, y, z, t) \Omega_x) e^{-\frac{2\pi i}{N_c L} y} \end{aligned} \quad (6.2.24)$$

$$P_x^*(y, z, t) = \sum_{x=0}^{L-1} (-ig_0) \text{tr} (A_x(x, y, z, t) \Omega_x^\dagger) e^{\frac{2\pi i}{N_c L} y} \quad (6.2.25)$$

ここで、 $P_x(y, z, t)$ と $P_x^*(0, 0, 0)$ の相関関数を求める。すると前述の結果より、摂動の最低次で以下であることがわかる。

$$\langle P_x(y, z, t) P_x^*(0, 0, 0) \rangle = g_0^2 \sum_{x=0}^{L-1} \sum_{x'=0}^{L-1} e^{-\frac{2\pi i}{N_c L} y} \langle \text{tr} [A_x(x, y, z, t) \Omega_x] \text{tr} [A_{x'}(x', 0, 0, 0) \Omega_{x'}^\dagger] \rangle \quad (6.2.26)$$

y と z の和を取り $t = L/2$ とし、右辺を運動量表示にする。

$$\begin{aligned} \sum_{y,z} \langle P_x(y,z,L/2) P_x^*(0,0,0) \rangle &= g_0^2 \sum_{x=0}^{L-1} \sum_{x'=0}^{L-1} \sum_{y,z} e^{-\frac{2\pi i}{N_c L} y} \sum_k \sum_q \langle \tilde{A}_x(k) \tilde{A}_x(q) \rangle \frac{1}{L^8} \\ &\quad \times \text{tr} [\Gamma_k \Omega_x] \text{tr} [\Gamma_q \Omega_x^\dagger] e^{ik_x x + ik_y y + ik_z z + ik_t L/2} \\ &\quad \times e^{iq_x x'} e^{ik_x/2} e^{iq_x/2} \end{aligned} \quad (6.2.27)$$

Γ_k の性質を用い、すべての Γ を Ω に書き換え、トレースを計算する。

$$\begin{aligned} \text{tr} [\Gamma_k \Omega_x] &= \text{tr} \left[\Omega_x^{-n_y^\perp} \Omega_y^{n_x^\perp} z^{(n_x^\perp + n_y^\perp + 1)(n_x^\perp + n_y^\perp)/2} \Omega_x \right] \\ &= \delta_{n_y^\perp, 1} \delta_{n_x^\perp, 0} N_c z \end{aligned} \quad (6.2.28)$$

もう一方も同様にして、

$$\begin{aligned} \text{tr} [\Gamma_q \Omega_x^\dagger] &= \text{tr} \left[\Omega_x^{-m_y^\perp} \Omega_y^{m_x^\perp} z^{(m_x^\perp + m_y^\perp + 1)(m_x^\perp + m_y^\perp)/2} \Omega_x^\dagger \right] \\ &= \delta_{m_y^\perp, -1} \delta_{m_x^\perp, 0} N_c \end{aligned} \quad (6.2.29)$$

すると相関関数はプロパゲーターの表式より、

$$\begin{aligned} \sum_{y,z} \langle P_x(y,z,L/2) P_x^*(0,0,0) \rangle &= g_0^2 \sum_{x=0}^{L-1} \sum_{x'=0}^{L-1} \sum_{y,z} e^{-\frac{2\pi i}{N_c L} y} \sum_{k,q} \frac{1}{L^8} \frac{L^4}{2N_c} \delta_{(q+k)^{\text{ph}}, 0}^{(4)} \delta_{(q+k)^\perp, 0}^{(2)} \\ &\quad \times \chi_{k^\perp} z^{-\frac{1}{2}(n^\perp, n^\perp)} \frac{1}{\hat{k}^2} \\ &\quad \times N_c \delta_{n_y^\perp, 1} \delta_{n_x^\perp, 0} z \times \delta_{m_y^\perp, -1} \delta_{m_x^\perp, 0} N_c \\ &\quad \times e^{ik_x(x-x') + ik_y y + ik_z z + ik_t L/2} \end{aligned} \quad (6.2.30)$$

$$\begin{aligned} &\quad \times \chi_{k^\perp} z^{-\frac{1}{2}(n^\perp, n^\perp)} \frac{1}{\hat{k}^2} \\ &\quad \times N_c \delta_{n_y^\perp, 1} \delta_{n_x^\perp, 0} z \times \delta_{m_y^\perp, -1} \delta_{m_x^\perp, 0} N_c \\ &\quad \times e^{ik_x(x-x') + ik_y y + ik_z z + ik_t L/2} \end{aligned} \quad (6.2.31)$$

和を取りまとめると、

$$\sum_{y,z} \langle P_x(y,z,L/2) P_x^*(0,0,0) \rangle = \frac{g_0^2 N_c}{2L^4} \sum_{x,x',y,z} \sum_{n^{\text{ph}}} \frac{1}{\hat{k}^2} e^{ik_x(x-x') + ik_y y - \frac{2\pi i}{N_c L} y} e^{ik_z z} e^{ik_t L/2} \quad (6.2.32)$$

ここで k_μ は、

$$k_\mu = \left(\frac{2\pi}{L} n_x^{\text{ph}}, \frac{2\pi}{L} n_y^{\text{ph}} + \frac{2\pi}{N_c L}, \frac{2\pi}{L} n_z^{\text{ph}}, \frac{2\pi}{L} n_t^{\text{ph}} \right) \quad (6.2.33)$$

である。そこで $k_\mu = (0, \frac{2\pi}{N_c L}, 0, \frac{2\pi n_t^{\text{ph}}}{L})$ とすると、

$$\begin{aligned} \sum_{y,z} \langle P_x(y,z,L/2) P_x^*(0,0,0) \rangle &= \frac{g_0^2 N_c}{2} \sum_{n_t^{\text{ph}}} \frac{1}{\hat{k}^2} e^{\frac{2\pi n_t^{\text{ph}}}{L} L/2} \\ &= \frac{g_0^2 N_c}{2} \sum_{-\frac{L}{2} \leq n < \frac{L}{2}} \frac{(-)^n}{4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{N_c L} \right) + 4 \sin^2 \left(\frac{\pi n}{L} \right)} \end{aligned} \quad (6.2.34)$$

一方、捻っていない z 方向のポリャコフループの相関関数は定義から

$$P_z(x, y, t) = \text{tr} \left[\prod_{j=0}^L U_z(x, y, j, t) \right] \quad (6.2.35)$$

よって以下である。

$$\sum_{xy} \langle P_z(x, y, L/2) P_z^*(0, 0, 0) \rangle = L^2 N_c^2 \quad (6.2.36)$$

これらの比をとり、くりこまれた結合定数を定義する物理量とする。

$$\langle \mathcal{O} \rangle \equiv \frac{\sum_{y,z} \langle P_x(y, z, L/2) P_x^*(0, 0, 0) \rangle}{\sum_{xy} \langle P_z(x, y, L/2) P_z^*(0, 0, 0) \rangle} \quad (6.2.37)$$

$$\stackrel{\text{tree}}{=} \frac{g_0^2}{2N_c L^2} \sum_{-\frac{L}{2} \leq n < \frac{L}{2}} \frac{(-)^n}{4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{N_c L} \right) + 4 \sin^2 \left(\frac{\pi n}{L} \right)} \quad (6.2.38)$$

つまり k は、 $\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{tree}} = k g_0^2$ より、以下であることがわかる。

$$k = \frac{1}{8N_c L^2} \sum_{-\frac{L}{2} \leq n < \frac{L}{2}} \frac{(-)^n}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{N_c L} \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi n}{L} \right)} \quad (6.2.39)$$

(6.2.37) を非摂動論的に求めることが出来れば、(6.2.39) を用いてくりこまれた結合定数を求めることができる。この量の格子化誤差は、 $(a/L)^2$ から始まる。なので連続極限は、この量の $(a/L)^2 \rightarrow 0$ の外挿に対応する。以下に各格子サイズに対する k を求めるプログラムのソースコードを載せる。

```
Calculate k of TPL sheme
c
c calculation value of k(twbc Polyakov loop)
c
    implicit none
    integer n,L,Nc
    double precision k,c_fac,pi,num,dem
    pi=atan(1.0d0)*4.0d0
    open(17, file='input.dat', status='old')
C input.dat = N_c Lattice-size
C ex. 2 20
    read (17,*) Nc, L
    close(17)
    num=0.d0
    dem=0.d0
    c_fac=1/dble(8*L*L*Nc)
    do n = -L/2 , L/2 -1
        num=dble((-1)**n)
        dem=sin(pi/dble(Nc*L))**2.0d0
        dem=dem+sin(dble(n)*pi/dble(L))**2.0d0
        k=k+num/dem
    end do
    k=k*c_fac
    write(*,*)1.d0/dble(L),1.0d0/k,'#L=',L
END
```

Ch.7 ステップスケーリング

7.1 Setp Scaling

ここでは、有限サイズで結合定数のエネルギー依存性を調べる手法であるステップスケーリングについて述べる。前章までで、有限格子サイズで、裸の結合定数 $\beta = 4N_c/g_0^2$ に対応する有効結合定数 $g_R(L, \beta)$ を求める手法を述べた。ここで、 $u = g_R^2(L, \beta)$ という量を定義しておく。また以下では、格子サイズを格子間隔 a を用いて無次元化したものを格子サイズ L と呼ぶことにする。横軸に裸の結合定数、縦軸にくりこまれた結合定数にしたグラフを書くと以下ようになる (図 7.1)。このとき、図の左のほうが強結合領域、右側が弱結合領域 (高エネルギー側) である。

これは、各格子サイズ、我々の今回の場合 $L = 6, 8, 12, 16$ について描くことになる。こ

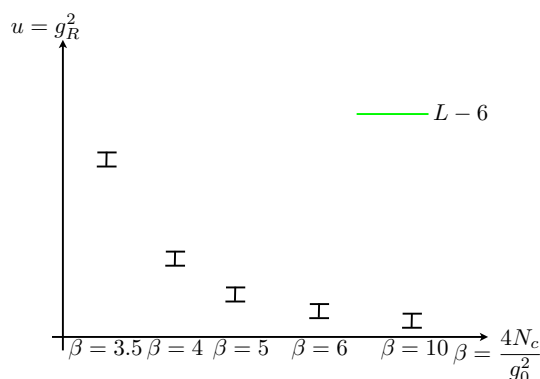


図 7.1: データのイメージ図。横軸が裸の結合定数、縦軸が有効結合定数 u 。エラーバーは統計誤差である。つまり多数回シミュレーションを行えば小さくなるものである。右側が高エネルギー側で摂動が良い。

ここの図は、見やすい様にしたイメージ図である。そして、得たデータを適当な関数で統計誤差の寄与を入れて β の内挿する (図 7.2)。具体的なフィット関数は次章で述べるが、高エネルギー側で、摂動論に合う様に選んだ。

すべての格子サイズについて β の内挿を行う (図 7.3)。ここまでで、ステップスケーリングの準備が終了した。次からがステップスケーリングである。

まず、理論のエネルギースケールはわからないので、ある高エネルギースケールである結合定数になる、というくりこみ条件を設定する。つまり、インプットの $u_0 = g_R^2$ を決めてやる。そしてその u_0 を返すような β を小さい格子 $L = 6, 8$ で求めてやる (図 7.4)。次

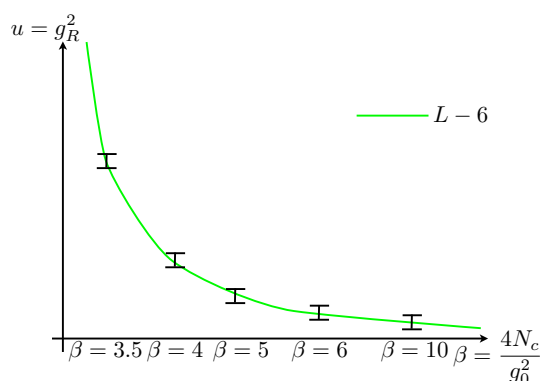


図 7.2: β の内挿。横軸が裸の結合定数、縦軸が有効結合定数 u 。

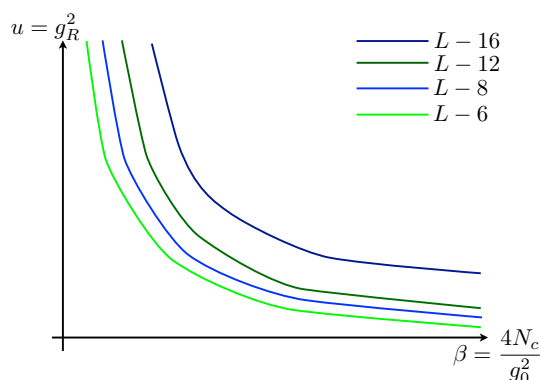


図 7.3: 全格子サイズでの β の内挿。横軸が裸の結合定数、縦軸が有効結合定数 u 。

に、小さい格子で決めた β で測った、大きい格子 $L = 12, 16$ での u を求める (図 7.5)。

今まで行なってきた操作がどういう事に対応するかを別の図を用いて考えてみる。

インプットの $u_0 = g_R^2$ を決めてやる。そしてその u_0 を返すような β を小さい格子 $L = 6, 8$ で求めてやる (図 7.6)。この図は、横軸が $1/L$ つまり、格子の粗さに対応し、原点が連続極限に対応している。縦軸は、有効結合定数 u である。

次に、 $L = 6$ で u_0 になるような β で $L = 12$ での u を求める。同様に、 $L = 8$ で u_0 になるような β で $L = 16$ での u を求める。この時、格子サイズは 2 倍になっているのでエネルギースケールとしては、半分になっている (図 7.7)。一般のステップスケールリングでは、この比率を s としている。この時には、格子サイズは s 倍、エネルギースケールは $1/s$ 倍になる。

ステップスケールリングの最後の手続きとして連続極限を取る (図 7.8)。ここで、元の有効結合定数が u_0 で $s = 2$ のステップスケールリングなので出てきた有効結合定数を $\sigma(u_0, s = 2)$ と呼ぶことにする。これはステップスケールリング関数と呼ばれる。連続極限は、外挿なので、どのような関数が良いかはわからない。本来は、3 点以上で、線形関数と、定数フィットを比べる、などをするべきであるが、今は 2 点の定数フィット (2 点の平均) によって連

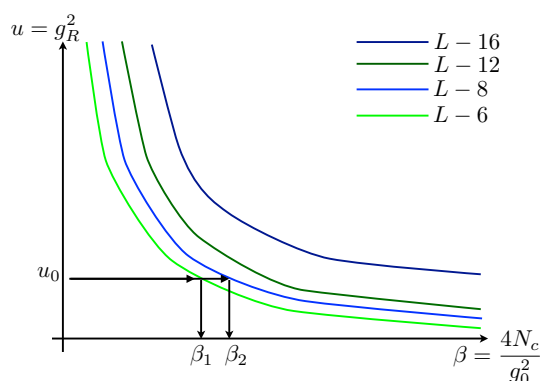


図 7.4: ステップスケールリングその 1。横軸が裸の結合定数、縦軸が有効結合定数 u 。

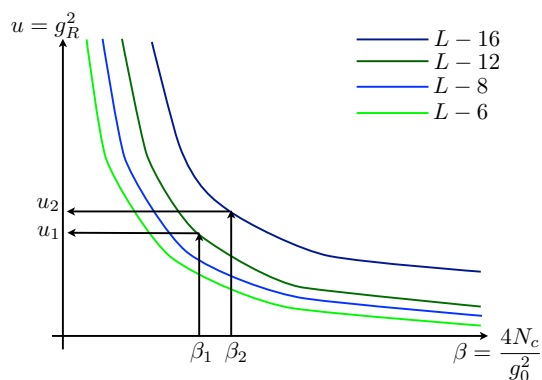


図 7.5: ステップスケールリングその 2。横軸が裸の結合定数、縦軸が有効結合定数 u 。

続極限をだした。

まとめると、(図 7.9) の様になる。ステップスケールリングを用いると、以下の事がわかる。ある有効結合定数 u を決め、そして格子サイズを倍にする、つまりエネルギースケールを半分にしたとき、対応する連続極限での有効結合定数 $u = g_R^2$ がどれだけ大きくなるかを調べることが出来る。

今までの説明してきたステップスケールリングの手続きを繰り返し、 $\sigma(u, s)/u$ をプロットすると、(図 7.10) の様になる。 $\sigma(u, s)/u$ は、有効結合定数の成長率を表す。この数値シミュレーションによって求めた有効結合定数の成長率が 1 の線を切るとそこで成長が止まる事になるのでくりこみ群の固定点 u^* の発見ということになる。

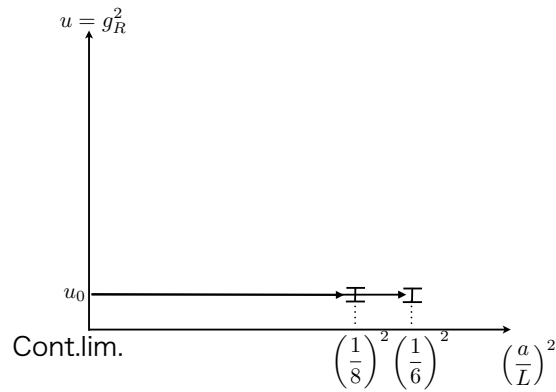


図 7.6: ステップスケールリングその 1'。横軸が格子の粗さ、原点が連続極限。縦軸は、有効結合定数 u 。

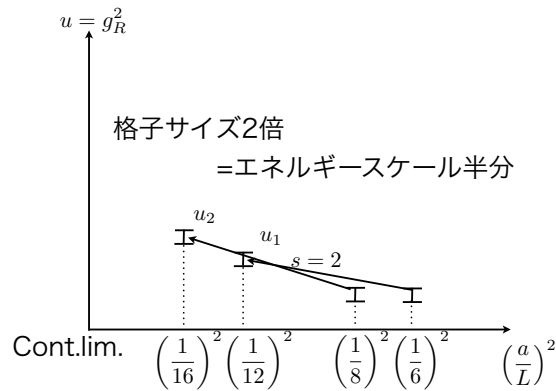


図 7.7: ステップスケールリングその 2'。横軸が格子の粗さ、原点が連続極限。縦軸は、有効結合定数 u 。

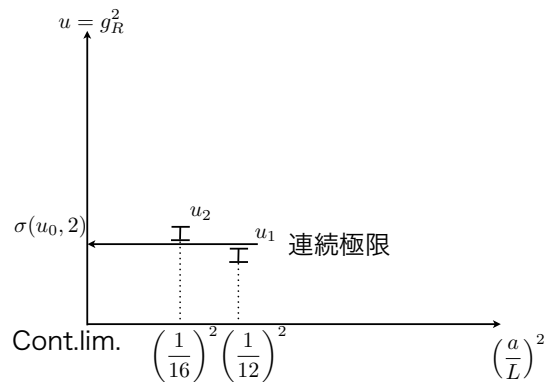


図 7.8: ステップスケールリングその 3

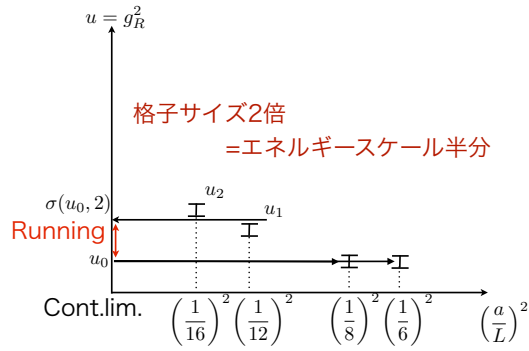


図 7.9: ステップスケーリング

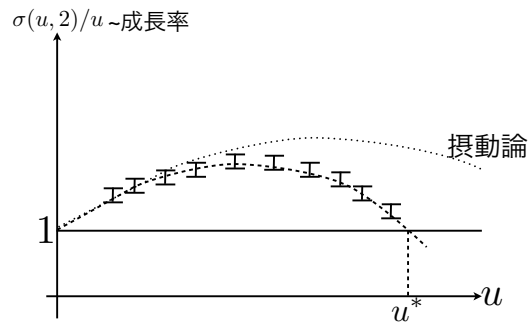


図 7.10: ステップスケーリングでの固定点の発見のイメージ図。

Ch.8 先行研究

8.1 先行研究

MWTC モデルの固定点探索を格子シミュレーションを用いて先行研究として、[10] や [11] がある。ここでは [10] に限って結果を紹介したい。彼らは格子上で有効結合定数を定義するのにシュレーディンガー汎関数を用いている事、格子上のフェルミオンとして、ウィルソンフェルミオンを用いていることが我々の研究との大きな違いである。ウィルソンフェルミオンは、我々の用いているスタaggerドフェルミオンと違い、カイラル対称性を顕に破っている。また、格子作用に $O(a/L)$ の格子化誤差が含まれている。この事により連続極限から遠いので連続極限を調べるのに向いていない。シュレーディンガー汎関数も格子化誤差が同様に $O(a/L)$ から始まるので連続極限を調べることについては、我々の手法のほうが優れているといえる。連続極限は3つのデータ点の平均(定数フィット)を用

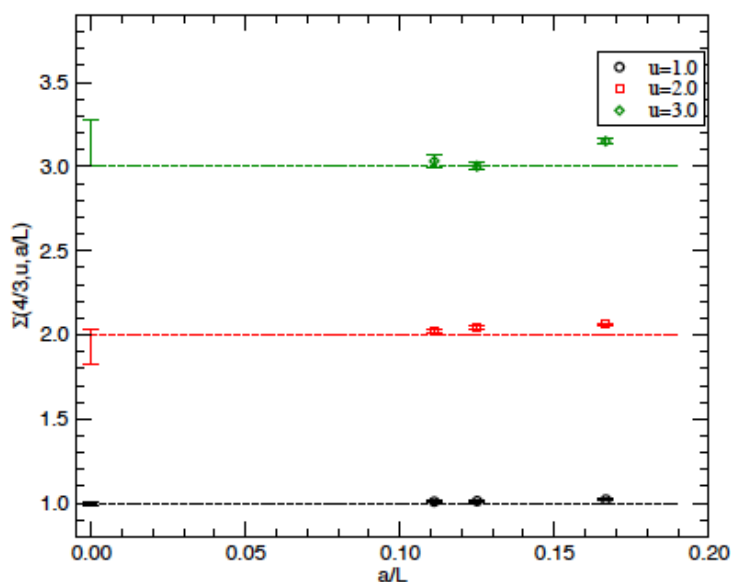


図 8.1: ステップスケーリング関数 $\Sigma(4/3, u, a/L)$ と a/L のグラフ。誤差棒は定数フィットの連続極限と線形フィットの差(連続極限に伴う系統誤差)である

いて出している。連続極限に伴う系統誤差として、定数フィットと一番粗い $L=6$ のデータを捨てた2点の1次関数の切片の差を用いている。これは大変不満足であり、我々はより精密に連続極限を取ることを考えた。

彼らの得た結論は、固定点は $g^2 = 2.0 - 3.2$ にあり、そこで異常次元は $0.05 < \gamma < 0.56$ という値を得ている。

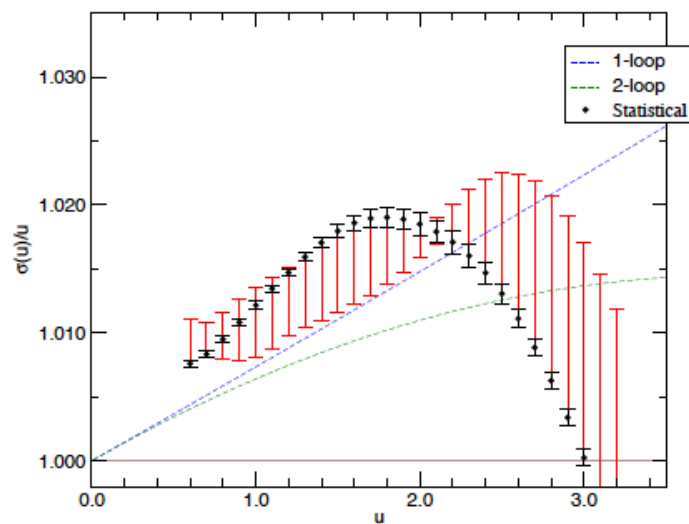


図 8.2: $\sigma(u, 4/3)/u$ と u の結果グラフ。黒の誤差棒は統計誤差のみで、赤の誤差棒は定数フィットの連続極限と線形フィットの差 (連続極限に伴う系統誤差) である

第III部

Results and Discussions

Ch.9 結果と結論、今後の課題

9.1 理論のまとめとデータ

前章までで議論したことをまとめると、標準理論を超える物理模型として電弱精密測定をクリアしうる MWTC モデルを考えると、くりこみ群の赤外固定点と 1 程度の異常次元が必要だった。ここで言う MWTC モデルとは、随伴表現のフェルミオン $N_f = 2$ の $SU(2)$ ゲージ理論である。

今回は、固定点発見のために 4 次元格子上のシミュレーションを行った。異常次元は、測定していない。ゲージ場の配位生成はハイブリッドモンテカルロ法を用い、格子フェルミオンとしてスタaggerドフェルミオンを用いた。具体的に測定した量は、 x, y 方向に Twisted boundary condition を課したポリャコフループの相関関数の比である (6.2.37)。

$$\frac{\sum_{y,z} \langle P_x(y, z, L/2) P_x^*(0, 0, 0) \rangle}{\sum_{xy} \langle P_z(x, y, L/2) P_z^*(0, 0, 0) \rangle} \equiv r_poly$$

これを以後 r_poly と呼ぶことにする。この r_poly にツリーからくる因子 $1/k$ を掛ければくりこまれた結合定数の 2 乗が定義できた。

解析に用いたデータセットは以下のとおりである (表 9.1 -9.4)。1conf= 200(Trj) としているので、250conf の場合、標本が $250(\text{conf}) \times 200(\text{Trj}) = 50000$ 個あることになる。

L-6										
β	10	8	7	6	5.5	5	4.5	4	3.5	3.25
#conf	250	250	250	250	250	250	250	250	250	250

表 9.1: 配位数

L-8										
β	10	8	7	6	5.5	5	4.5	4	3.5	3.25
#conf	250	250	250	250	250	250	250	250	250	250

表 9.2: 配位数

ポリャコフループの相関関数の比の測定値 r_poly は、各 $\beta = \frac{4}{g_0^2}$ 、各 L で以下のようになった (表 9.5 -9.8)。

L-12										
β	10	8	7	6	5.5	5	4.5	4	3.5	3.25
#conf	250	250	250	250	250	250	250	250	250	-

表 9.3: 配位数

L-16										
β	10	8	7	6	5.5	5	4.5	4	3.5	3.25
#conf	298	308	227	221	199	147	168	128	90	-

表 9.4: 配位数

L-6	
β	r_poly
10.00	$6.429(55) \times 10^{-3}$
8.00	$7.947(58) \times 10^{-3}$
7.00	$9.090(84) \times 10^{-3}$
6.00	$1.079(96) \times 10^{-2}$
5.50	$1.147(11) \times 10^{-2}$
5.00	$1.277(11) \times 10^{-2}$
4.50	$1.394(21) \times 10^{-2}$
4.00	$1.581(23) \times 10^{-2}$
3.50	$1.839(23) \times 10^{-2}$
3.25	$2.032(29) \times 10^{-2}$

表 9.5: L-6 における各 $\beta = \frac{4}{g_0}$ での r_poly の測定値と統計誤差

L- 8	
β	r_poly
10.00	$6.733(63) \times 10^{-3}$
8.00	$8.390(80) \times 10^{-3}$
7.00	$9.718(11) \times 10^{-3}$
6.00	$1.114(14) \times 10^{-2}$
5.50	$1.231(17) \times 10^{-2}$
5.00	$1.331(20) \times 10^{-2}$
4.50	$1.481(22) \times 10^{-2}$
4.00	$1.752(26) \times 10^{-2}$
3.50	$2.017(36) \times 10^{-2}$
3.25	$2.044(50) \times 10^{-2}$

表 9.6: L-8 における各 $\beta = \frac{4}{g_0^2}$ での r_poly の測定値と統計誤差

L- 12	
β	r_poly
10.00	$6.864(80) \times 10^{-3}$
8.00	$8.685(17) \times 10^{-3}$
7.00	$1.019(17) \times 10^{-2}$
6.00	$1.149(21) \times 10^{-2}$
5.50	$1.307(26) \times 10^{-2}$
5.00	$1.449(27) \times 10^{-2}$
4.50	$1.627(30) \times 10^{-2}$
4.00	$1.810(47) \times 10^{-2}$
3.50	$2.100(51) \times 10^{-2}$

表 9.7: L-12 における各 $\beta = \frac{4}{g_0^2}$ での r_poly の測定値と統計誤差

L- 16	r_poly
β	
10.00	$7.270(14) \times 10^{-3}$
8.00	$8.968(15) \times 10^{-3}$
7.00	$1.001(21) \times 10^{-2}$
6.00	$1.249(27) \times 10^{-2}$
5.50	$1.345(33) \times 10^{-2}$
5.00	$1.498(54) \times 10^{-2}$
4.50	$1.635(52) \times 10^{-2}$
4.00	$1.907(87) \times 10^{-2}$
3.50	$2.28(10) \times 10^{-2}$

表 9.8: L-16 における各 $\beta = \frac{4}{96}$ での r_poly の測定値と統計誤差

L	a	b	$\chi^2/d.o.f$
6	-4.20 ± 0.23	10.89 ± 1.04	1.42 ± 0.77
8	-1.91 ± 0.30	6.14 ± 1.40	1.62 ± 0.86
12	-0.61 ± 0.63	5.89 ± 2.96	0.92 ± 0.59
16	0.72 ± 0.82	3.75 ± 4.38	0.84 ± 0.76

表 9.9: #1 のフィット関数の係数と $\chi^2/d.o.f$

9.2 解析

まず統計誤差の評価は、 $\#bin=25$ のジャックナイフ法で行った。実際にステップスケールリングを行うために、各ビン、各格子サイズごとに前述した β の内挿を内挿を行った。

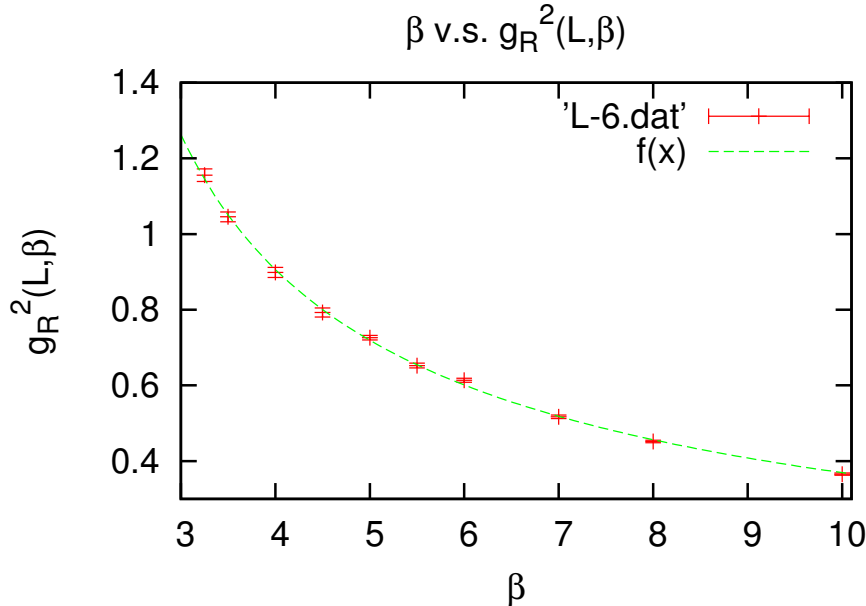


図 9.1: L-6 での β の内挿、縦軸が $u = g_R(L, \beta)$ 横軸が $\beta = 4/g_0^2$ 。 $f(x)$ は内挿関数 $u(\beta)$ 。誤差棒は統計誤差

フィットパラメータを a 、 b として内挿関数

$$u = \frac{4}{\beta} + \frac{a}{\beta^2} + \frac{b}{\beta^3} \quad (9.2.1)$$

として β の内挿を行った。フィットの良さの指標である $\chi^2/d.o.f.$ はすべてのビン、すべての格子サイズで 1 程度だった (表 9.9)。

9.3 シミュレーション結果

用いたリソースは、大阪大学 RCNP にあるベクトル型スーパーコンピュータの SX-8 と京都大学基礎物理学研究所 (YITP) にあるスカラー型スーパーコンピュータ SR16000 である。以下がシミュレーションで得たデータを解析した結果である (図 9.7)。縦軸が $\sigma(u, 2)/u$ 、横軸が有効結合定数 u で、赤い点がステップスケールリング (定数フィット) の中心値で赤い線が統計誤差、青い線が摂動論 (2 ループ) の結果を用いた $\sigma(u, 2)/u^1$ で、緑色の線が成長率 $\sigma(u, s)/u = 1$ を表す。一番上の 0 番目は入力値で、その下左からステップ番号、 $\sigma(u, 2)$ 、

¹付録参照

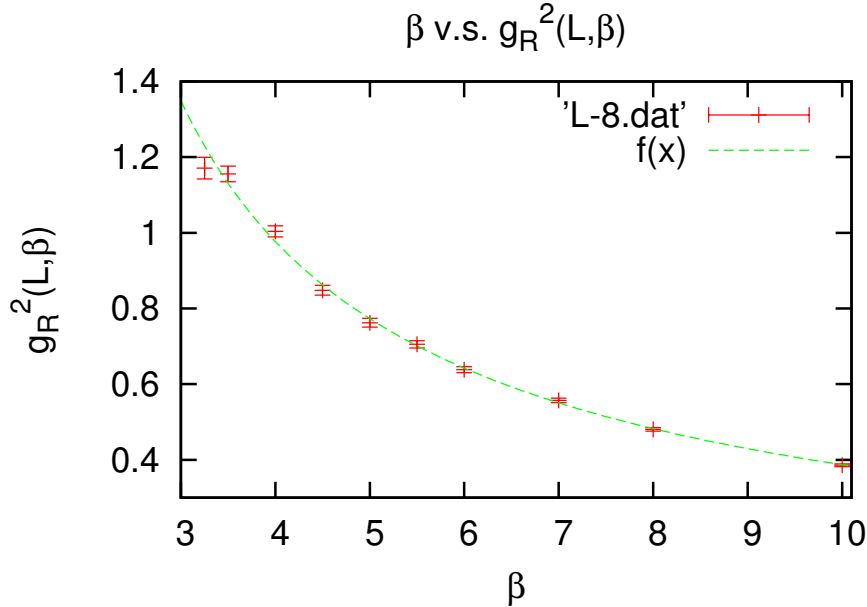


図 9.2: L-8 での β の内挿、縦軸が $u = g_R(L, \beta)$ 横軸が $\beta = 4/g_0^2$ 。 $f(x)$ は内挿関数 $u(\beta)$ 。誤差棒は統計誤差

統計誤差である。また、 $u = 0.4$ からスタートしたステップスケールリングは、以下のとおりになった (表 9.10)。

# step	$\sigma(u, 2)$
0	$4.000000000000000 \times 10^{-1}$
1	$4.270(56) \times 10^{-1}$
2	$4.585(13) \times 10^{-1}$
3	$4.955(23) \times 10^{-1}$
4	$5.401(37) \times 10^{-1}$
5	$5.951(57) \times 10^{-1}$
6	$6.654(88) \times 10^{-1}$

表 9.10: $u=0.4$ から始めたステップスケールリング。

9.4 問題点と解法

なぜこのような結果に至ったか考察し、今後の方針を述べる。まず (図 9.7) について考察する。この図で気になるのは、エラーバーの大きさである。これは L-16 の低い β の統計が足りない事がある。先行研究の統計は分からないので、[10] と比較はできないが今後も統計を貯めることでこの問題は解決できる。

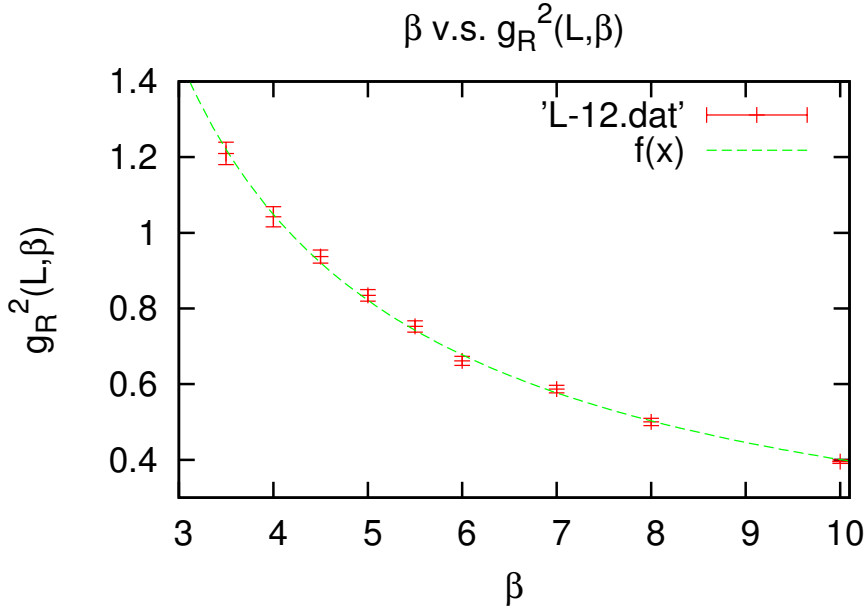


図 9.3: L-12 での β の内挿、縦軸が $u = g_R(L, \beta)$ 横軸が $\beta = 4/g_0^2$ 。 $f(x)$ は内挿関数 $u(\beta)$ 。誤差棒は統計誤差

さらに、明らかな問題点としては、連続極限が 2 点の定数フィットしかできていない事である。これでは、連続極限 (外挿) で生じる系統誤差を評価できない。連続極限の系統誤差を評価するには、3 点の定数フィットと 3 点線形フィットを比べる必要がある。

$s = 2$ のスキームで、3 点の連続極限を今の格子セットでやるには、L-6,8,10 を小さい方の格子、L-12,16,20 を大きい方の格子とするしかないが²、L-20 は、今回の解析に間に合わなかった。時間をかければこれも可能である。

$s = 1.5$ のスキームで、3 点の連続極限を今の格子セットでやるには、L-6,8,10 を小さい方の格子、L-9,12,15 を大きい方の格子とするしかない。この時には、L の内挿という操作で L-9、L-15 のデータを作らなければならない。具体的には L-8、L-10 から L-9 を作り、L-12、L-16 から L-15 を作る³。今回の解析では、これも間に合わなかった。理由は、以下である。

今回、シミュレーションを大きい β 、すなわち弱結合から順に行なっていった。しかし $\beta - 3$ 以下になると、同じ配位数を作るシミュレーションする時間が約 1000 倍ほど⁴になってしまった。この現象を解明するために我々は、シミュレーションコストの低い L-4 のシミュレーションでプラケットの平均値の質量依存性をしらべたり、 β とプラケットの値が

²コードの設計上、奇数サイズの格子は作れない。また、L-4 は格子化の影響が大きい

³しかし、実際には、2 つの格子サイズから 1 つの格子サイズを作れば良いという規則はなく、より大きいもしくは、より小さい格子のデータを含む 3 点の 2 次式によるフィットも試し、値がそんなにかかわらないかどうかを調べる必要がある。

⁴リープフロッグの時の離散化のステップを 1600 分の 1 程度にしないとフェルミオンのソルバーが解き終わらずにエラーになるため。

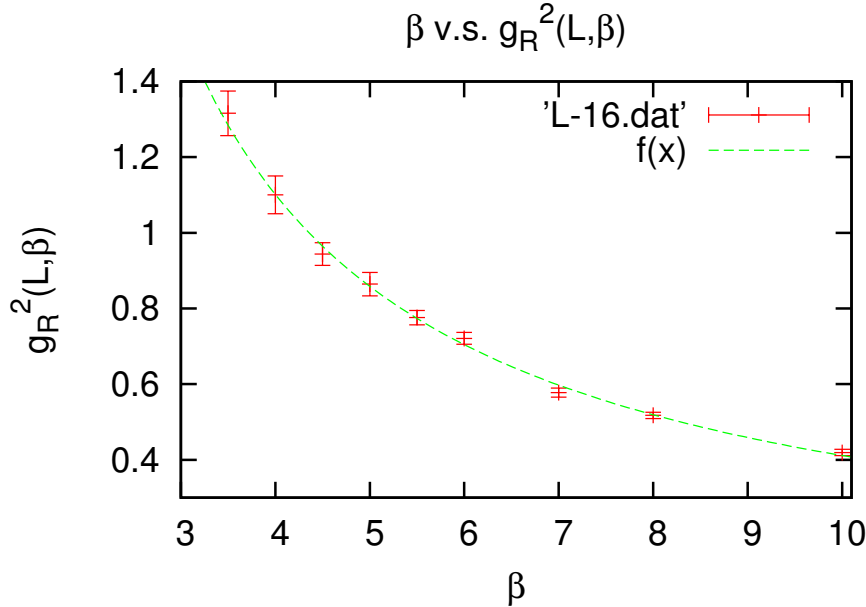


図 9.4: L-16 での β の内挿、縦軸が $u = g_R(L, \beta)$ 横軸が $\beta = 4/g_0^2$ 。 $f(x)$ は内挿関数 $u(\beta)$ 。誤差棒は統計誤差

どう相関するかを調べたが原因は分からなかった。

[14] によると、格子化による紫外固定点の出現が原因の可能性がある。その研究でも同様に β 以下のシミュレーションが走らないという現象が見られた。そこで、ブラケット作用に、負の β を持つ随伴表現のブラケットを足すことでより低い β のシミュレーションが可能になった。そこで今後我々も低い β のシミュレーションを行うため [14] に従って随伴表現のブラケットを加える事を計画している。これは、シミュレーション中の 'フォース' の計算式を一部変更するだけで可能なのですぐにでも行う予定である。

9.5 結論

今回のシミュレーションでは固定点の発見には至らなかった。原因は、3つある。1つ目は、統計数が足りないこと。2つ目は、L-20 のデータがない事。3つ目は、格子化による紫外固定点の出現である。前の2つは、シミュレーション回数を増やす事で解決出来る。3つ目は随伴表現のブラケットを加えることで回避が可能であると思われる。

9.6 今後の課題

結論で述べたとおり、まずは作用の改良を行い、かつ統計を貯め固定点の存在に決着をつける。

次に FCNC 問題の要である異常次元の決定を行う。

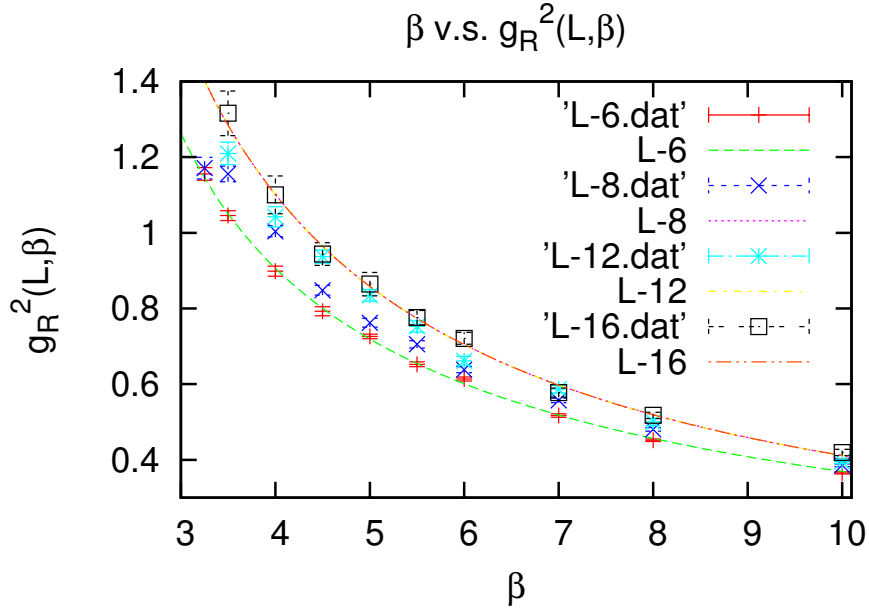


図 9.5: L-6,8,12,16 での β の内挿、縦軸が $u = g_R(L, \beta)$ 横軸が $\beta = 4/g_0^2$ 。誤差棒は統計誤差

さらには、ウォーキングモデルでは、シュウィンガーダイソン方程式のはしご近似で S パラメータを負にしうる、という予言が正しいかを、格子シミュレーションを用いて S パラメータの直接の決定により確かめたい。

もし、固定点が存在し、異常次元が十分大きければ、フェルミオンに質量を入れて、このモデルの質量スペクトルを調べたい。そしてテクニハドロンのようなダークマターが現実的なのか？と宇宙論への応用も考えたい。

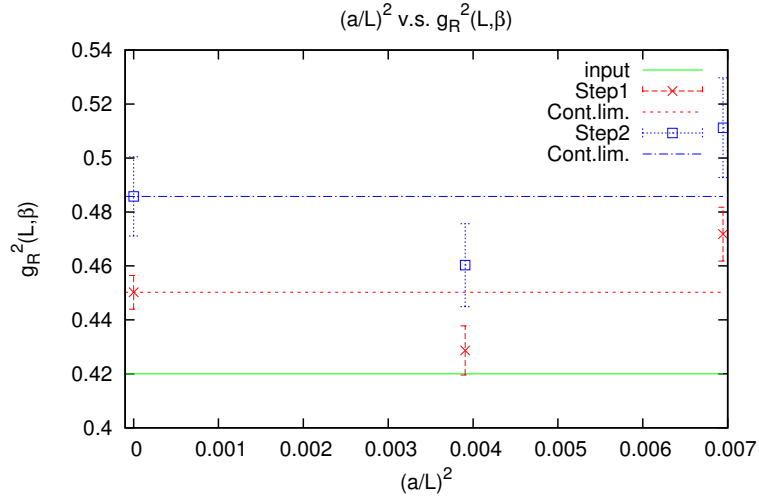


図 9.6: $\Sigma(a/L, u, 2)$ と $(a/L)^2$ の結果グラフ。誤差棒は統計誤差のみである。緑の線がインプットの u 、赤が 1 回目のステップで、青が赤をインプットとした時のステップ。左端が連続極限 (外挿)。

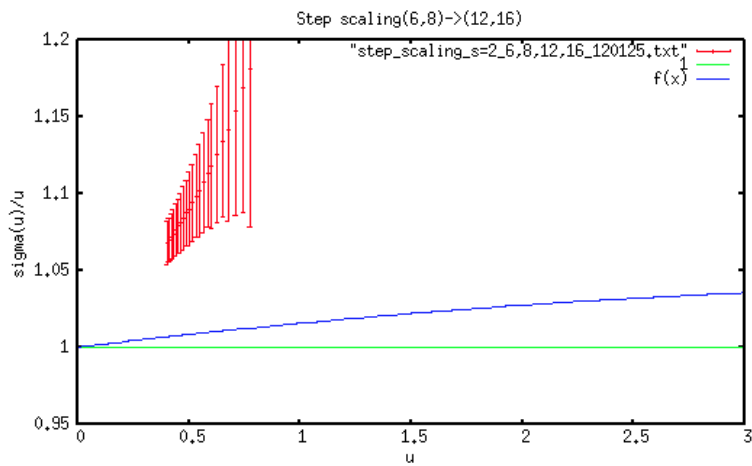


図 9.7: $\sigma(u, 2)/u$ と u の結果グラフ。誤差棒は統計誤差のみである

付録A A_{FB} の計算

ここでは、[2][12] を元に散乱断面積の定義を述べ、前方散乱と後方散乱のズレである A_{FB} を求める。この量は、電弱対称性の機構に依存する量である。

A.1 散乱断面積

S 行列は、始状態 i の状態ベクトルを終状態 f の状態ベクトルに移す演算子 (行列) として定義される。

$$\langle f|S|i\rangle \quad (\text{A.1.1})$$

しかし、この中には相互作用をせずに素通りする効果を含んでる。素通りには興味が無いので、 S 行列の中で相互作用を記述する部分を切り出す。

$$S = 1 + iT \quad (\text{A.1.2})$$

ここで 1 は素通りの効果をあらわし、 T は遷移行列と呼ばれ始状態 i から終状態 f へ遷移する確率振幅を表す。以下ではスピン 0 の粒子から散乱断面積を求め、あとでスピンのある粒子に対して拡張する。

まず 2 体から 2 体への散乱過程 $a(p_a) + b(p_b) \rightarrow c(p_c) + d(p_d)$ を考えてみる。この過程の遷移行列を、運動による部分をくくりだして

$$T_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b - p_c - p_d) N_a N_b N_c N_d \mathcal{M}_{fi} \quad (\text{A.1.3})$$

と書く。(A.1.3) において遷移のダイナミクスの情報は、ローレンツ不変で不変振幅と呼ばれる \mathcal{M}_{fi} に含まれている。 N は、波動関数の規格化定数に依存した規格化定数である。ここでは、体積 V の中に $2E$ 個の粒子が含まれているように規格化を行う。すなわち $N = \frac{1}{\sqrt{V}}$ として自由場の波動関数が

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-ipx} \quad (\text{A.1.4})$$

となる。これは $\rho = i(\phi^* \partial_0 \phi - \partial_0 \phi^* \phi) = \frac{2E}{V}$ として $\int \rho dV = 2E$ を導く。(A.1.3) の全ての N に $N = \frac{1}{\sqrt{V}}$ を代入すると、

$$T_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b - p_c - p_d) \frac{1}{V^2} \mathcal{M}_{fi} \quad (\text{A.1.5})$$

以上が確率振幅である。場の量子論においては、全時空点で反応が起こっているため、遷移確率密度 (単位時間、単位体積あたりの遷移確率) のみが意味を持つ。衝突による遷移確率密度は、

$$W_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{TV} \quad (\text{A.1.6})$$

と与えられる。ただし T は反応時間である。ここでデルタ関数をフーリエ変換で表示した

$$[\delta^4(Q)]^2 \rightarrow \delta^4(Q) \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{iQx} (Q=0) = \delta^4(Q) \frac{VT}{(2\pi)^4} \quad (\text{A.1.7})$$

という関係式を用いると遷移確率密度 W_{fi} は、

$$W_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{V^4} \delta^4(p_a + p_b - p_c - p_d) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \quad (\text{A.1.8})$$

となる。遷移確率密度 (A.1.8) に、可能な終状態の数をかけて出てくる粒子数になり、それを入射フラックス (\sim 入ってくる粒子数) で割れば、微分散乱断面積 σ を得られる。

運動量空間で $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ から $\vec{p} + d\vec{p} = (p_x + dp_x, p_y + dp_y, p_z + dp_z)$ にある粒子が体積 V に閉じ込められている場合の状態数は $\frac{V d^3p}{(2\pi)^3}$ である。

規格化は、 V の中に $2E$ の粒子がいるようにしてあるので、1 粒子あたりの状態数は $\frac{V d^3p}{(2\pi)^3 2E}$

である。よって、 $a + b \rightarrow c + d$ という過程の可能な終状態の数は $\frac{V d^3p_c}{(2\pi)^3 2E_c} \frac{V d^3p_d}{(2\pi)^3 2E_d}$ となる。

入射フラックス F についてはまずこの過程を b 粒子の静止系で考えてみる。この時には、単位面積を単位時間に通る a 粒子の数は $\frac{2E_a}{V} |\vec{v}_{in}|$ である。ただし \vec{v}_{in} は入射してくる a 粒子の速度である。そして標的である b 粒子の単位体積あたりの数は、 $\frac{2E_b}{V}$ である。

なので、 a 粒子 b 粒子による入射フラックスは、 $F = |\vec{v}_{in}| \frac{2E_a}{V} \frac{2E_b}{V}$ となる。

上記をまとめると微分散乱断面積を以下のように得る。

$$\begin{aligned} d\sigma(a + b \rightarrow c + d) &= \frac{1}{|\vec{v}_{in}| 4E_a E_b} \frac{1}{(2\pi)^2} \delta^4(p_a + p_b - p_c - p_d) \\ &\times \frac{d^3p_c}{2E_c} \frac{d^3p_d}{2E_d} |\mathcal{M}(a + b \rightarrow c + d)|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.1.9})$$

規格化体積 V は (A.1.9) から消えている。これは元々 V が自然なパラメータではないので当然である。なので $V = 1$ としても一般性を失わないので以後こうする。また対応する波動関数の規格化は $N = 1$ となる。

a と b の一般の正面衝突では、実験系の入射フラックス $F = |\vec{v}_{in}| 2E_a 2E_b$ の \vec{v}_{in} (これは入射してくる a 粒子の速度) は、 \vec{v}_{rel} (a と b の相対速度) に置き換えられる。 F は、ローレンツ不変な形に書き換えられ、

$$\begin{aligned} F &= |\vec{v}_{in}| 2E_a 2E_b = 4|\vec{v}_a - \vec{v}_b| E_a E_b \\ &= 4(|\vec{p}_a| E_a + |\vec{p}_b| E_b) = 4\sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2} \end{aligned} \quad (\text{A.1.10})$$

となるので、

$$d\sigma(a+b \rightarrow c+d) = \frac{1}{4\sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}} \frac{1}{(2\pi)^2} \delta^4(p_a + p_b - p_c - p_d) \\ \times \frac{d^3 p_c}{2E_c} \frac{d^3 p_d}{2E_d} |\mathcal{M}(a+b \rightarrow c+d)|^2$$

となる。

偏極していないなら、フェルミオンなどのスピンを持った粒子に一般化するには、スピンの自由度は終状態では足し上げられ、初期状態においては平均されているから (A.1.9) に現れる $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ を $\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} = \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_{fi}|^2$ に置き換えればよい。

ただしフェルミオンについて波動関数の規格化は、 s をスピンとして以下であるとする。

$$\bar{u}^{(s)}(p)u^{(s)}(p) = 2m, \quad \bar{v}^{(s)}(p)v^{(s)}(p) = -2m \quad (\text{A.1.11})$$

そして完全性は、

$$\sum_s u^{(s)}(p)\bar{u}^{(s)}(p) = \not{p} + m \\ \sum_s v^{(s)}(p)\bar{v}^{(s)}(p) = \not{p} - m \quad (\text{A.1.12})$$

である。ただし $\not{p} = p^\mu \gamma_\mu$ である。この式と γ 行列のトレースを用いて散乱断面積を求める。

まとめると、2体散乱の微分散乱断面積は、

$$d\sigma(a+b \rightarrow c+d) = \frac{1}{4\sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}} \frac{1}{(2\pi)^2} \delta^4(p_a + p_b - p_c - p_d) \\ \times \frac{d^3 p_c}{2E_c} \frac{d^3 p_d}{2E_d} \sum_{\text{spin}} \overline{|\mathcal{M}(a+b \rightarrow c+d)|^2} \quad (\text{A.1.13})$$

となり、これを積分すれば全断面積になる¹。また特にあとで用いる重心系するとき微分散乱面積は、

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} \propto \overline{|\mathcal{M}(a+b \rightarrow c+d)|^2} \quad (\text{A.1.15})$$

と簡単になる。

¹以下の公式が便利である。

$$\frac{d^3 p}{2E} = \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) d^4 p \quad (\text{A.1.14})$$

ここで $\theta(x)$ は階段関数である。

崩壊幅

以降の計算には用いないが崩壊幅も同様に求まる。質量 M の粒子が n 個の粒子に崩壊する幅は、親粒子の静止系で以下のように書かれる。

$$\begin{aligned} d\Gamma(M \rightarrow 1 + 2 + \cdots n) &= \frac{1}{2M} \frac{1}{(2\pi)^{(3n-1)}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \delta^4(p_a + p_b - p_1 - p_2 - \cdots - p_n) \\ &\times \frac{d^3p_1}{2E_1} \frac{d^3p_2}{2E_2} \cdots \frac{d^3p_n}{2E_n} \end{aligned} \quad (\text{A.1.16})$$

この崩壊幅を異なる終状態について足すと全崩壊幅が得られ、それ逆数が親粒子の寿命になる。

A.1.1 ファインマンルールとの関係

まず、ファインマンルールはラグランジアンが与えられるとそこから読み取ることが出来る。そして特定の過程に対する不変振幅 \mathcal{M}_{fi} は、ファインマンルールをもちいて外線、プロパゲーター（内線）、そしてヴァーテックスを組み合わせファインマンダイアグラムをかき、反応過程を表す起こりうる全てのファインマンダイアグラムを足し上げれば良い（ただし、外線だけがつながった図形は素通りの効果を表すので除いておく）。つまり \mathcal{M}_{fi} は、

$$i\mathcal{M}_{fi} = \{ \text{外線とつながった } i \rightarrow f \text{ となるダイアグラムの全ての和} \}$$

なので、ラグランジアンが与えられると散乱断面積を求めることが出来ることになる。

ラグランジアン \mathcal{L} の場について 2 次の部分 \mathcal{L}_0 は、ファインマンルールとしてプロパゲータを生み出し、より高次の部分 \mathcal{L}_{int} はバーテックスのルールを生み出す。具体的には、 $i\mathcal{L}_{\text{int}}$ の摂動になる。

A.2 A_{FB}

A_{FB} (FB; Forward Backward Asymmetry) は、偏極していない電子と陽電子が正面衝突し、反応後出てきた粒子の入射電子から見た前方に出ていく粒子の数と後方から出ていく数の差（非対称性）をはかる量である（図 A.1）。これを数式を用いて書くと、

$$A_{FB}^f \equiv \frac{\int_0^1 d\cos\theta \frac{d\sigma(e^-e^+ \rightarrow f\bar{f})}{d\cos\theta} - \int_{-1}^0 d\cos\theta \frac{d\sigma(e^-e^+ \rightarrow f\bar{f})}{d\cos\theta}}{\int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{d\sigma(e^-e^+ \rightarrow f\bar{f})}{d\cos\theta}} \quad (\text{A.2.1})$$

の様に表現できる。つまり、

$$d\sigma(e^-e^+ \rightarrow f\bar{f}) \quad (\text{A.2.2})$$

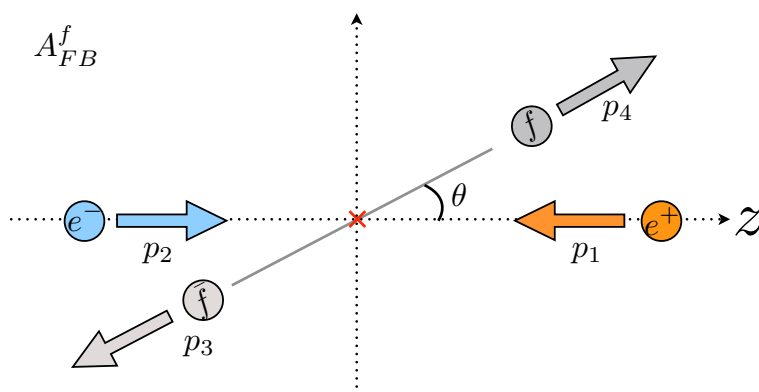
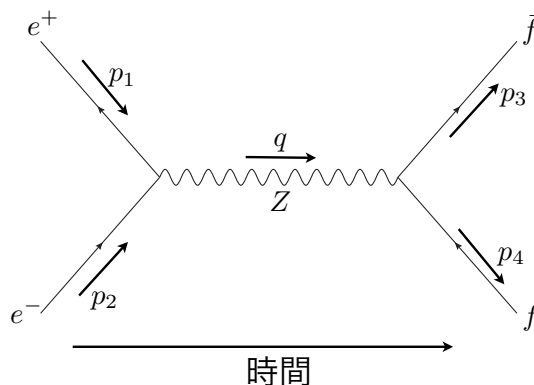
図 A.1: A_{FB}^f の図

図 A.2: ファインマンダイアグラム

の表式が得られれば良いことになる。前節までの議論を用いるために、まず不変振幅 \mathcal{M} を求める。これは、以下の様なファインマンダイアグラムで表される (A.2)。そして、ファインマンルールは以下である (図 A.3) (図 A.4)。

すなわち不変振幅は、

$$i\mathcal{M} = \bar{v}(p_1) i\Gamma_e^\mu u(p_2) iG_{\mu\nu} \bar{u}(p_4) i\Gamma_f^\nu v(p_3) \quad (\text{A.2.3})$$

となる。これの絶対値の 2 乗² の初状態のスピン平均と終状態のスピン和をとったものが必要である。ここで単純化のために次の近似を行う。つまり、外線に現れるフェルミオンが途中

²まず、数の複素共役とエルミート共役が同じで γ^0 のエルミート性により、

$$(\bar{u}\Gamma^\mu v)^* = (\bar{u}\Gamma^\mu v)^\dagger = (u^\dagger \gamma^0 \Gamma^\mu v)^\dagger = v^\dagger (\Gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 u \quad (\text{A.2.4})$$

とできる。 $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$ と $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ なので、

$$(\bar{u}\Gamma^\mu v)^* = \bar{v}\Gamma^\mu u \quad (\text{A.2.5})$$

である事を用いる。

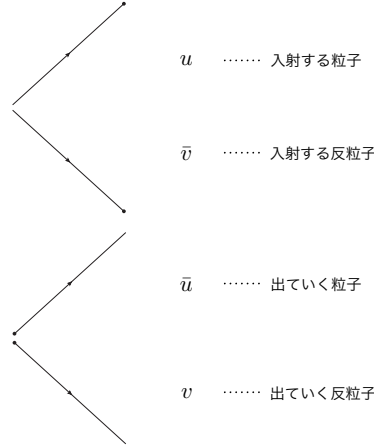


図 A.3: 外線のファインマンルール

バーテックス

$$i\Gamma_f^\mu = i(g_L^f \gamma^\mu P_L + g_R^f \gamma^\mu P_R)$$

$$P_L = \frac{1-\gamma^5}{2}, P_R = \frac{1+\gamma^5}{2}$$

$$= i(g_V^f \gamma^\mu - g_A^f \gamma^\mu \gamma^5)$$

$$g_V^f = g_L^f + g_R^f$$

$$g_A^f = g_L^f - g_R^f$$

ゲージ場のプロパゲータ

$$\frac{-i(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_Z^2})}{q^2 - m_Z^2 + i\epsilon} = -iG_{\mu\nu}$$

図 A.4: バーテックスとゲージ場のプロパゲーターのルール

に飛ぶゲージボソンに比べ十分軽いとき、すなわち $\frac{m_f^2}{m_Z^2} \ll 1$ である時、 $G_{\mu\nu}(q) \cong \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 - m_Z^2 + i\epsilon}$ とできることを用いる。このとき、

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} \mathcal{M} \mathcal{M}^* \quad (\text{A.2.6})$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{q^2 - m_Z^2 + i\epsilon} \right)^2 \sum_{\text{spin}} \bar{v}(p_1) \Gamma_e^\mu u(p_2) \bar{u}(p_4) \Gamma_{f\mu} v(p_3) \bar{v}(p_3) \Gamma_{f\nu} u(p_4) \bar{u}(p_2) \Gamma_e^\nu v(p_1) \quad (\text{A.2.7})$$

これはスピノルの足をあらわに書き、 $\left(\frac{1}{q^2 - m_Z^2 + i\epsilon} \right)^2 = f(q^2)$ とすると、

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{f(q^2)}{4} \sum_{\text{spin}} \bar{v}_a(p_1) \Gamma_{eab}^\mu u_b(p_2) \bar{u}(p_4)_c \Gamma_{f\mu cd} v_d(p_3) \bar{v}(p_3)_f \Gamma_{f\nu fg} u_g(p_4) \bar{u}(p_2)_h \Gamma_{ehi}^\nu v_i(p_1) \quad (\text{A.2.8})$$

外線に現れるフェルミオンの質量を無視するので、 $\sum_{\text{spin}} u_i(p)\bar{u}_j(p) = \sum_{\text{spin}} v_i(p)\bar{v}_j(p) = \not{p}_{ij}$ 、ただし $p^2 = E^2 - |\vec{p}|^2 = 0$ 、となるので

$$= \frac{f(q^2)}{4} \text{tr}[\not{p}_1 \Gamma_e^\mu \not{p}_2 \Gamma_e^\nu] \text{tr}[\not{p}_4 \Gamma_{f\mu} \not{p}_3 \Gamma_{f\nu}] \quad (\text{A.2.9})$$

ここで、

$$\Gamma_f^\mu = g_V^f \gamma^\mu - g_A^f \gamma^\mu \gamma^5$$

と置く。ただし

$$g_V^f = g_L^f + g_R^f \quad (\text{A.2.10})$$

$$g_A^f = g_L^f - g_R^f \quad (\text{A.2.11})$$

である。つまり各 Γ_f^μ には、 $g_V^f \gamma^\mu$ もしくは $-g_A^f \gamma^\mu \gamma^5$ が入ることになる。これを展開すると、 $2^4 = 16$ 項出てくることになる。

A.2.1 トレース公式

用いる γ 行列のトレース公式を列挙する。1つ目は、

$$\text{tr}[\not{p}\gamma^\mu \not{q}\gamma^\nu] = 4(p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu - (p \cdot q)g^{\mu\nu}) \quad (\text{A.2.12})$$

この式の特徴は、 μ と ν について対称であることである。2つ目は、 γ^5 を含むもので

$$\text{tr}[\not{p}\gamma^\mu \not{q}\gamma^\nu \gamma^5] = -4i\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} p_\alpha q_\beta \quad (\text{A.2.13})$$

ただし $\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}$ は完全反対称テンソル $\epsilon^{0123} = 1$ である。この式の特徴は、 μ と ν について反対称であることである。また、完全反対称テンソルについては、

$$\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} \epsilon_{\rho\mu\sigma\nu} = -2(\delta^\alpha_\rho \delta^\beta_\sigma - \delta^\alpha_\sigma \delta^\beta_\rho) \quad (\text{A.2.14})$$

を用いる。

A.2.2 トレースの分類

ここで、各トレースについて考えてみると、次の4パターン存在する事がわかる。

1. $\text{tr}[\not{p}\gamma^\mu \not{q}\gamma^\nu] \dots$ VV 型
2. $\text{tr}[\not{p}\gamma^\mu \not{q}\gamma^\nu \gamma^5] \dots$ VA 型
3. $\text{tr}[\not{p}\gamma^\mu \gamma^5 \not{q}\gamma^\nu] \dots$ AV 型
4. $\text{tr}[\not{p}\gamma^\mu \gamma^5 \not{q}\gamma^\nu \gamma^5] \dots$ AA 型

VV 型と VA 型については、トレース公式の項目で記したとおりである。AV 型については、 $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ から

$$\text{tr}[\not{p}\gamma^\mu\gamma^5\not{q}\gamma^\nu] = -\text{tr}[\not{p}\gamma^\mu\not{q}\gamma^5\gamma^\nu] \tag{A.2.15}$$

$$= \text{tr}[\not{p}\gamma^\mu\not{q}\gamma^\nu\gamma^5] \tag{A.2.16}$$

となり、VA 型に等しい。また、AA 型であるが、 $(\gamma^5)^2 = 1$ より、

$$\text{tr}[\not{p}\gamma^\mu\gamma^5\not{q}\gamma^\nu\gamma^5] = -\text{tr}[\not{p}\gamma^\mu\not{q}\gamma^5\gamma^\nu\gamma^5] \tag{A.2.17}$$

$$= \text{tr}[\not{p}\gamma^\mu\not{q}\gamma^\nu\gamma^5\gamma^5] \tag{A.2.18}$$

$$= \text{tr}[\not{p}\gamma^\mu\not{q}\gamma^\nu] \tag{A.2.19}$$

となり VV 型に等しい。

A.2.3 トレース積の分類

上の議論を用いるとトレースの積として

1. VV·VV
2. VV·VA
3. VA·VA

の 3 種のみが独立である。しかし VV 型は $\mu\nu$ について対称、VA 型は $\mu\nu$ について反対称なので、縮約を取ると VV·VA は恒等的に 0 である。つまりまとめると VVVV 型と VAVA 型の 2 種類のみが独立で (図 A.5) の様になる。ここで具体的に VVVV 型と VAVA 型の表

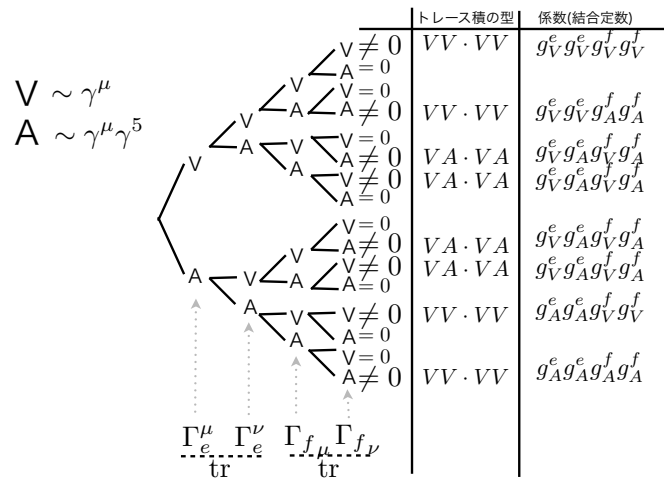


図 A.5: トレース積の分類とその係数

式を求めておく。VVVV 型は、トレース公式を用いると、結合定数に起因する係数を除いて、

$$\text{VVVV の項} \propto \text{tr}[\not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu] \text{tr}[\not{p}_4 \gamma_\mu \not{p}_3 \gamma_\nu] \quad (\text{A.2.20})$$

$$= 16[2(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + 2(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) - 3(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4)] \quad (\text{A.2.21})$$

ここでフェルミオン質量を無視する近似 $(p_1 \cdot p_2) = m_e^2 = 0$ なので結局、

$$\text{VVVV の項} \propto 32[(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4)] \quad (\text{A.2.22})$$

である。

また、VAVA 型は、トレース公式を用いると、結合定数に起因する係数を除いて、

$$\text{VAVA の項} \propto \text{tr}[\not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu \gamma^5] \text{tr}[\not{p}_4 \gamma_\mu \not{p}_3 \gamma_\nu \gamma^5] \quad (\text{A.2.23})$$

$$= 32[(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) - (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4)] \quad (\text{A.2.24})$$

である。

A.2.4 結合定数に起因する係数

現れる結合定数の積の組み合わせは (図 A.5) を見ると、次の通りである。

1. $g_V^e g_V^e g_V^f g_V^f \cdots$ VVVV 型の係数
2. $g_V^e g_V^e g_A^f g_A^f \cdots$ VVVV 型の係数
3. $g_A^e g_A^e g_V^f g_V^f \cdots$ VVVV 型の係数
4. $g_A^e g_A^e g_A^f g_A^f \cdots$ VVVV 型の係数
5. $g_V^e g_A^e g_V^f g_A^f \cdots$ VAVA 型の係数

1 ~ 4 は、VVVV 型の係数である。これを (A.2.10)(A.2.10) を用いて g_L と g_R の言葉に直してすべて足すと、

$$\text{VVVV 型の係数の和} = 4(g_L^e)^2 (g_L^f)^2 + 4(g_L^e)^2 (g_R^f)^2 + 4(g_R^e)^2 (g_L^f)^2 + 4(g_R^e)^2 (g_R^f)^2 \quad (\text{A.2.25})$$

となる。また、VAVA 型の係数も同様に、

$$\text{VAVA 型の係数} = 4(g_L^e)^2 (g_L^f)^2 - 4(g_L^e)^2 (g_R^f)^2 - 4(g_R^e)^2 (g_L^f)^2 + 4(g_R^e)^2 (g_R^f)^2 \quad (\text{A.2.26})$$

と求まる。

A.2.5 不変振幅の表式

以上をまとめると、 \mathcal{M} の表式は以下ようになる。

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 64f(q^2) \left[\{(g_L^e)^2(g_L^f)^2 + (g_L^e)^2(g_R^f)^2\}(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + \{(g_L^e)^2(g_R^f)^2 + (g_R^e)^2(g_L^f)^2\}(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) \right] \quad (\text{A.2.27})$$

ここで重心系に移る。このとき p_1 から p_4 は以下のようにとる。

$$p_1 = (E, -\vec{p}) \quad (\text{A.2.28})$$

$$p_2 = (E, \vec{p}) \quad (\text{A.2.29})$$

$$p_3 = (E, -\vec{q}) \quad (\text{A.2.30})$$

$$p_4 = (E, \vec{q}) \quad (\text{A.2.31})$$

すると、 \mathcal{M} の中の運動量の内積は、以下ようになる³。

$$(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) = E^4(1 + \cos \theta)^2 \quad (\text{A.2.32})$$

$$(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) = E^4(1 - \cos \theta)^2 \quad (\text{A.2.33})$$

なので不変振幅は、

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 64f(q^2) \left[\{(g_L^e)^2(g_L^f)^2 + (g_L^e)^2(g_R^f)^2\} \{E^4(1 + \cos \theta)^2\} + \{(g_L^e)^2(g_R^f)^2 + (g_R^e)^2(g_L^f)^2\} \{E^4(1 - \cos \theta)^2\} \right] \quad (\text{A.2.34})$$

$$\propto \left[\{(g_L^e)^2(g_L^f)^2 + (g_L^e)^2(g_R^f)^2\} \{E^4(1 + \cos \theta)^2\} + \{(g_L^e)^2(g_R^f)^2 + (g_R^e)^2(g_L^f)^2\} \{E^4(1 - \cos \theta)^2\} \right] \quad (\text{A.2.35})$$

$$\propto \left(\frac{d\sigma}{d \cos \theta} \right)_{\text{CM}} \quad (\text{A.2.36})$$

となる。

A.2.6 A_{FB} の表式

前小節で得た式を $\cos \theta$ について積分すれば、 A_{FB} を得る。表記を簡単にするために、 $(1 \pm \cos \theta)^2$ の係数を

$$A = \{(g_L^e)^2(g_L^f)^2 + (g_L^e)^2(g_R^f)^2\} E^4 \quad (\text{A.2.37})$$

$$B = \{(g_L^e)^2(g_R^f)^2 + (g_R^e)^2(g_L^f)^2\} E^4 \quad (\text{A.2.38})$$

と置く。この時 A_{FB} は、

$$A_{FB} = \frac{\int_0^1 d \cos \theta (A(1 + \cos \theta)^2 + B(1 - \cos \theta)^2) - \int_{-1}^0 d \cos \theta (A(1 + \cos \theta)^2 + B(1 - \cos \theta)^2)}{\int_{-1}^1 d \cos \theta (A(1 + \cos \theta)^2 + B(1 - \cos \theta)^2)} \quad (\text{A.2.39})$$

³例えば $(p_1 \cdot p_4)$ を求めてみると、 $(p_1 \cdot p_4) = E^2 + \vec{p} \cdot \vec{q} = E^2 + |\vec{p}||\vec{q}| \cos \theta = E^2 + E^2 \cos \theta = E^2(1 + \cos \theta)$ となる。

となる。

$$\int_a^b d \cos \theta (1 \pm \cos \theta)^2 = [(1 \pm x)^3]_{x=a}^{x=b}$$

を用いると、

$$A_{FB} \text{ の分子} = 2(A - B)$$

$$A_{FB} \text{ の分母} = \frac{8}{3}(A + B)$$

なので、

$$A_{FB}^f = \frac{3A - B}{4A + B} \quad (\text{A.2.40})$$

$$= \frac{3[(g_L^e)^2(g_L^f)^2 + (g_L^e)^2(g_R^f)^2] - [(g_L^e)^2(g_R^f)^2 + (g_R^e)^2(g_L^f)^2]}{4[(g_L^e)^2(g_L^f)^2 + (g_L^e)^2(g_R^f)^2] + [(g_L^e)^2(g_R^f)^2 + (g_R^e)^2(g_L^f)^2]} \quad (\text{A.2.41})$$

$$= \frac{3[(g_L^e)^2 - (g_R^e)^2][(g_L^f)^2 - (g_R^f)^2]}{4[(g_L^e)^2 + (g_R^e)^2][(g_L^f)^2 + (g_R^f)^2]} \quad (\text{A.2.42})$$

$g_L^f = I_{3f} - \sin^2 \theta_W Q_f$ 、 $g_R^f = \sin^2 \theta_W Q_f$ とした後、さらにパラメータをケネディ - リンの星付き量に $\sin \theta_W \rightarrow s_*$ と読み替えてみると、

$$A_{FB}^f = \frac{3[(-\frac{1}{2} + s_*^2)^2 - (s_*^2)^2][(I_{3f} - s_*^2 Q_f)^2 - (s_*^2 Q_f)^2]}{4[(-\frac{1}{2} + s_*^2)^2 + (s_*^2)^2][(I_{3f} - s_*^2 Q_f)^2 + (s_*^2 Q_f)^2]} \quad (\text{A.2.43})$$

これが本文で出てきた A_{FB}^f の表式である。

付録B 格子ゲージ理論のシミュレーション

B.1 経路積分による定式化

量子論において物理量は、その期待値のみを予言できる。経路積分によって量子化を行うと、ある物理量 \mathcal{O} の期待値は以下である。

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}(\phi) e^{iS[\phi]} \quad (\text{B.1.1})$$

ただし、 $\phi(x)$ は場、 $S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}[\phi(x)]$ は作用、 Z は分配関数 ($\langle 1 \rangle \equiv 1$ とする規格化因子) である。ユークリッド化した理論において $iS \rightarrow -S^{(eucl)}$ となるので、物理量を求める時

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}(\phi) e^{-S[\phi]} \quad (\text{B.1.2})$$

を求めれば良い。格子ゲージ理論の作用は以下であった。

$$S = S_G(U) + S_F(\psi, \bar{\psi}, U) = S_G(U) + \int d^4x (\bar{\psi}(D(U) + m)\psi) \quad (\text{B.1.3})$$

ただし $D(U) \equiv \not{D}$ としディラック演算子と呼ぶ。 \mathcal{O} をゲージ場 U とフェルミオン ψ 、 $\bar{\psi}$ を含む任意の演算子であるとするとその期待値は今の作用 S をもちいて

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{O}(\bar{\psi}, \psi, U) e^{-S}}{\int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S}} \quad (\text{B.1.4})$$

となる。計算機上でフェルミオンのようなグラスマン数は扱うことができない。そこで、先にフェルミオンを積分してしまう。

$$\int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{O}(\bar{\psi}, \psi, U) e^{-S} = \int \mathcal{D}U e^{-S_G(U)} \mathcal{O}\left(-\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}, \frac{\delta}{\delta\eta}, U\right) Z_F(\bar{\eta}, \eta) \Big|_{\eta, \bar{\eta}=0} \quad (\text{B.1.5})$$

ただし $Z_F(\bar{\eta}, \eta)$ は、フェルミオンの生成汎関数で、

$$Z_F(\bar{\eta}, \eta) \equiv \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[\int d^4x (-\bar{\psi}(D + m)\psi + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi) \right] \quad (\text{B.1.6})$$

$$= \det[D(U) + m] e^{\int d^4x (\bar{\eta}(D+m)^{-1}(U)\eta)} \quad (\text{B.1.7})$$

であり、また η と $\bar{\eta}$ はフェルミオンのようなソース項である。 $\mathcal{O}(\bar{\psi}, \psi, U)$ に $\psi\bar{\psi}$ という因子を含む項がある時を考える (もしなければ $\bar{\eta}$ 、 η 微分で 0 になる)。 ψ は $\bar{\eta}$ の微分に、 $\bar{\psi}$ は $-\eta$ の微

B.2. 詳細釣り合いを満たすマルコフ過程 付録 B. 格子ゲージ理論のシミュレーション

分に、それぞれ置き換えるので η 同士の反可換性より $\frac{\delta}{\delta\eta} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}} Z_F(\bar{\eta}, \eta)$ となる。 $\frac{\delta}{\delta\eta} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}} Z_F(\bar{\eta}, \eta)$ は、(B.1.7) を見ると $(D+m)^{-1}(U)$ つまりプロパゲーターを表すことがわかる。よってこの時、上の微分の組は演算子 \mathcal{O} の中でディラック演算子の逆、フェルミオンプロパゲーター $(D+m)^{-1}(U)$ にすれば良く、実際の操作としては、 $\bar{\psi}(x)\psi(y) \rightarrow (D+m)^{-1}_{x,y}(U)$ と表現すれば良い事になる。

格子上のディラック演算子 D の足を具体的に書くと、

$$D(U) = D(U)_{xy,\alpha\beta}^{AB,fg} = \delta_{fg} D(x,y)_{\alpha\beta}^{AB} \quad (\text{B.1.8})$$

$x = na$ 、 $y = n'a$ は座標 (a を格子間隔、 n, n' は整数)、 A, B はカラー、 α, β はスピノル f, g はフレーバーの足をそれぞれ表す。

B.2 詳細釣り合いを満たすマルコフ過程

この節では、期待値をとる配位の集団を生成するアルゴリズムであるハイブリッドモンテカルロ (HMC) 法の前提について述べる。まずは、その基礎付けを与える。

B.2.1 マルコフ鎖

マルコフ過程とは、確率過程の一種で、現在の系の状態と、次の状態を決めれば、次の状態への遷移確率が現在の状態と次の状態にのみ依るというものである。また、このマルコフ過程の生成する列のことをマルコフ鎖と呼ぶ。状態を C 、状態間の遷移確率を $P(C \rightarrow C')$ とし、適当な仮定として、任意の 2 状態が有限回数のマルコフ過程で移り変わる遷移確率が 0 でない (エルゴート性)、任意の状態は何回遷移してもその状態に留まったり戻ったりする確率が 0 でない、初期状態にもどる事ができる回数期待値と回数 2 乗の期待値が有限である、を置くとマルコフ過程は以下を満たす。

$$P_{eq}(C) = \sum_{C'} P_{eq}(C') P(C' \rightarrow C) \quad (\text{B.2.1a})$$

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \sum_C P_{eq}(C) \mathcal{O}(C) \quad (\text{B.2.1b})$$

ただし $P_{eq}(C)$ は無限回のマルコフ過程の後に状態 C に辿り着く確率で、初期状態に依らず、各 C ごとに唯一定まる¹。さらに $\sum_C P_{eq}(C) = 1$ と規格化されているとする。

ここでマルコフ過程 $P(C \rightarrow C')$ が詳細釣り合いの原理

$$e^{-S(C)} P(C \rightarrow C') = e^{-S(C')} P(C' \rightarrow C) \quad (\text{B.2.2})$$

を満たしかつ、規格化条件

$$\sum_{C'} P(C \rightarrow C') = 1 \quad (\text{B.2.3})$$

¹上記はすべて要証明で、[8][9] 参照

をみたすとする。このとき、

$$P_{eq}(C) = \frac{e^{-S(C)}}{\sum_C e^{-S(C)}} \quad (\text{B.2.4})$$

が満たされることを示す。

証明

(B.2.4) を仮定し、

$$\sum_{C'} P_{eq}(C') P(C' \rightarrow C) \quad (\text{B.2.5})$$

を考える。すると

$$= \sum_{C'} \frac{e^{-S(C')}}{\sum_{C''} e^{-S(C'')}} P(C' \rightarrow C) \quad (\text{B.2.6})$$

$$= \frac{1}{\sum_{C''} e^{-S(C'')}} \sum_{C'} e^{-S(C')} P(C' \rightarrow C) \quad (\text{B.2.7})$$

$$(\text{B.2.8})$$

詳細釣り合いをみたすので、

$$= \frac{1}{\sum_{C''} e^{-S(C'')}} \sum_{C'} e^{-S(C)} P(C \rightarrow C') \quad (\text{B.2.9})$$

$$= \frac{e^{-S(C)}}{\sum_{C''} e^{-S(C'')}} \sum_{C'} P(C \rightarrow C') \quad (\text{B.2.10})$$

$\sum_{C'} P(C \rightarrow C') = 1$ と規格化されているので、

$$= \frac{e^{-S(C)}}{\sum_{C''} e^{-S(C'')}} \quad (\text{B.2.11})$$

これは定義により $P_{eq}(C)$ なので、

$$\sum_{C'} P_{eq}(C') P(C' \rightarrow C) = P_{eq}(C) \quad (\text{B.2.12})$$

となり、前掲の式を再現する。 $P_{eq}(C)$ は唯一のみ存在できるので、仮定される分布以外ありえない。

以上により、詳細釣り合いの原理を満たすマルコフ過程が存在すればそれを用いて我々が欲しい確率分布を再現することが出来る。すなわち (B.2.1b) に (B.2.4) を代入すると、

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\sum_C \mathcal{O}(C) e^{-S(C)}}{\sum_{C'} e^{-S(C')}} \quad (\text{B.2.13})$$

証明は [8][9] に載っているが、以下で述べるハイブリッドモンテカルロ法というアルゴリズムは、詳細釣り合いの原理を満たすマルコフ過程である。以下では、マルコフ鎖のつく

る状態 (配位) C は、マルコフ過程の “回数” τ でラベルされているとする。これは、 n 回のマルコフ過程で作られる配位を C_n としたときの n を連続変数にしたものである。

B.2.2 ハイブリッドモンテカルロ法

このアルゴリズムは、ユークリッド化した 4 次元経路積分が、統計力学に似ているという事によっている。ここで言う統計系は、通常の統計系ではなく、シミュレーション時間、すなわちマルコフ鎖をラベルする新しい “時間” 変数をもった統計系である。シミュレーション時間を時間だと思った統計系での言葉は、“...” と書くことにする。“エルゴート性” と、カノニカルアンサンブルでの平均の熱力学極限が “エネルギー” が系のパラメータで決められているミクロカノニカルアンサンブルでの平均に一致する²、という事実を用いると “古典” 経路にそった “時間” 平均として系の期待値が求まる。以下ではハイブリッドモンテカルロ法のアイデアの動機について [9] を元に述べる。

古典統計力学との類推

ここでは、単純化のためにスカラー場の理論を考えていく。つまり作用 $S[\phi; \beta]$ が、スカラー場 ϕ とあるパラメータ β (例えば結合定数など) によっているとする。このとき物理量 \mathcal{O} の期待値は以下であった。

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int D\phi \mathcal{O}[\phi] e^{-S[\phi; \beta]} \quad (\text{B.2.14a})$$

ただし、

$$Z = \int D\phi e^{-S[\phi; \beta]} \quad (\text{B.2.14b})$$

である。時空を格子化したとすると、系の自由度は、格子上の座標 “ i ” でラベルされることになる。(B.2.14) は統計力学での積分に似ているが、明らかに Z は古典的なハミルトン系の分配関数はでない。しかし、共役運動量 π_i を導入するとその形にでき (B.2.14) は、

$$\mathcal{O} = \frac{1}{\bar{Z}} \int D\phi D\pi \mathcal{O}[\phi] e^{-H[\phi, \pi; \beta]} \quad (\text{B.2.15a})$$

ただし、

$$H[\phi, \pi; \beta] = \sum_i \frac{1}{2} \pi_i^2 + S[\phi; \beta] \quad (\text{B.2.15b})$$

$$\bar{Z} = \int D\phi D\pi e^{-H[\phi, \pi; \beta]} \quad (\text{B.2.15c})$$

²普通の統計力学系だと、エネルギーは系の温度によって決定されている。

となる。そして積分測度は通常通りに、

$$D\phi D\pi = \prod_i d\phi_i d\pi_i$$

となる。更にこの表式を以下のように書き換える。

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{can}}(\beta) = \frac{\int D\phi D\pi \mathcal{O}[\phi] \int dE \delta(H[\phi, \pi; \beta] - E) e^{-E}}{\int D\phi D\pi \int dE \delta(H[\phi, \pi; \beta] - E) e^{-E}} \quad (\text{B.2.16})$$

左辺において下付き文字で can と書いたのは、これがカノニカルアンサンブルでの平均であることをしめす。この量は β に依存する。

一方で、ミクロカノニカルアンサンブルでの平均 $\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{mic}}$ は等エネルギー曲面上 $E = H$ 上での平均で、与えられた β に対して、

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{mic}}(E, \beta) = \frac{1}{Z_{\text{mic}}(E, \beta)} \int D\phi D\pi \mathcal{O}[\phi] \delta(H[\phi, \pi; \beta] - E) \quad (\text{B.2.17a})$$

である。ただし、

$$Z_{\text{mic}}(E, \beta) = \int D\phi D\pi \delta(H[\phi, \pi; \beta] - E) \quad (\text{B.2.17b})$$

は、エネルギー E である相空間の体積である。2つのアンサンブル平均のつながりは、熱力学極限において考えることが出来る。系の“エントロピー”は、

$$s(E, \beta) = \ln Z_{\text{mic}}(E, \beta) \quad (\text{B.2.18})$$

と定義できる。(B.2.16) へ (B.2.17) と (B.2.18) を代入すると以下が得られる。

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{can}}(\beta) = \frac{\int dE \langle \mathcal{O} \rangle_{\text{mic}}(E, \beta) e^{-(E-s(E, \beta))}}{\int dE e^{-(E-s(E, \beta))}} \quad (\text{B.2.19})$$

系の自由度が十分大きい時、すなわち熱力学極限で、(B.2.19) の中の指数関数は、下式で陰的に与えられるエネルギー \bar{E} で強いピークを示す。

$$\left(\frac{\partial s(E, \beta)}{\partial E} \right)_{E=\bar{E}} = 0 \quad (\text{B.2.20})$$

よって熱力学極限では、色々なエネルギーの内、強いピークのために δ 関数的にこの 1 点 $E = \bar{E}$ のみが状態和に寄与して、

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{can}}(\beta) = [\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{mic}}]_{E=\bar{E}(\beta)} \quad (\text{B.2.21})$$

となる。ただし β と \bar{E} は (B.2.20) によって陰に関係付けられている。

この系 (B.2.15b) の運動方程式は

$$\dot{\phi}_i = \frac{\partial H[\phi, \pi]}{\partial \pi_i} \quad (\text{B.2.22a})$$

$$\dot{\pi}_i = -\frac{\partial H[\phi, \pi]}{\partial \phi_i} \quad (\text{B.2.22b})$$

であるが、これから作られる運動がエルゴートの、つまり配位空間をすべて覆い尽くすならこの運動の軌跡を用いて、相空間内で等エネルギーな配位の代表を成すアンサンブルを作ることが出来る。計算したい物理量は運動量に依らないので、ミクロカノニカルアンサンブルでの平均は、 $\phi_i(\tau)$ の時間平均に置き換えることができる。よって、系がエルゴートのであり、自由度が十分大きければ、

$$\langle O \rangle_{\text{can}}(\beta) \xrightarrow{\text{熱力学極限}} [\langle O \rangle_{\text{mic}}]_{E=\bar{E}(\beta)} \xrightarrow{\text{エルゴート性}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T d\tau \mathcal{O}(\{\phi_i(\tau)\}) \quad (\text{B.2.23})$$

となる。ここで軌跡 $\phi_i(\tau)$ は、

$$\frac{d^2 \phi_i}{d\tau^2} = -\frac{\partial S[\phi]}{\partial \phi_i} \quad (\text{B.2.24})$$

の解であり、エネルギー \bar{E} の初期条件をみたく³。

このアルゴリズムの優れた点は、各点で“時間”発展を計算すればよいので、非常に効率がよい事である。

ダメな点もある。エルゴート性は自明でなく、(B.2.22) が描く軌跡が配位空間を覆い尽くせるかはわからない事や、エルゴートのであったとしても (B.2.22) を単純にルンゲクッタ法などで数値積分すると離散化するとき発生する系統誤差が混入しハミルトニアンが保存せず正しい確率分布を与えなくなってしまうことだ。これを解決するために、ハイブリッドモンテカルロ法では、ガウス分布する乱数で与え、エルゴート性を確保し⁴、またリープ・フロッグ法とメトロポリス法という手法をもちいてハミルトニアンを保存させる。そして詳細釣り合いを満たす過程であるので正しい確率分布導くことも示すことが出来る。

つまりハイブリッドモンテカルロ法を用い、“時間”発展を N だけ数値計算をすると、

$$\langle O(\beta) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T d\tau \mathcal{O}(\{\phi_i(\tau)\}) \quad (\text{B.2.25})$$

$$\approx \frac{1}{N} \sum_n \mathcal{O}(\{\phi_i(n)\}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \quad (\text{B.2.26})$$

とでき、経路積分で表されている左辺を右辺を用いて統計誤差のみ⁵で評価できる。

HMC

ここから具体的にアルゴリズムを説明する。理論は簡単のために、ボゾンの多粒子系を考える。“時間” τ での座標を $\phi_i(\tau)$ とし、作用を $S(\phi(\tau))$ とする。ただし i は自由度の数だけ走り、連続場の理論にしたときに $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ となるものである。

まず、“時間” $\tau = 0$ での配位を初期条件として、 $\phi_i(\tau = 0)$ を決める。つぎに、量子ゆら

³運動はエルゴートのであるとしたので、このエネルギーを持つどんな初めの配位から (B.2.24) の積分を始めても良い。

⁴運動量を乱数にしない方法を分子動力学法といい、運動量を乱数であたえて量子ゆらぎを取り入れる方法をランジュバンアルゴリズムという [9]。

⁵要証明

B.2. 詳細釣り合いを満たすマルコフ過程 付録 B. 格子ゲージ理論のシミュレーション

ぎ (“統計系” で言うと “エルゴート性”) を含めるために、運動量 π_i を以下のガウス分布 $P(\pi)$ で生成する。

$$P(\pi) \propto e^{-\pi^2/2} \quad (\text{B.2.27})$$

この時、この系の “ハミルトニアン” は以下で与えられる。

$$H[\phi(\tau), \pi(\tau)] = \sum_i \frac{1}{2} \pi_i^2(\tau) + S(\phi(\tau)) \quad (\text{B.2.28})$$

つぎの配位を決める。具体的には以下の微分方程式にしたがって “時間” 発展させる。

$$\dot{\phi}_i(\tau) = \frac{\partial H[\phi(\tau), \pi(\tau)]}{\partial \pi_i(\tau)} = \pi_i(\tau) \quad (\text{B.2.29a})$$

$$\dot{\pi}_i(\tau) = -\frac{\partial H[\phi(\tau), \pi(\tau)]}{\partial \phi_i(\tau)} = -\frac{\partial S(\phi(\tau))}{\partial \phi_i(\tau)} \quad (\text{B.2.29b})$$

ただし、 $\dot{\phi}_i(\tau) = \frac{d\phi_i(\tau)}{d\tau}$ である。実際に数値計算をする場合、(B.2.29) を連続変数である τ を離散化し数値的に積分する必要がある。オイラー法やルンゲクッタ法を用いて積分することも可能であるが、毎回の “時間” 発展で離散化誤差という系統誤差が紛れ込み、シミュレーションを進めるとどんどん累積することになる。ハイブリッドモンテカルロ法では、リープ・フロッグ法という方法と確率的なテストであるメトロポリステストを組み合わせることにより、この “時間” を離散化する系統誤差の累積を消す。

$\Delta\tau = 1$ だけ積分する事を考え、この “時間” を N 等分 ($\epsilon \equiv 1/N$) に分割する。まず積分の初期条件を与える。

$$\phi_i(0) = \phi_i \quad (\text{B.2.30})$$

$$\pi_i(0) = \pi_i \quad (\text{B.2.31})$$

第 1 ステップとして、時間を半分進めた時の運動量を以下で作る。

$$\pi_i(1/2) = \pi_i(0) - \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial S(\phi(0))}{\partial \phi_i(0)} \quad (\text{B.2.32})$$

次にメインステップ ($n = 0, 1, 2, \dots, N-2$) として、

$$\phi_i(n+1) = \phi_i(n) + \epsilon \pi_i(n+1/2) \quad (\text{B.2.33})$$

$$\pi_i(n+3/2) = \pi_i(n+1/2) - \epsilon \frac{\partial S(\phi(n+1))}{\partial \phi_i(n+1)} \quad (\text{B.2.34})$$

を繰り返す。

最終ステップとして、

$$\phi'_i \equiv \phi_i(N) = \phi_i(N-1) + \epsilon \pi_i(N-1/2) \quad (\text{B.2.35})$$

$$\pi'_i \equiv \pi_i(N) = \pi_i(N-1/2) - \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial S(\phi(N))}{\partial \phi_i(N)} \quad (\text{B.2.36})$$

以上がリープ・フロッグ法である。

次に、メトロポリステストを行う。つまり得られた配位 ϕ'_i と π'_i を次の“時間”の配位として以下の確率で受け入れる。 $\Delta H \equiv H[\phi', \pi'] - H[\phi, \pi]$ として、

$$P_{\text{Met}}(\{\phi, \pi\} \rightarrow \{\phi', \pi'\}) = \min\{1, e^{-\Delta H}\} \quad (\text{B.2.37})$$

つまり、“エネルギー”が下がるなら受け入れ、“エネルギー”が上がるならその差のボルツマンウェイトで受け入れる。受け入れられれば、 $\{\phi, \pi\} \leftarrow \{\phi', \pi'\}$ と更新し、受け入れられなければ前の配位 $\{\phi, \pi\}$ を保持する。この操作により“時間”を離散化した系統誤差によって“エネルギー”を変化する事を防ぎ、正しい確率分布を得ることが出来る。

以上の操作を (B.2.27) から十分回数繰り返す。

HMC が詳細釣り合いを満たすことは、リープ・フロッグ法が可逆である事とメトロポリステストの性質を用いて示すことができる [8][9]。

B.2.3 HMC の適用

記法

この小節では、実際の非可換ゲージ理論の計算にハイブリッドモンテカルロ法と本文中で述べた擬フェルミオンを用いる方法を述べる。ここでは、 $D(U) + m$ を単純に $D(U)$ と書くことにするが $m = 0$ でも話は何も変わらない。格子上のゲージ理論がフェルミオンと結合している場合、上記の議論から次のハミルトニアンを持つ系のハイブリッドモンテカルロ法に従って運動させて、その軌跡から期待値を求めれば良い。

$$H = \frac{1}{2} \sum_l \text{tr} P_l^2 + S_G(U) + \phi^\dagger (D^\dagger(U) D(U))^{-1} \phi \quad (\text{B.2.38})$$

また、“統計系”としての分配関数は以下である。

$$Z = \int DU_l D\phi^\dagger D\phi DP_l e^{-H} \quad (\text{B.2.39})$$

上の表式では、擬フェルミオンの時空座標も行列の足にまとめた。また l はリンクを示し P_l はリンク変数 U_l の共役運動量で、ゲージ群の生成子 t^a を用いて $P_l = \sum_a P_l^a t^a$ と展開されている。

U_l の運動方程式を以下で定義する。

$$\dot{U}_l(\tau) = i P_l(\tau) U_l(\tau) \quad (\text{B.2.40})$$

P_l の運動方程式は、ハミルトニアンが運動で保存するという条件、すなわち $\dot{H} = 0$ から決定する。

$$\dot{H} = \sum_a P_l^a \dot{P}_l^a + i \sum_{ij} (P_l U_l)_{ij} \frac{\partial S(U)}{\partial (U_l)_{ij}} \quad (\text{B.2.41})$$

$$= \sum_a P_l^a \left[\dot{P}_l^a + i \sum_{ij} (t^a U_l)_{ij} \frac{\partial S(U)}{\partial (U_l)_{ij}} \right] \quad (\text{B.2.42})$$

よって、

$$\dot{P}_l^a = -i \sum_{ij} (t^a U_l)_{ij} \frac{\partial S(U)}{\partial (U_l)_{ij}} \quad (\text{B.2.43})$$

ただし、 $S(U) = S_G(U) + \phi^\dagger (D^\dagger(U)D(U))^{-1} \phi$ である。

$$D_l^a[f(U)] \equiv i \sum_{ij} (t^a U_l)_{ij} \frac{\partial f(U)}{\partial (U_l)_{ij}} \quad (\text{B.2.44})$$

という記法を導入すると運動方程式は、

$$\dot{P}_l^a = -D_l^a[S(U)] \quad (\text{B.2.45})$$

となる。この式の右辺がゲージ場の受ける“力”になる。

Full HMC

ここでは、フェルミオンの結合したゲージ理論に対する HMC の具体的なアルゴリズムを与える。

1. 初期配位 $\{U_l\}$ を決める。
2. 共役運動量 P_l^a を分布確率 $P(P_l^a) \propto e^{-(P_l^a)^2/2}$ で生成する。
3. 変数 ξ を分布確率 $P(\xi) \propto e^{-\xi^* \xi}$ で生成する。
4. ξ から擬フェルミオン ϕ を $\phi = D^\dagger(U)\xi$ と求める。このとき

$$e^{-\xi^* \xi/2} = \exp \left[-\phi^\dagger \left(D^\dagger(U)D(U) \right)^{-1} \phi \right] \quad (\text{B.2.46})$$

である。擬フェルミオン ϕ は分子動力学法の時間発展の間は変化させない。

$$\eta(\tau) = \left(D^\dagger(U(\tau))D(U(\tau)) \right)^{-1} \phi \quad (\text{B.2.47})$$

この式を求めるには、 $(D^\dagger D)^{-1}$ の表式を求める必要があるが、それについては後の節で述べる。

5. 運動方程式に従って系の“時間”発展を求める。

$$\dot{U}_l(\tau) = iP_l(\tau)U_l(\tau) \quad (\text{B.2.48})$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_l^a &= -D_l^a[S_G(U)] - \phi^\dagger D_l^a \left[\left(D^\dagger(U(\tau))D(U(\tau)) \right)^{-1} \right] \phi \\ &= -D_l^a[S_G(U)] - \eta^\dagger(\tau) D_l^a [D^\dagger(U(\tau))D(U(\tau))] \eta(\tau) \end{aligned} \quad (\text{B.2.49})$$

実際には、リーブ・フロッグ法で計算を行う。

6. メトロポリステストを行う。
新たな変数を確率 $P = \min\{a, e^{-\Delta H}\}$ (ただし $\Delta H = H' - H$)
7. 2.へ戻り任意回数繰り返す。

以上により、HMC を用いて正しい確率分布を生成することができる。

B.3 誤差の評価

誤差の評価にはジャックナイフ法 (JK 法; Jack knife method) を用いたので、それについてレビューを行う。

B.3.1 方法

まず、JK 法で正しく誤差を見積もれるかの証明の前に具体的な方法を述べる。物理量 \mathcal{O} の期待値を N 個の平均値で近似した時、平均値と推定される統計誤差は

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{O}_i \quad (\text{B.3.1})$$

$$\delta \langle \mathcal{O} \rangle = \sqrt{\frac{\langle \mathcal{O}^2 \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle^2}{N-1}} \quad (\text{B.3.2})$$

と与えられる。

複雑な物理量同士の関係から計算される物理量については、誤差の伝播則を用いて誤差を見積もる必要がある。

しかし、複雑な物理量の場合、誤差を過大に見積もってしまう。なぜなら、各物理量が無相関でないので、一部が相殺し真の誤差が推定誤差よりも小さくなり得るからだ。

JK 法は、そのような心配がない。

ビンサイズ (データの固まりの大きさ) が 1 の JK 法は、以下である。

まず、 N 個のデータがあるとする。このとき、 i 番目だけ除いた統計平均を用意する。

$$\langle \mathcal{O} \rangle_i = \frac{1}{N-1} \sum_{k \neq i} \mathcal{O}_k \quad (\text{B.3.3})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N \mathcal{O}_k (1 - \delta_{k,i}) \\ &= \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (\mathcal{O}_k - \mathcal{O}_k \delta_{k,i}) \\ &= \frac{1}{N-1} (N \langle \mathcal{O} \rangle - \mathcal{O}_i) \end{aligned} \quad (\text{B.3.4})$$

この $\langle \mathcal{O} \rangle_i$ をジャックナイフサンプルと呼ぶ。 \mathcal{O} から計算される物理量を $f(\mathcal{O})$ とする。この時、JK 法では平均値と誤差は、

$$\langle f(\mathcal{O}) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\langle \mathcal{O} \rangle_i) \quad (\text{B.3.5})$$

$$\delta \langle \mathcal{O} \rangle = \sqrt{(N-1) (\langle f(\mathcal{O})^2 \rangle - \langle f(\mathcal{O}) \rangle^2)} \quad (\text{B.3.6})$$

与えられる。これはつまり JK サンプルを用いて物理量を計算し、そののちに JK サンプルで計算した物理量を平均すれば良い事を示し、また誤差についてもほぼ同様だが、2 乗

の平均から平均の 2 乗を引いた後に、 $(N-1)$ で割らずにむしろ掛けてルートを取って見積もれ、ということである。

$f(\mathcal{O}) = O$ と簡単な物理量なとき、平均値は、

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O} \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \mathcal{O} \rangle_i \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{N-1} (N \langle \mathcal{O} \rangle - \mathcal{O}_i) \\ &= \frac{1}{N-1} (N \langle \mathcal{O} \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle) \\ &= \langle \mathcal{O} \rangle\end{aligned}$$

と普通の平均値に一致し、また誤差も、

$$\begin{aligned}\delta \langle \mathcal{O} \rangle &= \sqrt{(N-1)(\langle \mathcal{O}^2 \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle^2)} \\ &= \sqrt{(N-1)} \sqrt{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (\mathcal{O}_k - \mathcal{O}_k \delta_{k,i})^2 \right) - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (\mathcal{O}_k - \mathcal{O}_k \delta_{k,i}) \right) \right)^2 \right)}\end{aligned}$$

ピンサイズ n の JK 法も同様に定義される。全データ数を $N = n \times N_n$ となる様に $N_n = N/n$ 個のピンに分割する。このとき各ピンには、 n 個のデータがある。ある一つのピン b のデータの添字集合を B_b とし、JK サンプルを

$$\langle \mathcal{O} \rangle_b = \frac{1}{N-n} \sum_{k \notin B_b} \mathcal{O}_k \quad (\text{B.3.7})$$

と定義する。このとき物理量 $f(\mathcal{O})$ の平均と誤差は、

$$\langle f(\mathcal{O}) \rangle = \frac{1}{N_n} \sum_{b=1}^{N_n} f(\langle \mathcal{O} \rangle_b) \quad (\text{B.3.8})$$

$$\delta \langle \mathcal{O} \rangle = \sqrt{(N_n-1)(\langle f(\mathcal{O})^2 \rangle - \langle f(\mathcal{O}) \rangle^2)} \quad (\text{B.3.9})$$

と与えられる。

B.3.2 証明

x の確率分布 $P_x(x)$ があるとする。 X を $X \equiv \frac{x_1+x_2+\dots+x_N}{N}$ で定義する時、 $P_X(X)$ の分布を次のように定義する。

$$P_X(X) \equiv \int dx_1 P_x(x_1) \int dx_2 P_x(x_2) \cdots \int dx_N P_x(x_N) \delta \left(X - \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} \right) \quad (\text{B.3.10})$$

フーリエ変換すると、

$$P_X(X) = \int dx_1 \cdots \int dx_N P_x(x_1) \cdots P_x(x_N) \int \frac{dP}{2\pi i} e^{-iP \left(X - \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} \right)} \quad (\text{B.3.11})$$

ここで、キュミュラントと言われる量として

$$e^{W_x(P)} \equiv \int dx P_x(x) e^{iPx} \quad (\text{B.3.12})$$

を定義する。すると、

$$P_X(X) = \int \frac{dP}{2\pi i} e^{-iPX} e^{NW_x\left(\frac{P}{N}\right)} \quad (\text{B.3.13})$$

である。このとき X に対しては、

$$e^{W_X(P)} \equiv e^{NW_x\left(\frac{P}{N}\right)} \quad (\text{B.3.14})$$

としておく。キュミュラントであることを確かめるために、(B.3.12) をテーラー展開する。

$$e^{W_x(P)} = 1 + iP\langle x \rangle + \frac{(iP)^2}{2}\langle x^2 \rangle + \frac{(iP)^3}{3!}\langle x^3 \rangle + \cdots \quad (\text{B.3.15})$$

ただし $\langle A \rangle \equiv \int dx P_x(x) A(x)$ である。対数を取りさらに展開すると、

$$W_x(P) = \log\left(1 + iP\langle x \rangle + \frac{(iP)^2}{2}\langle x^2 \rangle + \frac{(iP)^3}{3!}\langle x^3 \rangle + \cdots\right) \quad (\text{B.3.16})$$

$$= iP\langle x \rangle + \frac{(iP)^2}{2}\langle x^2 \rangle + \frac{(iP)^3}{3!}\langle x^3 \rangle + \cdots \quad (\text{B.3.17})$$

$$- \frac{1}{2}\left(iP\langle x \rangle + \frac{(iP)^2}{2}\langle x^2 \rangle + \frac{(iP)^3}{3!}\langle x^3 \rangle + \cdots\right)^2 + \cdots \quad (\text{B.3.18})$$

$$= iP\langle x \rangle + \frac{(iP)^2}{2}(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2) + \cdots \quad (\text{B.3.19})$$

すなわち、

$$e^{W_x(P)} = e^{iP\langle x \rangle + \frac{(iP)^2}{2}(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2) + \cdots} \quad (\text{B.3.20})$$

と生成汎関数の形になる。すなわち $e^{W_x(P)}$ を P で微分し $P \rightarrow 0$ とすると最初の項、つまり平均が得られる。(B.3.14) を用いると X についての平均も得られ、

$$\langle X \rangle = \langle x \rangle \quad (\text{B.3.21})$$

が分かる。さらに $e^{W_x(P)}$ を P で2回微分して $P \rightarrow 0$ とすると、 X の分散が得られる。

$$\langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \frac{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}{N} \quad (\text{B.3.22})$$

ここで得られた分散は母集団での真の分散値である。ただ、ここから分かるのは、 x で計算した分散を用いて X の分散も分かる、ということである。ここから分散の推定値を見

積もる。その際の条件は、 $\{x_i\}$ を用いて推定値の真の平均をとると上記に戻るもの、ということである。そこで、

$$y_J(j) \equiv \frac{x_1 + \cdots + x_N - x_j}{N-1} \quad (\text{B.3.23})$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^N x_i) - x_j}{N-1} \quad (\text{B.3.24})$$

そして、規格化定数 A を用いて、

$$\text{推定値} \equiv A \left[\frac{\sum_{J=1}^N y_J^2(j)}{N} - \left(\frac{\sum_{J=1}^N y_J(j)}{N} \right)^2 \right] \quad (\text{B.3.25})$$

を推定値とする。すると

$$= \frac{A}{(N-1)^2} \left[\frac{\sum_j x_j^2}{N} - \left(\frac{\sum_j x_j}{N} \right)^2 \right] \quad (\text{B.3.26})$$

と変形できる。ここで推定値の真の平均を取ると、

$$\langle \text{推定値} \rangle = \frac{A}{(N-1)^2} \left[\frac{N \langle x^2 \rangle}{N} - \frac{N \langle x^2 \rangle + N(N-1) \langle x \rangle^2}{N} \right] \quad (\text{B.3.27})$$

$$= \frac{A}{N-1} \frac{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}{N} \quad (\text{B.3.28})$$

となるので、 $A = N-1$ とすることで推定値として正しいことが分かる。つまり推定値は、

$$\text{推定値} = (N-1) \left[\frac{\sum_{J=1}^N y_J^2(j)}{N} - \left(\frac{\sum_{J=1}^N y_J(j)}{N} \right)^2 \right] \quad (\text{B.3.29})$$

で与えられる。すなわち推定される統計誤差はこれのルートなので、

$$\delta X = \sqrt{(N-1) \left(\frac{\sum_{J=1}^N y_J^2(j)}{N} - \left(\frac{\sum_{J=1}^N y_J(j)}{N} \right)^2 \right)} \quad (\text{B.3.30})$$

となる。

付録C ステップスケーリング関数と β 関数の関係

C.1 β 関数とステップスケーリング関数

この章では、2ループの β 関数とステップスケーリング関数の比 $\sigma(u, 2)/u$ の関係を述べる。まず表記法として $\dot{f} = \frac{d}{dt}f$ 、 $u(t) = g_R^2(t)$ 、 $t = \ln(\mu)$ と書くことにする。

まず、くりこまれた結合定数 $u(t)$ を u_0 を用いて展開する。

$$u(t) = u_0 + c_1(t)u_0^2 + c_2(t)u_0^3 + \dots \quad (\text{C.1.1})$$

ここで $u_0 = 0$ 、 $u(t=0) = u_0$ である。 $u(t)$ のスケール依存性が、

$$\frac{du(t)}{dt} \equiv b_0 u(t)^2 + b_1 u(t)^3 + \dots \quad (\text{C.1.2})$$

となるとしよう。この表式を用いて c_1 と c_2 を決定すると、

$$u(t) = u_0 + b_0 t u_0^2 + (b_0^2 t^2 + b_1 t) u_0^3 \quad (\text{C.1.3})$$

とわかる。一方(C.1.2)は、 β 関数の定義そのものであるので、 b_0 と β_0 の関係は、

$$\frac{du(t)}{dt} = b_0 u(t)^2 + b_1 u(t)^3 + \dots \quad (\text{C.1.4})$$

$$\Leftrightarrow 2g_R \frac{dg_R(t)}{dt} = b_0 g_R(t)^4 + b_1 g_R(t)^6 + \dots \quad (\text{C.1.5})$$

$$\Leftrightarrow \frac{dg_R(t)}{dt} = \frac{b_0}{2} g_R(t)^3 + \frac{b_1}{2} g_R(t)^5 + \dots \quad (\text{C.1.6})$$

$$\Leftrightarrow \beta(g) = -\frac{\beta_0}{(4\pi)^2} g^3 - \frac{\beta_1}{(4\pi)^4} g^5 \quad (\text{C.1.7})$$

とつけられる。つまり

$$b_0 = -\frac{2\beta_0}{(4\pi)^2} \quad (\text{C.1.8})$$

$$b_1 = -\frac{2\beta_1}{(4\pi)^4} \quad (\text{C.1.9})$$

である。ステップスケーリング関数 $\sigma(u, s)$ とは、エネルギースケールを $1/s$ にした有効結合定数の事なので、ステップスケーリング関数 $\sigma(u, s)$ は、

$$\sigma(u_0, s) \equiv u(t = \ln(1/s)) \quad (\text{C.1.10})$$

$$= u_0 + b_0 \ln(1/s) u_0^2 + [b_0^2 (\ln(1/s))^2 + b_1 \ln(1/s)] u_0^3 \quad (\text{C.1.11})$$

C.1. β 関数とステップスケーリング関数 C. ステップスケーリング関数と β 関数の関係

となる。なのでその比 $\sigma(u, s)/u$ は、

$$\sigma(u_0, s)/u_0 = 1 + b_0 \ln(1/s)u_0 + [b_0^2(\ln(1/s))^2 + b_1 \ln(1/s)]u_0^2 \quad (\text{C.1.12})$$

と与えられる。今回の研究では、 $s = 2$ で行った。

謝辞

この修士論文を書き上げるにあたり、多くの人の助けがありました。大野木さん、伊藤さん、松古さん、永谷さんを初め scicft、sccft コラボレーションの皆様。理解の遅い僕の質問に何度も答えて頂きました。この研究に欠かせなかったスパコンの運営を行なってくださった YITP や RCNP のスタッフの方々。M2 の皆様、特に田中君には修論のゼミに出てもらい議論してもらいました。研究室の運営をしてくださっているスタッフの方々。山口さんには、ゲージ場の共変微分のところが分からなかった所を教えて頂きました。深谷さんには、格子場の理論ゼミでお世話になりました。本当にありがとうございました。

関連図書

- [1] S. Weinberg, Phys. Rev. D 19, 1277 (1979); L. Susskind, Phys. Rev. D 20, 2619 (1979).
- [2] M.E.Peskin D.V.Schroeder (1995) An introduction to Quantum Field Theory
- [3] Nambu, Y.; Jona-Lasinio, G. (April 1961). "Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I". Physical Review 122: 345-358
- [4] K. Lane AN INTRODUCTION TO TECHNICOLOR (hep-ph/9401324v2)
- [5] R. Jackiw, and K.Johnson Phys. Rev. D8 (1973)2386
- [6] Dennis D. Dietrich Francesco Sannino (arXiv:hep-ph/0611341v1)
- [7] Supersymmetry Inspired QCD Beta Function(arXiv:0711.3745v3)
- [8] 青木慎也 (2005) 格子上の場の理論 シュプリンガー・ジャパン
- [9] Heinz J.Rothe (2005) LATTICE GAUGE THEORIES An Introduction Third Edition World Scientific
- [10] F.Bursa *et. al.* Mass anomalous dimension in SU(2) with two adjoint fermions(arXiv:0910.4535v2)
- [11] T. Karavirta *et. al.* Nonperturbative improvement of SU(2) lattice gauge theory with adjoint or fundamental flavors(arXiv:1101.0154v1)
- [12] The Physics of the Standard Model and Beyond T.Moorii *et. al.* (2002) The Physics of the Standard Model and Beyond World Scientific Pub Co Inc
- [13] T. Appelquist, F. Sannino The Physical spectrum of conformal SU(N) gauge theories (hep-ph/9806409) Phys.Rev. D59 (1999) 067702
- [14] A. Hasenfratz Infrared fixed point of the 12-fermion SU(3) gauge model based on 2-lattice MCRG matching (arXiv:1106.5293)