April 23, 2019

鈴木 Trotter 公式に関する覚書

富谷 昭夫 [1,*]

[1]*RIKEN/BNL Research center, Brookhaven National Laboratory, Upton, NY, 11973, USA*

このノートは、量子モンテカルロなどでつかう、いわゆる「鈴木-Trotter 公式」$\lim_{n\to\infty}\left(e^{A/n}e^{B/n}\right)^n = e^{A+B}$ を導出する私的な覚書である。導出は参照無しで行ったが文献や背景等は、Wikipedia 参照のこと。名称にまつわる話もあるがここでは割愛する。

まず行列の指数関数は以下で定義する。

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k = \mathbf{1} + A + \frac{1}{2!}A^2 + O(A^3). \tag{1}$$

ここで出てくる A は行列で以下で出てくる行列 B とは一般に交換しない事を仮定しておく[1]。

正の整数 $n \in \mathbb{Z}_+$ で行列 A、B を割って指数関数にいれて愚直に 3 次まで展開する。

$$e^{A/n}e^{B/n} = \left(\mathbf{1} + \frac{1}{n}A + \frac{1}{n^2}\frac{1}{2!}A^2 + O(n^{-3})\right)\left(\mathbf{1} + \frac{1}{n}B + \frac{1}{n^2}\frac{1}{2!}B^2 + O(n^{-3})\right) \tag{2}$$

$$= \mathbf{1} + \frac{1}{n}(A+B) + \frac{1}{2!n^2}(A^2 + AB + BA + B^2) + \frac{1}{2!n^2}[A,B] + O(n^{-3}) \tag{3}$$

$$= \mathbf{1} + \frac{1}{n}(A+B) + \frac{1}{2!n^2}(A+B)^2 + \frac{1}{2!n^2}[A,B] + O(n^{-3}) \tag{4}$$

$$= e^{(A+B)/n} + \frac{1}{2!n^2}[A,B] + O(n^{-3}). \tag{5}$$

得られた式の両辺を n 乗すると

$$\left(e^{A/n}e^{B/n}\right)^n = \left(e^{(A+B)/n} + \frac{1}{2!n^2}[A,B] + O(n^{-3})\right)^n \tag{6}$$

$$= e^{A+B} + \left(\frac{1}{2!n^2}[A,B]\right)^n + O(n^{-1}) \tag{7}$$

最後に $n \to \infty$ の極限を取ると

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{A/n}e^{B/n}\right)^n = e^{A+B} \tag{8}$$

と鈴木-Trotter 公式が導出される。

実用上は大きな n に対して $\epsilon = 1/n$ とおいて

$$e^{A+B} \approx \underbrace{e^{A\epsilon}e^{B\epsilon}e^{A\epsilon}e^{B\epsilon}\cdots e^{A\epsilon}e^{B\epsilon}}_{n\text{ 個}}. \tag{9}$$

とすれば良い。

* akio.tomiya@riken.jp

[1] 交換する場合は自明に成立する。