



相対論的流体方程式の数値的解法 I¹

水田晃²

高エネルギー加速器研究機構 素粒子原子核研究所 理論センター

要旨：1日1度程度の頻度で観測されるガンマ線バーストと呼ばれる現象は光速の99.99%以上にも及ぶ超相対論的速度をもったアウトフローからの放射であると考えられ、主にガンマ線の波長で数秒から数十秒間夜空で最も明るく輝く天体現象である。このような現象では相対論的效果が無視できない。ガンマ線バーストだけでなく宇宙ジェットやパルサー風、あるいは地上の重イオン加速器で生成されるQGPなど様々な時間、空間スケールにおいて、相対論的流体が見られ、現象を理解するために相対論的流体方程式を数値計算で解く試みが行われている。数値計算法は1950年代から始まる非相対論的圧縮性流体方程式の数値解法の応用として発展してきた。1990年代から本稿で紹介する解析的、近似的リーマン解を用いるゴドノフタイプのスキームが相対論的流体方程式に応用され、21世紀に入って相対論的宇宙ジェット、ガンマ線バーストジェットなど天体物理学、あるいはQGPの解析など核物理の分野で数値流体シミュレーションによる研究が進んでいる。本稿では、圧縮性流体方程式の基礎的な事項も含め相対論的流体の特性など基本的な事柄を述べ、次回に数値計算スキームに関して概観する。

1 相対論的流体とは

流速が光速に近い流体、または高温の流体（内部エネルギーが静止質量エネルギーに比べて高い流体）、更には、その両方の条件を満たす流体では、相対論的效果を考慮しなくてはならない。特殊相対論的流体方程式を解くことによってこのような相対論的流体を正しく取り扱うことができる。

宇宙では活動銀河核ジェットやガンマ線バーストでのジェットなど超相対論的アウトフローが見られ、高エネルギー天文学を考える上で、相対論的流体を考えることは重要である。また、近年、加速器技術の向上によって金などの重い原子核同士を光速近くまで加速し、衝突させることによって、高温のQGPを実験室で生成することが可能となった。生成されたプラズマを相対論的流体として扱うことにより解析が行われている（例えば Sollfrank et al. (1997), Hirano et al. (2010)などを参照）。

¹編集委員から；本稿は、もともと「新学術領域：素核宇宙融合による計算科学に基づいた重層の物質構造の解明」における勉強会のレジュメとして用意されたものですが、広く原子核・ハドロン研究者にも興味を持たれる内容と判断し、編集部から加筆・変更を依頼したものです。2回に分けて掲載されます。

²著者紹介：水田氏 (mizuta@post.kek.jp) (高エネルギー加速器研究機構研究員) は、2004年大阪大学にて博士(理学)を取得、日本学術振興会特別研究員PD(京都大学)、マックスプランク天体物理学研究所研究員、千葉大学特任助教などを経て現職。専門は数値流体計算をベースとした高エネルギー天文学、プラズマ物理学。

ジェット現象や，実験室で生成される QGP プラズマなどの解析には時間非定常かつ，多次元性が重要な鍵となるため，数値流体シミュレーションが威力を發揮する．相対論的性質が本質的となる高ローレンツ因子の流体や，高エンタルピーの流体の数値流体計算による取り扱い，古くは 1970 年頃から行われてきたが，1990 年台半ばまでは衝撃波面を扱うために人工粘性を用いる手法が主に用いられ，ローレンツ因子で高々 2 (光速の 86.6%) 程度の流速しか扱えなかった．

1990 年台半ばによろやく，強い衝撃波に対しても安定な計算法である解析的，近似的リーマン解を用いるいわゆるゴドノフタイプのスキームが相対論的流体方程式に適應され，1 次元の簡単なテスト計算ではローレンツ因子数万の流速 (3 元速度からローレンツ因子を求めるため，倍精度では有効数字の限界) が扱えるようになった³．ゴドノフタイプのスキームは非相対論的流体に 1950 年代から適應され，現在では広く用いられている手法であり，そのスキームには様々なものがあり，そのいくつかを本稿後半で紹介していく．

1.1 基礎式

本稿では相対論的流体に関して簡単にまとめる．断らない限り $c = 1$ の単位系をとる．流体方程式は双曲型の方程式に分類され，因果律が保証されるが粘性及び熱伝導などを考慮すると放物型となり因果律を満たさなくなる．散逸過程を含んだ方程式での定式化自身が模索されている段階であり今回は無視する．

流体の 4 元流速 u は

$$\mathbf{u} = W(1, v^1, v^2, v^3), \quad (1)$$

$$\text{但し, } W = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^1 v^1 + v^2 v^2 + v^3 v^3)}}, \quad (2)$$

である (W, v^i はそれぞれ，ローレンツ因子，3 元速度の i 方向成分である)．静止質量密度 (rest mass density: 流体の共同系での質量密度) を ρ とすると⁴連続の式 (質量保存の式) は

$$\partial_\mu(\rho u^\mu) = 0, \quad (3)$$

とかける．(ギリシャ文字の添字の和は 0 から 3 までをとる)．粒子の生成消滅を考慮する場合は生成消滅を表す項が右辺にソース項としてはいるが，ここでは粒子数が一定として無視する．

エネルギー運動量テンソルを 2 階の反変テンソルとして定義すると

$$T^{\mu\nu} = \rho \left(1 + \frac{p}{\rho} + \epsilon \right) u^\mu u^\nu + p \eta^{\mu\nu}, \quad (4)$$

である．ここで， p, ϵ はそれぞれ，圧力，比内部エネルギー (単位質量あたりの内部エネルギー) であり，静止質量密度 (ρ) 共に各点における流体の局所静止系 (local rest frame) で定義される量である．また， $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ は Minkowski 空間での計量である． $T^{\mu\nu}$ は比エンタルピー (単位質量あ

³現在では人工粘性を用いた手法でも高ローレンツ因子の計算が可能なスキームが (Anninos et al., 2003) によって提案されている

⁴文献によっては質量密度，質量エネルギー密度が $c = 1$ の単位系では同一表記となることから密度 ρ に内部エネルギーを含む内部的な全エネルギー密度も兼ねた表記が用いられるものもあるが，ここでは $\rho \equiv mn$ (m は流体を構成する粒子の静止質量， n は数密度) と定義する．

たりのエンタルピー， $h \equiv 1 + p/\rho + \epsilon$ と定義) を用いて $T^{\mu\nu} = \rho h u^\mu u^\nu + p \eta^{\mu\nu}$ とかける．比エンタルピーの定義式の右辺第一項の 1 は静止質量エネルギーの効果を表す項である．

このエネルギー運動量テンソルは局所静止系でのエネルギー運動量テンソル

$$T_{\text{rest}}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho + \rho\epsilon & 0 & & \\ & p & & \\ & & p & \\ 0 & & & p \end{pmatrix}, \quad (5)$$

をローレンツ変換したものである．エネルギー運動量保存則は

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (6)$$

となる (例えば (Landau and Lifshitz, 1987))．ここでも，外力による仕事の効果，輻射による加熱，冷却の効果は無視している．

連続の式 (3)，エネルギー運動量保存の式 (6) は共にローレンツ変換に対して共変である．

運動論的にも相対論的流体方程式を導出することができる (Pomraning, 1973; Mihalas and Mihalas, 1984)．

全エネルギー密度 T^{00} には静止質量密度も含まれるため，静止質量エネルギーが卓越しているような場合，熱エネルギー，運動エネルギーの変化が数値誤差に埋もれてしまう．そこで T^{00} 成分の式 (エネルギー式) は後に数値計算に応用することを考え，連続の式 (3) と連立させて

$$\partial_\mu (T^{\mu 0} - \rho u^\mu) = 0, \quad (7)$$

と変形しておく．

具体的に 2 次元の (z 方向は一様と仮定して $\partial/\partial z$ の項を落としたもの) 方程式を書き下すと，

$$\frac{\partial(\rho W)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho W v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho W v_y)}{\partial y} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial(\rho h W^2 v_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho h W^2 v_x^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho h W^2 v_x v_y)}{\partial y} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial(\rho h W^2 v_y)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho h W^2 v_y v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho h W^2 v_y^2 + p)}{\partial y} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial(\rho h W^2 - p - \rho W)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho h W^2 v_x - \rho W v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho h W^2 v_y - \rho W v_y)}{\partial y} = 0, \quad (11)$$

上記のような形式を保存形式 (conservative form) と呼び，時間偏微分がかかる項がそれぞれ，質量密度， x, y 方向の運動量密度，エネルギー密度であり，空間全体で体積積分を行うと，境界からの流入が無い限り保存するため保存量と呼ばれる．また，空間偏微分がかかる項がそれぞれ x, y 方向の流量である⁵．方程式には，バルク速度が光速に近い場合に現れる相対論的效果 (ローレンツ因子 W) と，局所的な静止系で見た時の熱運動の速度が光速に近い場合に現れる相対論的效果 (比エンタルピー h) の二つの相対論的效果が取り込まれている．

⁵電荷保存の式 $\partial\rho_Q/\partial t + \text{div}j = s_q$ と同じ

これらの方程式の非相対論的極限 ($v/c \rightarrow 0, h \rightarrow 1$) をとる．極限を考える際には流体方程式中に c を陽に書かなければならないが，運動量密度とエネルギー密度では c の 1 乗分異なるのを注意しなければならない．例えば，エネルギー式の第一項，時間偏微分がかかる項を $h = 1 + \epsilon/c^2 + p/(\rho c^2)$ に注意して c を陽に書き，近似すると，

$$\rho c^2 \left(1 + \frac{\epsilon}{c^2} + \frac{p}{\rho c^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} - p - \rho c^2 \left(1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right)^{-1/2} \sim \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon, \quad (12)$$

とかけ，非相対論的流体方程式でのエネルギー密度と一致することが分かる．これは静止質量エネルギーの項を質量保存の式 (c^2 を掛けると質量エネルギー保存の式) を用いて非相対論的流体方程式では考慮されない静止質量エネルギーの効果を取り除いたためである．他の項も同様に非相対論的極限を取ると，非相対論的流体方程式であるオイラー方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} + \partial_j \pi^{ij} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \epsilon \right) \right) + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + \epsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right) = 0, \quad (15)$$

となる ($i, j = 1, 2, 3$)．但し， π^{ij} は運動量流束テンソル，

$$\pi^{ij} = p\delta^{ij} + \rho v^i v^j, \quad (16)$$

である．

相対論的流体方程式の場合も非相対論的流体方程式の場合も，流体の方程式だけでは式は閉じず，状態方程式 $p = p(\rho, \epsilon)$ が必要となる⁶．流体を理想気体 (ideal gas) と考える場合は，状態方程式として

$$p = (\gamma - 1)\rho\epsilon, \quad (17)$$

を用いる．ここで γ は比熱比である．

1.2 音速

音速 c_s は流体中の微小擾乱が断熱的に伝搬していく速度として，圧力等と同様に局所静止系で定義され，音波のモードを伝える重要な物理量の一つである．

改めて，1次元の連続の式，運動方程式に対して一様で静止している平衡系 ($p_0, \rho_0 = \cos nt, v_0 = 0$) に，微小圧力擾乱 ($p_1 \ll p_0$) が生じそれに伴って密度，速度が ρ_1, v_1 になったとする．0次の項 (定常状態)，2次以上の項を落とすと以下のような微小擾乱に関する方程式が得られる，

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0 h_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0. \quad (19)$$

⁶熱力学量は他の2つの熱力学量で書き下せる

圧力を質量密度 (ρ) , エントロピー (S) の関数で $p = p(\rho, S)$ と書き下すと (状態方程式) ,

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho dS = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S d\rho, \quad (20)$$

最後の等式で流体の状態変化が断熱的 ($dS = 0$) であることを用いた. よって, $(\partial p / \partial x) = (\partial p / \partial \rho)_S (\partial \rho / \partial x)$ 式 (19) に代入すると,

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0 h_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 0, \quad (21)$$

両辺時間偏微分し, 式 (18) を用いると,

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - \frac{1}{h_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = 0, \quad (22)$$

密度, 圧力に関しても同様の式が得られる. これらは波動方程式であり, 一様媒質中を擾乱が伝播する速度の2乗が $(\partial p / \partial \rho)_S / h$ であることを示している.

状態方程式は, 質量密度, エントロピーの関数 ($p = p(\rho, S)$) だけでなく, 質量密度, 比内部エネルギーの関数 ($p = p(\rho, \epsilon)$) で与えられることが多い. そこで, 変数変換を行う. 熱力学第二法則, 等エントロピーの仮定より,

$$d\epsilon = TdS - pdV = -pd \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{p}{\rho^2} d\rho, \quad (23)$$

よって, 状態方程式を, 質量密度, 単位質量あたりの内部エネルギーの関数として改めて書くと,

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_\epsilon d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right)_\rho d\epsilon = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_\epsilon d\rho + \frac{p}{\rho^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right)_\rho d\rho, \quad (24)$$

断熱を仮定したので,

$$hc_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_\epsilon + \frac{p}{\rho^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right)_\rho, \quad (25)$$

を満たすことが分かる. 理想気体の場合は式 (17) を用いて,

$$c_s^2 = \frac{\gamma(\gamma - 1)\epsilon}{1 + \gamma\epsilon}, \quad (26)$$

となる. 比内部エネルギー ϵ は $0 \leq \epsilon < \infty$ であるので, 音速の大きさ c_s には上限があり高温の極限 ($\epsilon \rightarrow \infty$), 低温の極限 ($\epsilon \rightarrow 0$) を考えることによって,

$$0 \leq c_s \leq \sqrt{\gamma - 1}, \quad (27)$$

を満たす. 高温の気体では比熱比 γ の温度依存性を考慮しなくてはならない (2節). 高温の極限 $\gamma = 4/3$ を代入すると音速の上限は $1/\sqrt{3} \sim 0.58c$ となる. また, 温度が非相対論的な場合 ($\epsilon \ll 1$) は, $h \approx 1$ であるため音速 c_s は,

$$c_s \approx \sqrt{\gamma(\gamma - 1)\epsilon} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}, \quad (28)$$

と非相対論的極限を満たしていることがわかる. 相対論を考慮した場合, 高温の流体中でも音波は光速の60%程度で頭打ちとなるのに比べ, 相対論的效果を考慮していない非相対論的流体方程式では, 高温の極限 ($p/\rho \rightarrow \infty$) でも音速に上限は無くなり音速が光速を超えるという因果律を破るような状況が許される.

2 分布関数による比熱比 γ の導出

比熱比 γ は一般に温度 T の関数であることが知られている (温度の表記はエネルギーの次元をもつとする. $k_b = 1$). ここでは局所的に熱平衡にある理想気体の比熱比を分布関数から導出する.

平衡状態にある気体の分布関数 $f(x, P)$ は,

$$f(x, P) = \frac{(2s+1)}{h^3} \frac{1}{\exp(\mathcal{E}/T - \mu) - \alpha}, \quad (29)$$

とかけ, s, h, μ, \mathcal{E} はそれぞれ, 粒子のスピン, プランク定数, 化学ポテンシャル, 相対論的全エネルギー $\mathcal{E} = \sqrt{m^2 + P^2}$ である (m は静止質量). α は, $+1, 0, -1$ をとり, それぞれ Bose-Einstein 統計, Maxwell-Boltzmann 統計, Fermi-Dirac 統計に対応する.

運動量空間で 1 次, 2 次のモーメントをとると, 4 元質量流束, エネルギー-運動量テンソルがそれぞれ以下のように定義できる.

$$J^\mu \equiv \int f P^\mu dP / \mathcal{E}, \quad (30)$$

$$T^{\mu\nu} \equiv \int f P^\mu P^\nu dP / \mathcal{E}, \quad (31)$$

これらはそれぞれ, $J^\mu = nu^\mu, T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + p\eta^{\mu\nu}$ とならなくてはならない (これが運動論的な n, ϵ, p の定義である). ここで n は個数密度である.

$$n = -J^\mu u_\mu = \frac{(2s+1)}{h^3} \int_0^\infty \frac{4\pi P^2 dP}{\exp((P^2 + m^2)^{1/2}/T - \mu) - \alpha}, \quad (32)$$

$$p = \frac{1}{3}(u_\mu u_\nu + \eta_{\mu\nu})T^{\mu\nu} = \frac{1}{3} \int_0^\infty f \frac{P^2}{(P^2 + m^2)^{1/2}} d^3P, \quad (33)$$

$$mn(1 + \epsilon) - 3p = -\eta_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = m^2 \int_0^\infty f \frac{d^3P}{(P^2 + m^2)^{1/2}}, \quad (34)$$

となる. ここで, $P = m \sinh \chi$ と変数変換すると

$$n = \frac{4\pi(2s+1)m^3}{h^3} \int_0^\infty \frac{\sinh^2 \chi d\chi}{\exp(\beta \cosh \chi - \mu) - \alpha}, \quad (35)$$

$$p = \frac{4\pi(2s+1)m^4}{3h^3} \int_0^\infty \frac{\sinh^4 \chi d\chi}{\exp(\beta \cosh \chi - \mu) - \alpha}, \quad (36)$$

$$mn(1 + \epsilon) - 3p = \frac{4\pi(2s+1)m^4}{3h^3} \int_0^\infty \frac{\sinh^2 \chi d\chi}{\exp(\beta \cosh \chi - \mu) - \alpha}, \quad (37)$$

とかける (ここで, $\beta = m/T$ とした).

Maxwell-Boltzmann 分布 ($\alpha = 0$) の場合は

$$p = \frac{4\pi(2s+1)m^4 e^\mu}{3} \int_0^\infty \sinh^4 \chi \exp(-\beta \cosh \chi) d\chi, \quad (38)$$

となり, 部分積分ができて

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \sinh^4 \chi \exp(-\beta \cosh \chi) d\chi \\ &= \frac{3}{\beta} \int_0^\infty \sinh^2 \chi \cosh \chi \exp(-\beta \cosh \chi) d\chi - \left[\frac{1}{\beta} \sinh^3 \chi \exp(-\beta \cosh \chi) \right]_0^\infty, \end{aligned} \quad (39)$$

1 項目の積分は数密度 n に比例し 2 項目の積分は 0 である．よって分布関数から状態方程式

$$p = nT, \quad (40)$$

が得られる．

式 (30), (31) が積分可能であり, 積分は変形 Bessel 関数を用いて表すことができる．個数密度 n , 圧力 p , 比内部エネルギー ϵ は最終的に

$$n = \frac{4\pi(2s+1)m^3 e^\mu}{h^3} \frac{K_2(\beta)}{\beta}, \quad (41)$$

$$p = \frac{4\pi(2s+1)m^4 e^\mu}{h^3} \frac{K_2(\beta)}{\beta^2}, \quad (42)$$

$$mn(1+\epsilon) - 3p = \frac{4\pi(2s+1)m^4 e^\mu}{h^3} \frac{K_1(\beta)}{\beta}, \quad (43)$$

と導出される．変形 Bessel 関数は以下のように定義される,

$$\begin{aligned} K_n(\beta) &\equiv \frac{\beta^n}{(2n-1)!!} \int_0^\infty d\chi \sinh^{2n} \chi \exp(-\beta \cosh \chi) \\ &= \frac{\beta^{n-1}}{(2n-3)!!} \int_0^\infty d\chi \sinh^{2n-2} \chi \exp(-\beta \cosh \chi), \end{aligned} \quad (44)$$

よって 1 粒子あたりのエネルギー U は変形 Bessel 関数を用いて以下のようにかける．

$$U = \frac{mn(1+\epsilon)}{n} = m \left(\frac{K_1(\beta)}{K_2(\beta)} + \frac{3}{\beta} \right), \quad (45)$$

また, $\beta \rightarrow \infty$ での展開式,

$$K_n(\beta) \rightarrow \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^{1/2} e^{-\beta} \left[1 + \frac{4n^2 - 1^2}{1!8\beta} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!(8\beta)^2} + \dots \right], \quad (46)$$

より

$$U \rightarrow m \left(1 + \frac{3T}{2m} \right) \quad (\beta \rightarrow \infty), \quad (47)$$

である．また, β が小さいとき,

$$K_n(\beta) = \frac{1}{2}(n-1)! \left(\frac{2}{\beta} \right)^n + \dots \quad (n > 0), \quad (48)$$

より

$$U \rightarrow 3T \quad (\beta \rightarrow 0), \quad (49)$$

と, 極限の形が得られ, これより比熱比 γ は

$$\gamma = 1 + \frac{1}{(dU/dT)} \rightarrow \frac{5}{3} \quad (\beta \rightarrow \infty), \quad (50)$$

$$\gamma = 1 + \frac{1}{(dU/dT)} \rightarrow \frac{4}{3} \quad (\beta \rightarrow 0), \quad (51)$$

と, 低温の極限では単原子分子である比熱比 $5/3$ が得られ, 高温の極限では比熱比 $4/3$ が得られる．

別の表記を求める．比エンタルピー h は，

$$h = \frac{nm(1 + \epsilon) - 3p + 4p}{nm} = \frac{K_1(\beta) + 4K_2(\beta)/\beta}{K_2(\beta)}, \quad (52)$$

である．更に，変形 Bessel 関数の漸化式

$$K_{n+1}(x) = K_{n-1}(x) + 2n \frac{K_n(x)}{x}, \quad (53)$$

を用いると

$$h = \frac{K_3(\beta)}{K_2(\beta)}, \quad (54)$$

これと，式 (40) を用いると

$$\gamma = 1 + \left(m \frac{dh}{dT} - \frac{d}{dT} \left(\frac{p}{n} \right) \right)^{-1} = \frac{h' \beta^2}{h' \beta^2 + 1}, \quad (55)$$

とかける (h' は， h の β に関する微分) ．

変形 Bessel 関数は数値ライブラリに組み込まれている場合もあるが，流体計算で用いる場合は後述する保存量から質量密度，圧力，速度などの基本量を求める際に収束計算が必要で比熱比が一定でない場合には，変形 Bessel 関数を何度も呼び出さなければならず扱いづらい．

近年，Mignone et al. (2005) によって近似関数が提案されこれをコードに取り入れるグループも現れている．彼らは温度に比例する量である $\Theta \equiv p/\rho$ を用いて，比エンタルピー (単位質量あたりのエンタルピー) を

$$(h - \Theta)(h - 4\Theta) = 1, \quad (56)$$

の解の一つ，正符号の $h = 5\Theta/2 + \sqrt{9\Theta^2/4 + 1}$ として定義し直し，比熱比一定の理想気体の場合の $\gamma/(\gamma - 1)$ に相当する量を Γ_r と定義し $\Gamma_r = (h(\Theta) - 1)/\Theta$ と実効的な比熱比を導入することで，保存量から密度，圧力を求める際の収束計算の負担を軽減する．実効的な比熱比に関して Γ_r と温度の関係を理想気体，Bessel 関数を用いた厳密解，近似関数の比較を示したのが図 1 である．低温，高温の極限で解析的な式と同様に収束し，温度が静止質量エネルギー程度となった際の変化も 10% 程度の誤差で再現されている．

3 非線形スカラー方程式における不連続面の出現

粘性，熱伝導のない流体方程式は非相対論的なものも，相対論的なものも方程式の分類では双曲型の連立偏微分方程式である．双曲型の方程式で特徴的なのは，特性速度，特性曲線の考えであり，流体方程式を数値的に解くスキームの開発でもその考え方が採り入れられながら発展してきた．初期条件が滑らかであっても有限の時間で不連続面が生じる場合がある．ここでは単独の偏微分方程式の場合にその特徴を概観する．

非線形単独の偏微分方程式として $u(x, t)$ に関する以下のような方程式を考える．

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0, \quad (57)$$

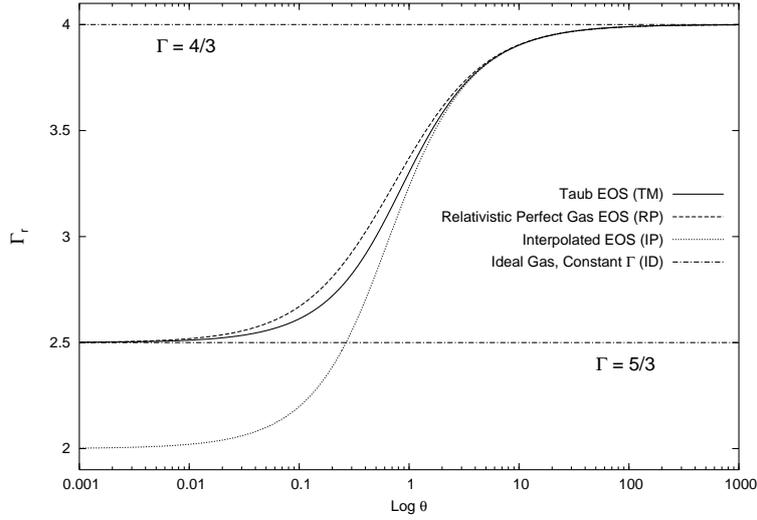


図 1: 実効的比熱比の関数 Γ_r (理想気体の場合の $(\gamma - 1)/\gamma$ に相当. 図中では比熱比は Γ で表記されている.) $\theta = 1$ 近辺が相対論的温度への移行領域. 解析解 (RP) に対し, Taub EOS (Mignone らが提唱したもの) はよい近似となっている. 他のグループが提唱した近似関数 (IP) は低温での近似がよくない. 比熱一定の場合温度依存性はなく一定となる. Mignone et al. (2005) より抜粋. (Reproduced by permission of the AAS)

この方程式は非粘性バーガス方程式と呼ばれ, 空間微分を行うことによって,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (58)$$

と変形でき, u という物理量が局所的な移流速度 u で運ばれることを意味する. 移流速度 u が定数 (a) の場合, つまり,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (59)$$

のような場合, 方程式は線形となり解は $u(t, x) = u(0, x - at)$ と解析的に求まるが, 式 (58) は移流速度である u が時間, 空間の関数となっているため非線形である.

図 2(a) のような初期条件を考えると, 両端で $u = 0$ となっている点は固定点である. $u > 0$ で負の空間勾配を持った所では, u のプロファイルは時間と共に広がっていき, $t > 0$ では固定点を追い抜いてしまう点が生じる (図 2(b)-(d)). 最終的に解の一部は多価関数となってしまう. 海で見られる水の波面の高さを表すような場合では高さの関数は多価関数となりうるが, 密度分布や速度分布など多価関数を許さない場合は, 解が破綻してしまう.

しかし, 以下のように粘性的な項を方程式に導入すると,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (60)$$

右辺の項は拡散的であり, 勾配をなだらかにしようとする方向に働く. そのため解は 1 価となるが, 粘性項がなかった時に解が多価関数となった部分ではなまった分布となるであろう. 一方で粘性項 μ_0 を 0 への極限を取ると元に考えた方程式と同等の場合に近づくことが期待される. $\mu_0 = 0$ の場合の方程

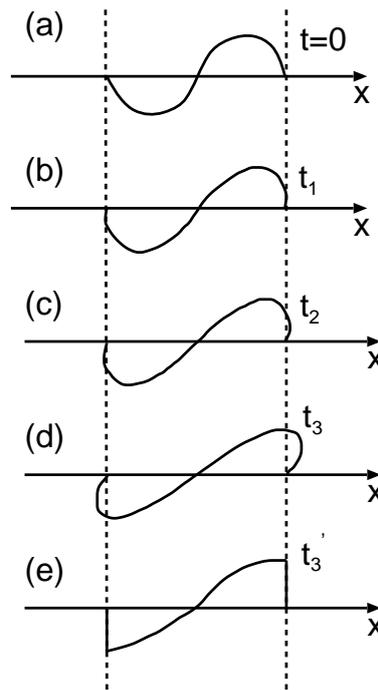


図 2: 初期の分布が (a) のような場合の解の時間発展 (b)-(d). 解に多価関数を許す場合, 右側に進む解は水面波の表面のようになり (d). 粘性が少しでも働くと解は不連続な点の出現を許し粘性 0 の極限を取ることによって完全な不連続面を含む解が得られる (e).

式の解は 1 階の偏微分方程式であるから一般には解が不連続になる点を許さない. 不連続な解を含むことを許す場合, 一般には解が一意に決まらず, 弱解 (weak solution) と呼ばれる解が無限に存在する. 具体的には, 膨張衝撃波や無限に不連続面が存在するような不自然な解も許される. これらの中から物理的な条件を満たす解を選び出す必要がある. ここでは非粘性バーガス方程式を考えたが, 流体方程式でも次節で考えるように同様の事が生じ, 弱解の中にはエントロピーが減少する膨張衝撃波のような非物理的な解が存在する. 粘性項を考慮する事は拡散的な物理を導入するためにエントロピーの増大を伴うために, μ_0 を 0 への極限を取ることによって物理的な解を得る事が期待される. 後に述べる不連続面の両側を結びつける Rankine-Hugoniot 関係式を満たしていれば, 物理的に正しい解が求められる. 実際の自然においても分子粘性などが働き, 有限の厚みを持った衝撃波面などの不連続面が形成される. 数値計算でも不連続面の再現には数値的な粘性が必要であることを示唆している.

4 特性量, 特性速度

流体方程式は連立偏微分方程式となるが, 前節と同様に考えることができる. 1 次元系の場合でも, 連続の式, 運動量保存の式, エネルギー式と 3 本の連立偏微分方程式, 及び状態方程式であるため, 見通しが悪く, 適宜変形や置き換えを行う.

まずはエネルギー式であるが, 断熱過程ではエネルギー方程式はエントロピー方程式と等価であり,

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad (61)$$

ここで s はエントロピー. この式は速度 v_x でエントロピー一定の要素が運ばれることを意味する.

また, 連続の式, 運動量保存式からは

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \left(\frac{v_x \pm c_s}{1 \pm v_x c_s} \right) \frac{\partial}{\partial x} \right] \mathcal{R}_{\pm} = 0, \quad (62)$$

ここで,

$$\mathcal{R}_{\pm} = \int \frac{c_s}{\rho} d\rho \pm \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + v_x}{1 - v_x} \right), \quad (63)$$

はリーマン不変量 (Riemann invariant) という量であり, 理想気体の状態方程式 $p = (\gamma - 1)\rho\epsilon$ のもとでは,

$$\mathcal{R}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\gamma - 1}} \log \left[\frac{1 + \frac{c_s}{\sqrt{\gamma - 1}}}{1 - \frac{c_s}{\sqrt{\gamma - 1}}} \right] \pm \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + v_x}{1 - v_x} \right), \quad (64)$$

である.

エントロピー式と共通なのは方程式が

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} + \alpha_i \frac{\partial Q_i}{\partial x} = 0, \quad (65)$$

という形にかけている事である.

このような形の方程式では $dx/dt = \alpha_i$ という曲線に沿って, Q_i という物理量が運ばれることを意味する. 何故なら $Q_i(t, x)$ の全微分を考えると,

$$dQ_i = \left(\frac{\partial Q_i}{\partial t} + \frac{\partial Q_i}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right) dt, \quad (66)$$

となり, $dx/dt = \alpha_i$ となるようにすると, 式 (65) より $Q_i(t, x)$ が変化しない曲線が定義できる. ここで曲線という言葉が用いられるのは, $dx/dt = \alpha_i$ において, α_i が時々刻々と変化するため一般に曲線になるためである. α_i を特性速度, Q_i を特性量と呼び, n 本の双曲型連立偏微分方程式系では n 本の特性量, 特性速度のセットが現れる.

1次元流体方程式では, 特性量であるエントロピー s は特性曲線 C_0 に沿って, 特性速度 v_x で運ばれる. また, 特性量 \mathcal{R}_{\pm} は特性曲線 C_{\pm} に沿って運ばれる. 空間各点からは C_0, C_{\pm} 族の3つの特性曲線が時間方向に出入りし, 過去からやってきた特性曲線によって, その時刻での物理量 (ρ, p, v_x) が決まる. 特性曲線によって特性量が運ばれるような場合を単純波という.

一般には特性曲線は曲線であり, わずかな時刻の未来でも予測するのは困難である. 後に述べる数値計算法では, 有限の短い時間ステップの間は, 特性曲線が線形 (=特性速度が一定) と近似し, 各特性量を線形的に移流させ, 求めたい時刻の物理量を決定していくことになる (図3参照). 一方で, 前節で考えたように不連続面が生じる可能性がある.

5 Rankine-Hugoniot の関係式

1次元系でも2つの圧力モード (音波モード) とエントロピーモードに対応する3種類の特性曲線が存在する. 流れがスムーズな場合, 各時刻, 各点の物理量は3つの特性量から導出が可能である. しかし, 特性速度は場所によって異なるために, 前節の場合と同様, ある種族の特性曲線が空間のある

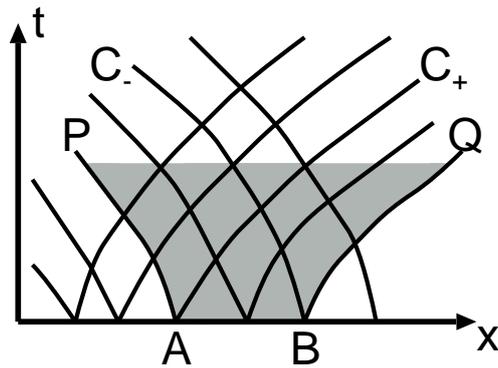


図 3: 特性曲線と影響領域. 空間の各点から特性曲線 C_{\pm} が出ている. 空間区分 AB が影響を及ぼす領域が太線で囲まれた部分. その外側には AB 間の情報は伝わらない. 図では等エントロピーを仮定し, C_0 族は省略されている.

点で交わる場合がある. この場合, 流体の物理量は 3 種類の特性量の組み合わせでは決定できず不連続が生じる. 特に周りの媒質に対して超音速で運動する物体がある時には媒質中に密度、圧力、速度が不連続に飛ぶ衝撃波面が形成される. これは圧力モードに関する不連続面である. 一方, 物体が亜音速で運動する場合は音波が周りに伝搬するだけで不連続面は出現しない.

衝撃波の波面の前後での不連続な物理量の関係を結び付けるには流体方程式に立ち返り導出しなければならずこの関係式を Rankine-Hugoniot の関係式と呼ぶ.

この関係式より密度圧縮率の上限が非相対論的な場合は 4 倍 ($\gamma = 5/3$) であり, 相対論的な場合は無限大であることがわかる. また, 特別な場合として衝撃波後面が静止している場合を考えると 1 次元反射衝撃波問題の解析解がえられる.

5.1 準備

衝撃波が一定の速度で進んでいる場合を考える. 波面の前後はそれぞれ定常だと考え, 物理量が一定とする. Rankine-Hugoniot の関係式を考えるときには, 衝撃波面が静止した系が用いられることが多いがここでは一般的な場合を考える.

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (67)$$

のようなスカラー方程式が成り立っているとする. これを図 4a のような衝撃波面を含む領域で積分する.

$$\int_{dS} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) dxdt = 0, \quad (68)$$

左辺の積分に Stokes の定理を用いて

$$\oint_C (-f, u) \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (69)$$

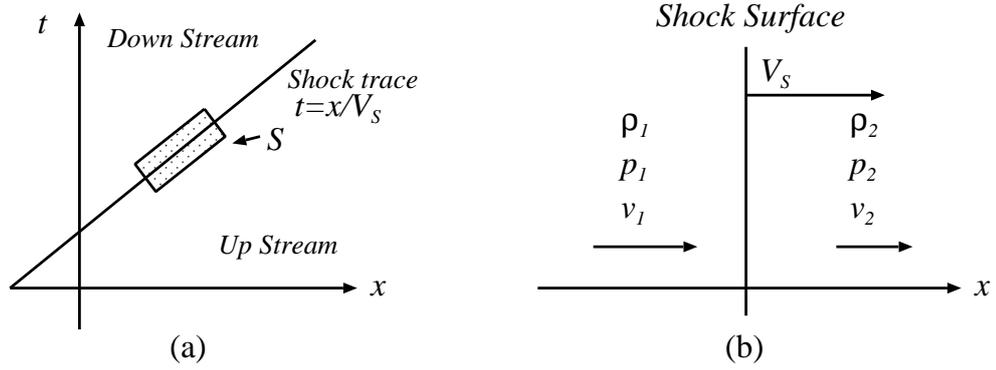


図 4: (a) 定常的な衝撃波の軌跡と積分範囲. (b) 衝撃波面とその下流, 上流. (注) 「上」流, 「下」流は衝撃波面が静止した系で見た系でと右側から流れてきたものが左に流れていく

となる. ベクトル $(-f, u)$ は x 成分, t 成分の順にかかっている. 積分は衝撃波の軌跡に垂直な成分はキャンセルし, 平行な成分だけが残る. すなわち

$$-V_s(u_{up} - u_{down}) + (f_{up} - f_{down}) = 0, \quad (70)$$

である. 式 (67) のスカラー方程式を各流体方程式適用すれば, Rankine-Hugoniot の関係式が得られる.

5.2 非相対論的な場合

衝撃波面の下流, 上流の物理量の添字をそれぞれ, 1, 2 とする (図 4b). すると, オイラー方程式より

$$-V_s(\rho_1 - \rho_2) + (\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2) = 0, \quad (71)$$

$$-V_s(\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2) + (p_1 + \rho_1 v_1^2 - p_2 - \rho_2 v_2^2) = 0, \quad (72)$$

$$\begin{aligned} & -V_s(\rho_1(\epsilon_1 + v_1^2/2) - \rho_2(\epsilon_2 + v_2^2/2)) \\ & + ((\rho_1(\epsilon_1 + v_1^2/2) + p_1)v_1 - (\rho_2(\epsilon_2 + v_2^2/2) + p_2)v_2) = 0, \end{aligned} \quad (73)$$

を得る. これが非相対論的流体方程式での Rankine-Hugoniot 関係式である. ここから密度圧縮比などを考える時には衝撃波面の静止系 ($V_s = 0$ の系) で考えるのが簡単であるが, ここでは $v_1 = 0$ の系で考えてみる. 更に理想気体を仮定し状態方程式として式 (17) を用いることにする. $v_1 = 0$ を代入して整理すると密度圧縮比 $\sigma = \rho_1/\rho_2$ は,

$$\sigma = \frac{3 - \gamma + \sqrt{(3 - \gamma)^2 + 8(\gamma - 1)(2\gamma\epsilon_2/v_2^2 + 1)}}{2(\gamma - 1)(2\gamma\epsilon_2/v_2^2 + 1)} + 1, \quad (74)$$

$\epsilon_2 \sim 0$ という場合を考えると,

$$2\gamma\epsilon_2/v_2^2 \sim 0, \quad (75)$$

であるので

$$\sigma = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad (76)$$

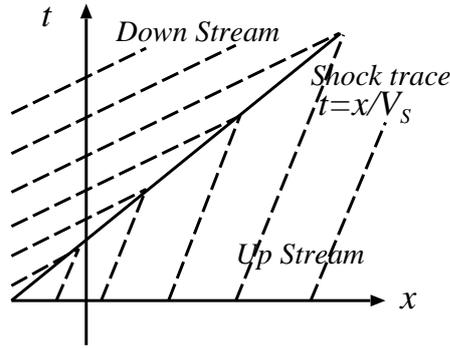


図 5: 同種族の特性線が集まることによって不連続面 (衝撃波面) が形成される．例えば C_+ 族の特性線 (点線) が交わる点の軌跡が衝撃波面 (実線) である．

となり，最大密度圧縮比が得られる． $\gamma = 5/3$ (単原子分子) の時にはよく知られているように $\sigma = 4$ となる．この系での衝撃波面の速度，衝撃波後面での圧力はそれぞれ，

$$V_s = -\frac{\gamma - 1}{2} v_2, \quad (77)$$

$$p_1 = \frac{\gamma + 1}{2} \rho_2 v_2^2, \quad (78)$$

というように密度，圧力，衝撃波の速度などが解析解が得られ，強い衝撃波の極限も求まる．前節で導入した特性線を衝撃波のような不連続面で考えると，同じ種族の特性線が集まってきている所に相当する (図 5) ．

5.3 相対論的な場合

相対論的な場合の Rankine-Hugoniot 関係式は Taub (1948) によって議論された．しかし，相対論的な場合は方程式に現れるローレンツ因子と比エンタルピーに起因する非線形性から一般的な解析解を導出することはできない．しかし，非相対論的な場合に最大圧縮率を導出するために上流で低温の極限をとったように，衝撃波上流が低温であると仮定すると解析的な記述が可能となる．非相対論的な場合は衝撃波面の静止系で考えると見通しがよかったが，相対論的な場合は衝撃波下流が静止した場合について考えると比較的簡単になることが示されている (Johnson and McKee, 1971) ．

相対論的流体方程式に式 (70) を適応させると

$$-V_s(\rho_1 W_1 - \rho_2 W_2) + (\rho_1 W_1 v_1 - \rho_2 W_2 v_2) = 0, \quad (79)$$

$$-V_s(\rho_1 h_1 W_1^2 v_1 - \rho_2 h_2 W_2^2 v_2) + (\rho_1 h_1 W_1^2 v_1^2 + p_1 - \rho_2 h_2 W_2^2 v_2^2 - p_2) = 0, \quad (80)$$

$$-V_s(\rho_1 h_1 W_1^2 - p_1 - \rho_2 h_2 W_2^2 + p_2) + (\rho_1 h_1 W_1^2 v_1 - \rho_2 h_2 W_2^2 v_2) = 0, \quad (81)$$

を得る．これが相対論的な場合の Rankine-Hugoniot の関係式である．

衝撃波下流面が静止した系 ($v_1 = 0$ の系) を考えると，

$$-V_s \rho_1 = \rho_2 W_2 (v_2 - V_s), \quad (82)$$

$$p_1 = p_2 + \rho_2 h_2 W_2^2 v_2 (v_2 - V_s), \quad (83)$$

$$-V_s(\rho_1 h_1 - p_1 + p_2) = \rho_2 h_2 W_2^2 (v_2 - V_s), \quad (84)$$

である。

ここで、衝撃波上流が低温の極限を考えると、 $h_2 \sim 1, p_2 \sim 0$ であり式 (82), (84) より比内部エネルギーは、

$$\epsilon_1 = W_2 - 1, \quad (85)$$

となる。式 (83), (84), (85) より、衝撃波の速度は、

$$V_s = \sqrt{\frac{W_2 - 1}{W_2 + 1}}(\gamma - 1), \quad (86)$$

となる。これより、この系での衝撃波の速度には上限があり $V_s \rightarrow \gamma - 1$ である。また、式 (82), (86) より密度圧縮比は、

$$\sigma = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}(W_2 - 1), \quad (87)$$

となる。1 項目は非相対論的な場合の最大密度圧縮比であり、2 項目が相対論的效果を表す項である。相対論的な場合密度圧縮比に上限はなく、非相対論的な場合との大きき異なる点の一つである。

6 まとめ

第 1 回では相対論的流体方程式の特性と、非線形な双曲型方程式に特有の不連続面の出現に関して具体的に述べた。

- 相対論的流体方程式は散逸項を無視すると因果律が守られる双曲型の方程式である、1 次元系では左右に進む音波モード (C_{\pm})、エントロピーモード (C_0) の 3 つの波が存在し、それらの速度を特性速度という。
- 単純波の場合特性量は特性速度によって運ばれ、その時空間 ($x - t$ 平面) 上の軌跡が特性曲線である。線形方程式の場合、特性曲線は直線である。
- 相対論的流体の場合音速には上限があり光速の約 50% 程度である。一方、非相対論的な流体方程式系では温度が上昇するにつれ音速は大きくなり光速度を越える事も許される。
- 同種族の特性線が集まることによって不連続面が生じる。衝撃波面の形成などは粘性項を考慮し、粘性項を 0 にする極限を考えることによって理解される。
- 衝撃波面前後の物理量。衝撃波面の速度を結びつける関係式を Rankine-Hugoniot 関係式と呼び、相対論的な場合は上流が低温の極限で解が解析的に記述できる。

次回は特性速度、特性曲線の考えを基に考案され、適応されているスキームに関して具体的に述べていく。

参考文献

- Anninos, P., Fragile, P. C., & Murray, S. D. 2003, ApJS, **147**, 177-186,
Cosmos: A Radiation-Chemo-Hydrodynamics Code for Astrophysical Problems.
- Hirano, T., van der Kolk, N., & Bilandzic, A. 2010, Hydrodynamics and Flow Hydrodynamics and Flow, Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag, 139–178.
- Johnson, M. H., & McKee, C. F. 1971, Phys. Rev. D, **3**, 858-863,
Relativistic Hydrodynamics in One Dimension.
- Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. 1987, Fluid Mechanics, Course of Theoretical Physics volume 6, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2nd edition.
- McLachlan, N. 1934, Bessel functions for engineers, The Oxford engineering science series, Clarendon Press, Oxford.
- Mignone, A., Plewa, T., & Bodo, G. 2005, ApJS, **160**, 199-219,
The Piecewise Parabolic Method for Multidimensional Relativistic Fluid Dynamics.
- Mihalas, D., & Mihalas, B. W. 1984, Foundations of radiation hydrodynamics, Oxford University Press.
- Pomraning, G. C. 1973, The Equations of Radiation Hydrodynamics, Pergamon Press, Oxford.
- Sollfrank, J., Huovinen, P., Kataja, M., Ruuskanen, P. V., Prakash, M., & Venugopalan, R. 1997, Phys. Rev. C, **55**, 392-410,
Hydrodynamical Description of 200A GeV/c S+Au Collisions: Hadron and Electromagnetic Spectra.
- Taub, A. H. 1948, Phys. Rev., **74**, 328-334,
Relativistic Rankine-Hugoniot Equations.