

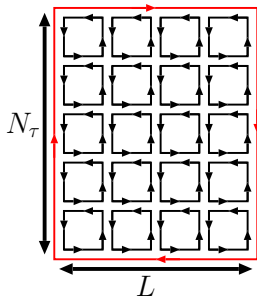


強結合格子 QCD (Strong coupling lattice QCD)

大西 明 (京都大学基礎物理学研究所)

強結合格子 QCD(あるいは格子 QCD の強結合展開) は、結合定数の逆べき $1/g^2$ で展開して格子 QCD を半解析的に解く理論的手法であり、ゲージ場の場合に主要項により重いクォークの閉じ込めを、軽いクォークを含む場合に平均場近似の下でカイラル対称性の自発的破れを定性的に説明します。また、格子 QCD の大問題である有限密度での符号問題が弱くなるため、QCD 相図研究に役立っています。

格子 QCD では(時間を虚時間とする) ユークリッド時空を離散的に表し、グルーオンを格子点をつなぐリンク変数 ($U_\nu \sim \exp(iagA_\nu)$, 右図の矢印) で表します。格子間隔は $a = 1$ とします。リンク変数を用いると、クォークの運動項・グルーオンとの結合は格子点においたクォーク (χ , 右図の丸) をリンク変数で結んだ組み合わせで、グルーオンの作用は最小の四角形にそってリンク変数を掛けたループの対角和 (ブラケット U_\square) で表せます。リンク積分により UU^\dagger や UUU 等の積分で現れるゲージ不変な項だけが残るので、グルーオンの経路積分は、つまるところ「矢印」が閉じるような幾何学的な配位を全て足し合わせることに対応します。



通常格子 QCD のモンテカルロ (MC) シミュレーションでは、クォークを積分して得られる行列式をリンク変数について MC 積分しますが、強結合格子 QCD ではリンク変数を先に、また解析的に積分します。具体例として時間・空間方向に $N_\tau \times L$ の長方形ループ (Wilson loop) を考えましょう。ブラケット作用は $1/g^2$ に比例するため、ゲージ場の場合には平面的にブラケットを敷き詰めた配位が強結合展開での主要項を与えます。リンク積分の公式を用いて積分を実行すると、Wilson loop の期待値が $\exp[-N_\tau L \log(g^2 N_c)]$ (N_c はカラーの数) に比例することが分かります。Wilson loop は $\exp[-(\text{重いクォーク対のエネルギー}) \times (\text{時間})]$ を表すので、指数部分がループの面積 ($N_\tau \times L$) に比例することは、クォーク間の距離 L に比例するポテンシャルが働いていること、すなわち強結合領域でクォークが閉じ込められていることを示します。これが 1974 年に K.G.Wilson が示した「面積則」です [1]。この結果は MC 計算によって確かめられ、強結合展開高次項の評価等を通じて弱結合領域 (連続理論の領域) との関係について理解が進んでいきました [2]。

クォークを含む場合、強結合展開の Leading Order (強結合極限, $g \rightarrow \infty$) は作用の中でクォークを含む項のみを考えることに対応します。まず右上図の最初の 2 項 (U_ν, U_ν^\dagger を含む項) の積を積分してクォークの 4 点作用 $M_x M_y$ ($M_x = \bar{\chi}_x \chi_x$; x, y は最近接の時空点の組) が現れ、Hubbard-Stratonovich

Lattice QCD action

$$S = \frac{1}{2} \sum_{x,\nu} [\eta_{\nu,x} \bar{\chi}_x U_{\nu,x} \chi_{x+\hat{\nu}} - \eta_{\nu,x}^{-1} \text{c.c.}] + m_0 \sum_x \bar{\chi}_x \chi_x - \frac{1}{g^2} \sum_\square \text{Tr} (U_\square + U_\square^\dagger)$$

$\bullet \xrightarrow{\quad} \circ \xleftarrow{\quad} \bullet$
 $\bar{\chi} U_\nu \chi \quad \bar{\chi} U_\nu^\dagger \chi$

$\circ \bullet$
 $\bar{\chi} \chi$

$\frac{1}{g^2}$
 U_\square

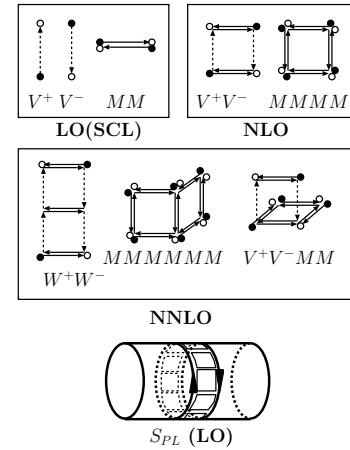
Link integral

$$U_{ab} \updownarrow U_{cd}^\dagger \quad \upuparrows UUU \quad \dots$$

$$\frac{1}{N_c} \delta_{ad} \delta_{bc} \quad \frac{1}{N_c!} \epsilon_{abc} \epsilon_{def} (N_c = 3)$$

(HS) 変換を行うと、カイラル凝縮 $\sigma \sim \langle M \rangle = \langle \bar{\chi}\chi \rangle$ がクォークの質量項を与えることが分かります。さらに平均場近似の下で、カイラル極限 (生のクォーク質量が 0) の有効ポテンシャル (自由エネルギー密度) が $F_{\text{eff}} = b_\sigma \sigma^2/2 - N_c \log \sigma$ (格子間隔 a で無次元化、 b_σ は定数) となり、強結合極限では最小エネルギー状態 (真空) でカイラル対称性が自発的に破れることが示されました [3]。

有限温度では、時間方向の格子サイズが有限 ($N_\tau = 1/T$, T は温度) なので、空間方向のリンク変数を先に積分し、時間方向のリンク変数 (右図の点線の矢印) は後から厳密に積分する手法が用いられます。2004 年には、Fukushima、および Nishida により強結合極限での QCD 相図が描かれました [4]。相転移温度が相転移化学ポテンシャルの 3 倍ほど大きいことなど、現実の系 ($T_c = (150 - 190) \text{ MeV}$, $\mu_c > 350 \text{ MeV}$) と定量的には比べられません。しかし強結合極限での QCD 相図は、臨界点をもち高密度側では一次相転移、高温側では cross over (カイラル極限では 2 次) という、現実には期待されている QCD 相図の同様の相構造をもち、これを出発点とする発展が期待できます。



実際の QCD 相図について議論するには、 $1/g^2$ が有限である効果を取り入れる必要があります。ブレイケットとクォークの結合からは、ベクトルポテンシャルに対応する補助場 (右図の V^+ , V^-) や中間子の相互作用項 (右図の $MMMM$ 等) が現れます。 $\mathcal{O}(1/g^2)$ (NLO)、 $\mathcal{O}(1/g^4)$ (NNLO) 項の影響により、強結合極限では大きすぎる T_c/μ_c 比が大きく改善されます [5]。一方、ゲージ場のみの理論でも有限温度では時間方向に一周するブレイケットの積からの寄与 (右図下) が重要となります。この配位から、時間方向に一周するリンク変数の積の対角和 (閉じ込めの秩序変数である Polyakov loop) が現れます。この Polyakov loop 作用 (右図の S_{PL}) を取り入れると、強結合領域 ($\beta_g \equiv 2N_c/g^2 \lesssim 4$) では MC 計算による転移温度の結果が再現できるのです [5]。

さて、今後強結合格子 QCD はどの方向へ向かうのでしょうか？まず、行うべきは理論の精密化です。実は上で述べた手法では、強結合極限で MC 計算により得られた相図 [7] が説明できていません。揺らぎの効果やより多くのクォークを含む項を取り入れる必要があると考えられます。また、強結合格子 QCD でのカイラル相転移は主としてスタッガード・フェルミオン ($N_f = 4$) で議論されており、現実のフレーバー数 ($N_f = 2 + 1$) での議論が必要です。さらに、有限温度・密度格子 QCD の MC 計算 [8]、有限温度での pure Yang-Mills 理論 [9] 等と比較・連携することにより、より豊富な物理が引き出せるのではないかと期待しています。

[1] K. G. Wilson, Phys. Rev. D **10** (1974) 2445.
 [2] M. Creutz, Phys. Rev. D **21** (1980) 2308; G. Münster, Nucl. Phys. B **180** (1981) 23.
 [3] N. Kawamoto, J. Smit, Nucl. Phys. B **192** (1981) 100.
 [4] K. Fukushima, Prog. Theor. Phys. Suppl. **153** (2004) 204; Y. Nishida, Phys. Rev. D **69** (2004) 094501.
 [5] K. Miura et al., Phys. Rev. D **80** (2009) 074034; T.Z. Nakano et al., Phys. Rev. D **83** (2011) 016014.
 [7] P. de Forcrand, M. Fromm, Phys. Rev. Lett. **104** (2010) 112005.
 [8] 例えば、K.Nagata, A.Nakamura, Phys.Rev.D**82**(2010)094027; S.Ejiri et al., Phys.Rev.D**82**(2010)014508.
 [9] 例えば、J. Langelage, G. Münster, O. Philipsen, JHEP 0807 (2008) 036.