宇宙論特論 (2017 年後期)　　レポート課題

[1] ２点相関関数とパワースペクトルの関係

(i) 天球面上に与えられた２次元密度分布の角度相関関数 $w(\theta_{12})$ は、離角 θ_{12} が十分小さい時、３次元密度分布に対する相関関数 $\xi(r)$ を用いて次のように表せる：

$$w(\theta_{12}) \simeq \int_0^\infty w_g^2(\chi) \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \xi\left(\sqrt{\{r(\chi)\}^2\,\theta_{12}^2 + y^2};\, \chi\right). \tag{1}$$

ここで $\chi(z) = c\int_0^z dz'/H(z')$、$r(\chi)$ はそれぞれ共動（動径）距離、共動角径距離を表し、w_g は密度分布の奥行き (動径方向) に対する重み関数である。相関関数 ξ と３次元密度分布のパワースペクトル $P(k;\,\chi(z))$ との関係を用いて、上式が以下のように表せることを示せ：

$$w(\theta_{12}) = \int_0^\infty d\chi\, w_g^2(\chi) \int_0^\infty \frac{dk_\perp\, k_\perp}{2\pi}\, J_0\left(k_\perp\, r(\chi)\, \theta_{12}\right)\, P(k_\perp;\,\chi). \tag{2}$$

ここで、$k_\parallel$、$k_\perp$ はそれぞれ、視線方向に対して平行、垂直方向の波数ベクトルの大きさを表し、$k = \sqrt{k_\parallel^2 + k_\perp^2}$ という関係がある。また、J_0 は第１種ベッセル関数で積分形で $J_0(x) = \int_0^{2\pi} d\phi\, e^{i\,x\,\cos\phi}/(2\pi)$ と定義される。

(ii) 角度相関関数 $w(\theta)$ と角度パワースペクトル C_ℓ には次のような関係がある：

$$C_\ell = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\theta)\, \mathcal{P}_\ell(\cos\theta)\, w(\theta). \tag{3}$$

ここで、$\mathcal{P}_\ell$ はルジャンドル多項式である。前問で示した関係式 (2) をもとに、小角度スケールにおいて ($\ell \gg 1$)、角度パワースペクトルは３次元密度分布のパワースペクトル $P(k)$ と以下のように表せることを示せ：

$$C_\ell \simeq \int_0^\infty d\chi \left\{\frac{w_g(\chi)}{r(\chi)}\right\}^2 P\left(\frac{\ell}{r(\chi)};\,\chi\right). \tag{4}$$

(ヒント：$\ell \gg 1$ において成り立つ近似式 $P_\ell(\cos(x/\ell)) \;\to\; J_0(x)$、およびベッセル関数の公式 $\int_0^\infty dx\; x\, J_\nu(ax)\, J_\nu(bx) = \delta_{\rm D}(a-b)/a$ を用いる)

[2] ウィック（イセルリス）の定理

ガウス統計に従う n 個の確率変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ を考える。$\boldsymbol{x}$ は次のような確率分布関数に従うとする：

$$P(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\,|\det \boldsymbol{A}^{-1}|^{1/2}}\; \exp\Bigl[-\frac{1}{2}\sum_{a,b} A_{ab}\, x_a x_b\Bigr] \tag{5}$$

ここで行列 $\boldsymbol{A}$ は $n\times n$ の対称行列である ($A_{ab} = A_{ba}$)。この確率分布関数は次の規格化条件を満たす：

$$\int_{-\infty}^\infty d^n\boldsymbol{x}\, P(\boldsymbol{x}) = 1 \tag{6}$$

以下の問いでは、この確率分布関数による統計平均

$$\langle f(\boldsymbol{x})\rangle \equiv \int_{-\infty}^\infty d^n\boldsymbol{x}\; f(\boldsymbol{x})\, P(\boldsymbol{x}) \tag{7}$$

をもとに、次の関係が成り立つことを示す：

$$\langle x_a x_b x_c x_d\rangle = \langle x_a x_b\rangle\langle x_c x_d\rangle + \langle x_a x_c\rangle\langle x_b x_d\rangle + \langle x_a x_d\rangle\langle x_b x_c\rangle. \tag{8}$$

(i) 以下で与えられるモーメント母関数 $\phi(\boldsymbol{k})$ の具体的表式を求めよ。なお、$\boldsymbol{k}$ は n 次元ベクトルである $[\boldsymbol{k}=(k_1,\cdots,k_n)]$。

$$\phi(\boldsymbol{k}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d^n\boldsymbol{x}\; P(\boldsymbol{x})\, e^{i\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{9}$$

なお、積分を評価する際、$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}-i\,\boldsymbol{k}$ で与えられる変数を用いて被積分関数を書き直すと見通しがよくなり、規格化条件 (6) で与えられる積分公式を用いることで積分を実行できる。

(ii) モーメント母関数を用いると、平均 $\langle x_a x_b\rangle$ や $\langle x_a x_b x_c x_d\rangle$ は次のように表せる：

$$\langle x_a x_b\rangle = -\left.\frac{\partial^2\phi(\boldsymbol{k})}{\partial k_a\partial k_b}\right|_{\boldsymbol{k}=0}, \qquad \langle x_a x_b x_c x_d\rangle = \left.\frac{\partial^4\phi(\boldsymbol{k})}{\partial k_a\partial k_b\partial k_c\partial k_d}\right|_{\boldsymbol{k}=0}, \tag{10}$$

前問で求めたモーメント母関数の具体的表式を用いて、上式右辺を計算せよ。得られた結果から式 (8) の関係が導かれることを示せ。

[3] 摂動論にもとづく大規模構造の非ガウス的性質

アインシュタイン-ド・ジッター宇宙 ($\Omega_{\rm m}=1,\,\Omega_{\rm DE}=0, K=0$) において、標準摂動論をもとに密度ゆらぎの統計量を計算しよう。質量密度ゆらぎ δ と $\theta\equiv(\nabla\cdot\boldsymbol{v})/(aH)$ で定義される速度発散場を、$\delta=\delta_1+\delta_2+\cdots$、$\theta=\theta_1+\theta_2+\cdots$ と展開していくと、n 次の解はそれぞれ、

$$\begin{aligned}
\delta_n(\boldsymbol{k};\,t) &= a^n(t)\int\frac{d^3\boldsymbol{k}_1\cdots d^3\boldsymbol{k}_n}{(2\pi)^{3(n-1)}}\,\delta_{\rm D}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_{12\cdots n})\,F_n(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n)\,\delta_0(\boldsymbol{k}_1)\cdots\delta_0(\boldsymbol{k}_n), && (11)\\
\theta_n(\boldsymbol{k};\,t) &= -a^n(t)\int\frac{d^3\boldsymbol{k}_1\cdots d^3\boldsymbol{k}_n}{(2\pi)^{3(n-1)}}\,\delta_{\rm D}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_{12\cdots n})\,G_n(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n)\,\delta_0(\boldsymbol{k}_1)\cdots\delta_0(\boldsymbol{k}_n) && (12)
\end{aligned}$$

と表せる。ただし $\boldsymbol{k}_{12\cdots n}=\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\cdots\boldsymbol{k}_n$。 δ_0 は線形密度ゆらぎで、これを用いて 1 次解は $\delta_1(\boldsymbol{k})=a\,\delta_0(\boldsymbol{k})$、$\theta_1(\boldsymbol{k})=-a\,\delta_0(\boldsymbol{k})$ と表される。以下では、δ_0 はガウス統計に従うランダム密度場とし、その統計性はパワースペクトル $P_0(k)$

$$\langle\delta_0(\boldsymbol{k})\delta_0(\boldsymbol{k}')\rangle=(2\pi)^3\,\delta_{\rm D}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\,P_0(|\boldsymbol{k}|)$$

で特徴づけられるとする。

(i) 講義中に説明した漸化式を用いて、2 次の摂動論カーネル $F_2(\boldsymbol{k}_1,\,\boldsymbol{k}_2)$, $G_2(\boldsymbol{k}_1,\,\boldsymbol{k}_2)$ を具体的に計算せよ。

(ii) 最低次の摂動計算で、以下で定義されるバイスペクトル $B(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)$ を、摂動論カーネル F_n と線形密度ゆらぎのパワースペクトル P_0 を用いて書き表せ：

$$\left\langle\,\delta(\boldsymbol{k}_1)\delta(\boldsymbol{k}_2)\delta(\boldsymbol{k}_3)\,\right\rangle=(2\pi)^3\,\delta_{\rm D}(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3)\;B(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) \tag{13}$$

(iii) 前問 (i)(ii) までの結果をもとに、非ガウス性を特徴づける「歪度 (skewness) 」と呼ばれる量 S_3 を評価してみよう：

$$S_3\equiv\frac{\langle\{\delta(\vec{x})\}^3\,\rangle}{\langle\{\delta(\vec{x})\}^2\,\rangle^2}. \tag{14}$$

右辺の分子・分母はそれぞれ、フーリエ空間の密度場 $\delta(\boldsymbol{k})$ と次のように結びついている：

$$\begin{aligned}
\left\langle\{\delta(\vec{x})\}^3\,\right\rangle &= \int\frac{d^3\boldsymbol{k}_1 d^3\boldsymbol{k}_2 d^3\boldsymbol{k}_3}{(2\pi)^9}\left\langle\,\delta(\boldsymbol{k}_1)\delta(\boldsymbol{k}_2)\delta(\boldsymbol{k}_3)\,\right\rangle e^{i(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3)\cdot\vec{x}}, && (15)\\
\left\langle\{\delta(\vec{x})\}^2\,\right\rangle &= \int\frac{d^3\boldsymbol{k}_1 d^3\boldsymbol{k}_2}{(2\pi)^6}\left\langle\,\delta(\boldsymbol{k}_1)\delta(\boldsymbol{k}_2)\,\right\rangle e^{i(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)\cdot\vec{x}} && (16)
\end{aligned}$$

(i),(ii) の結果を上式に代入し、最低次の摂動計算で具体的に評価することで、歪度は次のように求まることを示せ[1]：

$$S_3 \simeq \frac{34}{7}. \tag{17}$$

[1] ヒント：(16) 式は、最低次の評価では、線形密度場 δ_1 を代入すればよく、

$$\left\langle \{\delta(\vec{x})\}^2 \right\rangle \simeq a^2 \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} P_0(k)$$

となる。一方、(15) 式の評価には問い (ii) で求めたバイスペクトルの表式を用いる。すると、

$$\left\langle \{\delta(\vec{x})\}^3 \right\rangle \propto \left[a^2 \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} P_0(k)\right]^2$$

という形にまとまる。