

「円筒対称重力波解を用いた重力波の非線形効果の解析」

三島 隆 (日大理工)

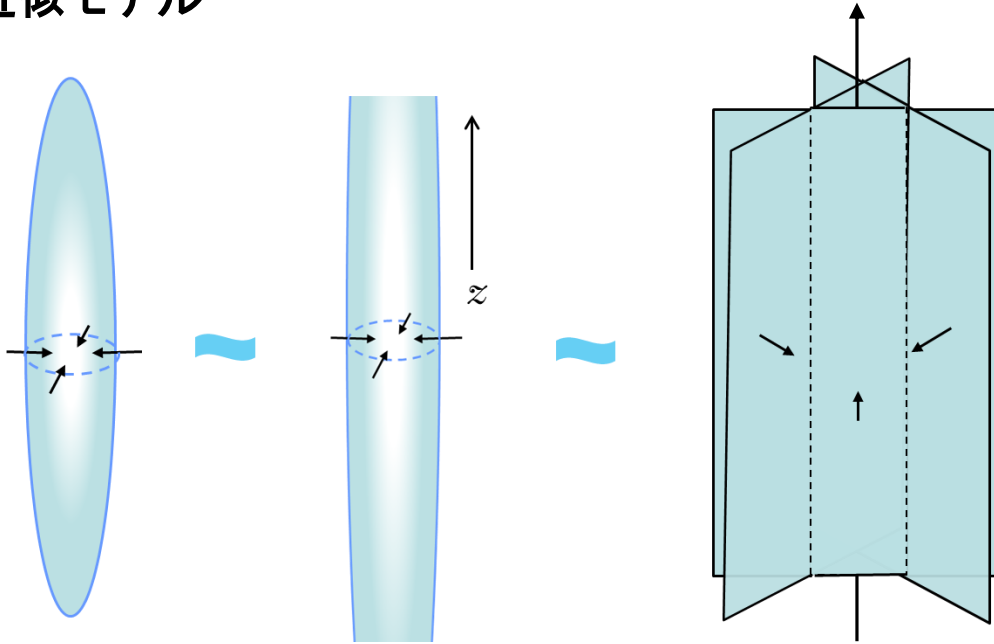
富沢真也氏 (東京工科大) との共同研究に基づく. : Phys. Rev. **D96**, 024023 (2017)

約束の地(1981年8月、講談社)

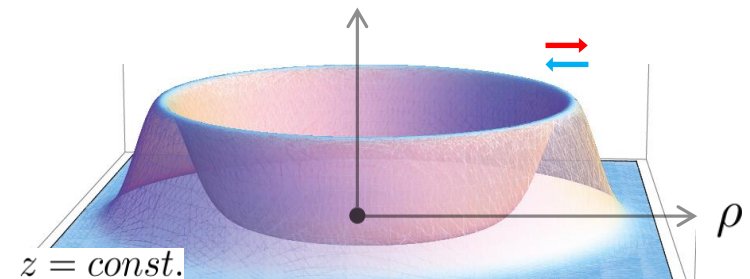
I. 目的と導入

< 円筒対称重力波 >

重力波の‘おもちゃ’： 強いて言えば, 非球対称性の強いある重力波の集中・散乱の近似モデル



正則な円筒対称な波面を持つ重力波: z 軸に対し入射・反射を行う.



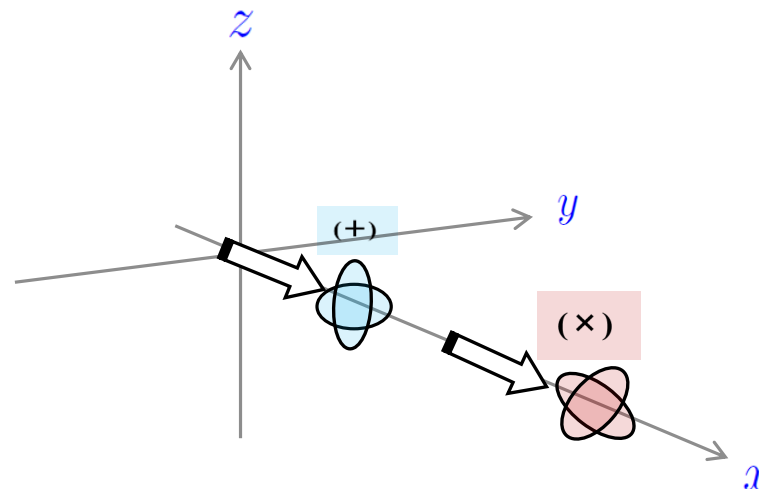
< 特徴 >

- BHや特異性が発生しない.
- 二つの独立なモード(+, ×)を持つ.

近未来的には現実味は乏しい.



ある意味で、重力波の非線形性の一面を純粹に考察できる.

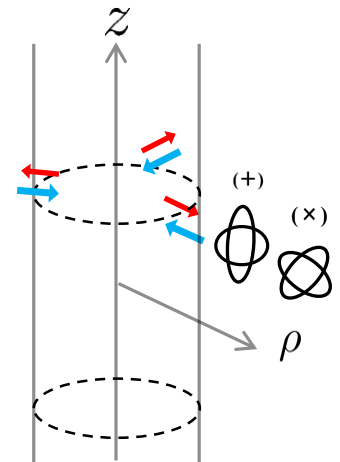


< 話の流れ >

- 1 最初に円筒対称重力波を扱う際に必要な諸量と方程式を導入する. そのあと、方程式の解の導出法(簡単な調和写像的方法)簡単な説明と解の表式を与える.

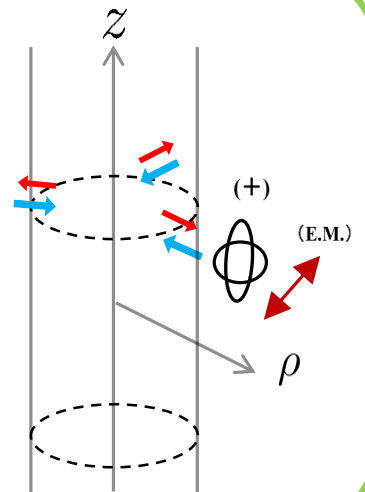
2

調和写像法で構成した非ソリトンの円筒対称重力波解の非線形効果(モード転換)を具体的に調べる。とくに非線形効果を表すパラメータ(A)によってモード転換が具体的にコントロールされる様子を見る。



3

最後に、この真空解を電磁波・重力波の混合波に焼き直せることを示す、これにより、モード転換は、電磁波と重力波の転換現象と解釈できる。



II. 重力ポテンシャル(計量), 基礎方程式(Ernst 方程式)

Piran, Saifer and Stark [' 85]

< 重力ポテンシャル(計量) >

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (x^\mu : \mu = 0 \sim 3)$$



: 円筒軸対称真空時空

(Kompaneets – Jordan_Ehlers 計量)

$$\star^1 ds^2 = e^{2\psi} (dz + \omega d\phi)^2 + \rho^2 e^{-2\psi} d\phi^2 + e^{2(\gamma-\psi)} (d\rho^2 - dt^2)$$

↑ ↑ ↑
(+) (×) (+)

(The metric depends only on ρ and t)

< Einstein 方程式 >

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$$



(簡約化された真空Einstein 方程式)

(i) $\psi_{,tt} - \frac{1}{\rho}\psi_{,t\rho} - \psi_{,\rho\rho} = \frac{e^{4\psi}}{2\rho^2} [(\omega_{,t})^2 - (\omega_{,\rho})^2]$

(ii) $\omega_{,tt} + \frac{1}{\rho}\omega_{,t\rho} - \omega_{,\rho\rho} = 4(\omega_{,\rho}\psi_{,\rho} - \omega_{,t}\psi_{,t})$

(iii) $\gamma_{,\rho} = \rho [(\psi_{,t})^2 + (\psi_{,\rho})^2] + \frac{e^{4\psi}}{4\rho} [(\omega_{,t})^2 + (\omega_{,\rho})^2]$

(iv) $\gamma_{,t} = 2\rho\psi_{,t}\psi_{,\rho} + \frac{e^{4\psi}}{2\rho}\omega_{,t}\omega_{,\rho}$



- 非線形方程式 (i), (ii) をまず解く必要がある。

< Ernst 方程式 >

(Ernst ポテンシャルの導入) Ernst['67]

$$\mathbf{E} = e^{2\psi} + i\Phi \quad \left[\Phi_{,t} = \frac{1}{\rho} e^{4\psi} \omega_{,\rho}, \quad \Phi_{,\rho} = \frac{1}{\rho} e^{4\psi} \omega_{,t} \right]$$

(Ernst 方程式 : 標的空間が2次元双曲空間 CH^1 の非線形シグマモデル)

★³

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{2}{\mathbf{E} + \bar{\mathbf{E}}} \nabla \mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E} = 0$$



★²

調和関数 (波動関数) τ と CH^1 上の測地線によって解 (調和写像/波動写像) が構成できる.

シード解

非線形性を担う.

$\mathbf{E}(\tau(t, \rho))$

$$\nabla^2 \tau = 0$$

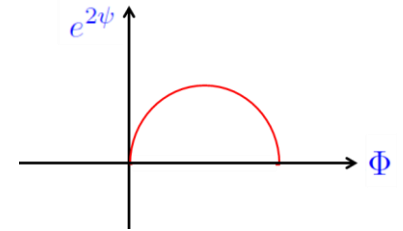
$$\frac{d^2 \mathbf{E}}{d\tau^2} - \frac{2}{\mathbf{E} + \bar{\mathbf{E}}} \left(\frac{d\mathbf{E}}{d\tau} \right)^2 = 0$$

< 一般解 >

3次元Minkowski時空内の任意の円筒対称な線形波動関数 τ ($\nabla^2\tau = 0$)



ポテンシャル空間（標的空間）は、Poincareの上半平面モデルに対応している
ので、一般の測地線は実軸に中心を持つ半円で与えられる。



(計量)

$$e^{2\psi} = \frac{1}{e^{-2\tau} + A^2 e^{2\tau}}$$

$$\omega = 4A \int \rho [\tau_{,t} d\rho + \tau_{,\rho} dt]$$

$$\gamma = \int \{ 2\rho \tau_{,t} \tau_{,\rho} dt + \rho [(\tau_{,t})^2 + (\tau_{,\rho})^2] d\rho \}$$

★⁴

- パラメータ A は、非線形効果の度合いを表す。

< シード解 τ >

シードの一般解：軸上正則なもの $\nabla^2 \tau = 0$,

$$\tau = c \int_0^\infty e^{-ak} J_0(k\rho) (\cos(kt) \underbrace{f(k)} + \sin(kt) \underbrace{g(k)}) dk$$

適当な任意関数

(例 : Weber-Wheeler['57]・Bonnor['57] 解の拡張)

★⁵

$$\begin{aligned} \tau &= c \int_0^\infty e^{-ak} J_0(k\rho) (\cos(kt) \cos \delta + \sin(kt) \sin \delta) dk \\ &= c(\tau_{\text{even}} \cos \delta + \tau_{\text{odd}} \sin \delta) \end{aligned}$$

- このとき、積分が解析的に可能



以下、この例をシード解の構成に用いる。

III. 一般解の示す非線形性(モード転換)の解析

< C-エネルギーと諸量 >

Thorne[' 65], Piran, Safier and Stark [' 85]

(振幅)

$$u = \frac{1}{2}(t - \rho), \quad v = \frac{1}{2}(t + \rho)$$

$$A_+ = 2\psi_{,v},$$

(*ingoing + mode*)

$$B_+ = 2\psi_{,u}$$

(*outgoing + mode*)

★⁶

$$A_\times = \frac{e^{2\psi} \omega_{,v}}{\rho},$$

(*ingoing × mode*)

$$B_\times = \frac{e^{2\psi} \omega_{,u}}{\rho}$$

(*outgoing × mode*)

(エネルギー密度, エネルギー流束とその+と×のモードへの分解)

$$\mathcal{E} := \gamma, \rho = \mathcal{E}_+ + \mathcal{E}_\times \quad (\text{C-エネルギー 密度})$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{E}_+ := \frac{\rho}{8} (A_+^2 + B_+^2) \\ \mathcal{E}_\times := \frac{\rho}{8} (A_\times^2 + B_\times^2) \end{array} \right]$$

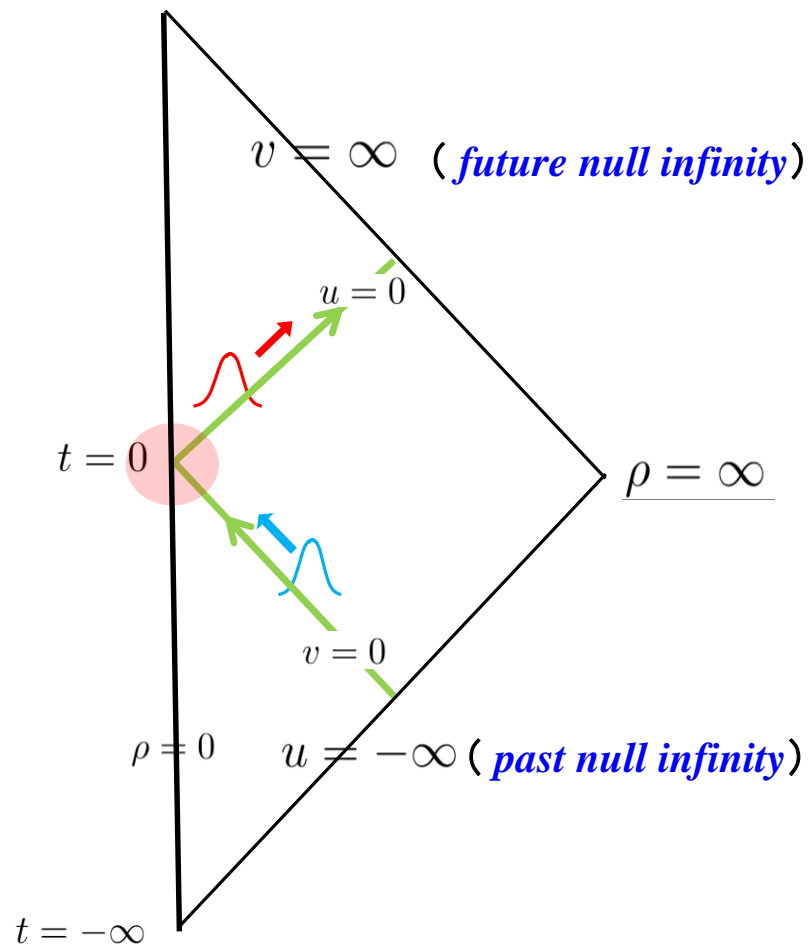
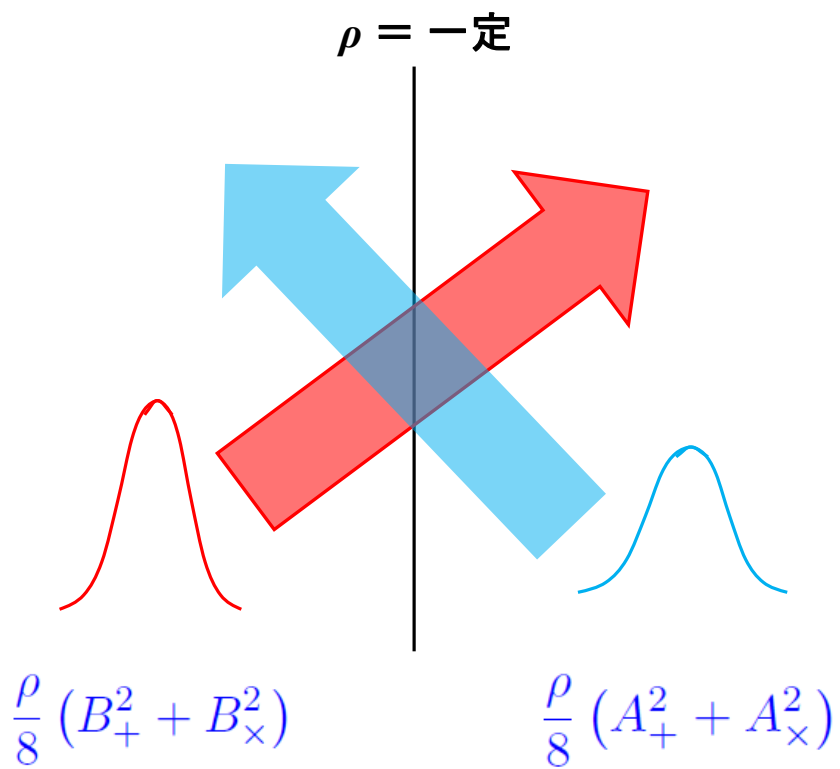
$$\gamma, t = \frac{\rho}{8} \left[\underbrace{A_+^2 + A_\times^2}_{(\text{ingoing flux})} - \underbrace{(B_+^2 + B_\times^2)}_{(\text{outgoing flux})} \right] \quad (\text{C-エネルギー 流束})$$

★⁷

$$E(t, \rho_0) = \int_0^{\rho_0} \mathcal{E} d\rho = \gamma(t, \rho_0) - \gamma(t, 0) \quad (\text{C-エネルギー})$$

軸上正則ならゼロ
↓

$$\left[\begin{array}{l} E_+(t, \rho_0) = \int_0^{\rho_0} \mathcal{E}_+ d\rho \\ E_\times(t, \rho_0) = \int_0^{\rho_0} \mathcal{E}_\times d\rho \end{array} \right]$$



< 解の C-エネルギー密度の一般的特徴 > : 求めた解 ★⁴ より

(+モード と ×モード の振幅の一般形)

★⁸

$$A_+ = 2e^{2\psi}(e^{-2\tau} - A^2e^{2\tau})(\tau_{,t} + \tau_{,\rho}),$$

$$B_+ = 2e^{2\psi}(e^{-2\tau} - A^2e^{2\tau})(\tau_{,t} - \tau_{,\rho}),$$

$$A_\times = 4Ae^{2\psi}(\tau_{,t} + \tau_{,\rho}),$$

$$B_\times = -4Ae^{2\psi}(\tau_{,t} - \tau_{,\rho}).$$

$$e^{2\psi} = \frac{1}{e^{-2\tau} + A^2e^{2\tau}}$$

(C-エネルギー密度の表式)

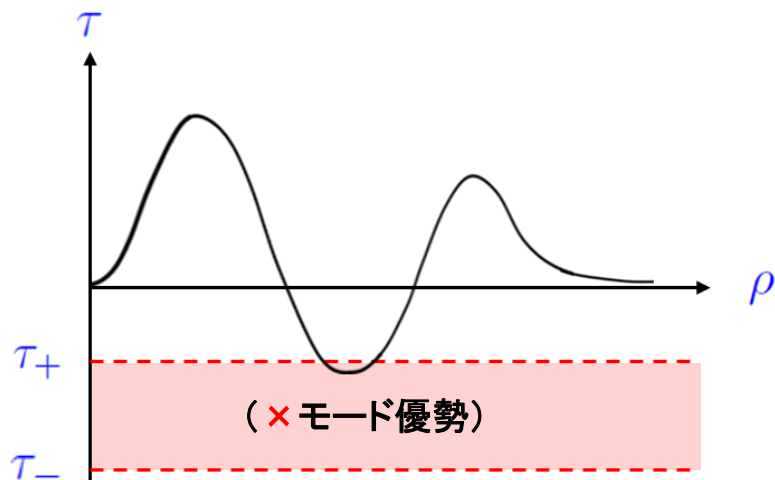
★⁹

$$\mathcal{E} = \gamma_{,\rho} = \rho [(\tau_{,t})^2 + (\tau_{,\rho})^2]$$

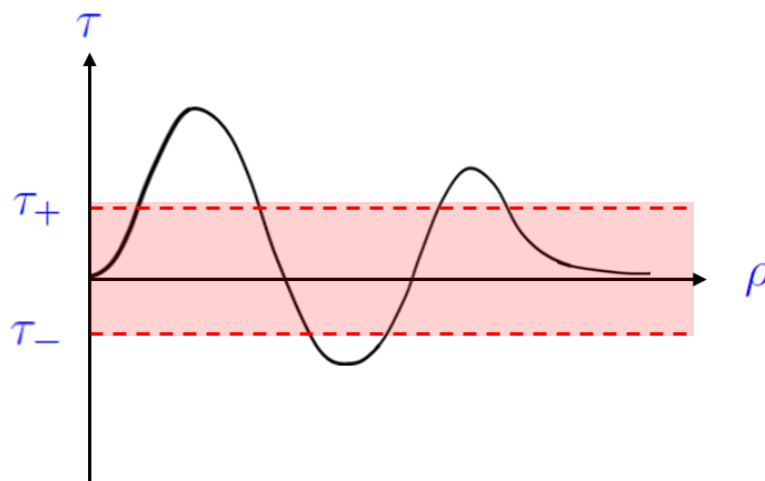
- C-エネルギー は A によらないことがわかる。
(つまりエネルギーの塊としての振舞いには‘非線形効果’は現れない)

< A による解の非線形性(モード転換の割合)の場合分け >

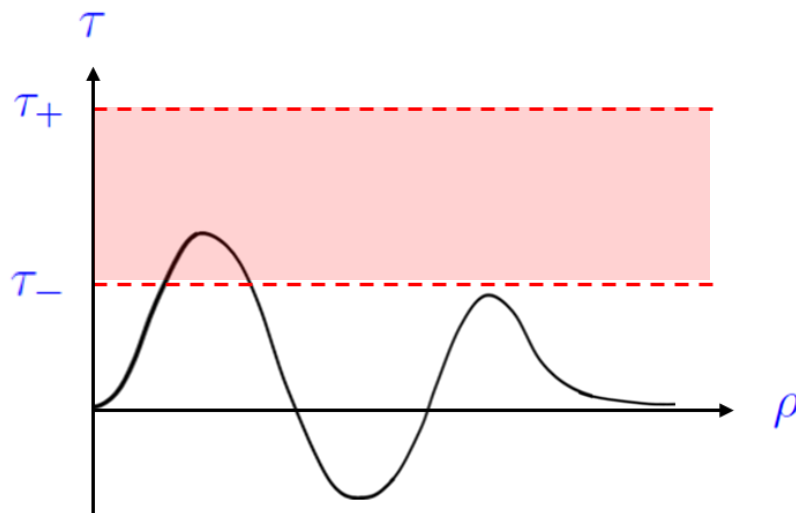
$A > \sqrt{2} + 1$



$\sqrt{2} + 1 > A > \sqrt{2} - 1$



$\sqrt{2} - 1 > A > 0$



IV. Generalized Weber-Wheeler-Bonnor解を用いた例示

★ 12

$$\tau = c(\tau_{\text{even}} \cos \delta + \tau_{\text{odd}} \sin \delta)$$

δ : 時間反転非対称性の度合い

$$\left[\begin{array}{l} \tau_{\text{even}} = \frac{c}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{4a^2t^2 + (a^2 + \rho^2 - t^2)^2} + a^2 + \rho^2 - t^2}{4a^2t^2 + (a^2 + \rho^2 - t^2)^2} \right]^{1/2} \quad (\text{時間に関して偶関数}) \\ \tau_{\text{odd}} = \frac{act/\sqrt{2}}{\sqrt{4a^2t^2 + (a^2 + \rho^2 - t^2)^2} \left[\sqrt{4a^2t^2 + (a^2 + \rho^2 - t^2)^2} + a^2 + \rho^2 - t^2 \right]^{1/2}} \quad (// \text{ 奇関数}) \end{array} \right.$$

■ パラメータは, $\left\{ \begin{array}{ll} a : \text{波の幅} & \delta : \text{時間反転非対称性の度合い} \\ c : \text{振幅} & A : \text{非線形効果の度合い} \end{array} \right.$

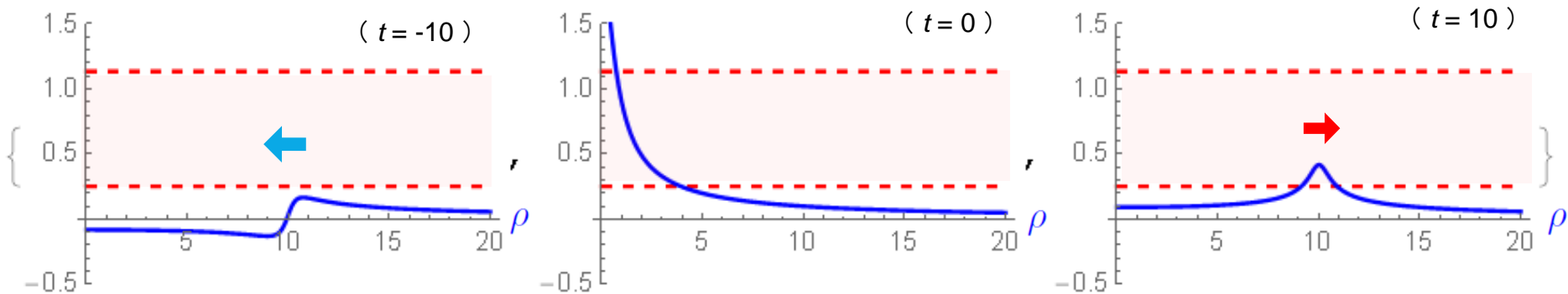
例として次スライドにて, あるパラメータにおける τ と $\mathcal{E}_+/\mathcal{E}$ の振舞いをみる.



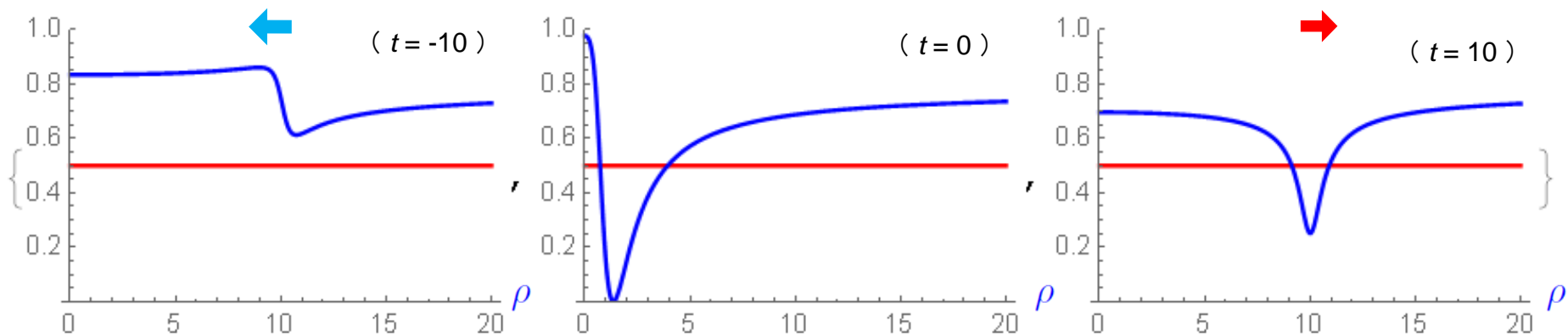
< 非線形性の現れ方-1 >

単波束の反射: $A = 1/4$, $\delta = \pi/3$, $a = 1/2$, $c = 2$

\mathcal{T} のスナップショット : $t = -10, t = 0, t = 10$

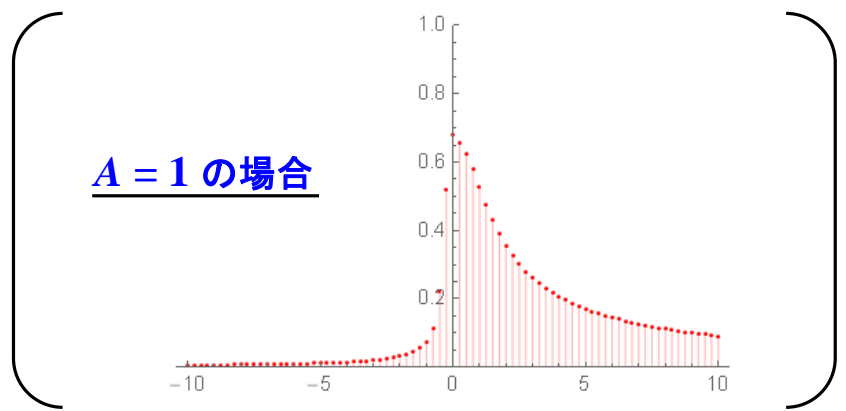
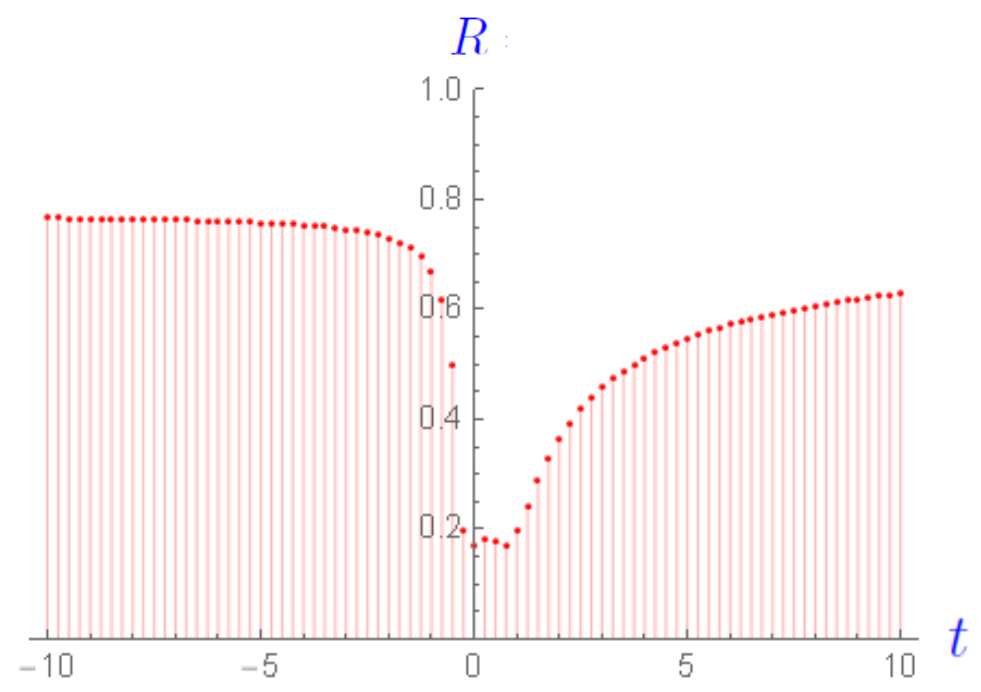


$\mathcal{E}_+/\mathcal{E}$ のスナップショット : $t = -10, t = 0, t = 10$



+ モードの C- エネルギーに占める割合の時間的变化

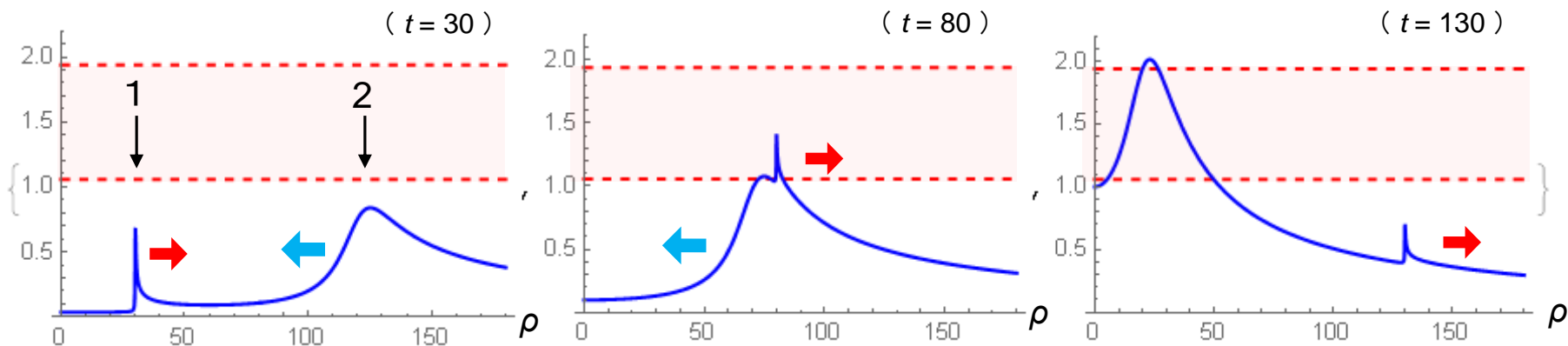
$$\left(R = \frac{E_+(t, \rho = 2000)}{E(t = -10, \rho = 2000)} \right)$$



< 非線形性の現れ方-2 >

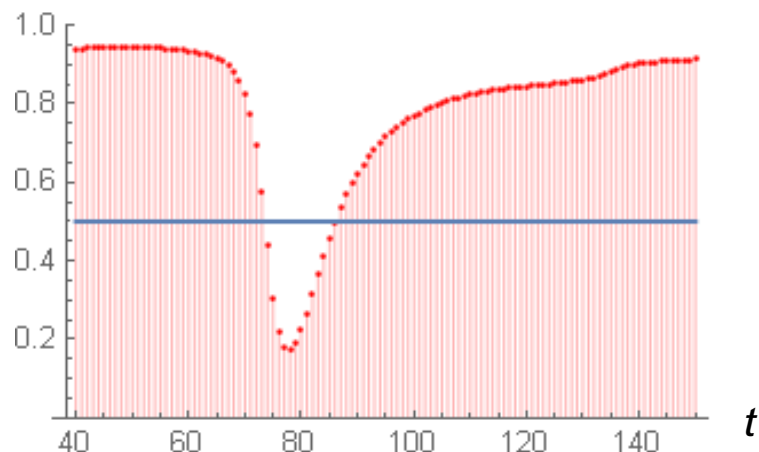
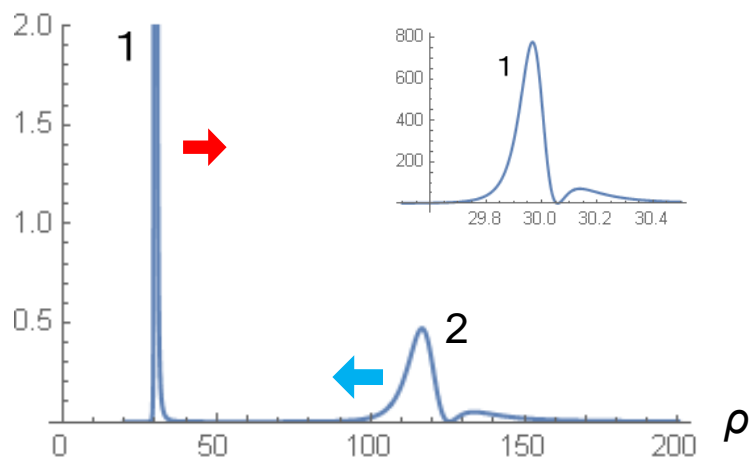
二つの波束の衝突: $A = 1/20$; $d_1 = 0$, $a_1 = 1/10$; $c_1 = 2$; $d_2 = 0$, $a_2 = 10$, $c_2 = 50$

\mathcal{T} のスナップショット : $t = 30$, $t = 80$, $t = 130$



\mathcal{E} のスナップショット : $t = 30$

+ モードの C- エネルギーに占める割合の時間的変化



IV. Einstein-Maxwell-系への応用(電磁波-重力波間の転換)

< *Ernst* 方程式-II : 簡約化したEinstein-Maxwell方程式 > Ernst['68]

(Kompaneets – Jordan_Ehlers 計量 ★¹ とゲージ場)

$$ds^2 = f^2(dz + \omega d\phi)^2 + f^{-1}\rho^2 d\phi^2 + f^{-1}e^{2\gamma}(-dt^2 + d\rho^2) \quad [f := e^{2\psi}]$$

$$\mathbf{A} = Ad\phi + Bdz$$

(Ernst ポテンシャルの導入)

$$\mathbf{F} := B + i\chi \quad [\chi_{,t} = \rho^{-1}f(A_{,t} + \omega B_{,t}) \quad \chi_{,t} = \rho^{-1}f(A_{,\rho} + \omega B_{,\rho})]$$

$$\mathbf{E} := f - |\mathbf{F}|^2 + i\Phi \quad [\Phi_{,\rho} = \rho^{-1}f^2[\omega_{,t} + 2(B\chi_{,t} - \chi B_{,t})] \quad \Phi_{,t} = \rho^{-1}f^2[\omega_{,\rho} + 2(B\chi_{,\rho} - \chi B_{,\rho})]]$$

(Ernst 方程式-II)

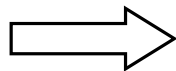
$$\star^{13} \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad f\nabla^2 \mathbf{E} = (\nabla \mathbf{E} - 2\bar{\mathbf{F}}\nabla \mathbf{F}) \cdot \nabla \mathbf{E} \\ \text{(ii)} \quad f\nabla^2 \mathbf{F} = (\nabla \mathbf{E} - 2\bar{\mathbf{F}}\nabla \mathbf{F}) \cdot \nabla \mathbf{F} \end{array} \right.$$

< Bonnorの変換 >

Bonnor['61]

(真空のErnst ポテンシャル)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_v &= f_v + i\Phi_v \\ \mathbf{F}_v &= 0 \end{aligned}$$



(EM-系のErnst ポテンシャル)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= f_v^2 + \Phi_v^2 \\ \mathbf{F} &= e^{i\theta} \Phi_v \end{aligned}$$

- 上記によってErnst方程式の真空解を電磁的真空解に変換できる.

$$f = f_v^2 \quad (\psi = 2\psi_v), \quad B + i\chi = e^{i\theta} \Phi_v, \quad \gamma = 4\gamma_v$$



重力波の+モード \implies 重力波の+モード

重力波の×モード \implies 電磁波の線形モード

V.1 まとめ

- 解の非線形的振舞い(モード転換)は、パラメータ A とシード解 τ の間の簡単な関係式を用いて解析できる.
- 重力波のモード転換を重力波・電磁波の転換に焼き直せることを示した.
(重力波のエネルギーの大部分を電磁波のエネルギーに転換できる可能性)

V.2 今後の展開

- 入射時と反射時のモードの比率が異なる解は？
(τ として特異なシードの場合やソリトン解では, 異なるようにできる.)
 - Einstein-Maxwell 系の本格的な解析 (full modes)
 - 高次元時空の重力波, 宇宙論的状況 ...
 - 軸近傍のテスト物質の振舞い
- } 同様の手法が使える.