

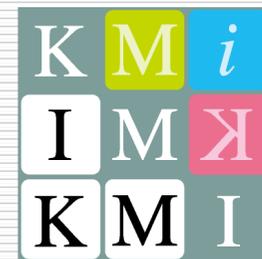
量子弱測定の 重力波検出への応用

西澤 篤志 (名古屋大学 KMI)

2017年9月20-22日 @ 京都大学 人環
研究会「生物から宇宙までの非線形現象」



NAGOYA
UNIVERSITY



Kobayashi-Maskawa Institute
for the Origin of Particles and the Universe

自己紹介

西澤 篤志

- 2004年 関西学院大学 理学部卒業 (指導教員：岡村さん)
- 2004年 京都大学 人環 入学 (指導教員：阪上さん)
新・阪上研としては一期生

修論テーマ「重力波干渉計の量子論」

- 2006年 受託院生として国立天文台重力波プロジェクト推進室へ
(受入教員：川村さん)

観測実験の研究室で観測のための理論をやる

- 2009年 京都大学 人環 博士修了

自己紹介(続き)



- 2009年 - 2010年 国立天文台 理論研究部 (研究員)
- 2010年 - 2012年 京都大学 基礎物理学研究所 (PD学振)
- 2013年 - 2014年 京都大学 天体核研究室 (特定研究員)
- 2014年 - 2016年 カリフォルニア工科大学 (海外学振)
- 2016年 ミシシッピ大学 (研究員)
- 2017年～ 名古屋大学 素粒子宇宙起源研究機構 (特任助教)

内容



1. 重力波観測について
2. 量子弱測定
3. 重力波検出への応用
4. 量子雑音と標準量子限界
5. まとめ



1. 重力波観測について

2015年9月14日、重力波の初検出

LIGO の2つの検出器がほぼ同時刻に同じような信号をとらえた！

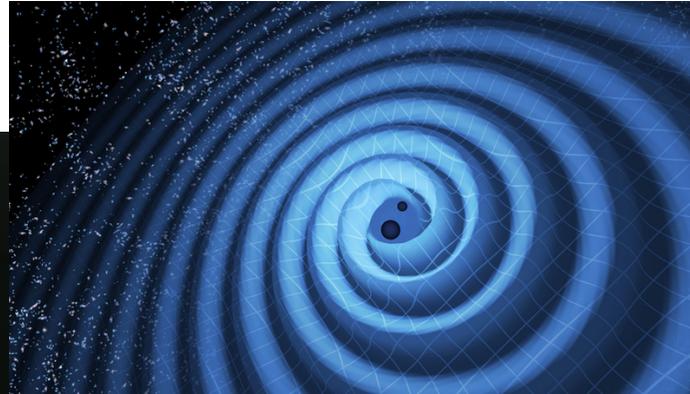
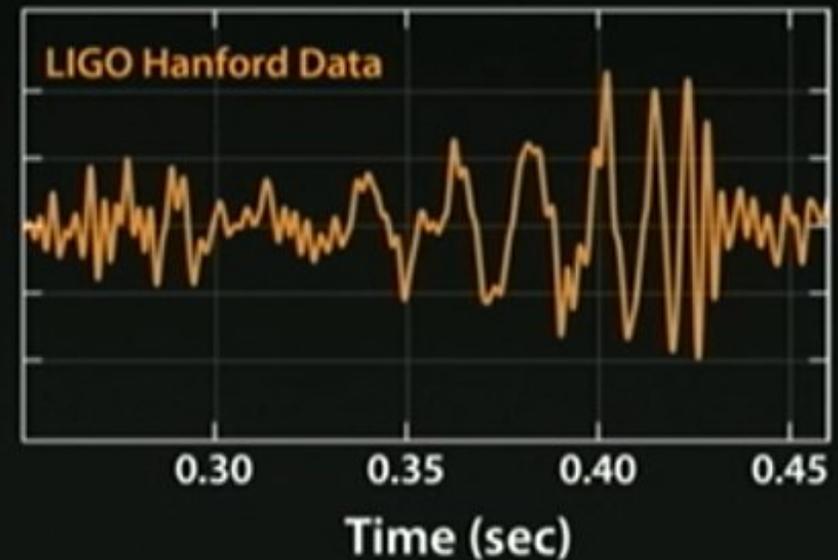
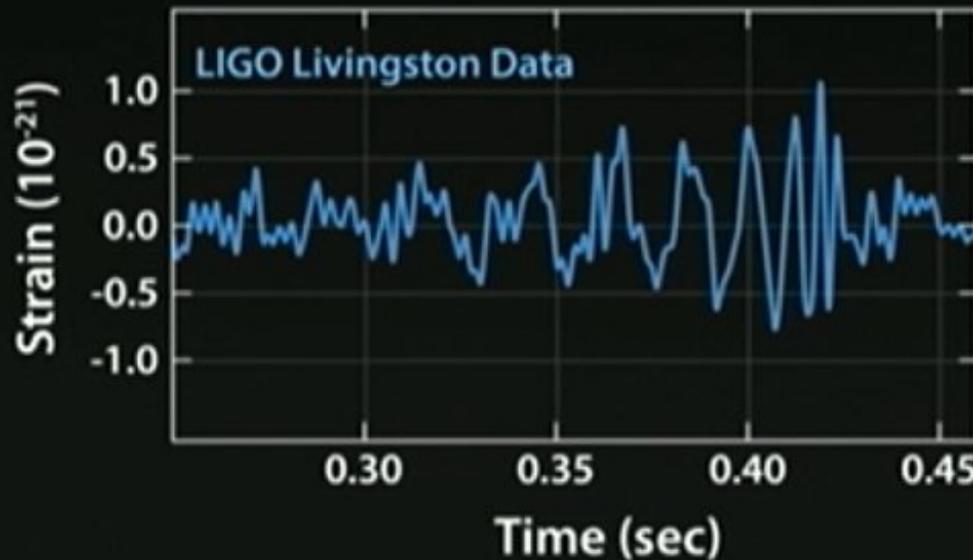


Image credit: LIGO/T. Pyle



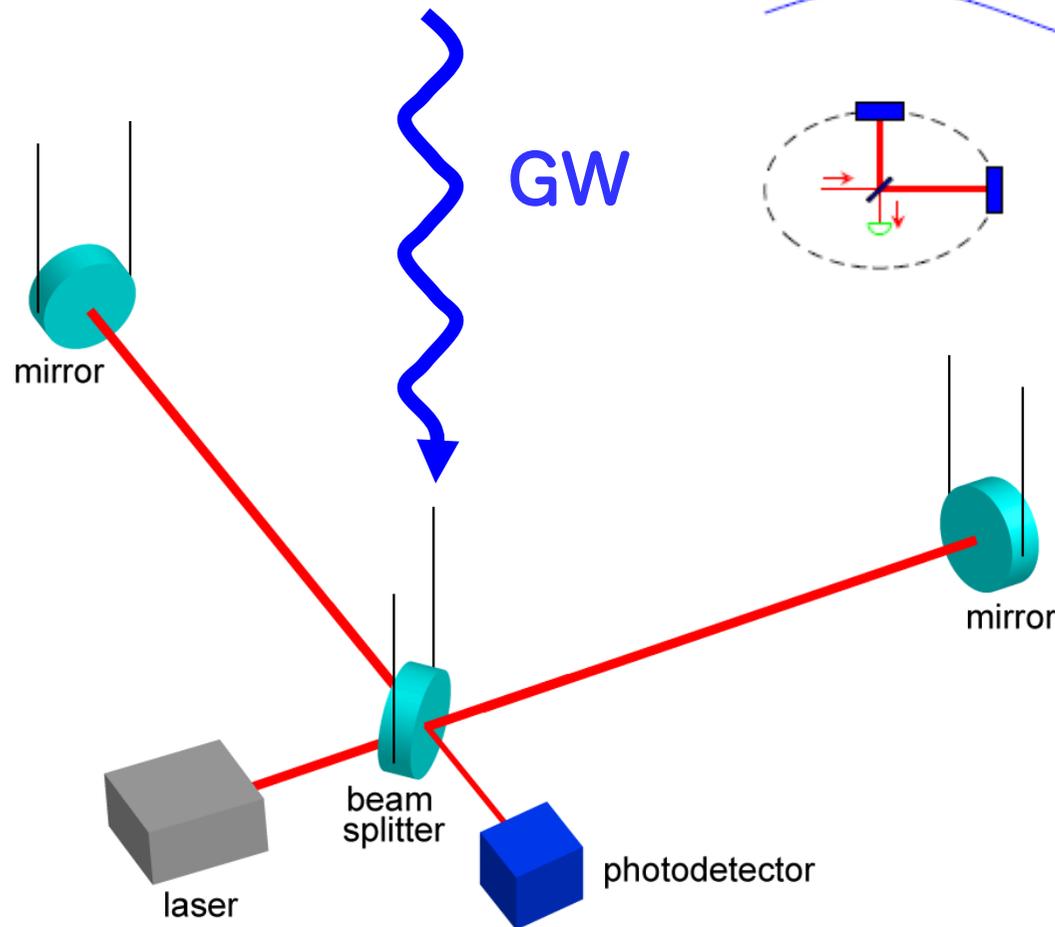
GW151226, GW170104 も合わせて、これまでで3イベント。

世界の重力波検出器

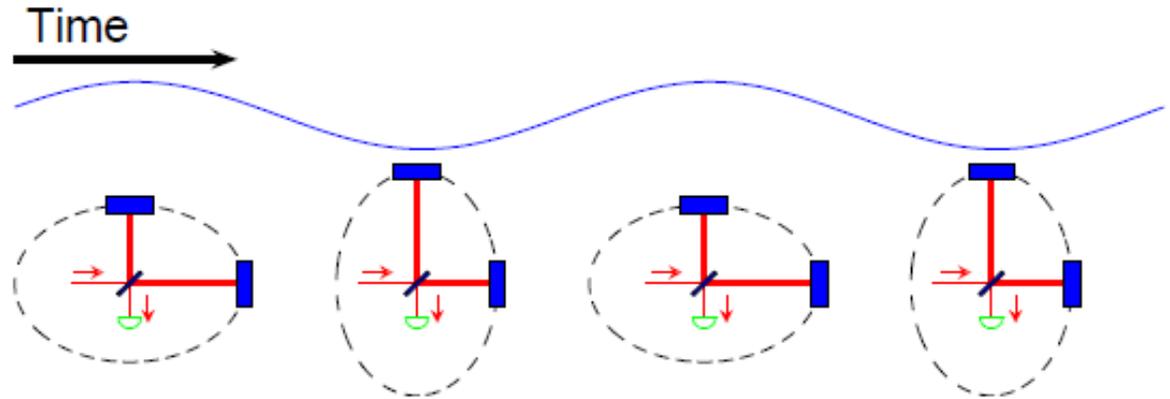


レーザー干渉型重力波検出器の原理

Michelson 干渉計



重力波による時空のひずみ



それぞれのアームでの
レーザー光の伝播時間の違い
(レーザー光の位相差)



干渉光の変化を検出

Fabry-Perot Michelson 干渉計

アーム長が長いほど
ミラーの変位は大きくなる

$$\Delta x \propto hL$$

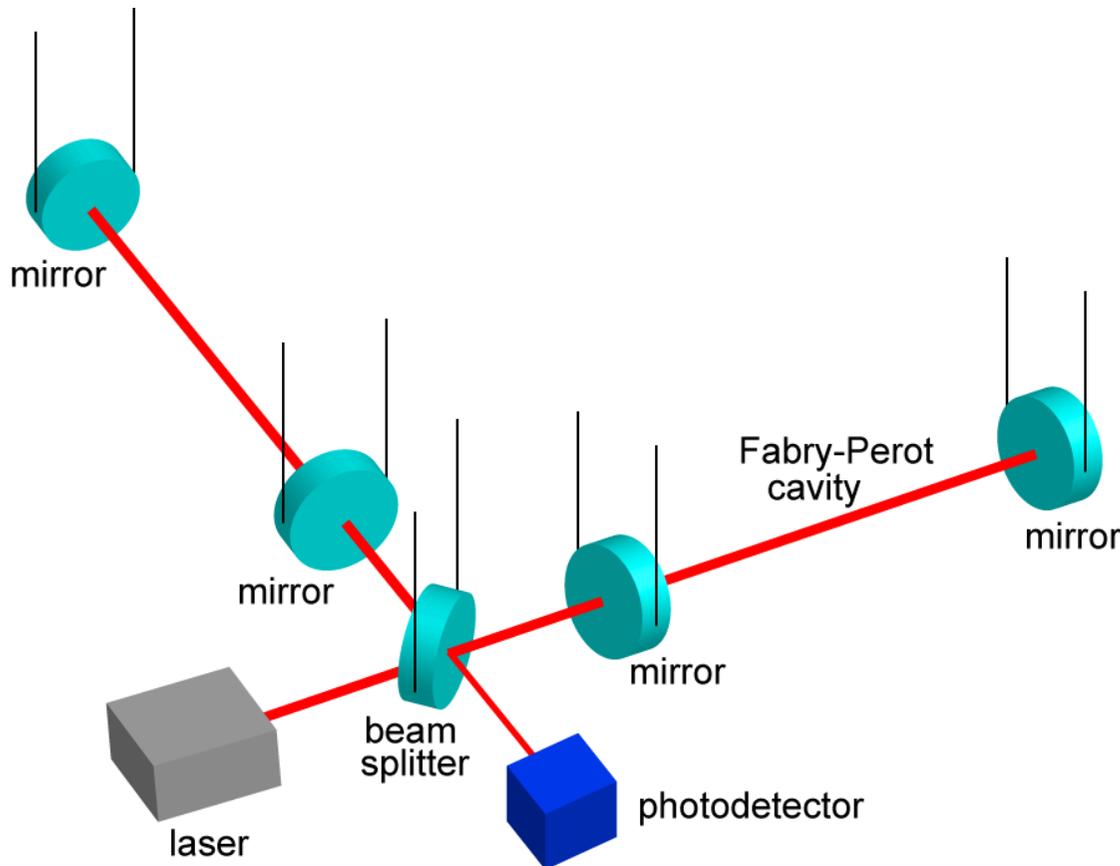


Fabry-Perot キャビティ
を用いる

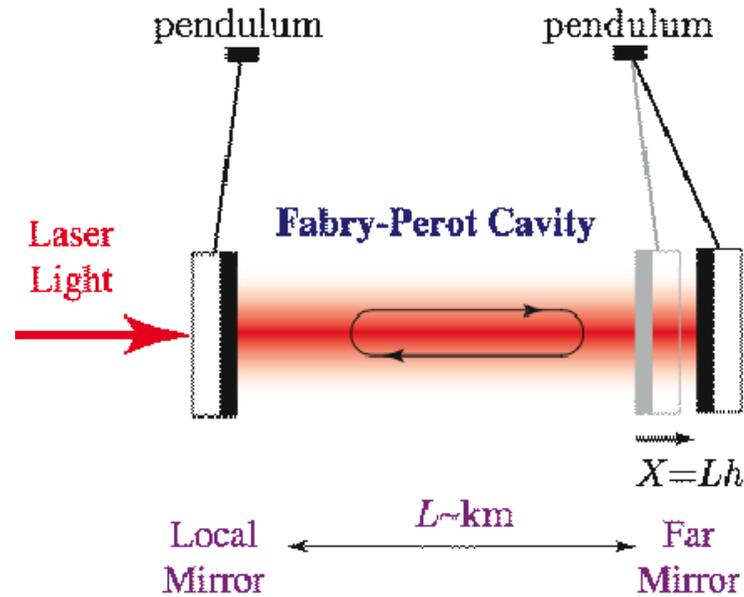


高感度化

現在の重力波検出器
の主流なデザイン



重力波検出器の量子雑音



光子数ゆらぎ

→ 散射雑音

↓
位相ゆらぎ

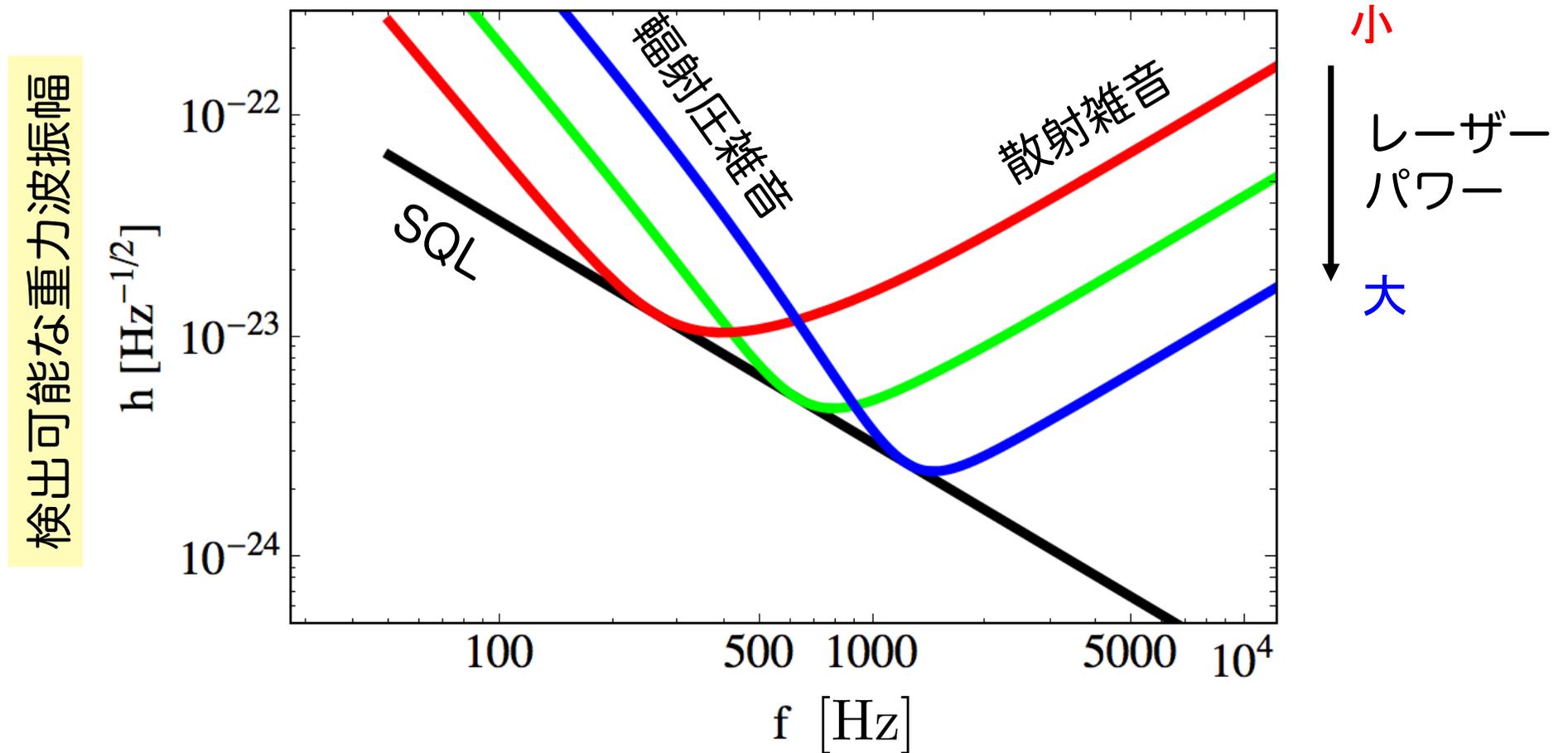
→ 輻射圧雑音

$$S_{shot} \propto 1/I_0$$

$$S_{rad} \propto I_0$$

標準量子限界 (古典的感度限界)

標準量子限界 (SQL)



現在の検出器のデザイン感度では、SQL に到達する！



2. 量子弱測定

弱測定とは

量子系

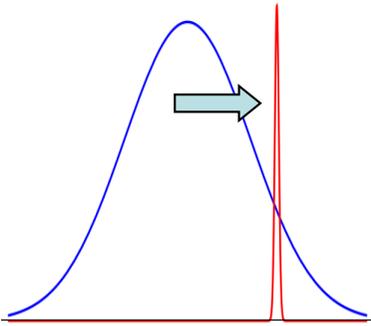
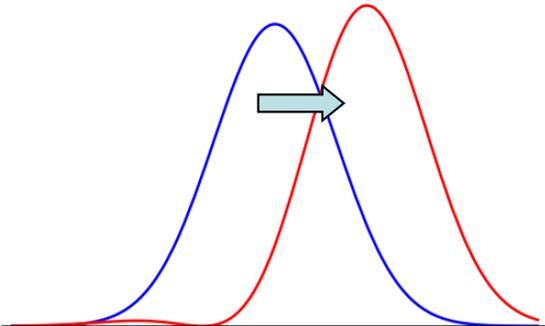
$$\underbrace{|\psi\rangle}_{\text{システム}} \otimes \underbrace{|\Phi\rangle}_{\text{プローブ}}$$

von-Neumann 型相互作用

$$H_{\text{int}} = \underbrace{g\delta(t - t_0)}_{\text{結合定数}} \mathbf{A} \otimes p$$

p : プローブの運動量

\mathbf{A} : 系の観測量 ($g\mathbf{A}$ が変位)

	強い測定 (射影測定)	弱い (弱測定)
得られる情報	多い	少ない
測定の擾乱	大きい	小さい
波動関数		

弱値の増幅

弱値 (weak value)

Aharonov, Albert, Vaidman 1988

$$A_w \equiv \frac{\langle \psi_f | A | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle}$$

A : 観測量 $|\psi_i\rangle, |\psi_f\rangle$: 系の始状態、終状態

系の始状態と終状態を適切に選べば、弱値は任意に大きくなる。
(事前選択、事後選択)

例) スピン 1/2 粒子のスピン成分の測定

始状態 : $|\uparrow_x\rangle$ 終状態 : $|\uparrow_y\rangle$ 観測量 : $\sigma_\xi = (\sigma_x + \sigma_y)/\sqrt{2}$.

$$\text{弱値 : } (\sigma_\xi)_w = \frac{\langle \uparrow_y | \sigma_\xi | \uparrow_x \rangle}{\langle \uparrow_y | \uparrow_x \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle \uparrow_y | (\sigma_x + \sigma_y) | \uparrow_x \rangle}{\langle \uparrow_y | \uparrow_x \rangle} = \sqrt{2}.$$

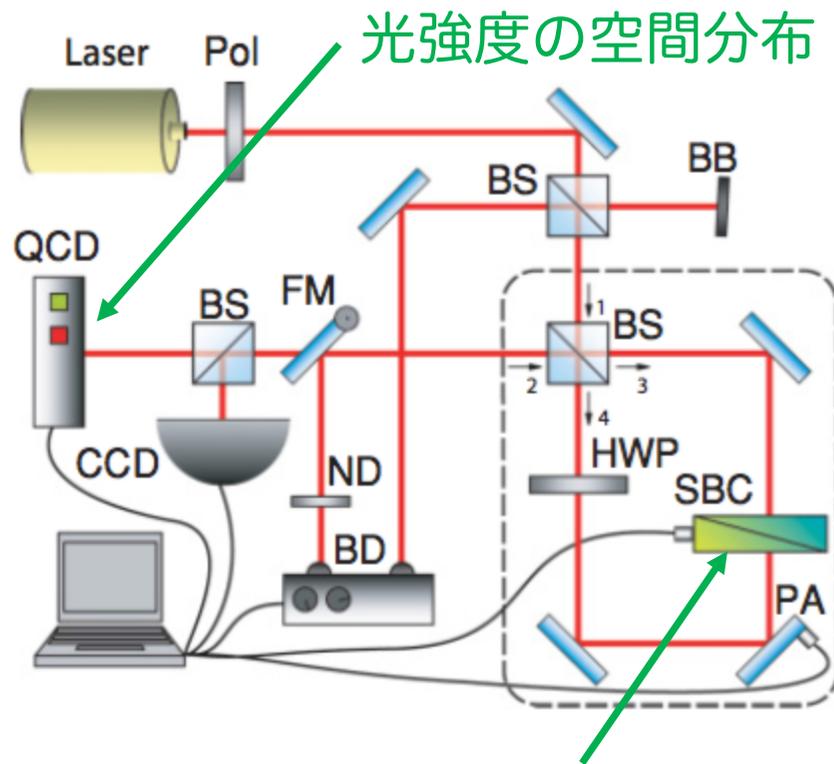
弱値は観測量の固有値を越えている !!

光位相測定実験の例

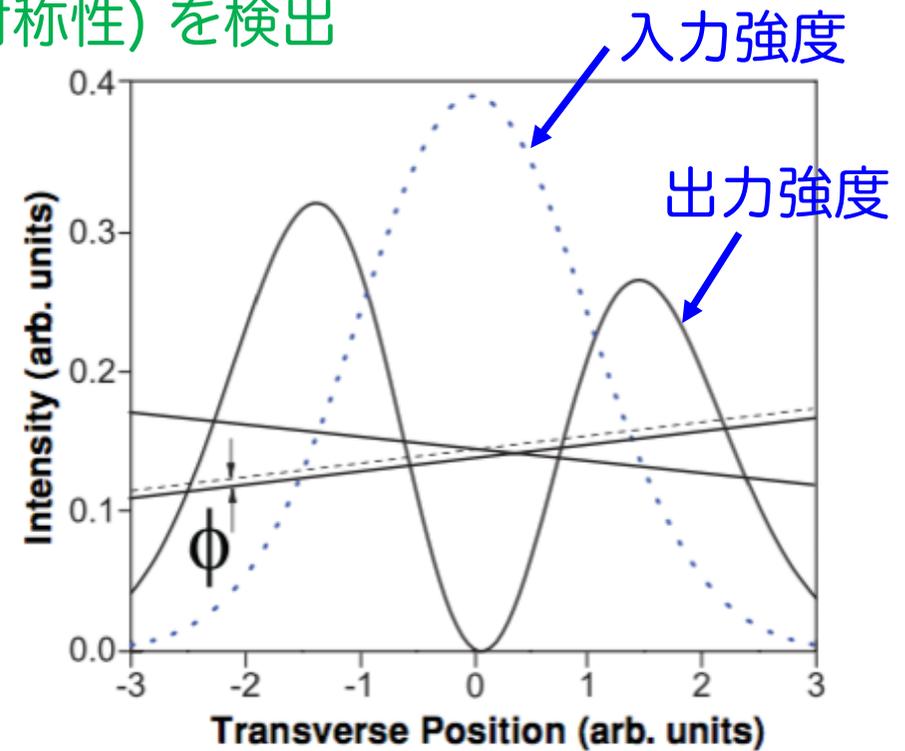
PHYSICAL REVIEW A **82**, 011802(R) (2010)

Continuous phase amplification with a Sagnac interferometer

David J. Starling, P. Ben Dixon, Nathan S. Williams, Andrew N. Jordan, and John C. Howell
Department of Physics and Astronomy, University of Rochester, Rochester, New York 14627, USA



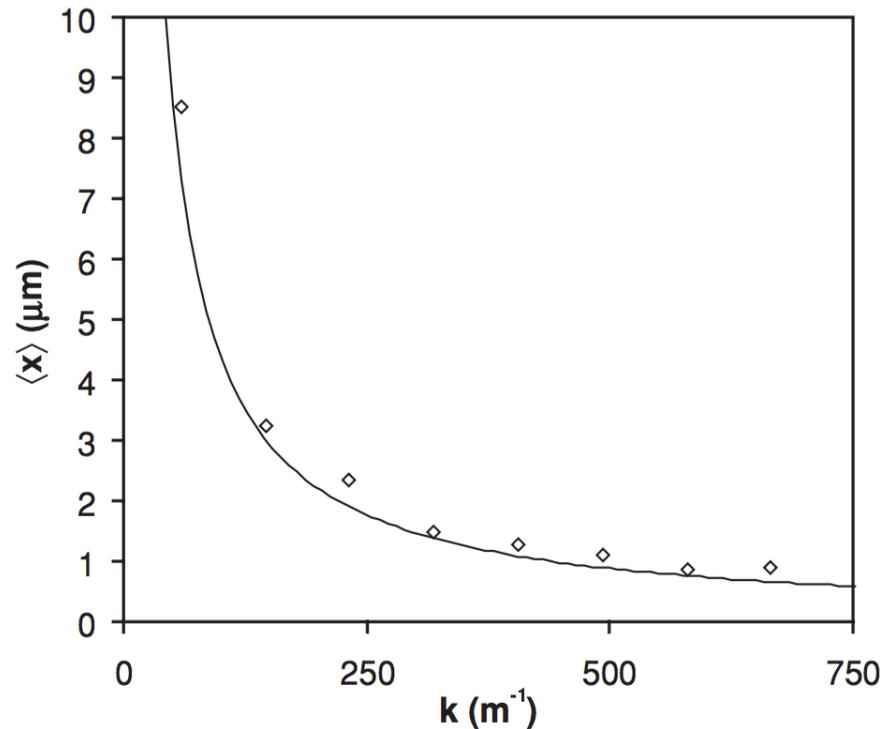
光強度の空間分布 (非対称性) を検出



左回りと右回りの光に位相差をつける

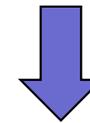
測定値の増幅

$$\langle x \rangle \approx -\phi/k.$$



ピエゾに与える運動量
(ミラーの傾き)

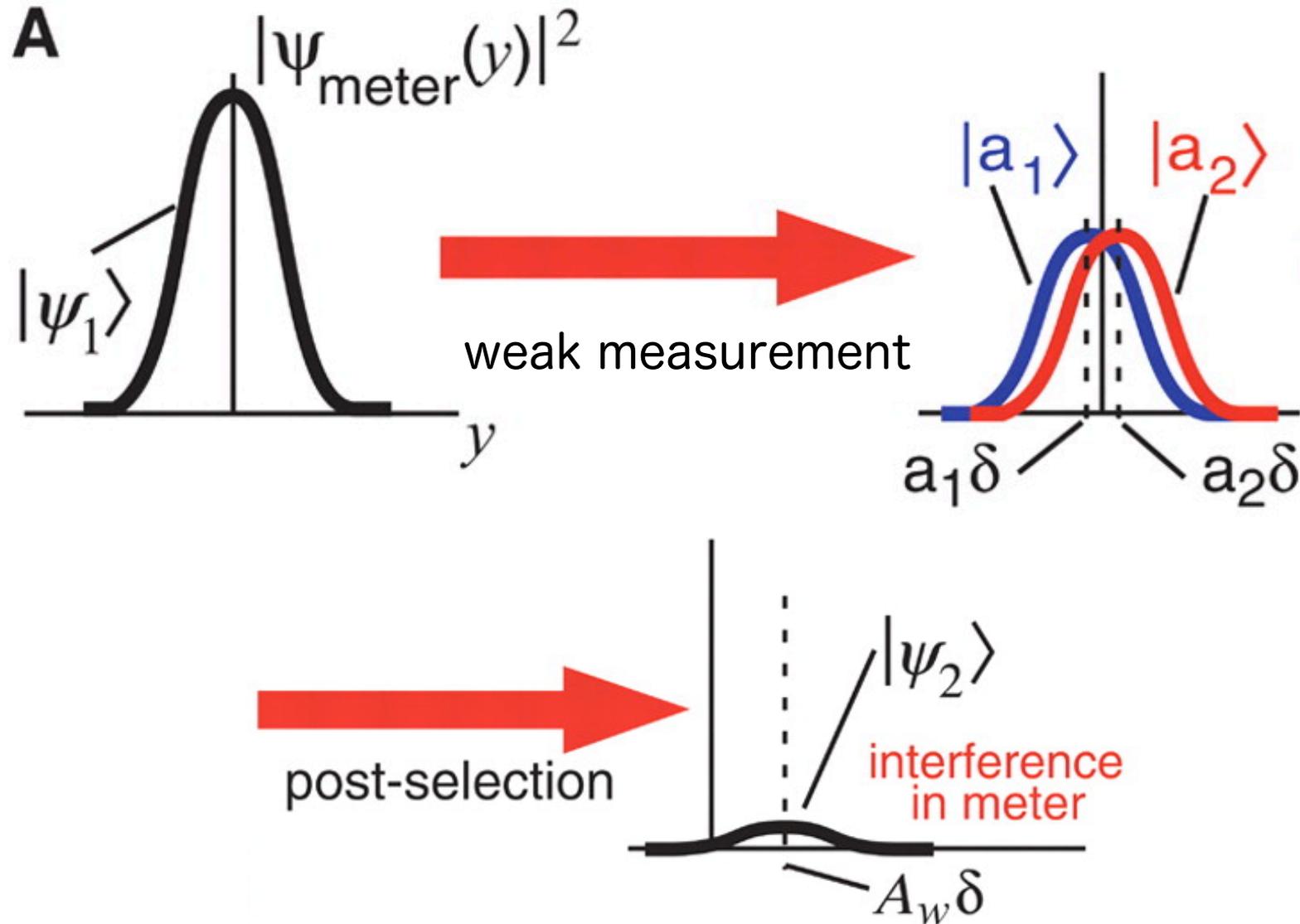
左回りと右回りのビームが
同じ状態であるほど、出力は
ダークポートに近くなる。



事前状態と事後状態が直交に
近くなり、測定値がより増幅
されることになる。

弱値の増幅の直感的説明

Hosten & Kwiat 2008 を改変



そもそもの疑問

➤ 弱値の増幅は物理的なものなのか？

弱値の定義による見かけの効果？

Aharonov は「量子力学を変えていない」と言っている。

➡ 実際に観測量の期待値はシフトしている。

➤ 弱値の増幅は測定精度を向上させるのか？

弱値を増幅するにはプローブの波動関数をぼかす必要があるが、それは雑音になる。つまり、SNR を考えなければいけない。

しかし、プローブの初期波動関数を巧みに選べば、測定後の分散はゼロにできる Parks & Gray 2011, Susa et al. 2012

➡ SNR 無限大？ 他に原理的な雑音は？

重力波検出への応用：測定精度向上の可能性、弱値のより深い理解



3. 重力波検出への応用

光学干渉計での位相測定

測定過程

- (1) 事前選択 → 光源を準備
- (2) 弱測定 → 微小な変位を読み取る 測定の反作用
- (3) 事後選択 → 出力ポートで強度や偏光角の信号をフィルタする
- (4) 射影測定 → 光検出器で検出 散射雑音

弱測定のこれまでの計算では、測定の反作用は無視されていた。
観測者が測定値を得る過程 (光検出) も適切に考慮されていなかった。

➡ 量子検出限界を議論する際には、全て考慮する必要がある。

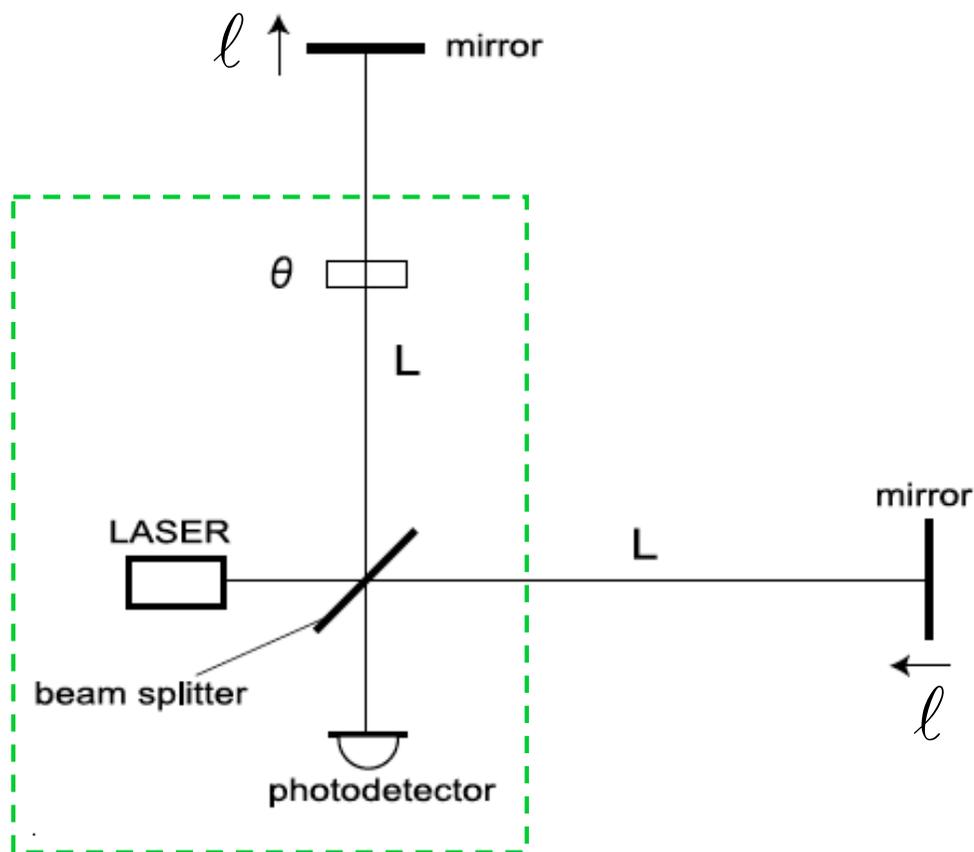
Michelson 干渉計への応用 (1)

1 光子の場合

AN, Nakamura, Fujimoto 2012

系の始状態

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\theta/2} |y\rangle + e^{-i\theta/2} |x\rangle \right)$$

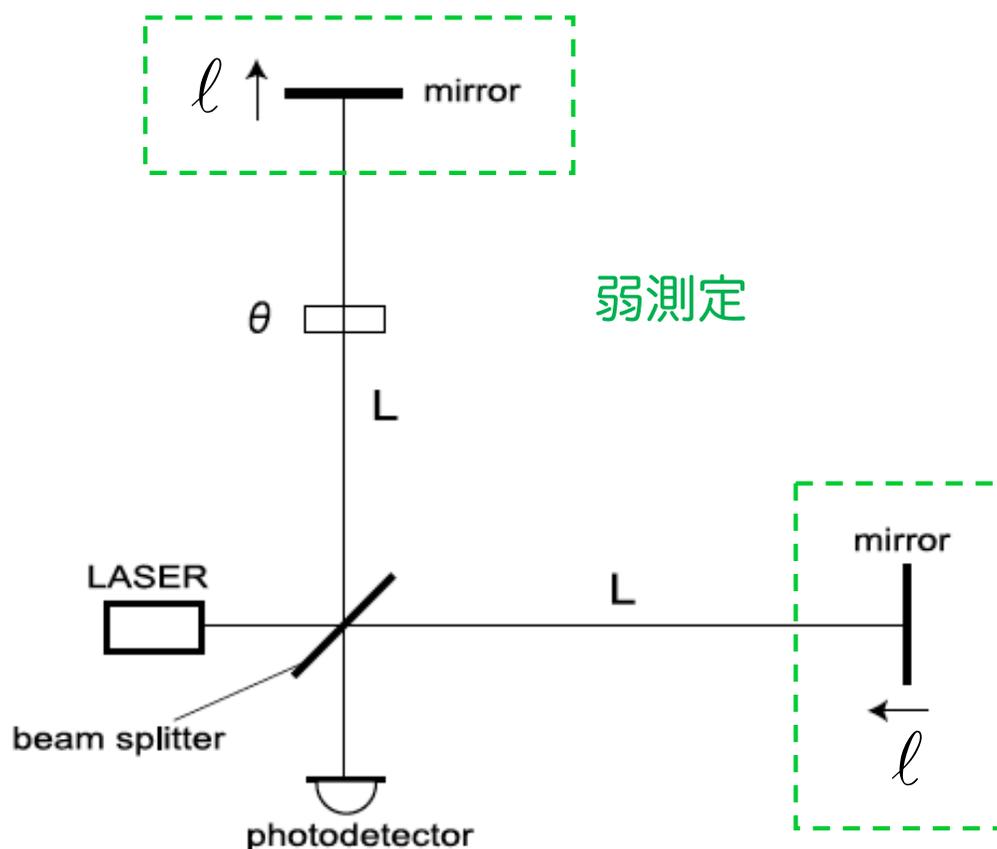


事前選択

Michelson 干渉計への応用 (1)

1 光子の場合

AN, Nakamura, Fujimoto 2012



系の始状態

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\theta/2} |y\rangle + e^{-i\theta/2} |x\rangle \right)$$

相互作用ハミルトニアン

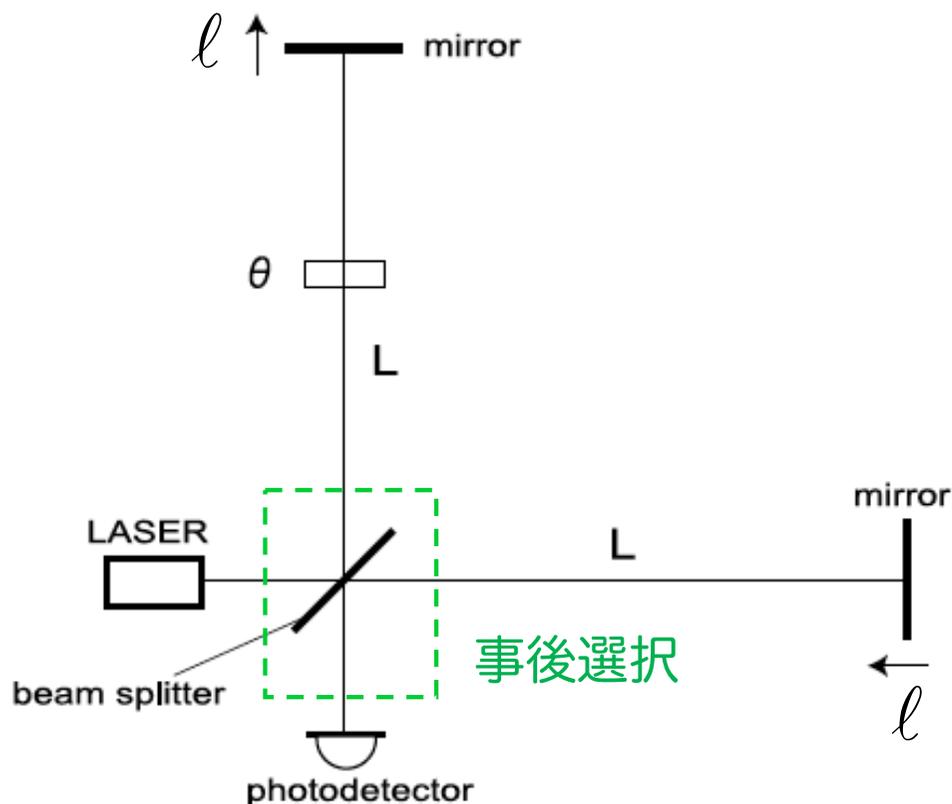
$$H_{\text{int}} = 2\ell\delta(t - t_0)A \otimes p$$

$$\hat{A} = |y\rangle\langle y| - |x\rangle\langle x|$$

Michelson 干渉計への応用 (1)

1 光子の場合

AN, Nakamura, Fujimoto 2012



系の始状態

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\theta/2} |y\rangle + e^{-i\theta/2} |x\rangle \right)$$

相互作用ハミルトニアン

$$H_{\text{int}} = 2\ell\delta(t - t_0)A \otimes p$$

$$\hat{A} = |y\rangle\langle y| - |x\rangle\langle x|$$

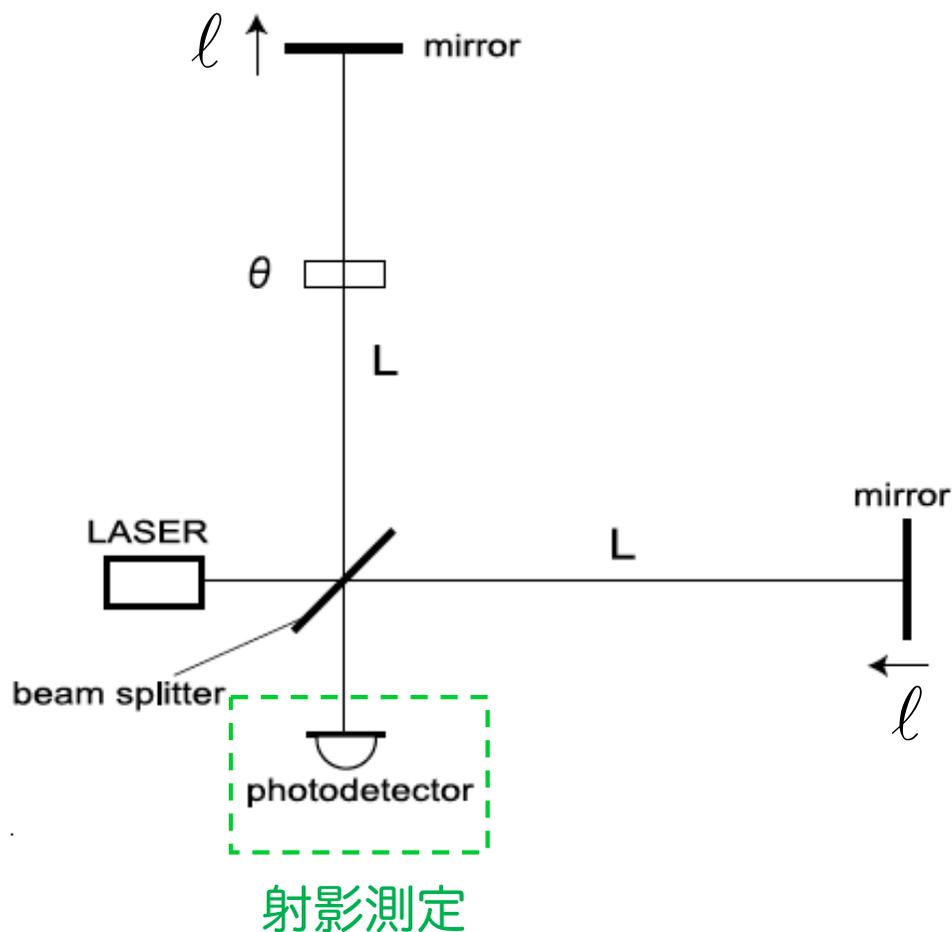
系の終状態

$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|y\rangle - |x\rangle)$$

Michelson 干渉計への応用 (1)

1 光子の場合

AN, Nakamura, Fujimoto 2012



系の始状態

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\theta/2} |y\rangle + e^{-i\theta/2} |x\rangle \right)$$

相互作用ハミルトニアン

$$H_{\text{int}} = 2\ell\delta(t - t_0)A \otimes p$$

$$\hat{A} = |y\rangle\langle y| - |x\rangle\langle x|$$

系の終状態

$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|y\rangle - |x\rangle)$$

出力パワー

$$|\langle\psi_f|\psi_i\rangle|^2 = \sin^2(\theta/2)$$

$\theta = 0 \rightarrow$ ダークポート

Michelson 干渉計への応用 (2)

プローブ光子の初期状態

(運動量 p は周波数と等価)

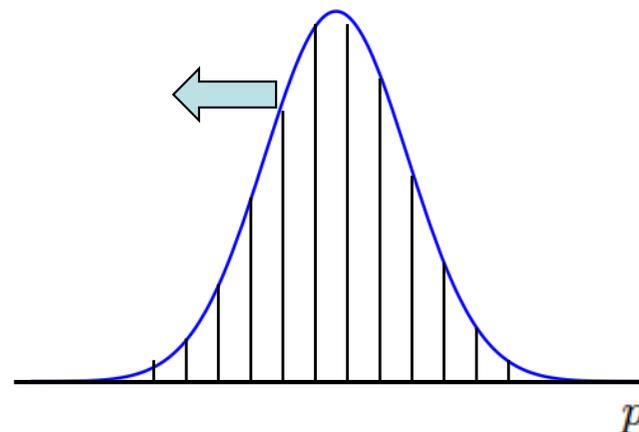
$$\Phi(p) = N \exp\left[-\frac{p^2}{2\sigma_p^2}\right] \longrightarrow \text{パルスレーザー}$$

プローブ光子の終状態

$$|\Phi'\rangle = \langle\psi_f|e^{-igAp}|\psi_i\rangle|\Phi\rangle \longrightarrow \text{マルチチャンネル CCD}$$

ここで、 $|p\ell A_w| \ll 1$ を仮定 (相互作用が弱い近似)

周波数シフト $\langle p'\rangle = -2\sigma_p^2 \ell \cot \frac{\theta}{2}$

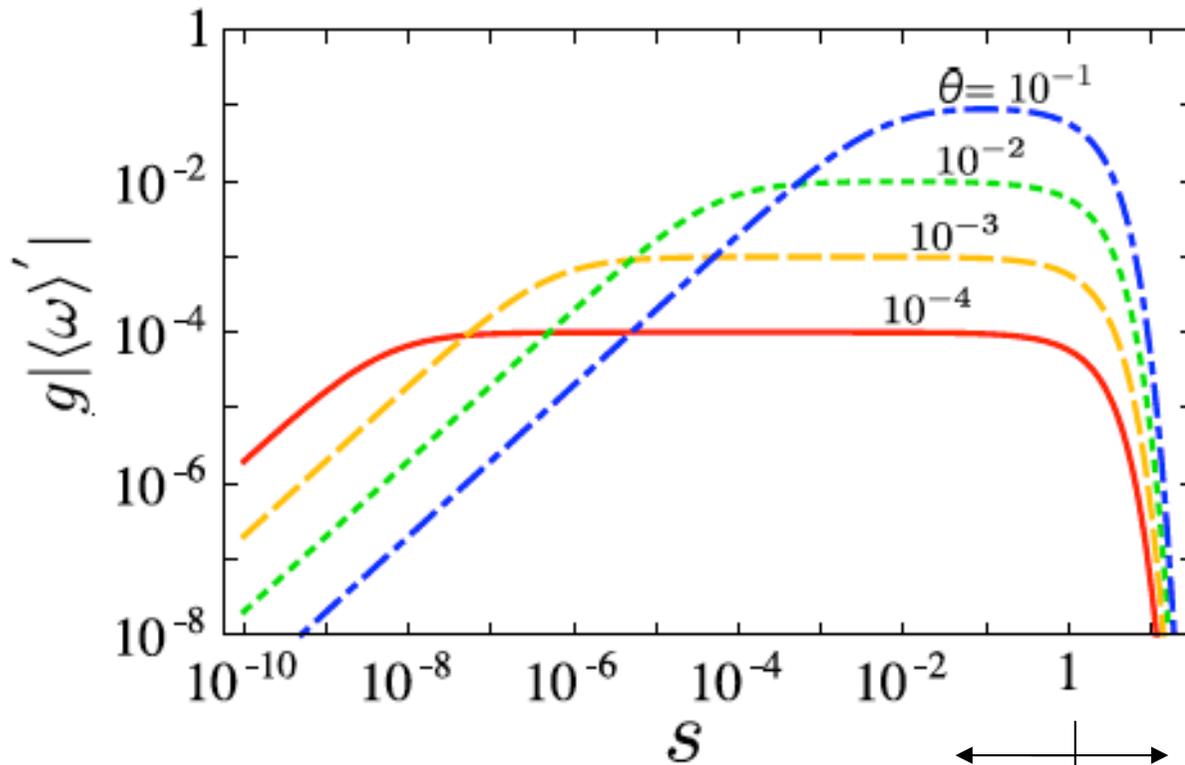


周波数シフト (シグナル)

Nakamura, AN, Fujimoto 2011

周波数シフト $g\langle\omega - \omega_0\rangle' = -\frac{s e^{-s} \sin(\theta - \beta)}{1 - e^{-s} \cos(\theta - \beta)}$

$$\begin{matrix} \longrightarrow & -\frac{2s}{\theta} \\ s \ll 1 & \\ \theta \ll 1 & \end{matrix}$$



測定相互作用の強さ
(ミラー変位)

$$g = -2\ell$$

測定の強さを表す
無次元パラメータ

$$s = 2g^2 \sigma_\omega^2$$

← weak | strong →

- 周波数シフトは弱い測定領域 ($s \ll 1$) では増幅している
- 弱値の増幅には上限がある



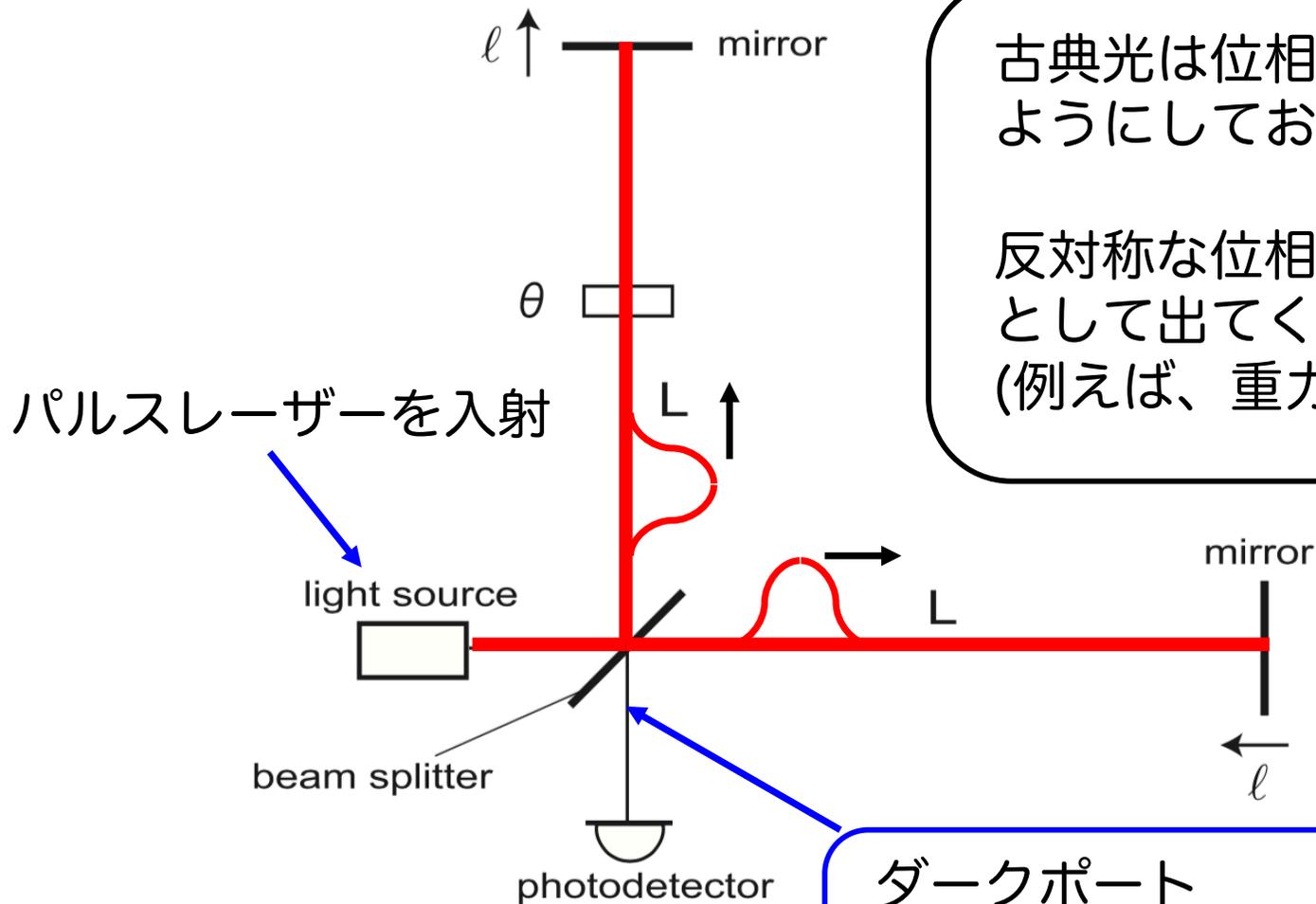
4. 量子雑音と標準量子限界

AN, PRA 92, 032123 (2015)

何故、ハイゼンベルグ描像か

- シュレーディンガー描像で単一光子に対する波動関数を N 光子の場合にナイーブに拡張するのは概念的に問題がある。
 - ➡ **時間発展する場として扱える**
(散射雑音も自然に出てくる)
- 測定の反作用 (鏡に対する光輻射圧) をシュレーディンガー描像で考えるのは複雑で難しい (原理的には可能だが、面倒.)
 - ➡ **量子的な外力として直感的に扱える**
- シュレーディンガー描像での弱値の増幅という概念は直感的に分かりづらい. 何か「すごいこと」が起っているような気がする。
 - ➡ **実は、何も特別なことは起こっていない**
(少なくとも、光干渉計では)

干渉計内での電場 (古典場)



古典光は位相がほぼ対称になるようにしておく。

反対称な位相差があるとシグナルとして出てくる。
(例えば、重力波)

ダークポート

$\theta \ll 1$ の条件を満たすように設定する

電場の量子化

電場に対する真空ゆらぎも含めて扱いたいので、量子化した電場を考える。

ある空間点における時間依存する電場

$$E(t) = E^{(+)}(t) + E^{(-)}(t),$$

$$E^{(+)}(t) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2\pi \hbar \omega}{\mathcal{A}c}} a_\omega e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$
$$E^{(-)} = [E^{(+)}]^\dagger.$$

生成消滅演算子の交換関係

$$[a_\omega, a_{\omega'}] = 0, \quad [a_\omega, a_{\omega'}^\dagger] = 2\pi \delta(\omega - \omega').$$

注) ここでは Kimble et al. 2001 とは異なり、単一光子モードを用いる。

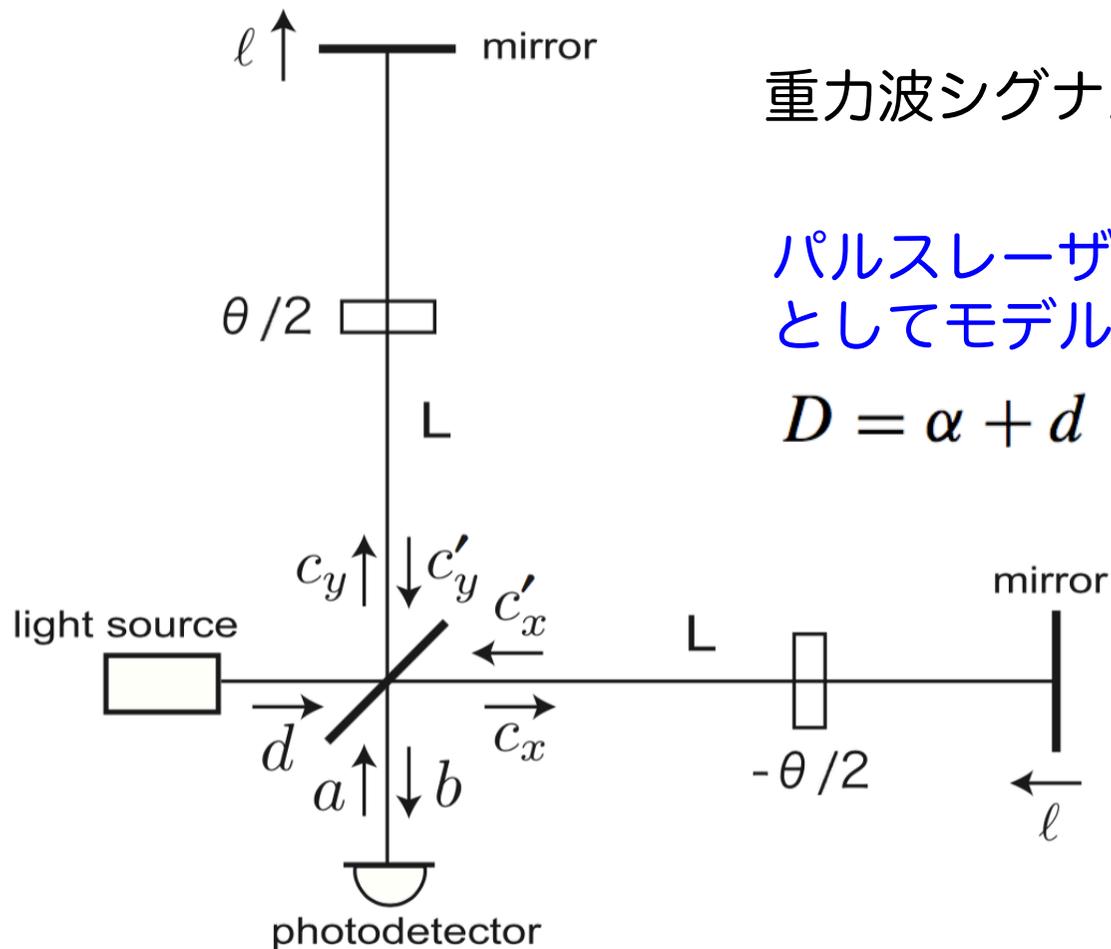
干渉計内での電場 (真空場)

最終的に知りたいのは、 a と b の関係.

重力波シグナルは b に混じって出てくる.

パルスレーザーは古典光 + 量子ゆらぎ
としてモデル化

$$D = \alpha + d \quad \alpha : \text{古典光の振幅}$$



干渉計からの出力

電場の入力出力関係

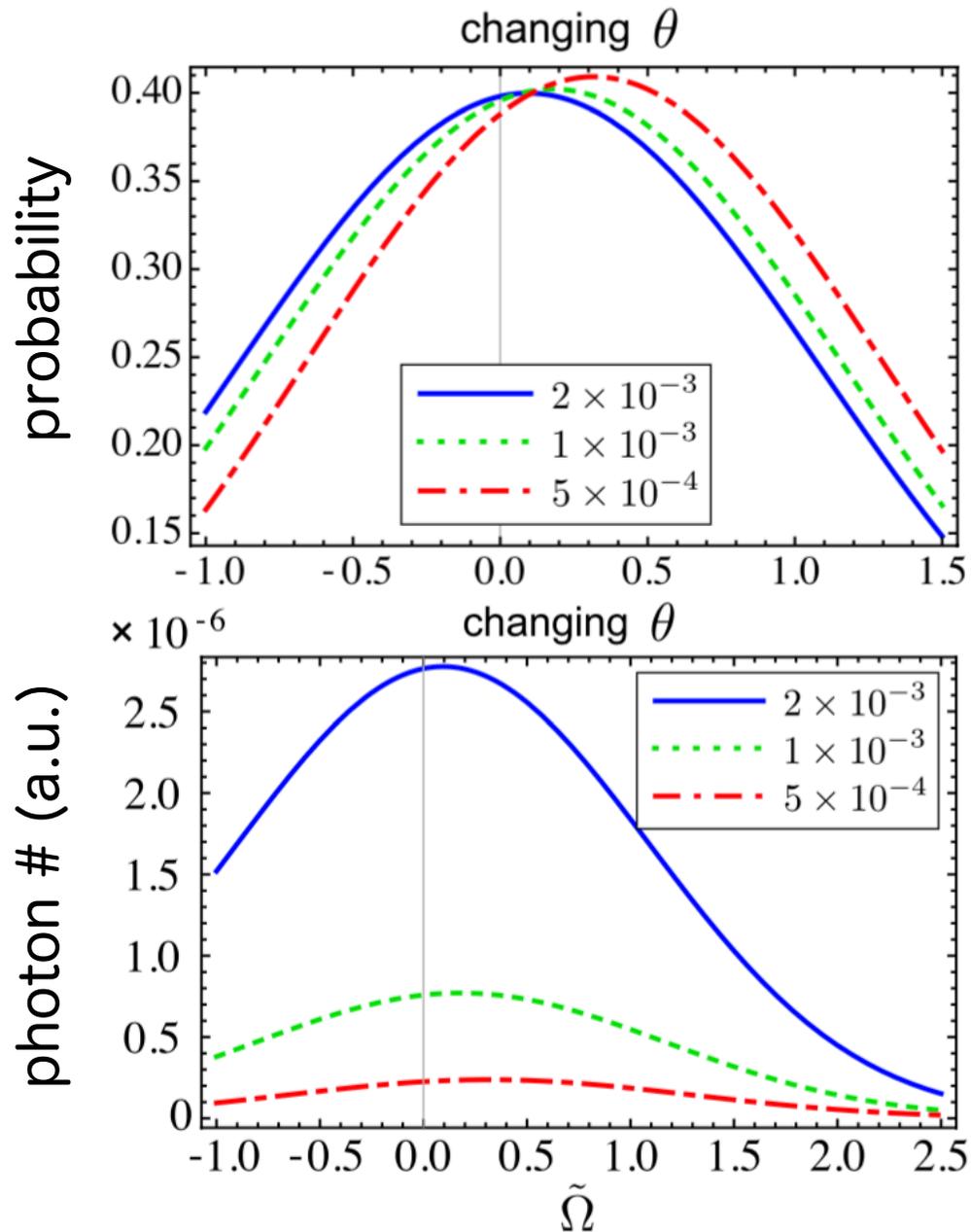
$$b \approx ie^{2i\omega L} \left\{ \underbrace{\alpha \sin \omega \xi}_{\text{重力波信号}} + \underbrace{\alpha \omega \xi_r \cos \omega \xi}_{\text{輻射圧雑音}} + \cancel{d \sin \omega \xi} - \underbrace{ia \cos \omega \xi}_{\text{散射雑音}} \right\}$$

出力の光子数

$$n = b^\dagger b$$

$$\begin{aligned} \approx & |\alpha|^2 \sin^2 \omega \xi + 2|\alpha|^2 \omega \xi_r \cos \omega \xi \sin \omega \xi \\ & + (\alpha^* d + \alpha d^\dagger) \sin^2 \omega \xi + i(\alpha a^\dagger - \alpha^* a) \sin \omega \xi \cos \omega \xi \end{aligned}$$

弱値増幅の解釈



弱値

$$A_w = -i \cot \frac{\theta}{2}$$

$\theta \rightarrow 0$ が弱値増幅に対応

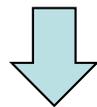
シュレーディンガー描像に
比べ、直感的な理解が可能.

量子雑音

$$\Delta\tilde{\Omega} \approx \omega_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{\Omega}}{2\pi} \tilde{\Omega} \frac{\Delta n(\tilde{\Omega})}{N} \quad \leftarrow \text{周波数シフトに対する量子ゆらぎ}$$

$$\Delta n(\omega) \equiv n(\omega) - \bar{n}(\omega)$$

$$= (\alpha^* d + \alpha d^\dagger) \sin^2 \omega \xi + \{2|\alpha|^2 \omega \xi_r + i(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)\} \sin \omega \xi \cos \omega \xi$$



$$\langle (\Delta\tilde{\Omega})^2 \rangle \approx \frac{\langle (\Delta\tilde{\Omega})^2 \rangle_{\text{SQL}}}{2} \left[\frac{1}{I} + I \right]$$

$$I \equiv N_0 \eta, \quad \eta \equiv \frac{4\hbar\omega_0\sigma_\omega T}{m} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| \sqrt{1 + \tilde{\sigma}_\omega^2},$$

$$\langle (\Delta\tilde{\Omega})^2 \rangle_{\text{SQL}} \equiv \frac{2\tilde{\sigma}_\omega^2 \eta}{|\cos(\theta/2)|^2} |A_w|^2$$

第1項：散射雑音

第2項：輻射圧雑音

入射光パワーに対して
トレードオフの関係に
ある。

SNR

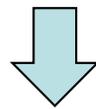
$$\text{SNR} \equiv \frac{|\langle \tilde{\Omega} \rangle|}{\sqrt{\langle \Delta \tilde{\Omega}^2 \rangle}}$$

for small $\phi = 4\omega_0 \ell$

$$|\langle \tilde{\Omega} \rangle| \approx \tilde{\sigma}_\omega^2 |\phi A_w|$$

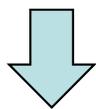
I について最適化 (SQL)

$$\langle (\Delta \tilde{\Omega})^2 \rangle_{\text{SQL}} \equiv \frac{2\tilde{\sigma}_\omega^2 \eta}{|\cos(\theta/2)|^2} |A_w|^2$$



$$\text{SNR}_{\text{SQL}}^2 = \frac{m}{8T\hbar\omega_0^2} \left(\frac{\tilde{\sigma}_\omega^2}{1 + \tilde{\sigma}_\omega^2} \right)^{1/2} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| |\phi|^2$$

弱値の増幅効果は
信号と雑音で
キャンセルする。



SNR=1

$$\ell_{\text{SQL}} = \left(1 + \frac{1}{\tilde{\sigma}_\omega^2} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{T\hbar}{2m}} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|^{-1/2} \geq \sqrt{\frac{T\hbar}{2m}}$$

通常の粒子位置測定の
SQL と一致する。

SQL を越えるには

- 越えることはできる. 例えば、パルス光のスケーリング.

AN, PRA 92, 032123 (2015)

しかし、単一周波数の連続光測定と比べて、何も新しくない.

- 連続光測定と異なるのは、光パワーを時間的に集約できること. 輻射圧が測定の瞬間に大きくなる一方、散射雑音は軽減される. 反作用回避 (BAE) の方法と上手く組み合わせることにより、連続光測定に勝る利点がある？
- 弱値の増幅のためには、周波数をぼかした光源、つまり、パルス光が必要であった. 一方、連続光は時間的にぼかした光源となっている. 観測量を工夫すれば、弱値の増幅は可能？
LIGO や KAGRA でも弱値の増幅が起こる？

5. まとめ



- 現在の重力波検出器がデザイン感度に到達すると、今後更なる感度の向上において標準量子限界が問題となる.
- 光学干渉計での位相測定における弱値の増幅は、ハイゼンベルグ描像で直感的な定式化が可能.
- 弱値が増幅するような場合でも、量子雑音で感度が制限されていれば、SQL が存在する. (SNR に弱値は現れない)
- SQL を越えることは原理的に可能だが、弱測定を用いる利点は何かあるのか？