#### 2007/1/31 UTAPセミナー

http://tokyo.gonna.jp/skyblue/yuzora/yuzora\_1.htm





#### 2007/1/31 UTAPセミナー



樽家 篤史

http://www.naoj.org/Information/Download/DImage/j\_index.html



#### 身近な偏光

#### 光の反射・屈折

#### 青空の偏光と光の散乱

宇宙と偏光

CMB偏光の非等方性

背景重力波の偏極成分の解析

参考文献

砂川重信「理論電磁気学」 太田浩一「電磁気学の基礎 I, II」 G.S.Smith, Am.J.Phys.75 (2007) 25

Webページ:

平野拓一さん(東エ大) 「空の偏光特性の実験」 http://polarization.com/ ウィキペディア

N.Seto and A.Taruya, Phys.Rev.Lett. 99 (2007) 121101 astro-ph/0801.4185

## 身近な偏光





偏光板

東急ハンズで1枚140円

# 液晶画面の偏光





ハイディンガーのブラシ (Haidinger's brush)

人間が偏光した可視光を見たとき、 現れる内視現象の1つ

オーストリアの地質学者 Wilhelm von Haidinger が1846年に報告



円環状に並んだ網膜 色素分子の偏光二色 性が主な原因 液晶画面の白い部分を じっと眺めていると見え てくるらしい

偏光方向

(視直径 3~5度)

## じっと目を凝らすと…見えますか?



## 光の反射・屈折



#### 奥から光が差し込んで、 戸棚のガラスで反射している

偏光板を挿入

反射光が強く、白っぽい

90度回転

ガラス戸の中の写真が浮か び上がる

### 電磁波の境界条件

異なる誘電体が境界面で接している時の接続条件:

p偏光:入射平面に平行な成分 s偏光:境界平面に平行な成分



$$R_{p} = \frac{\tan(\varphi - \chi)}{\tan(\varphi + \chi)} E_{p}$$

$$R_{s} = -\frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin(\varphi + \chi)} E_{s}$$

$$D_{p} = \frac{2\sin\chi\cos\varphi}{\sin(\varphi + \chi)\cos(\varphi - \chi)} E_{p}$$

$$D_{s} = \frac{2\sin\chi\cos\varphi}{\sin(\varphi + \chi)} E_{s}$$

$$\frac{n_{2}}{n_{1}} = \frac{\sin\varphi}{\sin\chi}$$
Snell's law

(e.g., 砂川重信「理論電磁気学」)



ブリュースター角



### ブリュースター角顕微鏡

ブリュースター角を用いた工学的応用

水面上の超薄膜を置き、P偏光した光をブリュースター角で照射

超薄膜のせいでブリュースター条件が崩れ、超薄膜の イメージのみが反射光に浮かび上がる

(界面物理化学、表面物性)





# 青空の観察 (1/2)

E

#### 1月24日17:00頃 御殿下~バスロータリー付近









N

## 青空の観察 (2/2)



## 青空の偏光

- く 青空は一般に偏光している(直線偏光)
   ・ 太陽から90度ずれた青空が、一番強く偏光している
   ・ ただし、太陽光自体は無偏光

空が青いのは、太陽光がレイリー散乱されるため 従って、青空の偏光もレイリー散乱に原因がある

> ※ 今回の現象は人間の色覚とは無関係です (c.f. 前回のセミナー)

## 青空の偏光: tips

ミツバチ 青空の偏光を頼りに太陽の位置を割り出し、エサの方角
 (昆虫) を仲間のハチに伝え合う
 (von Frischの実験)

複眼の一部が(紫外線の)偏光に敏感

※ 偏光を利用する昆虫は他にも、アリ、コオロギ、ハエ、カブトムシなどがいる

**バイキング** (人間) ノルウェーからグリーンランドへの航海に"sunstone"を 携行し、雲に隠れがちな極北の太陽の代わりに、青空の 偏光を頼りに航海していた 注2

注1

注1 日長石(ひちょうせき)ではなく、実は菫青石(きんせいせき)らしい

注2 アイスランドの神話に基づいており、成否については未だに論争中

レイリー散乱

入射電磁波により、(誘電体中の)分極分子の双極子モーメント が単振動し、電気双極子放射を出す過程

微分散乱断面積

$$\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \left(\frac{\pi\,\alpha}{\varepsilon_0}\right)^2 \lambda^{-4}\sin^2\vartheta$$

全断面積

Lorentz-Lorenz の公式

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\pi \alpha}{\varepsilon_0}\right)^2 \lambda^{-4}$$
$$\frac{N\alpha}{3\varepsilon_0} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$$

α: 分極率
λ: 入射電磁波の波長
N: 分子の数密度 *n*: (誘電体の)屈折率

散乱長 
$$\ell \sim \frac{1}{N\sigma_{tot}} = \frac{N}{24\pi^3} \left(\frac{n^2+2}{n^2-1}\right)^2 \lambda^4$$
  
 $\int N \cong \frac{6.02 \times 10^{23}}{22.4 \times 10^{-3}} = 2.7 \times 10^{25}$  個 / m<sup>3</sup> 1気圧、0°Cの  
理想気体  
 $n = 1.000292$  0°Cの空気  
 $\ell(\lambda) \cong 96 \left(\frac{\lambda}{100 \text{ nm}}\right)^4$  m  $\cong$   $\begin{cases} 27 \text{ km} (\lambda = 410 \text{ nm}) \\ 49 \text{ km} (\lambda = 475 \text{ nm}) \\ 170 \text{ km} (\lambda = 650 \text{ nm}) \end{cases}$ 

波長の短い光(紫~青)は、地球大気層(10~30km)で 1回ぐらい散乱される



電気双極子 放射の公式

$$\boldsymbol{E}_{\text{dipole}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{\hat{\boldsymbol{r}} \times (\hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{\ddot{p}})}{r} ; \quad \boldsymbol{p} = \alpha \boldsymbol{E}_{\text{in}}$$

入射電磁波の偏光:

 $E_{\rm in} = |E_{\rm in}|(\cos\psi,\sin\psi,0)$ 

放射電磁波の散乱方向:

 $\hat{\mathbf{r}} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos\theta)$ 

射電磁波の偏光:  

$$E_{in} = |E_{in}|(\cos\psi, \sin\psi, 0)$$
  
射電磁波の散乱方向:  
 $\hat{r} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos\theta)$   
 $E_{dipole} = \frac{\alpha^2 |\ddot{E}_{in}|}{4\pi \varepsilon_0 c^2 r} (-\cos^2 \theta \cos\psi - \sin^2 \theta \sin\phi \sin(\phi - \psi), \sin\theta \cos\theta \cos(\phi - \psi))$ 

Y

## レイリー散乱による偏光(2/3)

放射電磁波を2つの偏光モードに分解:  $e_1 = (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0)$ Edipole : 散乱面に直交  $oldsymbol{E}_{
m in}$  '  $e_2 = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta)$  : 散乱面に平行 散乱強度 入射波の偏光角  $\psi$ で角度平均  $(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{E}_{dipole})^2 = K^2 \sin^2(\phi - \psi)$  $(\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{E}_{dipole})^2 = K^2 \cos^2 \theta \cos^2(\phi - \psi)$  $\left\langle (\boldsymbol{e}_{1} \cdot \boldsymbol{E}_{\text{dipole}})^{2} \right\rangle = \frac{K^{2}}{2}$  $\left\langle (\boldsymbol{e}_{1} \cdot \boldsymbol{E}_{\text{dipole}})^{2} \right\rangle = \frac{K^{2}}{2} \cos^{2} \theta$ 

7

## レイリー散乱による偏光(3/3)



## 青空の偏光度合い(1/2)

大雑把な見積もりを行うために、

仮定 { レイリー散乱を通して青空を見ている(他の散乱は考えない) 散乱は1回のみ(多重散乱は考えない)

まず、特定の散乱面に対して考えると、さっきの公式が使える:



# 青空の偏光度合い(2/2)

特定の散乱面での偏光度合いの表式をもとに、 太陽と観測者を結ぶベクトル â<sub>s</sub>を軸に散乱面を回転すると、 別の散乱面における偏光度合いの表式が得られる





## 青空の偏光度合い(モデル)

あえて、アニメーションにする必要はないが...



### 実際の観測(1/2)

偏光度合いの昇降角依存性(天頂角を見たとき)



## 実際の観測(2/2)

偏光度合いの等高線(太陽の位置  $\beta_{el} = 44.7^{\circ}$ の時)



G.Smith, Am.J.P 75 (2007) 25

## 青空の偏光:その真実

単純なモデルで定性的ふるまいは理解できたが、 観測結果はモデルより小さい偏光度合いを示す

観測結果と合わない理由:

※本当は波長依存性 も考える必要がある

多重散乱の影響(レイリー散乱)

空気分子の分極率の非等方性

エアロゾル粒子やダストによる散乱光の混入 (ミー散乱) 雲や地面からの反射波の影響

(環境•気候)

いずれも偏光度合いを弱める方向に働く

## 宇宙と偏光

### 宇宙物理と偏光

天体や星間物質に付随して、偏光を生じる例はたくさんある:

活動銀河核、ガンマ線バースト、パルサー、...

降着円盤、デブリ円盤、...

-----・シンクロトロン放射、ダスト放射・散乱

電波からX線まで、幅広い波長帯域で偏光観測が行われている

偏光の情報から、天体(や磁場)の配位・幾何学形状、物質組成 などがわかる

## 宇宙論と偏光

宇宙論的スケールにわたって偏光が観測できる唯一の例:

#### マイクロ波背景放射の(直線)偏光ゆらぎ

晴れ上がり時における温度非等方性(光子ゆらぎ)の四重極成分 が種となり、偏光ゆらぎが生まれる

- ◆ 温度非等方性と相関をもつ
- ◆ シグナルは微弱

DASI により初めて検出、WMAPにより詳細な 偏光マップが作られた





# **Polarization Map**

 $P = \sqrt{Q^{2} + U^{2}} \qquad \chi = \frac{1}{2} \tan^{-1}(U/Q)$ <br/>子午線面と偏光のなす角



### **Stokes Parameters**



直線偏光した電磁波が、  $\begin{pmatrix} E'_{x} \\ E'_{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{0} \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$ と与えられている時、xy-座標では、  $\begin{pmatrix} E_{x} \\ E_{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{0} \cos \chi \cos(\omega t) \\ \mathcal{E}_{0} \sin \chi \cos(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{1} \\ E_{2} \end{pmatrix} \cos(\omega t)$ 

このとき、xy-座標を基準に、次のように偏光を定義する:

$$\begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1^2 + E_2^2 \\ E_1^2 - E_2^2 \\ 2E_1E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_0^2 \\ \mathcal{E}_0^2 \cos(2\chi) \\ \mathcal{E}_0^2 \sin(2\chi) \end{pmatrix} >$$
 座標系の取り方 に依存

角度パワースペクトル



- ・ ゆらぎの断熱性(等曲率ゆらぎへの制限)
- ・ テンソルモード(重力波)への制限
- 再イオン化に対する示唆(光学的厚み、再イオン化時刻)

00

### 背景重力波の偏極成分の解析

N.Seto and A.Taruya, Phys.Rev.Lett. 99 (2007) 121101 astro-ph/0801.4185

## 背景重力波の偏極

電磁波以外でも宇宙論的スケールにわたって偏極を観測できるか? また、偏極を観測することで何がわかるか?

#### 背景重力波

重力波も横波なので、当然、偏極している可能性がある

重力波の散乱:

相互作用が極端に弱いので効かなさそう

天体起源の重力波:

波源の分布がランダムなら、全天平均すると偏極は消えそう

宇宙論的起源の重力波

宇宙の非対称性が起源となってインフレーション時に偏極が生成 される可能性

## 円偏極モードの生成

Satoh, Kanno & Soda (2007)



スカラー場2個でインフレーションのスケールを調節すれば、 地上・スペースの観測周波数帯でも円偏極する可能性

## 円偏極背景重力波の探査

レーザー干渉計で背景重力波の円偏極成分を検出できるか?

背景重力波の検出:

2台以上の干渉計シグナルを用いて相関解析

円偏極成分の検出:

2台の干渉計の幾何学的配位が重要

たとえ重力波が検出できたとしても、一般には、無偏極成分と円偏極成分が混じってくるため、それらの分離を考える必要がある



## 相関解析

検出方法のおさらい:

朝朝  
シグナル  

$$S = \int_{T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt' s_1(t) s_2(t') Q(t-t'); \begin{cases} s_1(t) = h_1(t) + n_1(t) \\ s_2(t) = h_2(t) + n_2(t) \end{cases}$$
  
干渉計信号 最適フィルター  
アンサンブル  
平均  $\mu \equiv \langle S \rangle \longrightarrow \pm 1$ 波信号のみ  
分散  $\sigma^2 \equiv \langle \left[ S - \langle S \rangle \right] \rangle \longrightarrow 雑音まみれ \\ (弱シグナル極限で)$ 

# Signal-to-noise Ratio (SNR)

$$\text{SNR} = \sqrt{T_{\text{obs}}} \left( \frac{3H_0^2}{10\pi^2} \right) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} df \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} df \frac{f^6}{f^6} S_{n1}(f) S_{n2}(f)} \right]^{1/2}$$

偏向の自由度を考えると、  $\gamma^{I}(f) \Omega^{I}_{gw}(f) + \gamma^{V}(f) \Omega^{V}_{gw}(f)$ 

- $\Omega^{I,V}_{gw}(f)$ :背景重力波のエネルギー密度
  - $S_{n,i}(f)$  : 検出器の雑音スペクトル [1/Hz]
- $\gamma^{I,V}(f)$ : 重なり逓減関数 (overlap-reduction function)



## 地上干渉計のネットワーク



![](_page_44_Figure_0.jpeg)

# Normalized SNR (2/3)

#### 背景重力波が完全円偏極、完全無偏極の場合

![](_page_45_Figure_2.jpeg)

#### LIGO (Hanford) との相関

- Hanford-Livingston
  - I-モードの検出効率大
- Hanford-AIGO V-モードに不感 (I-モードのみ取り出せる)
- Hanford-LCGT
   V-モードの検出に有利

![](_page_46_Figure_0.jpeg)

## **I-,V-mode separation**

部分偏極している場合(I≠0, V≠0)、2つの偏極成分を分離す る必要がある

分離の 4台の干渉計を用意し、2つの相関シグナルから適 アイデア 当な線形結合をとる

4台の干渉計だと計6通り、5台だと10通りの相関シグナルが作れる →→→ それらを最大限に利用することでSNRを最適化できる

## **Optimal SNR**

n 台の干渉計から $n_t = n(n-1)/2$  通りの相関シグナルを使って  $I_{,V}$ -モードを分離・検出する場合の最適なSNR値(一般公式):

$$SNR_{I}^{2} = 2\left(\frac{16\pi}{5}\right)^{2} T_{obs} \int_{0}^{\infty} df I^{2} \left[ \left(\sum_{i}^{n_{t}} \frac{\gamma_{Ii}^{2}}{\mathcal{N}_{i}}\right) \left(\sum_{i}^{n_{t}} \frac{\gamma_{Vi}^{2}}{\mathcal{N}_{i}}\right) - \left(\sum_{i}^{n_{t}} \frac{\gamma_{Ii}\gamma_{Vi}}{\mathcal{N}_{i}}\right)^{2} \right] \left(\sum_{i}^{n_{t}} \frac{\gamma_{Vi}^{2}}{\mathcal{N}_{i}}\right)^{-1}$$

$$SNR_{V}^{2} = 2\left(\frac{16\pi}{5}\right)^{2} T_{obs} \int_{0}^{\infty} df V^{2} \left[ \left(\sum_{i}^{n_{t}} \frac{\gamma_{Ii}^{2}}{\mathcal{N}_{i}}\right) \left(\sum_{i}^{n_{t}} \frac{\gamma_{Vi}^{2}}{\mathcal{N}_{i}}\right) - \left(\sum_{i}^{n_{t}} \frac{\gamma_{Ii}\gamma_{Vi}}{\mathcal{N}_{i}}\right)^{2} \right] \left(\sum_{i}^{n_{t}} \frac{\gamma_{Ii}^{2}}{\mathcal{N}_{i}}\right)^{-1}$$

$$和記号\mathcal{O}$$
 "*i*" は、可能な干渉計ペアを表す

5台のネットワークによる分離・検出可能な最少値:  $\Omega_{gw}h^{2} = \begin{cases} 2.2 \times 10^{-9} (SNR_{I}/5) (T_{obs}/1year)^{1/2} & ----- F \\ 4.5 \times 10^{-9} (SNR_{V}/5) (T_{obs}/1year)^{1/2} & ----- F \end{cases}$ 

まとめ

#### 地上の干渉計ネットワークを用いた背景重力波の偏極成分の解析

「V-モードの感度は、I-モードの検出感度に匹敵する
I-モード成分の感度自体も今までの値とほぼ同じ
(V-モード混入による影響はほぼ無し)

![](_page_49_Picture_3.jpeg)

#### <mark>考察</mark> V-モードの感度を決めているのは、

- ・干渉計のノイズ(観測帯域: 20Hz~200Hz)
- ・地球の半径(半径:6400km)

![](_page_49_Picture_7.jpeg)

## (おまけ)SNRの半径依存性

![](_page_50_Figure_1.jpeg)

## (おまけ)月面干渉計の建設へ

![](_page_51_Picture_1.jpeg)

月面基地の想像図 (NASA)

![](_page_51_Picture_3.jpeg)

## Appendix

![](_page_53_Picture_0.jpeg)

![](_page_53_Picture_1.jpeg)

トルコ産のコガネムシ。左は左円偏光板、右は右円偏光板を通して観察したもの。

フォン・フリッシュの実験

![](_page_54_Figure_1.jpeg)

## ミツバチの眼(1/2)

![](_page_55_Figure_1.jpeg)

G.Smith, Am.J.P 75 (2007) 25

## ミツバチの眼(2/2)

![](_page_56_Figure_1.jpeg)

G.Smith, Am.J.P 75 (2007) 25

## レイリー散乱による偏光

![](_page_57_Figure_1.jpeg)

![](_page_57_Figure_2.jpeg)

![](_page_57_Figure_3.jpeg)

裏側

G.Smith, Am.J.P 75 (2007) 25

ストークスパラメーター

![](_page_58_Picture_1.jpeg)

スピン-2 偏極 フーリエ展開形: テンソル (L,R)  $h_{ij}(\vec{x},t) = \sum_{A=L,R} \int_{-\infty}^{+\infty} df \int d\hat{\Omega} \frac{h_A(f,\hat{\Omega})}{\sqrt{2\pi}} e^{i2\pi f(t-\hat{\Omega}\cdot\vec{x})} e^A_{ij}(\hat{\Omega})$ アンサンブル  $\begin{pmatrix} \langle h_R h_R^* \rangle & \langle h_L h_R^* \rangle \\ \langle h_R h_L^* \rangle & \langle h_L h_L^* \rangle \end{pmatrix} = \frac{\delta(f-f')}{2} \frac{\delta(\Omega, \Omega')}{4\pi} \begin{pmatrix} I+V & Q+iU \\ Q-iU & I-V \end{pmatrix}$ : 無偏向 (スピン 0)

 $Q \pm iU$ : 直線偏向 (スピン ±4) V: 円偏向 (スピン 0)  $(\ell \ge 4)$  $(\ell \ge 4)$ 

#### **Overlap Reduction Functions**

干渉計の向き・2台の位置による信号利得の逓減

$$\gamma^{I}(f) = \frac{5}{8\pi} \int d\hat{\Omega} \ D_{1}^{ab} \ D_{2}^{ab} \left[ e_{ab}^{*}(\hat{\Omega}) e_{cd}^{*}(\hat{\Omega}) + e_{ab}^{*}(\hat{\Omega}) e_{cd}^{*}(\hat{\Omega}) \right]^{i2\pi f \hat{\Omega} \cdot \Delta \vec{x}}$$
  
検出器の位置の違いに起因する位相因子  
門偏向  

$$\gamma^{V}(f) = i \frac{5}{8\pi} \int d\hat{\Omega} \ D_{1}^{ab} \ D_{2}^{ab} \left[ e_{ab}^{*}(\hat{\Omega}) e_{cd}^{*}(\hat{\Omega}) - e_{ab}^{*}(\hat{\Omega}) e_{cd}^{*}(\hat{\Omega}) \right]^{i2\pi f \hat{\Omega} \cdot \Delta \vec{x}}$$

$$D_i^{ab}$$
:検出器の応答テンソル $D_i^{ab} = \frac{1}{2} (\hat{X}_i^a \hat{X}_i^b - \hat{Y}_i^a \hat{Y}_i^b)$ (Fabry-Perot型の場合)

無偏向

![](_page_59_Picture_4.jpeg)

### **Overlap Reduction Functions**

![](_page_60_Figure_1.jpeg)

![](_page_61_Figure_0.jpeg)