

学位論文

インフレーション後の 再加熱期における宇宙論的摂動

1997年

樽家 篤史

「インフレーション後の再加熱期における宇宙論的摂動」

樽家篤史

論文要旨

インフレーション理論は素粒子相互作用の統一モデルにおいて基本的役割を担うスカラー場によって支配された初期宇宙モデルである。宇宙は初期段階においてスカラー場のポテンシャルエネルギーによって加速膨張を生じ、やがて再加熱期と呼ばれる過渡現象を通じてビッグバン標準宇宙論の火の玉宇宙へと進化していく。インフレーション理論の大きな特徴は、加速膨張時にスカラー場の量子ゆらぎの不安定性から物質分布に小さな非一様性が生み出される点である。近年観測で見つかった3 K 宇宙背景放射の温度ゆらぎはその名残りとして、宇宙の大規模構造の起源になると考えられている。

最近の再加熱期における物質進化の研究から、スカラー場の相互作用の重要性が明らかになってきた。インフレーション後のスカラー場の振動性が相互作用を通じて宇宙の輻射エネルギーを担うボソン場を不安定化させ、カタストロフィックな粒子生成が起きるという。その結果、火の玉宇宙の温度が従来の評価より高くなることが期待されている。しかしながらボソン場の粒子生成はゆらぎの増大を意味する。宇宙の構造形成の観点からみるとインフレーション起源の物質分布の空間的ゆらぎにも影響が出ることが考えられる。しかしながらこの点に関する詳しい研究はなくゆらぎの進化は未解明として残されていた。

構造形成に関わる大スケールの空間非一様性に対し、再加熱期におけるボソン場と振動スカラー場の相互作用の影響を調べるため、本研究では2成分スカラー場モデルを用いて相対論的な線型摂動論でのゆらぎの進化を解析した。まず膨張宇宙における摂動の基礎方程式の性質を調べることにより、長波長極限における摂動の一般解が背景量を用いて構成できることを示した。次いでくりこみ群的アプローチによる漸近解法を用いて背景スカラー場の近似解を求め、その解析的表式から摂動解のふるまいを調べることに成功した。得られた結果は以下の通りである：

- スカラー場の振動性が相互作用を通じてパラメーター共鳴を起こし、背景場のゼロ質量スカラー場 (ボソン場) に振幅の増大が現れる。
- この不安定性は長波長解を通じて摂動にも現われ、3 K 温度ゆらぎと直接結びつく Bardeen パラメーターと呼ばれる摂動量の振幅を成長させる。

従って振動スカラー場の相互作用により、再加熱期には非断熱的なゆらぎがつけられることが明らかになった。解析結果は、この影響の程度がゆらぎに対する初期条件と相互作用の大きさに強く依存することを示している。従来ゆらぎの進化は断熱的であると思われていたが、こうした非断熱ゆらぎの影響を考慮することでインフレーション起源のゆらぎを反映する3 K 温度ゆらぎからインフレーション・再加熱モデルに強い制限のつくことが示唆される。

目次

1 序章	6
2 インフレーション宇宙と再加熱現象	11
2.1 ビッグバン宇宙論とインフレーションモデル	11
2.2 インフレーションと密度ゆらぎの生成	17
2.2.1 カオティックインフレーションシナリオ	17
2.2.2 密度ゆらぎの量子的生成	19
2.3 インフレーション後の再加熱過程	22
2.3.1 再加熱現象と再加熱モデル	22
2.3.2 再加熱過程の現象論的記述	24
2.3.3 再加熱期におけるパラメーター共鳴	26
2.3.4 再加熱期と構造形成	28
3 相対論的な定式による宇宙論的摂動論	31
3.1 重力不安定性によるゆらぎの成長	31
3.2 Einstein 方程式の線型摂動	32
3.3 ゲージ変換とゲージ不変な摂動	33
3.4 摂動方程式の導出	35
3.5 Bardeen パラメーター (曲率のゆらぎ)	37
4 再加熱期における宇宙論的摂動	41
4.1 振動インフラトン場優勢な宇宙での宇宙論的摂動	41
4.1.1 背景場のふるまい	41
4.1.2 ゆらぎの発展方程式	42
4.1.3 ゆらぎのふるまい ($n = 1$ の場合)	43
4.2 流体近似にもとづく再加熱期の宇宙論的摂動	47
4.2.1 完全流体系との比較	48
4.2.2 流体モデルによる再加熱過程	48
4.2.3 Bardeen パラメーターに対する共鳴の影響	50
5 2成分スカラー場モデルによる再加熱期の宇宙論的摂動	52
5.1 モデルと基礎方程式	52
5.2 長波長極限の摂動解	54

5.2.1	1成分スカラー場における厳密解	54
5.2.2	2成分スカラー場の厳密解	56
5.3	再加熱期の背景場ダイナミクス	57
5.4	Bardeen パラメーターのふるまい	62
6	終章	67
6.1	まとめと議論	67
6.2	考察：再加熱期の影響と温度ゆらぎ	68
6.3	展望	74
A	くりこみ群的アプローチによる微分方程式の漸近解析	77
A.1	境界層問題	77
A.2	Mathieu 方程式	82
B	RG 法の適用	86
B.1	振動インフラトン場優勢宇宙における Mukhanov 方程式の解析	86
B.2	2成分スカラー場モデルにおける背景場の弱非線型解析	89
C	背景量のパラメーター微分から求まる長波長摂動解	91
C.1	パラメーター微分より得られる摂動解	91
C.2	関係 (5.25) について	93

1 序章

一般相対論にもとづくビッグバン理論によると、宇宙は約150億年前は熱い火の玉であったとされる。宇宙が膨張・冷却される過程で銀河・星が形成され、現在の宇宙の姿になった、と考えられている。ビッグバン理論の正しさは軽元素の存在比と3K宇宙背景放射などの観測事実によりゆるぎないものと思われている。しかしながら地平線・平坦性問題といわれる原理的問題、観測などで明らかになりつつある宇宙の大規模構造の起源について、いくつか説明できない点が残されている。

インフレーション宇宙とはこうした問題を解決するために考え出された優れたアイデアである。インフレーション理論では宇宙初期においてスカラー場と呼ばれる物質場が存在していたと考える。スカラー場は、素粒子相互作用の統一理論において重要な役割を果たす基本粒子であり、インフレーションが考え出された当初はヒッグス場がその候補とされていた。こうしたスカラー場は初期にはゼロでない有限な値のポテンシャルエネルギーを持っていたとされる。このエネルギーの底上げは宇宙項の役割を果たすことになり、加速的な宇宙膨張、即ちインフレーションが引き起こされる。それによって地平線問題での因果関係、平坦性問題における fine-tuning がうまく解決されるのである。一方、スカラー場は量子場として導入されたものであるから量子論的な性質も兼ね備えている。曲がった時空の場の量子論の研究により、加速膨張の影響を受けてスカラー場の量子ゆらぎに不安定性の現れることが明らかになった [3][4]。不安定性によるゆらぎの成長は、物質密度の空間非一様性を生み出すもとと考えると銀河・銀河団などの物質分布の起源が自然に説明できる。インフレーションというアイデアにより1つの魅力的な構造形成のシナリオが出来上がる [5][6][7]。A.Guth、K.Satoにより最初のインフレーションモデルが提出されて以降、ゆらぎの性質を特徴づける相関関数(パワースペクトル)の計算が様々なモデルでなされた。多くのモデルから Harrison-Zel'dovich 型と呼ばれるスケール不変なゆらぎが予言され、近年観測衛星 COBE によって明らかにされた3K温度ゆらぎと矛盾しない結果を得られることがわかった。こうした無矛盾性はインフレーション理論の妥当性を強く裏付けるものとされ、現在では宇宙論の標準理論として考えられるようになってきた。

本論文はインフレーション起源のゆらぎの進化に関する研究を扱う。3K温度ゆらぎはインフレーション時の量子ゆらぎの情報が含まれていると考え、温度ゆらぎを詳しく解析することによって初期宇宙の様子を知る手がかりが得られる。インフレーション理論にもとづく構造形成シナリオではゆらぎの起源に対する説明が明解なため、こうした解析が比較的容易にできる点が特徴である。こうしたゆらぎは宇宙の進化と密接な関係があるため、インフレーションから現在の我々が知り得る宇宙になるまでゆらぎがどのような進

化をたどってきたのか知ることが重要になる。本論文では特にインフレーション後のゆらぎの進化について研究を行った。

インフレーション後の初期宇宙の進化について詳しく述べていこう。引き続く宇宙の進化はスカラー場 (インフラトン場) のふるまいに大きく左右される。最初はポテンシャルによって宇宙を加速膨張させていたインフラトン場もそのエネルギーを失い、やがてポテンシャルの底にたどり着く。場はコヒーレントな振動を始め、その時点でインフレーションは終わり宇宙はゆるやかな減速膨張に移行する。宇宙はこの後、ビッグバン理論で記述される我々の宇宙につながることになり、火の玉宇宙が実現される。即ちインフレーションで過冷却状態にあった宇宙から輻射で満ち溢れた高温状態へ移行する過渡期間が存在すると考えられる。こうした期間は再加熱期と呼ばれる。再加熱は宇宙の熱史のはじまりを意味し、この後引き続いてバリオン生成、電弱相転移といった素粒子相互作用による物質進化が起こることを考えると、再加熱期は我々の住む物質宇宙が形作られるための初期条件を与えていることになる。そういう意味で再加熱期は物質宇宙の進化において重要な役割を果たす。

宇宙再加熱のメカニズムはインフラトン場と物質場との相互作用を通じたエネルギー転換プロセスとして記述される。初期宇宙にはインフラトン場以外に、我々宇宙の物質場を構成する基本粒子 (クォークとレプトン) と関係の深いボソン、フェルミオン場があったと考えられる。そうした場がインフラトン場と相互作用していたとすると、インフラトンの振動中に相互作用を通じてボソン、フェルミオンの粒子生成が起こりうるであろう。やがて生成粒子は輻射場として宇宙のエネルギー密度を支配することで最終的にビッグバン宇宙の輻射優勢期に移行すると期待される。こうした再加熱現象から作られる火の玉宇宙の温度はどのように決まるのであろうか。これまでは現象論的観点から再加熱過程が考察されて来た。相互作用により生成される粒子 (ボソンあるいはフェルミオン粒子) の数を評価するとインフラトン場のエネルギー崩壊率 (decay rate) Γ を求めることができる。Born 近似による Γ の摂動論的評価を用いると単純な再加熱過程の描象を得ることができる。粒子生成はコヒーレントなスカラー場の運動に対し、 Γ に比例する摩擦の効果を生む。摩擦の発生によりインフラトンの振動はどんどん減衰していき、失われたエネルギーは輻射場へと転化されることになる。こうした過程を追うことで、熱い火の玉宇宙の最終的な温度 (再加熱温度) が崩壊率 Γ から評価できる。

ところが近年の再加熱の研究より、再加熱過程本来の現象はこうした単純な描象では理解できないことが明らかになってきた。Born 近似のような摂動論的扱いではなく、非線形相互作用を通じたパラメーター共鳴の効果によって輻射場へのエネルギー転換が起こるといのである [14][15][18]。新たなシナリオによれば、インフラトン場の振動性により物質

場の中で特にボソン場が不安定化しカタストロフィ的な粒子生成が生じるとされる。従ってインフラトン場のエネルギーが一挙にボソン場へ転換されると考えられる。この後さらに引き続いて起こる粒子生成、さらには別の粒子への崩壊を通じてボソン場は最終的に熱平衡状態へと移行する。Kofman らによって提案されたこの再加熱シナリオは、振動スカラー場による非線型性の影響を改めて浮き彫りにしたばかりでなく、再加熱過程を通じて様々な現象が起こりうることを指摘した [14]。例えばボソン場が対称性の破れたポテンシャルをもつ場合、パラメーター共鳴による不安定性の増大が一時的に対称性を回復させることで宇宙ひもやモノポールといった位相欠陥の生成が起こりうる [19]。従来の位相欠陥の生成は高温状態からの温度低下によって起こるものと考えられており、再加熱時の位相欠陥は非熱的なプロセスによる新たな生成機構だと考えられる。このように再加熱現象は、従来の現象論的アプローチでは捉え切れないさまざまな非摂動論的效果が起こる現象であり、こうした効果を通じて再加熱時の温度も従来の評価より高くなることが予想されている。そうした影響をうけて例えば従来のシナリオでは困難とされていた大統一理論でのバリオン生成などのいった新たな物質進化の可能性が期待されている [20]。

再加熱期における研究から宇宙の物質進化の新たな側面が明らかになりつつあるが、一方で宇宙にはこうした進化のほかに大規模構造につながる物質分布の非一様性の進化も考えられる。素朴な疑問として思いつくのは再加熱期における物質進化と構造形成の関係である。パラメーター共鳴による激しいエネルギー転換が物質場で起こるとき、物質密度の非一様性の進化にもこれに伴う影響は起こらないのだろうか。従来の再加熱シナリオにもとづく研究では、インフレーション起源の空間非一様性は再加熱過程の影響によらず我々宇宙の構造へとつながるとされてきた。しかしながらシナリオ変更にともなって再加熱の影響を再び考察する必要性が生じている。

本論文ではこうした問題に対する解明を目的に、再加熱期におけるゆらぎの進化に焦点をあてる。構造形成の進化に関する問題を考える際、インフレーション起源のゆらぎのサイズは超地平線スケールに及ぶということに注意しなければならない。宇宙膨張の影響が無視できないほど長い波長スケールをもったゆらぎを扱うには、一般相対論的な取り扱いでゆらぎの進化を調べる必要がある。また観測で知られている 3 K 温度ゆらぎはインフレーション時の量子ゆらぎを反映すると考えられており、その振幅は $\Delta T/T \sim 10^{-5}$ と非常に小さい。このようにゆらぎの振幅が十分小さい場合、ゆらぎの進化を Einstein 方程式の線形摂動から取り扱うことは十分妥当性をもつ。膨張宇宙におけるこうした線形摂動論は宇宙論的摂動論と呼ばれ、古くはリフシッツによる一様・等方宇宙の重力不安定性の研究から、現在においてはインフレーション時の量子ゆらぎから 3 K 温度ゆらぎを評価する際の解析手段として数多くの研究がなされてきた。一般相対論における線形摂動には常に一般

共変性からくるゲージの問題が存在するが、ゲージ不変な形式による摂動論が小玉・佐々木、Bardeen 等によって定式化され、以後これらの定式にもとづく解析が多くの人々によりなされている [29][30][31]。

本論文ではこの宇宙論的摂動論の定式の下、再加熱期におけるゆらぎの進化についての研究を行った。問題とされているパラメーター共鳴による再加熱過程の影響を調べるためには非線型相互作用のあるスカラー場モデルでの解析が必要不可欠である。本論文ではボソン場とインフラトン場の非線型相互作用の影響を2成分スカラー場のモデルとして取り扱い、宇宙論的摂動としてのゆらぎの進化を解析した。それよりゆらぎの初期条件、相互作用の大きさによっては、振動スカラー場による非線型効果により構造形成に関するゆらぎにも影響が現れることを明らかにした。

本論文において得られた結果とその意味について明解にするために、これまでなされてきた再加熱期における宇宙論的摂動の研究について触れておく。再加熱期におけるゆらぎの進化は、インフレーションモデルの提唱以来多くは現象論的扱いによる観点から摩擦項入りのスカラー場と輻射流体間の相互作用を再加熱モデルとして解析されてきた。最近の再加熱シナリオに関する研究では、振動スカラー場中の摂動のふるまいを理解するために、まず相互作用の効かない振動スカラー場優勢な宇宙における解析がなされた [42][43][44]。南部・樽家の研究 [42] では、重力の影響を通じてスカラー場の振動性がゆらぎの発展方程式にも現れ、ゆらぎの重力的進化がパラメーター共鳴による不安定性としても理解できるという、興味深い結果が得られている。また小玉・濱崎の研究 [43] から、ゆらぎのふるまいをみると物質場が完全流体の場合と比較していくつか類似点があることが明らかにされた。

こうした研究をうけて、再加熱過程の相互作用の影響を調べた研究が濱崎・小玉によってなされた [45]。彼らは再加熱過程に起きるパラメーター共鳴の効果に注目し、現象論的観点から構造形成に関するゆらぎへの影響を調べた。パラメーター共鳴を考慮にいった再加熱過程を正確に記述しようとする、相互作用のある多成分スカラー場の系においてエネルギー転換をとまなう解析が必要になり問題は複雑化する。彼らは問題の単純化を図るため、相互作用のない場合の解析結果を利用して次のような再加熱モデルを考察した。流体との類似性からスカラー場を完全流体に置き換え、再加熱過程を輻射流体との2成分流体系で起こるエネルギー輸送現象と捉え直した。さらに彼らは現象論的考察にもとづいてパラメーター共鳴の効果はこのエネルギー輸送に反映させて摂動方程式を導いた。こうして得られた方程式から共鳴の影響を評価した結果、構造形成には再加熱過程の影響はないという結論を得た。

濱崎・小玉の結論は2つの大きな仮定、(1) スカラー場の流体へのおきかえ、(2) エネルギー輸送の現象論的考察、に基づいている。扱うモデルにはエネルギー輸送が考慮され

ているため、現象論的立場にもとづく古いタイプの再加熱シナリオの場合には妥当だと思われる。しかしながら彼らのおいた仮定に振動スカラー場の非線型効果が考慮されているかどうか明解ではない。本論文における研究ではスカラー場モデルを用いたため、ゆらぎの進化には振動スカラー場の相互作用の影響が直接反映する。その結果、再加熱期におけるゆらぎの進化への影響が初めて明らかになり、インフレーション時の量子ゆらぎが3 K 温度ゆらぎへ反映されるまでに再加熱期の影響が重要になる場合があることを初めて指摘した。

本論文の構成は以下の通りである。2章ではインフレーション宇宙の紹介を行い、量子場起源の構造形成シナリオについて説明する。またインフレーション後の再加熱現象の説明として、従来のシナリオと Kofman らによって明らかにされたパラメーター共鳴による再加熱過程について述べた後、構造形成への影響について考察する。3章では、超地平線スケールのゆらぎの進化を調べるために必要な手段、一般相対論的な取り扱いによる宇宙論的摂動論の定式を解説する。4章にて、これまでなされてきた再加熱期における宇宙論的摂動の研究を紹介する。まず相互作用が効かない振動スカラー場優勢時における摂動のふるまいについて、南部・樽家の解析をもとに説明する。この結果に基づき、相互作用が入る場合について調べた研究として濱崎・小玉の流体モデルにもとづく解析を紹介する。彼らの得た結論では再加熱過程の影響はないということだが、流体モデルの結果は大きな仮定にもとづいており、スカラー場の非線型効果が考慮されているか定かではない。5章は本論文の主要部であり、本研究において明らかになった内容について述べる。副論文 [46] に基づき、パラメーター共鳴による再加熱過程の影響を取り入れた2成分スカラー場モデルを用いて宇宙論的摂動の解析を行い、再加熱期の非線形相互作用の影響について議論する。6章は終章である。まず本論文5章でなされた解析に関してまとめと議論を述べる。ついで結果に対する考察として再加熱期のゆらぎの進化を考慮した場合、3 K 温度ゆらぎの観測からインフレーション・再加熱モデルにどういった制限がつくのか考える。こうした評価を通して再加熱期の影響が初期宇宙モデル選択の重要な役割をはたすことを認識し、最後に再加熱に関する最近の話題と課題について述べて本論文を締めくくる。本論文で用いる単位系は断りがない限り $c = \hbar = 1$ を用い、重力定数を G として $\kappa = 8\pi G = 8\pi/M_{pl}^2$ を用いる (M_{pl} はプランク質量を表す)。

2 インフレーション宇宙と再加熱現象

宇宙論において、“インフレーション”とは加速膨張する宇宙を意味する。ビッグバン理論が内包する原理的問題の解決策として考えだされたこのアイデアは、初期宇宙が現在我々の住む宇宙と密接な関係にあることを改めて認識させた。インフレーションを考えるもう1つの理由は量子ゆらぎを起源とする構造形成のシナリオにある。銀河団・超銀河団によって構成される物質分布の初期条件が自然に、かつ観測と矛盾なく説明できる点で多くの人々を納得させる。宇宙初期においてこのようなインフレーションが実現されると、宇宙はやがて物質で満たされたビッグバン宇宙へと進化していくことになる。再加熱現象は、こうした宇宙のはざまにおいて起こる物質生成・進化の現象をさす。この章ではインフレーション宇宙について紹介を行い、本論文の研究対象である再加熱現象について説明する。2.1節ではビッグバン理論の問題点に触れインフレーションのアイデアによる解決法について説明する。2.2節ではカオティックインフレーションと呼ばれる初期宇宙シナリオについて説明し、構造形成の起源とされる量子ゆらぎの進化について考察する。2.3節ではインフレーション後の宇宙の進化を考察する。再加熱過程と呼ばれる過渡現象についてまず従来の現象論的発想を述べる。ついで最近の研究で明らかになったパラメーター共鳴による再加熱現象について紹介し、シナリオ変更に伴う影響について議論する。

2.1 ビッグバン宇宙論とインフレーションモデル

現在の宇宙論において標準理論とされるビッグバン理論は、宇宙原理に従う一様・等方な Friedman-Robertson-Walker(FRW) メトリック、

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{1}{1 - Kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) ; \quad (K = +1, 0, -1) \quad (2.1)$$

で記述される宇宙モデルを基盤とする。 K は宇宙のタイプを表し、 $+1, 0, -1$ という値によってそれぞれ閉じた宇宙、平坦な宇宙、開いた宇宙を表す。宇宙の膨張が昔から続いていたとすれば、過去の宇宙の大きさは今よりずっと小さくて、非常にエネルギー密度の高い時期であったと考えられる。つまり、現在は物質優勢の時代であるが、過去にさかのぼれば高エネルギー状態にある輻射が満たされていたと考えられる。メトリック (2.1) に対して物質場に完全流体を仮定した時、Einstein 方程式は

$$\begin{aligned} 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 &= \kappa \rho - \frac{3K}{a^2} ; & \kappa &\equiv 8\pi G = \frac{8\pi}{M_{pl}^2} , \\ 3 \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{\kappa}{2} (\rho + 3P) \end{aligned} \quad (2.2)$$

と表される。ここで P, ρ はそれぞれ圧力、エネルギー密度を表し、輻射優勢期では $P = \rho/3$ 、物質優勢期では $P = 0$ という状態方程式に従う。宇宙を平坦だとした場合、(2.2) より宇宙の大きさを表すスケール因子は、

$$a \propto t^{1/2} \text{ (輻射優勢)}, \quad a \propto t^{2/3} \text{ (物質優勢)}, \quad (2.3)$$

とふるまう。

Gamow によって最初に提唱されたビッグバン理論の最大の成功は、軽元素合成と 3 K 輻射にある。元素合成では、宇宙初期の輻射優勢期における中性子 (n) と陽子間 (p) の反応の凍結から n/p 比が決まり、ヘリウムの存在比が説明される。また、重水素の生成温度が $T < 10^9 \text{K}$ でこの時の核子の数密度が $\rho_{nuc} \sim 10^{18} \text{cm}^{-3}$ でなければならないこと、及び現在この値が $\rho_{nuc} \sim 10^{-6} \text{cm}^{-3}$ と見積もられることから、おおよそ、現在の宇宙の輻射温度が $T_\gamma \sim 10 \text{K}$ と推測できる (Gamow 等は 7K とした)。現在では観測衛星 COBE (COsmic Background Explorer) により、 $T_\gamma = 2.74 \text{K}$ の黒体輻射であることが知られており、3 K 輻射の予言は式 (2.1) によるビッグバン膨張宇宙の正しさの根拠になっている。

しかしながら一様等方な宇宙モデルを基盤とするビッグバン理論には原理的な問題が存在する。宇宙の歴史が単純に輻射優勢から始まったとした時、以下に挙げる深刻な問題に突き当たる：

1. 地平線問題... 宇宙における因果律は、光の測地線によって規定される。お互い光速でたどり着くことが出来ない領域どうしは因果的關係をとりもつことはできない。そうした領域は”地平線 (horizon)”と呼ばれる境界によって隔てられている。”地平面”には2つに大別され、1つはブラックホールなどを規定する、”事象の地平線 (event horizon)”、もう1つは”粒子的地平線 (particle horizon)”という。前者は現在からみて、未来において因果的に結ばれる領域とそうでない領域を分けるもので、後者は、過去から現在の間において因果的に影響があった領域とそうでない領域を分けるものとして定義される。

ここで問題になるのは粒子的地平線である。光速 c を用いて粒子的地平線の長さ l_p を表すと

$$l_p \equiv c \cdot a \int_{t_i}^t \frac{dt}{a} \quad ; \quad t_i : \text{intial time} \quad (2.4)$$

となる。平坦な場合、(2.3) より $t_i \rightarrow 0$ に対してそれぞれ

$$l_p = 2ct \text{ (輻射優勢)}, \quad 3ct \text{ (物質優勢)} \quad (2.5)$$

を得る。これは宇宙膨張の特徴的タイムスケールの中に光が伝搬する距離

$$l_H \equiv c \cdot H^{-1} \quad ; \quad H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.6)$$

とほぼ同程度の大きさである (l_H をハッブルホライズン半径と呼ぶ)。一方で銀河団、ボイド等の構造物の物理的スケール (l_g) は式 (2.1) からスケール因子 $a(t)$ に比例して変化することがわかる。平坦な場合にはスケール因子 (2.3) は光速以下になる。一般に物質優勢、輻射優勢ならば宇宙が開いた場合や閉じた場合でも光速以下である。従って現在において $l_g \ll l_p (\sim l_H)$ だとしても、過去にさかのぼればいつか $l_g > l_p (\sim l_H)$ となることを意味する (図 1 参照)。宇宙膨張が減速膨張 ($\ddot{a}/a < 0$) を続ける限り、この関係は途中で逆転することはない。従って宇宙に存在する構造物は、お互い因果的に相関のない領域で形成されたと考えざるを得ない。しかしながら観測で知られている 3 K 背景放射の等方性は小さなゆらぎを除くと少なくとも晴れ上がり時において宇宙は等方的でほぼ同じ構造をもっていたことを表している。お互い因果関係のない領域から進化してこうした構造がつけられるためには、初期条件に偶然的要素が加わっているとしか説明できない。

2. 平坦性問題... 式 (2.1)(2.2) の記述する宇宙は、宇宙自身が開いているか ($K = -1$)、平坦か ($K = 0$)、それとも閉じているか ($K = +1$) によって、3つのタイプの進化をする。その違いは、Einstein 方程式 (2.2) より、密度パラメーター ($\Omega \equiv \kappa\rho/3H^2$)、ハッブルパラメーター (膨張率: H) を用いて

$$\Omega - 1 = \frac{K}{(aH)^2} \quad (2.7)$$

で表される。この式より宇宙のタイプは密度パラメーターと関係がある事がわかる (宇宙が平坦だと $\Omega = 1$)。 (2.7) 式を用いると現在と宇宙初期 ($\sim t_{pl}$) の密度パラメーターの比は、 $a \propto T^{-1}$ 、 $H \propto t^{-1}$ から、

$$\begin{aligned} (\Omega - 1)_0 &= \left(\frac{T_0}{T_{pl}}\right)^2 \left(\frac{t_0}{t_{pl}}\right)^2 (\Omega - 1)_{pl} \\ &\sim \left(\frac{10^{-4}\text{ev}}{10^{28}\text{ev}}\right)^2 \left(\frac{10^{17}\text{sec}}{10^{-44}\text{sec}}\right)^2 (\Omega - 1)_{pl} \\ &\sim 10^{58} (\Omega - 1)_{pl}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

と与えられる。添字 (0) は現在の時刻での値を表す。(2.8) 式は、現在の密度パラメーター $0 < \Omega_0 < 10$ 程度で与えられる宇宙に対し、宇宙初期においては非常に高い精

度で平坦性 ($\Omega_{pl} = 1$) が成り立っていないからならなければならないことを意味している。このような初期条件の fine-tuning は、どうすれば可能になるのか。

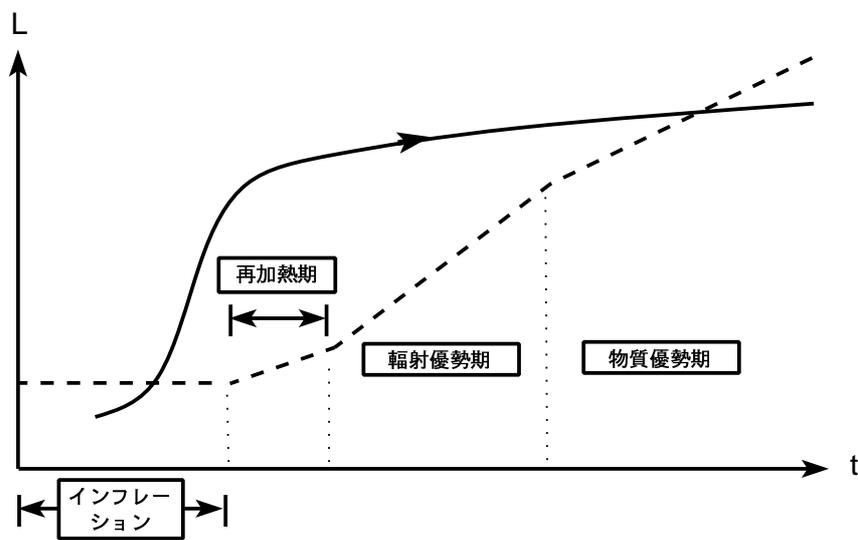


図 1: ハッブルホライズンと構造物 (ゆらぎ) の進化図。横軸は時間、縦軸は長さを表す。実線で示される宇宙の構造物 (ゆらぎ) はスケール因子 (a) に比例して変化する。破線はハッブルホライズン半径 ($l_H = H^{-1}$) を表す。インフレーションを考えない場合、 l_H は粒子的地平線の長さ l_p とほぼ等しい。従って l_p より小さな構造物 (長さ l_g) も過去にさかのぼると l_p より大きくなる。インフレーション期を考えると $l_p > l_g$ とすることが可能となる。この時ハッブルホライズンはほぼ一定となり、ゆらぎのサイズは l_H より小さくなる。

こうした原理的問題は、宇宙の進化はある時期までビッグバン理論で正しく記述されるがそれ以前の初期宇宙に対しては新たに考え直す必要があることを表している。仮にその初期宇宙が輻射優勢期と同じ膨張則に従うとして、 $a \propto t^{1/2}$ を用いて (2.8) 式を書きかえてみると

$$\begin{aligned}
 (\Omega - 1)_0 &= \left(\frac{a_0}{a_{pl}} \right)^3 (\Omega - 1)_{pl} \\
 \implies \frac{a_0}{a_{pl}} &\sim 10^{19} \sim e^{60}
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

が得られる。これより1つのアイデアとして考えつくのは、輻射優勢期以前の宇宙初期に指数関数的な膨張、即ちインフレーションがあったという仮定である。急激な加速膨張により宇宙が一挙に e^{60} 倍大きくなれば平坦性に関する fine-tuning の問題は解決されることになる。こうした指数関数的な宇宙膨張が実際に起こり得る例として式 (2.1) に宇宙項 (Λ) がある場合を考えてみる。すると物質のない場合 ($\rho = 0$) において de Sitter 解と呼ばれる次のような解が得られることがわかる：

$$a = \begin{cases} H_0^{-1} \cosh(H_0 t) & (K = +1), \\ e^{H_0 t} & (K = 0), \\ H_0^{-1} \sinh(H_0 t) & (K = -1), \end{cases} ; H_0 \equiv \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \quad (2.10)$$

平坦な場合の de Sitter 解の粒子的地平線は

$$l_p = cH_0^{-1} e^{H_0(t-t_0)} \quad (2.11)$$

と表される。閉じた場合も開いた場合も $H_0(t-t_0) \gg 1$ において $l_p \rightarrow \infty$ となり、無限に大きな領域で因果関係を取り持つことができる。従って輻射優勢期以前に十分長い指数関数的膨張を仮定すると、現在ある宇宙の構造物に比べ粒子的地平線をつねに大きくすることが可能で地平線問題も解消される。一方でハッブルホライズン半径 l_H は

$$l_H = cH_0^{-1} (= \text{const.}) \quad (2.12)$$

と一定値をとる。十分過去にいくと宇宙の構造物は l_H よりも小さくなる (図1)。つまり宇宙の構造はハッブルホライズン半径以下の小さなスケールから形成・進化してきたことを意味する。ハッブルホライズンはインフレーション時の構造物の進化を考える時に重要なスケールを与える。以後、本論文ではハッブルホライズンのことを単に地平線と呼ぶ。

式 (2.10) で表される de Sitter 解は宇宙定数が真空エネルギーの底上げの役割を果たすことで膨張エネルギーが供給され、指数関数的膨張が達成されることを表している。従って初期宇宙において宇宙定数の代わりにする物質場が存在し、何らかのメカニズムで宇宙定数が消えた後に輻射優勢期へとつながるならばビッグバン宇宙の地平線・平坦性問題は回避される。こうしたアイデアの下で最初に考え出されたメカニズムは素粒子相互作用の統一理論にもとづいたものであった。宇宙は真空状態にあるスカラー場が優勢であったと考える。当時はヒッグス場がその候補と考えられていた。自発的対称性の破れをもつこのモデルでは、相転移によりスカラー場の真空状態が偽真空状態に変化する。相転移後のスカラー場は次のようなラグランジアンに従う：

$$\mathcal{L}_{matter} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (2.13)$$

スカラー場のポテンシャルは図 2 で与えられ、 $\phi = 0$ において極小値、 $\phi = \pm\eta$ において最小値を持つ。相転移後はスカラー場の状態が $\phi = 0$ 、 $\dot{\phi} = 0$ (偽真空) にあると考えられ、物質場のエネルギー密度には $V(0) \neq 0$ という底上げが存在することになる。これは Einstein 方程式に有効宇宙項 $\Lambda_{eff} = \kappa V(0)$ が生じることを表している。従って宇宙は指数関数的に膨張することになる。 $\phi = 0$ の状態はポテンシャルの形状が示すように、真空状態としては不安定であるから、場のトンネル効果によりある一定期間の後に $\phi = \pm\eta$ に落ち込んで、インフレーションは終結する (図 2)。

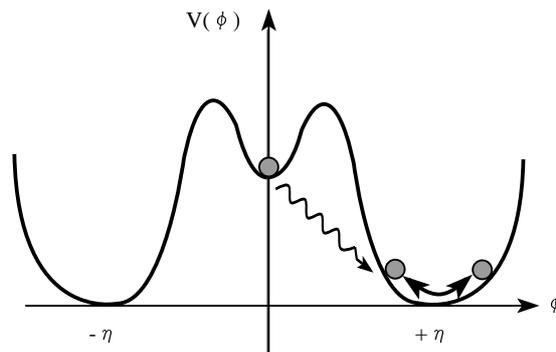


図 2: スカラー場のポテンシャル。初期にスカラー場が $\phi = 0$ にあると指数関数的膨張が実現される。その後、トンネル効果で $\phi = \pm\eta$ の状態に (図では $\phi = +\eta$) 落ち込んでインフレーションは終了する。

インフレーション理論は A.Guth、佐藤 (勝) によって初めて提案された [1][2]。彼らの提案したモデルは後の研究でインフレーションが終わらないことがわかった。しかしながらメカニズムとして魅力的でかつ単純であったため、以降さまざまな改良版が提案された。近年では超対称性理論、弦理論の有効理論の観点からこれまでの欠点を補うようなインフレーションモデル (例えばハイブリッドインフレーション [10] やスカラー・テンソル理論におけるインフレーション [11]) が提案されている。こうしたモデルの多くはスカラー場によってインフレーションが起こる。当初は大統一理論からの帰結としてヒッグス場がその候補とされたが現在では我々の物質場とは非常に弱い相互作用しかしない、初期宇宙においてのみ存在した場だったと考えられている [12]。

2.2 インフレーションと密度ゆらぎの生成

2.2.1 カオティックインフレーションシナリオ

インフレーション宇宙というアイデアにより、ビッグバン理論の原理的問題は解決されることがわかった。現在では提案当初の欠点を補う様々なインフレーションモデルが存在し、モデルにもとづいたインフレーション宇宙の進化についての研究が数多くある。ここでは大半のモデルに共通する、カオティックインフレーションと呼ばれるインフレーション宇宙の進化シナリオについて説明する。物質場は、素粒子相互作用の統一理論において基本的役割をするスカラー場が優勢とする（スカラー場がどういう種類のものかは限定しない）。スカラー場のポテンシャルは特に指定しないがここではラグランジアン

$$\mathcal{L}_{matter} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (2.14)$$

に従う単純なモデルを考える（図3）。

カオティックインフレーションのシナリオではスカラー場の初期条件は任意であることが大きな特徴である。ただ時空は古典的であるとするのでエネルギー密度（ ρ_ϕ ）はプランクエネルギー以下（ $\rho_\phi \leq M_{pl}^4$ ）であると考え、初期時刻ではインフレーションさえ始まっていない、密度分布が非一様な宇宙であったと考えてもよい。

(2.14) で記述される一様等方宇宙でのスカラー場のふるまいを考察する。簡単のため平坦な宇宙（ $K=0$ ）を考える。 $\rho = (\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2)/2$ 、 $P = (\dot{\phi}^2 - m^2\phi^2)/2$ の関係を (2.2) に代入するとアインシュタイン方程式は以下ようになる：

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{4\pi}{3M_{pl}^2} (\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2), \quad (2.15)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m^2\phi = 0. \quad (2.16)$$

このモデルには $\phi > M_{pl}$ においてはポテンシャルをゆっくりと転がり落ちる slow-rolling 期と呼ばれる期間が存在する（図3、4）。方程式において $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$ 、 $|\dot{H}| \ll H^2$ が実現される時スカラー場の slow-rolling が実現し、宇宙は指数関数的に膨張する。この時、(2.15)(2.16) は近似的に以下の式に帰着する：

$$H^2 \approx \frac{4\pi}{3M_{pl}^2} m^2\phi^2, \quad 3H\dot{\phi} + m^2\phi \approx 0. \quad (2.17)$$

これよりスカラー場のふるまいとして

$$\phi \approx \phi_0 - \frac{m}{2\sqrt{3\pi}} M_{pl} t \quad (2.18)$$

が得られ、スケール因子の成長が

$$a = \exp\left(\int_0^t H dt\right) \approx a_0 \exp\left[\frac{2\pi}{M_{pl}} (\phi_0^2 - \phi^2(t))\right] \quad (2.19)$$

と求まる。単純に $\phi(t_e) \approx 0$ まで slow-rolling が続くとすると初期時刻から slow-rolling が終るまでに宇宙は

$$\frac{a(t_e)}{a_0} \approx e^{\frac{2\pi}{M_{pl}^2} \phi_0^2} \quad (2.20)$$

だけ膨張することがわかる。例えばスカラー場の初期値 $\phi_0 = 3.1 M_{pl}$ を選ぶとインフレーションの終了までに宇宙は e^{60} 倍大きくなり、(2.9) で示される平坦性問題は解決される。

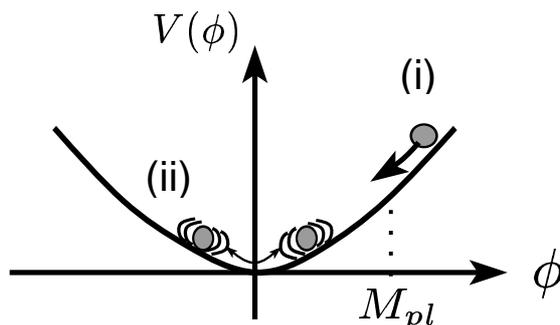


図 3: 式 (2.14) で与えられるスカラー場のポテンシャル。領域 (i) $\phi > M_{pl}$ において slow-rolling 期が実現する。領域 (ii) $\phi < M_{pl}$ ではスカラー場は振動を始める。

一様等方モデルでのふるまいは、一般の空間非一様な初期宇宙においても slow-rolling を起こすようなスカラー場の初期条件が地平線サイズ $l \geq H^{-1} \sim M_{pl}^{-1}$ の領域において存在すれば実現できる。そうした地平線サイズの領域は指数関数的膨張により引き伸ばされるため、一様等方的な 1 つの独立な宇宙としてみなすことができる。宇宙全体としてみるとインフレーションする領域としない領域とが混在することになるが、全体積としてはインフレーション領域が大半を占める。地平線サイズの各インフレーション領域はお互い因果関係を持たないため、それぞれ独立な進化を経ることになる。カオティックインフレーションの発想では、現在の我々が住む宇宙はそうした領域のうち、ちょうどインフレーションが終わった領域に相当する。我々の知らないどこか別の領域では今でもインフレーションが続いていると考える [9]。

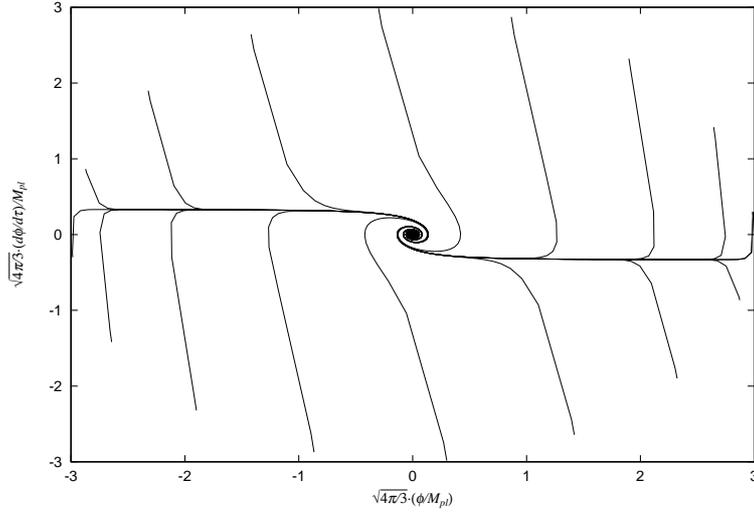


図 4: スカラー場の位相空間におけるトラジェクトリ ($\tau = mt$ を表す)。各トラジェクトリは $\sqrt{4\pi/3}(d\phi/d\tau) \sim \pm M_{pl}/3$ 近傍に集積して式 (2.18) で表されるふるまい (slow-rolling) をし、宇宙は加速膨張期に入る。 $\phi < M_{pl}$ まで達するとポテンシャルの底で減衰振動を始める。

2.2.2 密度ゆらぎの量子的生成

カオティックインフレーションの描像によると、インフレーションがおきた領域では初期に空間非一様でも加速膨張によって一様かつ等方的な物質分布が実現されることになる。そのまま我々の宇宙につながるとすれば現在観測で知られている大規模構造と呼ばれる銀河団・超銀河団により構成される物質分布が生まれにくいようにも思えるが、インフレーションのもう1つの魅力的な点はこうした物質分布の形成・進化が量子論的起源として説明できる点にある。

これまでスカラー場を古典的な場として扱ってきたが本来スカラー場は量子場として扱われるものであり、量子的な側面をともなったふるまいが現れて来ると考えられる。ここではスカラー場（インフラトン場）を一様な古典的な背景場 $\phi(t)$ と非一様成分 $\delta\phi(t, x)$ にわけ、非一様成分を曲がった時空上で量子化する。オペレーター $\delta\hat{\phi}$ に対する真空期待値の評価からゆらぎの自発的生成が起こることをみる。簡単のため、ここでは宇宙膨張を指

数関数的膨張 $a(t)e^{H_0 t}$ (H_0 は一定) として扱う。オペレーター $\delta\hat{\phi}$ をフーリエ分解して

$$\delta\hat{\phi}(x, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \left[\hat{a}_k \phi_k(t) e^{ikx} + \hat{a}_k^\dagger \phi_k^*(t) e^{-ikx} \right], \quad (2.21)$$

と表す。ここで $\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger$ は生成・消滅演算子で以下の交換関係を満たす：

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta^3(k - k') \quad (2.22)$$

ϕ_k に対するモード方程式は

$$\ddot{\phi}_k + 3H_0 \dot{\phi}_k + \left[\left(\frac{k}{a} \right)^2 + m^2 \right] \phi_k = 0 \quad (2.23)$$

で与えられ、一般解は Hankel 関数を用いて次のように表される：

$$\phi_k(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} H_0 (-\eta)^{3/2} \left[C_1 \mathbf{H}_\nu^{(1)}(-k\eta) + C_2 \mathbf{H}_\nu^{(2)}(-k\eta) \right]; \quad \nu = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{m^2}{H_0^2}}. \quad (2.24)$$

ここで η は共形時間で $\eta = \int dt/a(t) = -H_0 e^{-H_0 t}$ より定義される ($t \rightarrow \infty$ で $\eta \rightarrow 0$)。ところでインフレーション時には $|\dot{H}| \ll H^2$ が満たされており、モデル (2.14) の場合、(2.17) から $m^2 \ll H^2$ が要請される。従って $\nu \approx 3/2$ として扱うことができる。場の状態を規定するためには係数 C_1, C_2 を与える必要がある。非一様モードの短波長成分を考えると、 $k/a \gg H$ では宇宙膨張の影響が無視でき、Minkowski 時空上のスカラー場と同じ真空状態が定義できる。これより $k/aH_0 = |k\eta| \gg 1$ で Minkowski 時空のモード関数に一致する ($\phi_k \rightarrow e^{-ik\eta}/\sqrt{2k}$) とすれば、一般解 (2.24) の任意定数 C_1, C_2 が $C_1 \rightarrow 0, C_2 \rightarrow -1$ と決まる。これより、

$$\phi_k = i \frac{H_0}{\sqrt{2k^3}} (1 + ik\eta) e^{-ik\eta} \quad (2.25)$$

を得る。これを (2.21) に代入し $\hat{a}_k|0\rangle = 0$ を満たす真空状態で二乗期待値を評価すると

$$\begin{aligned} \langle 0 | \delta\hat{\phi}^2(x, t) | 0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k |\phi_k|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \left(\frac{H_0^2}{2k} \eta^2 + \frac{H_0^2}{2k^3} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 K}{K} \left(\frac{1}{2} + \frac{H_0^2}{4K^2} \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

を得る。最後の等式では物理的運動量 $K \equiv k/a$ を用いて表した。第3式の被積分関数第1項は場の零点振動に対応する紫外発散項で、Minkowski 時空における評価でも現れる。

(2.26) において重要なのは赤外発散性を示す被積分関数関数第2項である。この項は指数関数的膨張によりゆらぎの波長が赤方偏移により引き伸ばされ、長波長モードの零点振動として寄与するため生じる。そのため (2.26) を評価する際は長波長領域の積分に注意を払う必要がある。カオティックインフレーションシナリオにおいて、インフレーション領域の初期の大きさは地平線サイズ ($\sim H^{-1}$) であったからインフレーション時の最小サイズに $\sim H^{-1}$ というカットオフを入れて考えるのが自然である。従って (2.26) の評価において意味を持つのは $H_0^{-1} \leq l \leq H_0^{-1} e^{H_0 t}$ の大きさでの積分である。これより第1項を差し引いた (2.26) は

$$\langle 0 | \delta \hat{\phi}^2(x, t) | 0 \rangle_{reg} = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{H_0 e^{-3H_0 t}}^{H_0} \frac{d^3 K}{K^3} = \frac{H^3}{4\pi^2} t \quad (2.27)$$

と評価される。インフレーションの特徴的タイムスケール $t \sim H^{-1}$ の後にゆらぎの振幅が

$$\langle \delta \phi^2 \rangle \approx \frac{H_0^2}{4\pi^2} \quad (2.28)$$

になることがわかる。

この結果の物理的解釈は次の通りである。二乗期待値の積分評価で最も効いていたのは地平線サイズ以上の波長領域であった。超地平線スケールにおいて波動性を失ったゆらぎの振幅が凍結されたためである。一方、場の二点相関関数 $\langle |\delta \hat{\phi}(x) \cdot \delta \hat{\phi}(x')| \rangle$ に対する評価では

$$\langle 0 | \delta \hat{\phi}(x) \cdot \delta \hat{\phi}(x') | 0 \rangle_{reg} \approx \langle 0 | \delta \hat{\phi}^2(x, t) | 0 \rangle_{reg} \cdot \left(1 - (H_0 t)^{-1} \log(H_0 l) \right) ; l = |x - x'| e^{H_0 t} \quad (2.29)$$

を得る。これは $l \sim H_0^{-1} e^{H_0 t}$ の空間的隔たりを持つ場の振幅において相関がなくなることを意味している。これらの結果をあわせるとインフレーション時の長波長 ($k/a \ll H$) の量子ゆらぎは、あたかも実在する古典的な場の非一様成分としてみなすことができる。

量子ゆらぎがマクロスコピックに実在する古典的な密度ゆらぎであるという立場に立つと、インフレーションにより大スケールの物質密度のゆらぎが生成されるという結論になる¹。こうしてつくられたゆらぎはインフレーション終了後、ビッグバン理論における輻射優勢、物質優勢な膨張期を経て重力の影響による進化を続けることが考えられる。ゆらぎの波長は、地平線の広がり（輻射優勢、物質優勢期ではほぼ光速に比例して広がる）によってやがて地平線以下になり、さらに重力的進化をとげることで現在観測で知られている数百 Mpc スケールの大規模構造が形成される、というシナリオが成り立ちうる [5][6][7]。

¹量子ゆらぎが本当に古典的なゆらぎへと進化するのかという議論に関しては量子・古典対応の問題として残されており、様々な研究がなされている [8]。

インフレーションにもとづく構造形成シナリオにおける最も魅力的な点は、ミクロスコピックなゆらぎが大スケールの物質分布の非一様性の起源として説明できること、古くから理論的考察で知られているスケール不変な Harrison-Zel'dovich スペクトルを予言することである。観測衛星 COBE によって発見された 3 K 温度ゆらぎは宇宙晴れ上がり時の空間非一様性を表すもので、インフレーション起源の原始ゆらぎを反映するものとして説明することが出来る。ゆらぎの進化に対する詳しい考察には、超地平線スケールの物質密度の非一様性を取り扱うため、相対論的な取り扱いによる解析が必要となる。宇宙論的摂動論では、Einstein 方程式を線型化することで一様宇宙を背景時空として空間非一様性の進化を記述する。これについての詳しい説明は 3 章で述べる。

2.3 インフレーション後の再加熱過程

2.3.1 再加熱現象と再加熱モデル

インフレーションモデルに従うと、スカラー場のポテンシャルエネルギーにより宇宙は加速的膨張をする。ビッグバン理論の一様性・平坦性問題が解決され、同時に量子ゆらぎの自己生成により大規模構造の起源とされる密度ゆらぎが生み出される。こうして我々が存在するに足る宇宙の骨格ができあがったとすると、その後の進化はどうなるのだろうか。

インフレーション宇宙の進化はスカラー場の運動に大きく左右される。2.2.1 節で考えた一様等方モデルによると、スカラー場はゆっくりとポテンシャルを転がり落ちていき (slow-rolling)、やがてポテンシャルの底に近づく。 $\phi \leq M_{pl}$ において $H \leq m$ となり、スカラー場はポテンシャルの底で振動を始める (図 3)。Einstein 方程式 (2.15)(2.16) を $H \ll m$ のもとで WKB 近似すると

$$\begin{aligned}\phi(t) &\simeq \tilde{\phi}(t) \cos(mt); \quad \tilde{\phi} \propto a^{-3/2}, \\ a(t) &\simeq a(t_e) \left(\frac{t}{t_e}\right)^{2/3}; \quad t \geq t_e.\end{aligned}\tag{2.30}$$

というふるまいを得る (図 4、5 参照)。スカラー場はコヒーレントに減衰振動し、物質優勢期と同じゆるやかなべき的宇宙膨張に移行する ((2.3) 参照)。エネルギー密度 $\rho_\phi = (\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2)/2$ も $P = 0$ のダスト的物質の場合と同じく a^{-3} に比例する。従ってインフラトンのエネルギーは無限の時間をかけてゼロに漸近していく。

カオティックインフレーションシナリオによると加速膨張が起こった宇宙の一部の領域が我々の住む宇宙につながる。即ちその後の宇宙は、軽元素合成や 3 K 背景放射などを説明するビッグバン宇宙の輻射優勢期へと進化していくことになる。従ってインフレーション

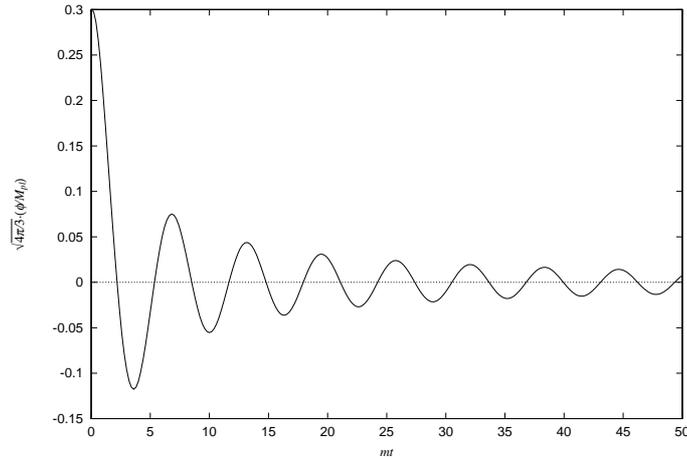


図 5: 振動期 ($\phi \lesssim M_{pl}$) におけるスカラー場のふるまい。

を起こしたスカラー場で支配される冷えた宇宙から何らかのプロセスを経て再び熱い“火の玉宇宙”が実現されると予想される。こうした熱いビッグバン宇宙をつくるプロセスを再加熱過程、スカラー場（インフラトン場）が優勢な時期から輻射優勢期に移行する過渡期間を再加熱期と呼ぶ。

こうした再加熱期と密接に関係していると思われるものにバリオン生成がある。現在我々の宇宙を形作っているクォーク・レプトンなどの基本粒子からなる物質の起源は、バリオン非対称性から生まれたと考えられている。バリオン非対称を引き起こすメカニズムの1つは大統一理論 (Grand Unified Theory; GUT) にあり、非常に高いエネルギースケールで起こることが予想される。そのため輻射優勢初期に GUT スケールのバリオン生成が起こるなら、インフレーション後の宇宙は十分な高温状態になっている必要がある。再加熱期は宇宙の熱史の始まりであり、バリオン生成に対する初期条件を与える意味でもその後の物質宇宙の進化に重要な役割を果たす。

再加熱過程の基本的アイデアは、相互作用を通じたインフラトン場からの粒子生成によるエネルギー転換である。宇宙にはインフラトン場以外に現在の物質宇宙を構成する基本粒子 (クォーク・レプトンなど) と関係の深い物質場 (ボソン・フェルミオン場) が存在していたと考えられる。そうした場がインフラトン場と相互作用していた場合、インフラトン場の振動中にボソン・フェルミオン粒子が相互作用を通じて生成される。インフラトンの振動エネルギーは相互作用粒子を通じてさらに粒子生成、あるいは別の基本粒子 (この中

にはバリオン生成を媒介する粒子も含まれているかもしれない) への崩壊に消費され、最終的には熱平衡状態に落ち着く。こうした一連のエネルギー転換プロセスにより、インフラトン場のエネルギーの大半が基本粒子の熱エネルギーに転化される。この時の温度は再加熱温度 (T_{RH}) と呼ばれる。

こうしたプロセスを記述する最も単純なモデルとして、以下のような物質場のラグランジアンを考えればよい [9] :

$$\mathcal{L}_{matter} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - \frac{1}{2}M_\chi^2\chi^2 - \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M_\psi)\psi - L_{int}; \quad (2.31)$$

$$L_{int} = -f\phi\chi^2 - \frac{1}{2}g^2\phi^2\chi^2 - h\bar{\psi}\psi\phi.$$

ϕ は前節と同じポテンシャルを持つインフラトン場、 $\chi(\psi)$ はインフラトンとの相互作用により生成されるボソン場 (フェルミオン場) を表す。ここでは生成粒子の質量はインフラトンに比べて十分軽い場合を考える ($m \gg M_\chi, M_\psi$)。以下ではインフラトンがコヒーレントに振動する時期に χ, ψ 粒子との相互作用を考慮することでインフラトン崩壊の様子を調べることにする。

2.3.2 再加熱過程の現象論的記述

相互作用のない場合、(2.30) で表されるように $\phi \leq M_{pl}$ においてインフラトン場は振動数 m で振動する。そのエネルギー密度は質量 m を持った非相対論的粒子の場合 ($\rho \propto a^{-3}$) と同じように変化する。このことから振動インフラトン $\phi(t)$ はゼロ運動量を持つ ϕ -粒子の集まりと見なすことができる。この取り扱いの下で摂動論的評価をする。Born 近似による相互作用を通じた χ, ψ -粒子の粒子生成率を求め、単位エネルギー密度当たりの ϕ -粒子の崩壊率 (decay rate) Γ を評価する。[9][15] によると

$$\Gamma(\phi \rightarrow \chi\chi) = \frac{f^2}{8\pi m}, \quad \Gamma(\phi\phi \rightarrow \chi\chi) = \frac{g^4\tilde{\phi}^2}{8\pi m}, \quad \Gamma(\phi \rightarrow \psi\psi) = \frac{h^2 m}{8\pi} \quad (2.32)$$

と与えられる。

粒子生成によりエネルギーを失うことで、インフラトン ϕ の振幅は宇宙膨張による減衰とあわせてより早く減少することが予想される。こうした効果を現象論的観点から取り扱うなら、コヒーレントな場 ϕ の運動は摩擦項のつけ加わった

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \Gamma\dot{\phi} + m^2\phi = 0 \quad (2.33)$$

に従うと考えられる。ここで $\Gamma = \Gamma(\phi \rightarrow \chi\chi) + \Gamma(\phi\phi \rightarrow \chi\chi) + \Gamma(\phi \rightarrow \psi\psi)$ である。上式は $\dot{\phi}$ をかけると

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) = -(3H + \Gamma) \dot{\phi}^2 \quad (2.34)$$

と表せる。(2.30) で得られたふるまい $\phi = \tilde{\phi}(t) \cos(mt)$ を仮定して振動周期 $T = 2\pi/m$ で時間平均 ($\langle \dots \rangle = 1/T \cdot \int_0^T dt(\dots)$) をとることにより、ゆっくりした振幅の時間変化の式から次の表式が得られる：

$$\frac{d}{dt} \rho_\phi + 3H \rho_\phi = -\Gamma \rho_\phi; \quad \rho_\phi = \left\langle \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right\rangle \approx \frac{m^2}{2} \tilde{\phi}^2. \quad (2.35)$$

一方で、 ϕ -粒子の崩壊により生成される χ , ψ -粒子は $m^2 \gg M_\chi, M_\psi$ なので超相対論的な輻射粒子としてみなせる。その全エネルギー密度を ρ_r と表し、状態方程式 $P_r = \rho_r/3$ に従うとすればエネルギー保存側より

$$\frac{d}{dt} \rho_r + 4H \rho_r = \Gamma \rho_\phi \quad (2.36)$$

という式が要請される。従って decay rate Γ を代入すると (2.35)(2.36) の時間発展から輻射粒子の最大エネルギー密度が見積もることができる。両式の時間発展から得られるエネルギー密度よりおよそその再加熱温度を評価してみる。 $\Gamma = 0$ では、輻射エネルギー密度は $\rho_r \propto a^{-4}$ となるので振動インフラトンのエネルギー密度に比べてはやく減少する。一方粒子生成の影響の考慮すると (2.35) より振動インフラトンは

$$\rho_\phi = \rho_i \left(\frac{a(t)}{a_i} \right)^{-3} \exp \left[- \int_{t_i}^t \Gamma dt \right] \quad (t \geq t_i) \quad (2.37)$$

とふるまい、 ϕ -粒子の崩壊はおおよそ $\Gamma(t - t_i) \sim 1$ 即ち、 $\Gamma \sim H$ となる時に起こりうる。この時、 $H^2 \simeq 8\pi\rho_r/3M_{pl}^2$ となり、再加熱終了時の輻射場のエネルギー密度として

$$\rho_r \simeq \frac{3}{8\pi} \Gamma^2 M_{pl}^2 \quad (2.38)$$

という値を得る。輻射粒子がすでに熱平衡状態に達しているなら decay rate を用いて再加熱温度 T_{RH} が

$$T_{RH} \simeq 0.8 N_r^{-1/4} \sqrt{\Gamma M_{pl}} \quad (2.39)$$

と求まる。 N_r は再加熱時の輻射粒子のもつ内部自由度の総数を表し、おおよそ $N_r \sim 10^2 - 10^3$ と考えると $T_{RH} \simeq 0.2 \sqrt{\Gamma M_{pl}}$ を得る。こうして与えられる再加熱温度は初期条件に依

存せず、全てモデルの持つ（カップリング等）パラメーターによって決まる。インフレーションモデルに対する観測からの制限や非線型相互作用による量子補正の影響から、こうしたパラメーターには上限値が存在する。これを考慮すると再加熱時の温度としてはおよそ

$$T_{RH} \leq 10^9 \text{ GeV} \quad (2.40)$$

程度と見積もられている [9][13]。この温度は GUT スケール $T_{GUT} \sim 10^{15}(\text{GeV})$ に比べると非常に小さい。従って、こうした評価では GUT スケールで起こるバリオン生成は困難になる。

2.3.3 再加熱期におけるパラメーター共鳴

現象論的記述による再加熱過程のシナリオは、スカラー場優勢宇宙からビッグバン理論の輻射優勢期へと移行する期間において、Born 近似にもとづいた物質進化を表す。しかしながら近年の研究によると、こうしたふるまいが必ずしも再加熱期において支配的になるわけではないことが指摘されている。Kofman らの研究によって与えられたシナリオではこうした描像は再加熱期の最終ステージにおいてのみなりたち、再加熱現象の主導的プロセスはパラメーター共鳴の効果によるカタストロフィックな粒子生成により引き起こされるといふ [14][15][16]。

(2.31) で与えたモデルのうち、ボソン粒子 χ についてカップリング $f = 0$ とおいた場合を調べる²。ここでは単純にインフラトンをコヒーレントな古典場として扱い、量子場 $\hat{\chi}$ との相互作用を考える。フーリエ展開により $\hat{\chi}$ は

$$\hat{\chi}(x, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[\hat{a}_k \chi_k(t) e^{ikx} + \hat{a}_k^\dagger \chi_k^*(t) e^{-ikx} \right], \quad (2.41)$$

と表され ($\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger$ は (2.22) を満たす生成・消滅演算子)、Heisenberg 表示のもとで以下のモード方程式を得る：

$$\ddot{\chi}_k + 3H\dot{\chi}_k + \left[\left(\frac{k}{a} \right)^2 + M_\chi^2 + g^2 \phi^2(t) \right] \chi_k = 0. \quad (2.42)$$

インフラトンの振動的ふるまい (2.30) を考慮すると

$$\frac{d^2}{dt^2} (a^{3/2} \chi_k) + \left[\left(\frac{k}{a} \right)^2 + M_\chi^2 + g^2 \tilde{\phi}^2(t) \cos^2(mt) \right] (a^{3/2} \chi_k) = 0. \quad (2.43)$$

²フェルミオン粒子に対しては、パウリの排他原理によってこうしたふるまいは禁止される [17]

と書き表せる。ここで $X = a^{3/2}\chi_k$ という新変数を定義し、 $\tau = mt$ として時間を無次元化すると上式は次の形に帰着する：

$$X_k'' + [A + 2q \cos(2\tau)] X_k = 0. \quad (2.44)$$

ここで $(') = d/d\tau$ であり、係数 A, q は時間依存するパラメーターとして、

$$A = \left(\frac{k}{ma}\right)^2 + \left(\frac{M_\chi}{m}\right)^2 + 2q, \quad q = \frac{1}{4} \left(\frac{g\bar{\phi}}{m}\right)^2 \propto a^{-3} \quad (2.45)$$

と与えられる。

(2.44) は係数 (A, q) が定数の時、楕円体微分方程式の一種に分類され、Mathieu 方程式と呼ばれる [28]。Mathieu 方程式のもつ解のふるまいは係数 (A, q) によって特徴づけられている (図6 参照)。重要な性質は、振動項の影響によって現れる不安定解の存在である。このときモード関数の振幅は $X_k \propto e^{\mu_k \tau}$ と振るまう (図7)。ここで μ_k は成長率と呼ばれ、 A, q の関数として与えられる。こうしたふるまいをパラメーター共鳴という (成長率の評価方法については付録 A.2節参照)。ここでいう不安定性は、場のゆらぎ $\langle \hat{\chi}^2 \rangle$ の増大を意味し、量子状態の占有数 $n_k \left(= \frac{1}{2} |\dot{\chi}_k|^2 + \frac{1}{2} k^2 |\chi_k|^2 \right)$ が大きくなることを表す。つまりカタストロフィクな粒子生成により、インフラトンの振動エネルギーが効率よく χ -粒子のエネルギーに転換されると解釈できる。

Mathieu 方程式の安定・不安定バンドチャート (図6) をみると、(2.45) で与えられた係数 $(A \geq 2q)$ に対して不安定になる領域が存在する。ただし、係数の時間依存性に注意する必要がある。インフラトンが振動し始めた時期では係数 q は大きな値 ($q > 1$) をとるが減衰振動により次第に小さくなり、最終的には共鳴領域から外れた安定領域に落ち着く。また粒子生成による χ -場へのエネルギー転換の影響を考慮するなら、その反作用によってインフラトンの振幅はさらに減少すると考えられる。いずれにしても共鳴による粒子生成は一定期間続いた後、終了する [14]。

成長率 μ_k 、Born 近似による decay rate Γ を用いたタイムスケールの比較から、パラメーター共鳴による粒子生成の効果は

$$\Gamma \leq 2\mu_k m \quad (2.46)$$

となる場合にインフラトン崩壊の主導プロセスとして効くと考えられる [18]。従ってパラメーター共鳴によって一挙にボソン場 χ にゆらぎが作られた後 Born 近似による崩壊過程が引き続いておこり、粒子生成と別粒子への崩壊をくりかえして最終的に χ -場は平衡状態に落ち着くと考えられる。両者の評価の違いは、インフラトン場 ϕ の取り扱いに現れてい

る。Born 近似ではインフラトンをゼロ運動量、質量 m の粒子の集団とした上で、独立に χ -粒子との相互作用を評価する。一方パラメーター共鳴は、インフラトンをコヒーレントな振動波として χ -場のモード方程式 (2.44) を解いた結果現れる効果である。この扱いはインフラトンが集団で相互作用し、初期粒子をたねにしてネズミ算式に χ -粒子が生成されるという描像に対応する。実際、宇宙膨張による時間変化を考慮に入れて (2.44) を解いても粒子生成の増大が起こることが確かめられており、パラメーター共鳴は Born 近似のような摂動評価では得られない非線型効果として理解される [18]。

Kofman らによって提示された新しい再加熱シナリオは、振動スカラー場による非線形相互作用の重要性を認識させた。こうした非線型現象による影響から再加熱時の温度も従来の評価 (2.40) より大きくなることが期待されている。従って従来のシナリオでは困難とされていた GUT スケールのバリオン生成にも道が開けることになり、新たな物質進化の可能性の広がることが予想される [20]。また Kofman らは、こうした非線型効果を通じ更に興味深い現象が起こることも指摘している。インフラトンと相互作用するボソン場のポテンシャルが対称性の破れを持つ場合、パラメーター共鳴により一時的に対称性が回復し宇宙ひもやモノポールといった位相欠陥の生成が起こり得るという [13][19]。

2.3.4 再加熱期と構造形成

パラメーター共鳴という現象を通して、再加熱過程における物質場（スカラー場）のダイナミクスの重要性が明らかになってきた。またこうしたふるまいは従来の現象論的アプローチでは取り扱えない効果であることもわかった。ところで我々が宇宙の構造形成に関する進化に目を転じた時、こうした物質進化が宇宙の地平線以上に存在するインフレーション起源の非一様性の進化にも何か影響を与えるのではないかといった疑問が生じる。

現象論的アプローチによると、再加熱過程は Born 近似の扱いで起こるマイクロプロセスとして考えられる。直感的には、地平線以上の長いスケールのゆらぎがマイクロな物理過程に直接影響されることはないと予想される。しかしながらパラメーター共鳴による再加熱過程は異なる。前節で述べたモデルの場合、バンドチャート及び (2.45) より、 $M_X/m \ll 1$ で長波長 ($k \rightarrow 0$) のゆらぎの成長が最も大きく現れることがわかる。パラメーター共鳴はインフラトン場の振動性により現れる効果であり、波長が長ければ長いほど振動項はゆらぎのふるまいを支配する。つまり長い波長ほどパラメーター共鳴による成長が大きく現れることは、一般的な性質である³。このことは地平線以上の長波長ゆらぎに対しても、パラメーター共鳴が何らかの影響を及ぼすことを示唆している。2.2.2節で述べた構造形成シナ

³特殊なケースとしてインフラトンポテンシャルが $\lambda\phi^4$ の場合には、モデルの持つパラメーターによっては短波長でしか共鳴が起こらないことがある [14][21][22]。

リオによると大規模構造の起源は、インフレーション期の量子的生成後、超地平線スケールのゆらぎとして進化を続け、宇宙晴れ上がり時によりやうく地平線サイズになる。ゆらぎが共鳴によって何らかの影響を受ける可能性があるとする、量子ゆらぎの成長から大規模構造が生まれたとするシナリオ自体を再考察する必要がある。地平線以上のゆらぎの進化を考える場合、重力との相互作用が重要になる。次章では一般相対論的な取り扱いによるゆらぎの解析について解説する。

3 相対論的な定式による宇宙論的摂動論

インフレーションシナリオにもとづく、現在観測で知られる大規模構造は量子ゆらぎを起源として進化してきた。その波長は超地平線スケールにわたるため、重力的な進化が重要になると考えられる。本章では一般相対論的な扱いによる線型摂動論において、こうしたゆらぎの進化について考えることにする。3.1節では重力不安定性について説明をする。3.2節では物質密度の進化を考える時の Einstein 方程式の線型摂動について考察する。一般相対論は座標変換に対し共変な理論である。こうした共変性は、線型摂動においてゲージ依存性の問題を引き起こす。3.3節においてはゲージ自由度について説明をし、ゲージに依らない摂動について考える。3.4節では前節で述べた方法に基づき、摂動方程式を導出する。最後の節ではゆらぎの進化を解析するうえで重要な摂動量である Bardeen パラメーターについて紹介し、その物理的意味といくつかの基本的性質について説明する。

3.1 重力不安定性によるゆらぎの成長

Einstein の重力理論では物質場の存在が空間を歪め、空間の歪みによって物質場の分布が求まる。また物質の密度分布が一様からほんの少しずれた時、空間にもわずかな歪みが生じる。Einstein 重力の1つの極限である Newton 重力でも、Poisson 方程式

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho_0 \left(\frac{\delta \rho}{\rho_0} \right) \quad (3.1)$$

からこうした法則を理解することができる。ここで Φ は重力ポテンシャル、 $\delta \rho$ は一様密度 (ρ_0) からのずれを表すエネルギー (質量) 密度のゆらぎである。重力不安定性の理論によると、物質間に働く重力相互作用により密度分布の非一様性が成長する。このことは Newton の重力理論において古くから知られており、線型理論では Jeans 不安定性と呼ばれている。Jeans 不安定性は、物質の圧力分散と重力による密度集中の2つの効果から特徴的スケール (Jeans 波長)

$$l_G = \frac{c_s}{\sqrt{G \rho_0}} ; \quad c_s = \delta P / \delta \rho \quad (\text{sound velocity}) \quad (3.2)$$

が現れ、 $l > l_G$ のスケールに対して線型不安定性により密度ゆらぎが成長することをさす。現在観測で知られている銀河団・超銀河団がつくるフィラメント状の物質分布も初期の小さなゆらぎが重力的に進化したものとされている。

我々宇宙の構造を生み出すもととなった原始ゆらぎを考える時、膨張宇宙における進化を議論する必要がある。宇宙晴れ上がり時の密度ゆらぎを反映していると思われる背景放

射の温度ゆらぎは幸いにも、

$$\frac{\Delta T}{T} \simeq 10^{-5} \quad (3.3)$$

と非常に小さいことがわかっている。また我々の住む宇宙は宇宙原理に従う限り、(少なくともインフレーション以後は) 一様・等方な宇宙とみなすことができる。それゆえ宇宙が晴れ上がるまでのゆらぎの進化は、一様等方宇宙での線型重力の効果のみで十分扱える。ただし晴れ上がり以前の原始ゆらぎは地平線以上の波長をもつことに注意しなければならない。つまり、光速 c の単位を用いて

$$cH^{-1} \ll \lambda_{ph} \quad ; \quad \lambda_{ph} : \text{physical wavelength} \quad (3.4)$$

と表される。一方、Newton 重力は物体の運動が光速以下 ($v/c \ll 1$) の時になりたつ。 $v \sim \lambda_{ph}/H^{-1}$ とすれば、これは逆の極限、

$$\lambda_{ph} \ll cH^{-1} \quad (3.5)$$

を与える。従って地平線以上のゆらぎは一般相対論的な取扱いが必要不可欠になることを表している。

3.2 Einstein 方程式の線型摂動

Einstein 方程式において空間の歪みはメトリック $g_{\mu\nu}$ を通じて Einstein テンソル $G_{\mu\nu}$ に、物質場の分布はエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ により表現される。今、物質場がスカラー場 ϕ であったとすると、

$$G_{\mu\nu}[g_{\mu\nu}] = \kappa T_{\mu\nu}[\phi, g_{\mu\nu}] \quad (3.6)$$

である。一様等方宇宙におけるゆらぎ (非一様性) の進化を考える場合、まずメトリック、物質場を一様成分、非一様な摂動部分に分ける：

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x, t) &= g_{\mu\nu}^{(0)}(t) + \delta g_{\mu\nu}(x, t), \\ \phi(x, t) &= \phi^{(0)}(t) + \delta\phi(x, t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

$g_{\mu\nu}^{(0)}$ は (2.1) で与えられる FRW メトリックとする。これらを (3.6) に代入し一様成分とその周りの摂動成分に分離すると

$$\begin{aligned} G[g^{(0)} + \delta g] &= \kappa T[\phi^{(0)} + \delta\phi, g^{(0)} + \delta g] \\ \Rightarrow G[g^{(0)}] + \delta G[g^{(0)}, \delta g] &= \kappa \left\{ T[\phi^{(0)}, g^{(0)}] + \delta T[\phi^{(0)}, g^{(0)}; \delta\phi, \delta g] \right\} \end{aligned}$$

となる。 δG , δT は、それぞれ Einstein テンソル、エネルギー・運動量テンソルの摂動に関する線型部分を表す（添字 $(\mu\nu)$ は省略した）。上式より、

$$G[g^{(0)}] = \kappa T[\phi^{(0)}, g^{(0)}], \quad (3.8)$$

$$\delta G[g^{(0)}, \delta g] = \kappa \delta T[\phi^{(0)}, g^{(0)}; \delta\phi, \delta g] \quad (3.9)$$

を得る。(3.8) は背景場の発展方程式である。物質場を完全流体とすれば (2.2)、ラグランジアン (2.14) で与えられるエネルギー・運動量テンソルを与えると (2.15)(2.16) といった式が得られる。

(3.9) は、ゆらぎの発展方程式を与える。摂動方程式を書き下す時、メトリックの摂動は全部で 10 個成分あるがこれらのうち力学自由度として意味のあるものは 6 つである。これらは時間一定な空間超曲面上の座標 x^i に関する変換の性質から、摂動量はスカラー、ベクトル、テンソルと呼ばれる 3 つのタイプに分類することができる [29][31]。スカラータイプの摂動は、スカラー量によって表される空間座標変換の下で同じスカラータイプの摂動量へと変換される。ベクトルタイプの摂動は 3 次元ゼロ発散ベクトルによる変換の下で同じタイプに変換される。テンソルタイプは重力波に対応するモードで、トレースレス・ゼロ発散の 3 次元テンソル量で表される摂動量である。テンソルタイプは座標変換において不変である。

ここで我々が問題とする物質密度のゆらぎはスカラータイプの摂動に分類される。3 K 温度ゆらぎ (3.3) は、こうしたゆらぎによって生じた赤方偏移のずれが背景放射の非等方性として観測されると考えられている⁴。さらに一様等方宇宙の性質から、3 タイプの摂動はお互いに分離して独立にふるまうことがわかっている。以下ではスカラータイプの摂動に限定し、特に平坦な宇宙の場合に議論を進めることにする。スカラータイプのメトリック摂動 $\delta g_{\mu\nu}^{(S)}$ は一般に 4 つのスカラー量を用いて表され、以下のメトリック $g_{\mu\nu}$ にて与えられる [32]：

$$ds^2 = -(1 + 2A)dt^2 + 2B_{,i}dx^i dt + a^2(t) [(1 - 2\mathcal{R})\delta_{ij} + 2E_{,ij}] dx^i dx^j. \quad (3.10)$$

3.3 ゲージ変換とゲージ不変な摂動

Einstein 方程式は座標変換に対して一般共変な理論であり、座標の選び方は任意である。こうした選び方の任意性は線型摂動にも存在し、摂動のゲージ依存性という問題を引き起こす。ここで座標系 $\{x^\mu\}$ から $\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ で定義される座標系 $\{\tilde{x}^\mu\}$ に移る場合を考え

⁴一般に、(3.3) のゆらぎには重力波の寄与もあると考えられている。

てみる。ただし ξ^μ は微小量として扱う。一般にテンソル量 $f_{\alpha\beta\dots}{}^{\rho\sigma\dots}(x^\mu)$ は座標変換により、異なる座標系 $\{\tilde{x}^\mu\}$ におけるテンソル $\tilde{f}_{\alpha'\beta'\dots}{}^{\rho'\sigma'\dots}(\tilde{x}^\mu)$ と以下の変換則で結ばれる：

$$\tilde{f}_{\alpha'\beta'\dots}{}^{\rho'\sigma'\dots}(\tilde{x}^\mu) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^{\beta'}} \cdots \frac{\partial \tilde{x}^{\rho'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial \tilde{x}^{\sigma'}}{\partial x^\sigma} \cdots f_{\alpha\beta\dots}{}^{\rho\sigma\dots}(x^\mu). \quad (3.11)$$

微小変換によって結ばれる場合、異なる座標系どうしでの同一座標値 x_P における関係を書き表すと、上式より

$$\tilde{f}_{\alpha\beta\dots}{}^{\rho\sigma\dots}(x_P) = f_{\alpha\beta\dots}{}^{\rho\sigma\dots}(x_P) - [\mathcal{L}_\xi f(x_P)]_{\alpha\beta\dots}{}^{\rho\sigma\dots} \quad (3.12)$$

を得る。 \mathcal{L}_ξ は Lie 微分を表す。(3.12) で表される変換はゲージ変換と呼ばれる。

スカラータイプのゲージ変換は、スカラー関数を用いて微小量 ξ^μ を

$$\xi^\mu = (\xi^0, \xi^i) \quad (3.13)$$

と表すことにより得られる。この時、メトリックに対するゲージ変換

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu,\alpha}\xi^\alpha - g_{\alpha\nu}\xi_{,\mu}^\alpha - g_{\mu\alpha}\xi_{,\nu}^\alpha \quad (3.14)$$

に (3.10) で表されるメトリックを代入すると、座標系 $\{\tilde{x}^\mu\}$ と $\{x^\mu\}$ においてそれぞれ定義される摂動量の間

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\rightarrow \tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} - \dot{\xi}^0 \\ \mathcal{R} &\rightarrow \tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R} + H\xi^0 \\ \mathcal{B} &\rightarrow \tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} + \xi^0 - a^2\dot{\xi} \\ \mathcal{E} &\rightarrow \tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} - \xi \end{aligned}$$

というずれが生じてしまう。こういったゲージ依存性が摂動に現れると摂動量自身の物理的意味があいまいになってしまう。(3.10) で表されるスカラータイプのメトリック摂動には2つの力学的自由度しかない。残り2つはゲージ変換を生成するゲージ自由度に対応し、物理的意味のないものである。従って4つの摂動量の適当な組み合わせからゲージに依存しない2つの摂動量を定義することができる。上の場合、

$$\Phi = \mathcal{A} + \frac{d}{dt}(\mathcal{B} - a^2\dot{\mathcal{E}}), \quad \Psi = \mathcal{R} - H(\mathcal{B} - a^2\dot{\mathcal{E}}), \quad (3.15)$$

という摂動量を定義すると、ゲージ変換に対して不変になる [29][31] [33]。エネルギー・運動量テンソルに含まれるスカラー場に対しても同様な摂動量が定義できる：

$$\delta\phi^{GI} = \delta\phi + \dot{\phi}(B - a^2\dot{E}). \quad (3.16)$$

ゲージに依存しないこれら摂動量を用いることにより、発展方程式 (3.9) をゲージに依らない形式に書き直すことができる。この方法をゲージ不変形式による摂動という。

一方、ゲージ不変量 $\Phi, \Psi, \delta\phi^{GI}$ にはメトリックの摂動量 B, E が同じ組み合わせで含まれていることがわかる。 Φ, Ψ が摂動 \mathcal{A}, \mathcal{R} に対応する力学自由度と考えると B, E はゲージ自由度に相当する量である。よって始めから $B = E = 0$ として摂動方程式を書き下せば $\mathcal{A}, \mathcal{R}, \delta\phi$ はゲージ不変量 $\Phi, \Psi, \delta\phi^{GI}$ の満たす方程式と同じ発展方程式になる。このように摂動の自由度を制限することでゲージ変換による任意性が現れないようにする方法をゲージ固定法という。この方法では、ゲージ変換により異なるゲージ条件の摂動をお互い結びつけることができる。従ってあるゲージ条件のもとで摂動を解いたとすると別のゲージ条件の摂動のふるまいも変換を通じて知ることが出来る。そういう意味では最終的に得られる結果はゲージ不変形式と変わらない。

以上のことをふまえ、改めてメトリックを

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + a^2(t)(1 - 2\Psi)\delta_{ij}dx^i dx^j \quad (3.17)$$

で与えらるとし、 $\delta\phi^{GI} = \delta\phi$ と表す⁵。

3.4 摂動方程式の導出

ここで実際に摂動方程式を書き下してみる。物質場として n 成分のスカラー場 ϕ_a ($a = 1, \dots, n$) が含まれる場合を考える。重力場も含めた全作用は以下で与えられる：

$$\mathcal{I} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} R - \frac{1}{2} \sum_a^n g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_a \partial_\nu \phi_a - V(\phi_c) \right]. \quad (3.18)$$

R は4次元のスカラー曲率、 $V(\phi_c)$ は任意のスカラー場ポテンシャルである。上式よりエネルギー・運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu} = \sum_a^n \left[\partial_\mu \phi_a \partial_\nu \phi_a - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\rho \phi_a \partial^\rho \phi_a \right] - g_{\mu\nu} V(\phi_c) \quad (3.19)$$

⁵(3.17) を Newton(Longitudinal) ゲージのメトリックと呼ぶことがある

と表される。(3.7)に従って場を一様成分と摂動部分に分ける。以下では記法の簡単化のため、背景スカラー場 $\phi_a^{(0)}(t)$ を ϕ_a として記す。背景場の方程式 (3.8) に代入すると以下が得られる：

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \left(\frac{1}{2} \sum_a^n \dot{\phi}_a^2 + V(\phi_c) \right), \quad (3.20)$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa}{2} \sum_a^n \dot{\phi}_a^2 \quad (3.21)$$

さらに作用 (3.18) の変分からスカラー場の運動方程式

$$\ddot{\phi}_a + 3H\dot{\phi}_a + V_{,a} = 0, \quad (a = 1, \dots, n). \quad (3.22)$$

を得る。ここで $V_{,a} = dV/d\phi_a$ を表す。(3.20) はエネルギー条件に対応する拘束条件で、これと (3.22) を用いることで (3.21) は自動的に満たされることがわかる。

一方、摂動方程式からは (3.9) の非対角成分より

$$\Phi = \Psi \quad (3.23)$$

という条件が得られる。これを用いて (3.9) を書き下すと摂動量の Fourier 成分から以下の発展方程式を導くことができる：

$$\ddot{\Phi} + 4H\dot{\Phi} + (\dot{H} + 3H^2)\Phi = \frac{\kappa}{2} \sum_a^n (\dot{\phi}_a \delta\phi_a - V_{,a} \delta\phi_a), \quad (3.24)$$

$$-\left(\frac{k}{a}\right)^2 \Phi - 3H\dot{\Phi} - (\dot{H} + 3H^2)\Phi = \frac{\kappa}{2} \sum_a^n (\dot{\phi}_a \delta\phi_a + V_{,a} \delta\phi_a), \quad (3.25)$$

$$\dot{\Phi} + H\Phi = \frac{\kappa}{2} \sum_a^n \dot{\phi}_a \delta\phi_a. \quad (3.26)$$

作用 (3.18) からはスカラー場のゆらぎに対する運動方程式

$$\delta\ddot{\phi}_a + 3H\delta\dot{\phi}_a + \left(\frac{k}{a}\right)^2 \delta\phi_a + \sum_c^n V_{,ca} \delta\phi_c = 4\dot{\phi}_a \dot{\Phi} - 2V_{,a} \Phi, \quad (3.27)$$

が得られる。(3.27) は保存則 $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ を満足し、Einstein 方程式と矛盾しない摂動方程式である。(3.24) は摂動 Einstein 方程式の対角成分から導かれる。(3.25)(3.26) は摂動量に対して拘束条件を与える式であり、それぞれエネルギー拘束条件、運動量拘束条件に対応

する。特に (3.25) は宇宙膨張がない場合 ($H = 0$)、Newton 重力における Poisson 方程式 (3.1) に対応し、その時右辺はエネルギー密度のゆらぎ $\delta\rho$ と一致する。こうした対応からわかるように、ゲージ不変量 Φ は Newton の重力ポテンシャルに相当するものであり、ゲージ不変ポテンシャルと呼ばれる [31]。

変数 $(n+1)$ 個の摂動に対し得られた方程式は、 $\delta\phi_a$, Φ に関する運動方程式 $(n+1)$ 個と拘束条件の 2 個をあわせた合計 $(n+3)$ 個である。しかしながら拘束条件を考慮することにより、ゲージ不変ポテンシャルはスカラー場のゆらぎから決めることができる。従って実際の力学自由度としてはスカラー場のゆらぎに対応する n 個に縮約される (位相空間では $2n$ 個)。次章では新変数を用いて摂動の自由度を縮約し、新変数に対する発展方程式から再加熱期のゆらぎのふるまいを解析する。

3.5 Bardeen パラメーター (曲率のゆらぎ)

摂動方程式のふるまいを解析するためにはまず (3.20)-(3.22) で与えられる背景場の方程式の解を求め、(3.24)-(3.26) に代入して摂動量に対する時間発展を調べなければならない。こうした手順より摂動のふるまいがわかった時、原始密度ゆらぎの進化を調べることができる。

我々が現在観測できる原始ゆらぎのうち最も重要と思われるものが背景放射の温度ゆらぎ (3.3) である。密度ゆらぎによって生じる晴れ上がり時の空間の歪みが直接温度ゆらぎのパターンに結びついている。こうした効果は Sachs-Wolfe 効果と呼ばれ、温度ゆらぎと重力ポテンシャルの間に

$$\frac{\Delta T}{T}(x) = \frac{1}{3}\Phi(x) \quad (3.28)$$

という関係がなりたつことが知られている [34]。従ってゲージ不変ポテンシャルのふるまいを摂動方程式より求めることが重要となる。こうした摂動量を評価する時に有用なゲージ不変量があり、Bardeen パラメーターと呼ばれる [29][31][33]。メトリック (3.17) の下で (3.23) の関係がなりたつことを用いると、Bardeen パラメーター ζ は以下の表式で定義される [32][35]：

$$\zeta = \Phi - \frac{H^2}{\dot{H}}(\Phi + H^{-1}\dot{\Phi}). \quad (3.29)$$

Bardeen パラメーターは幾何学量としての意味をもつ摂動量である。摂動方程式 (3.25) と背景場の発展方程式を用いて ζ を書きかえると

$$\zeta = \Phi + H\frac{\delta\rho}{\dot{\rho}} + \frac{H}{3\dot{H}}\left(\frac{k}{a}\right)^2\Phi \quad (3.30)$$

を得る。ただし

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{2} \sum_a^n \dot{\phi}_a^2 + V(\phi_c), \\ \delta\rho &= \sum_a^n \left(\dot{\phi}_a \delta\dot{\phi}_a - \dot{\phi}_a^2 \Phi + V_{,a} \delta\phi_a \right)\end{aligned}$$

である。 ρ , $\delta\rho$ はエネルギー・運動量テンソル (3.19) の T_{00} 成分、即ちエネルギー密度を表す量であり、それぞれ背景部分とゆらぎ成分に相当する。ところで密度ゆらぎ $\delta\rho$ はゲージ変換により

$$\delta\rho \rightarrow \delta\tilde{\rho} = \delta\rho - \dot{\rho}\zeta^0 \quad (3.31)$$

と変換される。また (3.23) より $\Phi = \Psi (= \mathcal{R})$ であることを考えると (3.30) の右辺第 1、2 項は

$$\mathcal{R}_\Sigma \equiv \mathcal{R} + \frac{H}{\dot{\rho}} \delta\rho \quad (3.32)$$

で定義されるゲージ不変量と等しい。従って長波長極限 ($k \rightarrow 0$) をとると

$$\zeta \simeq \mathcal{R}_\Sigma \quad (3.33)$$

を得る。 \mathcal{R}_Σ は一様密度の空間超曲面 ($\delta\rho = 0$ となる空間超曲面) における 3 次元空間曲率の意味があり、 ${}^{(3)}R = (4/a^2)\nabla^2\mathcal{R}_\Sigma$ という関係を持つ。即ち、Bardeen パラメーターは長波長極限における空間曲率のゆらぎを表している [32]。

Bardeen パラメーターを用いる最大の利点は、長波長極限のゆらぎに対して一種の保存則がなりたつところにある。(3.29) に時間微分を施した発展方程式は以下のように表せる：

$$\dot{\zeta} = -\frac{H}{\dot{H}} \left(\frac{k}{a} \right)^2 \Phi + \frac{H}{\dot{H}} \tau \delta S \quad (3.34)$$

δS はエントロピーのゆらぎと呼ばれ、主に物質場が多成分系のときにこうした項の影響が重要になる。そこで摂動のふるまいとして、エントロピーのゆらぎがない (もしくは無視できる) 場合を断熱モードのゆらぎ (adiabatic mode)、それ以外を非断熱ゆらぎと定義する。断熱ゆらぎの場合、長波長モードに対して

$$\dot{\zeta} \simeq 0 \quad (3.35)$$

が成立するので Bardeen パラメーターは時間的に一定に保たれる。一方、非断熱ゆらぎのふるまいはエントロピーのゆらぎから決められ、物質場のふるまいに大きく依存する。2

成分のスカラー場システム ($n = 2$) だとエントロピーのゆらぎは (3.24)(3.25)(3.26) を用いて以下の様に与えられる [32] :

$$\tau \delta S = \frac{\dot{H}}{2} \left(\frac{\delta \phi_1}{\dot{\phi}_1} - \frac{\delta \phi_2}{\dot{\phi}_2} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\phi}_1^2 - \dot{\phi}_2^2}{\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2} \right) \quad (3.36)$$

これよりゆらぎが断熱的になるのはスカラー場が一成分しかない時 ($\phi_1 = 0$ あるいは $\phi_2 = 0$), もしくは

$$\frac{\delta \phi_1}{\dot{\phi}_1} = \frac{\delta \phi_2}{\dot{\phi}_2} \quad (3.37)$$

が満足される場合であることがわかる。こうした関係は物質場が完全流体の場合にも成立し、流体が一成分かあるいは

$$\frac{\delta P}{\dot{P}} = \frac{\delta \rho}{\dot{\rho}} \quad (3.38)$$

が満たされる場合にゆらぎは断熱的となり、長波長極限で Bardeen パラメーターは一定値を保つ [32]。

このような保存則がなりたつ時、地平線以上の長波長ゆらぎに対しては ζ の初期振幅さえ求めれば (与えれば) ゆらぎの波長が地平線スケールより短くなるまでの間、 ζ を一定として扱える。インフレーションモデルにおける量子起源のゆらぎについても同様である。量子ゆらぎの波長が地平線サイズを超えた時 ($k = aH_k$)、(2.25) よりゆらぎの初期条件が

$$|\delta \phi| = \frac{H_k}{\sqrt{2k^3}} \Big|_{k=aH_k} \quad (3.39)$$

という振幅で与えられる (H_k は、波数 k でラベル付けされたゆらぎの波長が地平線を超える時刻でのハッブルパラメーター)。スカラー場が一成分である限り ζ は初期条件で決まる値のまま一定値を保つ。インフレーション後のビッグバン宇宙でも輻射優勢、物質優勢期ではほぼ一成分流体の物質場とみなせる。両者がスムーズにつながると考えれば、インフレーション時に与えられた Bardeen パラメーターの振幅は物質優勢期にゆらぎの波長が再び地平線以下になるまで一定になると考えられる。このことを信じれば、 $3K$ 温度ゆらぎ (特徴的スケールが晴れ上がり時の地平線サイズ) の振幅はインフレーション時の量子ゆらぎの振幅をそのまま反映するものと予想される。実際、 ζ の保存則を使うと (3.28)(3.29) から物質優勢期において

$$\frac{\Delta T}{T}(x) = \frac{\zeta(x)}{5} \quad (3.40)$$

とインフレーション時に与えられる Bardeen パラメーターを用いて温度ゆらぎを表せる。

しかしながらこうした考えには注意が必要である。上記の考えが成り立つのは、物質場の優勢成分が入れ代わる過渡期間が十分短くかつ Bardeen パラメーターが連続的につながるとした場合に限られる。過渡期では、2成分（以上）の物質場がお互い相互作用しながら進化する。従って (3.36) の右辺第2項を考慮して ζ の時間発展を扱わねばならない。こうした時期に激しい相互作用があるとするとゆらぎのふるまいには断熱モード以外のものが現れると考えられ、一般に ζ の保存則は成り立たない。

インフレーション起源のゆらぎから 3 K 温度ゆらぎに対して評価する際、過渡期間として重要な時期は (1) スカラー場優勢期から輻射優勢期に移行する再加熱期、(2) 輻射優勢期から物質優勢期へと進化する時期である。(2) についてはすでに小玉・佐々木等をはじめとして多くの研究がなされており、こうした時期のゆらぎは断熱的にふるまうことが知られている [29]。従って (1) の再加熱期におけるゆらぎの進化に焦点をあてる必要がある。

従来インフレーション起源のゆらぎから 3K 温度ゆらぎの振幅を評価する時、多くは瞬間再加熱を仮定し、インフレーション期と輻射優勢期の摂動解を接続する評価方法がなされている [36]。しかしながら 2.3節で述べたように、再加熱期はラグランジアン (2.31) により記述されるインフラトン場と輻射場の物質進化である。再加熱期のゆらぎの進化のこれまでの考察として、摩擦項を通じてインフラトン場と輻射場が相互作用する現象論的モデル (2.3.2節参照) での数値解析があり断熱ゆらぎ優勢になることが知られているもの [35][37][38]、実際のスカラー場の相互作用を反映した取り扱いではない。特に非線型相互作用を通じて起こるパラメーター共鳴の効果について注目しなければならない。2.3.3節でみたように Kofman らによって指摘されたこの現象は、振動スカラー場のダイナミクスが再加熱期において重要になることを示唆している。従ってゆらぎへの影響の有無を考える際には、改めて共鳴の効果を取り入れた解析が必要になる。

4 再加熱期における宇宙論的摂動

再加熱過程は振動インフラトン場の非線型相互作用が重要な役割をする。宇宙論的摂動における研究ではこれまで現象論的観点から再加熱期におけるゆらぎの進化が解析され、ゆらぎは断熱的に進化するとの結果を得ている。現在考えられている再加熱シナリオによると、こうした解析は共鳴以後の再加熱過程の進化に対応する。従って共鳴による再加熱過程が重要となる時期においてゆらぎの進化を考える必要がある。

この章では共鳴を引き起こす振動インフラトン場のダイナミクスとゆらぎの進化に関する近年の研究について紹介する。振動インフラトン場優勢な再加熱期において、まず相互作用のない場合のゆらぎのふるまいを理解しておくことは重要である。4.1節では南部・樽家によってなされた1成分スカラー場における摂動方程式の解析 [42] について紹介する。この結果を踏まえて、4.2節で相互作用がある2成分系でのゆらぎのふるまいについて考察する。振動インフラトン場を流体に置きかえて現象論的観点からパラメーター共鳴の効果を考察した濱崎・小玉の研究 [45] を紹介し、その妥当性とゆらぎへの影響について議論する。

4.1 振動インフラトン場優勢な宇宙での宇宙論的摂動

ここでは振動インフラトン場が優勢な場合におけるゆらぎのふるまいについて考察する。物質場は1成分のスカラー場（インフラトン場）のみとし、相互作用はないとする。ポテンシャルとしては

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} \phi_0^4 \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^{2n}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.1)$$

で与えられるものを考える（ ϕ_0 は定数）。最初に背景場のふるまいを求め、それを摂動方程式に代入してゆらぎの時間依存性を評価する。

4.1.1 背景場のふるまい

背景場の方程式は(3.20)-(3.22)で与えられている（ $\phi_1 = \phi$ とする）。スカラー場は $\phi \ll M_{pl}$ の時、ポテンシャルの底で振動的ふるまいをする。こうした状況では厳密解を得ることはできないものの、以下のやり方で近似解を得ることができる。(3.22)両辺に ϕ をかけて(3.21)を用いると

$$\begin{aligned} 0 &= (\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi})\phi \\ &= \frac{d}{dt} \left(\phi\dot{\phi} + \frac{3}{2}H\phi^2 \right) - \dot{\phi}^2 \left(1 - \frac{3}{4}\kappa\phi^2 \right) + 2nV(\phi) \end{aligned} \quad (4.2)$$

という式になる。ここでインフラトンの振動一周期のタイムスケールで時間平均 ($\langle \dots \rangle = 1/T \cdot \int_0^T dt(\dots)$) をとる。 $\phi \ll M_{pl}$ より

$$\langle \dot{\phi}^2 \rangle = 2n \langle V(\phi) \rangle \quad (4.3)$$

を得る。この関係を (3.20)(3.21) に適用するとスケール因子とハッブルパラメーターは近似的に

$$a(t) \simeq \left(\frac{t}{t_0} \right)^{(n+1)/3n}, \quad H \simeq \frac{n+1}{3n} \cdot \frac{1}{t} \quad (4.4)$$

と表せることがわかる。新たに時間変数として

$$\eta \equiv nt_0 a^{3/(n+1)} \quad (4.5)$$

を定義し、インフラトン ϕ を次のように表すとする：

$$\phi(t) = \phi_0 a^{-3(n+1)} \tilde{\phi}. \quad (4.6)$$

$\phi_0 (\ll M_{pl})$ は初期振幅を表し、 $t = t_0$ において $\tilde{\phi} = 1$ とする。これらを用いてスカラー場の運動方程式 (3.22) を書き表すと

$$\tilde{\phi}_{,\eta\eta} + m^2 n \tilde{\phi}^{2n-1} = 0 ; \quad m^2 \equiv \frac{\lambda}{2} \phi_0^2 \quad (4.7)$$

が得られる。 $n = 1$ の時 ($V = m^2 \phi^2 / 2$)、

$$\tilde{\phi} = \cos(m\eta) \quad (4.8)$$

が解として与えられ、(2.30) で得たふるまいと一致する。 $n = 2$ の場合、上式の解は Jacobi の楕円関数を用いて $\tilde{\phi} = \text{cn}(\sqrt{\lambda} \phi_0 \eta ; 1/\sqrt{2})$ と表せる [42]。

4.1.2 ゆらぎの発展方程式

3.4節で導いた摂動方程式は一成分のスカラー場モデルだと全部で4式になる。このうち時間に関する一階微分しか含まない拘束条件が2式あることを考慮すると、力学変数 $\delta\phi$, Φ は次の新変数の導入により一自由度系に帰着する [31][39]：

$$Q \equiv \delta\phi^{GI} + \frac{\dot{\phi}}{H} \Psi = \delta\phi + \frac{\dot{\phi}}{H} \mathcal{R} \quad (4.9)$$

変数 Q は Mukhanov により始めて用いられたゲージ不変量であり、Mukhanov の変数と呼ばれる。(3.23) より $\Phi = \Psi$ が成り立つことから (3.24)-(3.27) と背景場の方程式を用いて Q に対する発展方程式を導くと、多少の計算の後に以下を得る [31][39][40] :

$$\ddot{Q} + 3H\dot{Q} + \left[V_{,\phi\phi} + \left(\frac{k}{a}\right)^2 + 2\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{H}}{H} + 3H \right) \right] Q = 0. \quad (4.10)$$

上式は Mukhanov 方程式と呼ばれる。質量項の第3項は、スカラー場の摂動方程式に対するメトリック摂動を考慮した場合の補正項を表す。以下で便利なように (4.10) を $\tilde{Q} = a^{3/(n+1)}Q$ という変数に対する時間 η に関する方程式として書き直しておく :

$$\tilde{Q}_{,m} + a^{6(n-1)/(n+1)} \left[V_{,\phi\phi} + \left(\frac{k}{a}\right)^2 + 2\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{H}}{H} + 3H \right) - \frac{9n}{(n+1)^2} H^2 - \frac{3}{n+1} \dot{H} \right] \tilde{Q} = 0. \quad (4.11)$$

一方、拘束条件 (3.25)(3.26) を用いるとゲージ不変ポテンシャル Φ と (3.29) で与えられる Bardeen パラメーターには

$$-\left(\frac{k}{a}\right)^2 \Phi = \frac{\kappa \dot{\phi}^2}{2H} \frac{d}{dt} \left(\frac{H}{\dot{\phi}} Q \right), \quad (4.12)$$

$$\zeta = \frac{H}{\dot{\phi}} Q \quad (4.13)$$

という関係が成り立つ。従って Mukhanov の変数 Q のふるまいから上式の関係を使ってメトリックゆらぎに対するゲージ不変量を評価することができる。以下では $n = 1$ の場合に対し、 Φ, ζ のふるまいを調べる ($n \geq 2$ の場合は付録 B.1を参照)。

4.1.3 ゆらぎのふるまい ($n = 1$ の場合)

ポテンシャルが $n = 1$ で与えられている場合を解析する。(4.11) に含まれる各項の時間依存性をみると、背景場のふるまいより

$$\begin{aligned} V_{\phi\phi} &= m^2, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{H}}{H} + 3H \right) &= 6H\tilde{\phi}\tilde{\phi}_\eta \sim \mathcal{O} \left(\left(\frac{\eta}{t_0} \right)^{-1} \right) \\ H^2, \dot{H} &\sim \mathcal{O} \left(\left(\frac{\eta}{t_0} \right)^{-2} \right) \end{aligned}$$

となる。近似解は $\eta > t_0$ で成り立つので、 $(\frac{1}{\eta})$ のべきでオーダー評価すると、 H^2 , \dot{H} は他の項に比べて高いオーダーである。よってこれらの寄与を無視し $\tilde{\phi}$ の解として (4.8) を用いると (4.11) は以下のようなになる [42]:

$$\tilde{Q}_{,\tau\tau} + \left[1 + \left(\frac{k}{ma} \right)^2 - \frac{4}{\tau} \sin(2\tau) \right] \tilde{Q} = 0 \quad (4.14)$$

ここで無次元量 $\tau = m\eta$ を導入した。上式は

$$Y_{,\tau\tau} + [A - 2q \sin(2\tau)] Y = 0 \quad (4.15)$$

で表される Mathieu 方程式と同じ形である。ただし係数 A , q は以下のような時間依存性を持つ:

$$A = 1 + \left(\frac{mt_0}{2} \right)^{4/3} \left(\frac{k}{m} \right)^2 \cdot q^{4/3}, \quad q = \frac{2}{\tau} < 1. \quad (4.16)$$

Mathieu 方程式の安定・不安定バンドチャートを見ると、係数 A, q が不安定領域へと時間的に移動しパラメーター共鳴によって \tilde{Q} の振幅が成長することがわかる (図 8)。 (4.14) に現れる振動項は、(4.10) の質量項の第 3 項から得られたものである。従って摂動 \tilde{Q} の成長はメトリックゆらぎの考慮により現れた重力不安定性によるものである [42]。

\tilde{Q} の時間依存性を調べるためには q を微小パラメーターとみなし、(4.14) を摂動展開する方法が考えられる。ここでは“くりこみ群的アプローチ”による微分方程式の漸近解法 (RG 法) を適用する。RG 法は、微分方程式の摂動論的解法における様々なテクニックに対して統一的視点を与える手法の 1 つである (RG 法の詳しい解説は付録 A を参照)。RG 法を適用する前に微小パラメーターを

$$\epsilon \equiv \frac{4}{\tau_0}, \quad (\tau_0 < 1) \quad (4.17)$$

と定義し、以下のように (4.14) を書き直す:

$$\tilde{Q}_{,\tau\tau} + \left[1 + \epsilon\omega(\tau) - \epsilon \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right) \sin(2\tau) \right] \tilde{Q} = 0, \quad (\tau > \tau_0). \quad (4.18)$$

ここで $\omega = (1/\epsilon)(k/ma)^2$ である。長波長モードのふるまいを調べるため、 $(k/ma)^2 < 1$ ($\epsilon\omega < 1$) とする。

ϵ により、 \tilde{Q} を以下のように展開する:

$$\tilde{Q} = Q^{(0)} + \epsilon Q^{(1)} + \dots \quad (4.19)$$

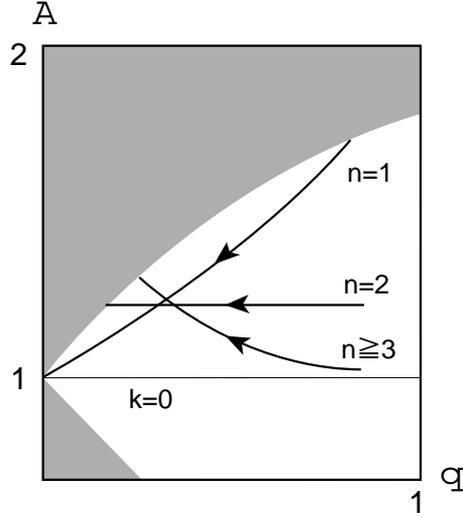


図 8: Mathieu 方程式の不安定・不安定バンドチャート。3 本の実線はポテンシャル $V = (\lambda/4)\phi_0^4(\phi/\phi_0)^{2n}$ のベキ指数 n に対応する係数 (A, q) の時間変化をあらわす。細線は $k = 0$ の場合を対応する。

上式を (4.18) に代入し、 ϵ の次数で各項をまとめると $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ 、 $\mathcal{O}(\epsilon^1)$ の項から

$$\mathcal{O}(\epsilon^0) : Q_{,\tau\tau}^{(0)} + Q^{(0)} = 0, \quad (4.20)$$

$$\mathcal{O}(\epsilon^1) : Q_{,\tau\tau}^{(1)} + Q^{(1)} = - \left(\omega + \frac{\tau_0}{\tau} \sin(2\tau) \right) Q^{(0)}, \quad (4.21)$$

が得られる。(4.20) の解は

$$Q^{(0)} = \mathcal{A}_0 e^{i\tau} + \mathcal{A}_0^* e^{-i\tau}, \quad (4.22)$$

と表せる。振幅 q_0 は複素定数である。これを (4.21) の右辺に代入し $Q^{(1)}$ に対する非斉次解を求める。すると斉次解と同じ振動数をもつ非斉次項から永年項が現れ、任意の初期時刻 $\tilde{\tau}$ に対し $\epsilon(\tau - \tilde{\tau}) \gg 1$ において $Q^{(0)} < Q^{(1)}$ となる。このため有限項で打ち切った近似式は $\epsilon(\tau - \tilde{\tau}) < 1$ でしか適用できない。RG 法を用いると、こうした永年項を振幅 \mathcal{A}_0 の時間依存性にくりこむことで $\epsilon(\tau - \tilde{\tau}) > 1$ においても使える表式が得られる。

RG 法の処方に従って振幅方程式と近似解の表式を求める。(4.20)(4.21) より $\mathcal{O}(\epsilon^1)$ まで

の表式

$$\tilde{Q} = \left[\mathcal{A}_0 - \epsilon \int_{\tilde{\tau}}^{\tau} d\tau' \left\{ \frac{1}{2i} \omega(\tau') \mathcal{A}_0 + \frac{1}{4} \left(\frac{\tau_0}{\tau'} \right) \mathcal{A}_0^* \right\} \right] e^{i\tau} + \epsilon \cdot (\text{Regular terms}) + c.c. \quad (4.23)$$

が求まる。ここでは $(\frac{1}{\eta})$ の次数に対して低次の永年項のみ表した (Regular terms は高次の永年項、高周波の振動項を含む)。 $\tilde{\tau} \rightarrow \mu$ 、 $\mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{A}(\mu)$ とおきかえた後、くりこみ群方程式として以下を得る：

$$0 = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \mu} \quad \text{for} \quad \forall \tau \implies \frac{d\mathcal{A}}{d\mu} + \frac{\epsilon}{2i} \omega \mathcal{A} + \frac{\epsilon}{4} \left(\frac{\tau_0}{\mu} \right) \mathcal{A}^* = 0. \quad (4.24)$$

永年項を消去するため $\mu = \tau$ と等置すると、(4.23)(4.24) より \tilde{Q} の近似解は

$$\tilde{Q} \simeq \mathcal{A}(\tau) e^{i\tau} + \mathcal{A}^*(\tau) e^{-i\tau} ; \quad \frac{d\mathcal{A}}{d\tau} + \frac{1}{2i} \left(\frac{k}{ma} \right)^2 \mathcal{A} + \frac{1}{\tau} \mathcal{A}^* = 0. \quad (4.25)$$

と表すことができる。定義より ϵ 、 ω を元の表式で表した。振幅を $\mathcal{A} = (u + iv)/2$ と表すと (u , v は実数)、 u に対する 2 階微分方程式として

$$u_{,\tau\tau} + \frac{4}{3\tau} u_{,\tau} + \left[\frac{1}{4} \left(\frac{k}{ma} \right)^4 - \frac{2}{3\tau^2} \right] u = 0 \quad (4.26)$$

が得られ、解は Bessel 関数を用いて

$$u = \tau^{-1/6} \mathbf{Z}_{\pm 5/2} \left(\left(\frac{k}{a} \right)^2 \frac{1}{mH} \right) \quad (4.27)$$

と表せる。一方、 v も

$$v = \mp \tau^{-1/6} \mathbf{Z}_{\pm 7/2} \left(\left(\frac{k}{a} \right)^2 \frac{1}{mH} \right) \quad (4.28)$$

となる。Bessel 関数のふるまいより特徴的波長 $\lambda_J = (mH)^{-1/2}$ が存在し、 λ_J より長い波長領域で \tilde{Q} に成長モードが現れる。つまり初期に λ_J より短い波長でも宇宙膨張によって特徴的スケールより長くなり、 \tilde{Q} は成長する。こうしたふるまいは Mathieu 方程式のバンドチャートからも理解できる [42]。長波長極限 ($k \rightarrow 0$) において、 \tilde{Q} の成長モード・減衰モードはそれぞれ

$$\tilde{Q} \propto -a^{3/2} \sin \tau, \quad a^{-3/2} \cos \tau \quad (4.29)$$

とふるまう。

Mukhanov の変数 \tilde{Q} よりゲージ不変量の時間依存性を評価する。(4.12)(4.25) より

$$\Phi \propto \frac{1}{a}(\tilde{Q}_{,\tau}\tilde{\phi}_{,\tau} - \tilde{Q}\tilde{\phi}_{,\tau\tau}) = \frac{u}{a} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\tau}\right) \right]. \quad (4.30)$$

従って (4.27) から長波長極限において

$$\Phi \propto \text{constant}, \quad \tau^{-5/3} = \frac{H}{a} \quad (4.31)$$

を得る。一方、Bardeen パラメーターは (4.13) から

$$\zeta \propto -\frac{1}{\sin \tau + \mathcal{O}(1/\tau)} \left(\frac{\tilde{Q}}{a^{3/2}} \right). \quad (4.32)$$

(4.29) を代入すると、 $k \rightarrow 0$ における \tilde{Q} の成長モード・減衰モードのふるまいより

$$\zeta \xrightarrow{k \rightarrow 0} \text{constant}, \quad -\left(\frac{1}{a^3}\right) \frac{1}{\tan \tau + \mathcal{O}(1/\tau)} \quad (4.33)$$

を得る。減衰モードには周期的に鋭いピークが現れる。スカラー場の振動により、表式 (4.13) の分母 $\dot{\phi}$ がゼロ点を持つことによって生じるふるまいである [43]。こうした特異性は、もともと Bardeen パラメーターの定義 (3.29) に由来するもので Einstein 方程式の線型摂動が破綻することを意味しない。実際には物質場にはスカラー場以外に流体成分も含まれているであろうから、そうした寄与を考えると周期的ピークは現れて来ないと考えられる。減衰モードの特異性を除くと、 ζ , Φ の成長モードは時間的に一定値をとり、3.5節で述べた保存則が満たされている。こうした結果は任意のべき指数 $n \geq 2$ の場合に拡張できる (付録 B.1 参照)。

4.2 流体近似にもとづく再加熱期の宇宙論的摂動

前節で得られた結果を下にして、外場との相互作用がある場合のゆらぎのふるまいを考察する。一般に非線型スカラー場の崩壊過程を考える場合、重力場の影響も考慮しつつ解析するのは非常に困難を伴う。またゆらぎを線型摂動で扱う宇宙論的摂動論の定式でスカラー場モデルを扱うと、ゆらぎに対する反作用が考慮されないため崩壊過程をうまく取り込むことができない。しかしながら振動インフラトン場中のゆらぎのふるまいと完全流体系におけるふるまいを比較するといくつか類似点があることに気付く。そこで、インフラトン場を流体に読み替えて輻射場との相互作用を2成分流体で解析することが可能であるかのように思える。ここでは濱崎・小玉によってなされた解析 [45] を通してそうした扱いの妥当性とパラメーター共鳴の影響について議論する。

4.2.1 完全流体系との比較

べき型ポテンシャル (4.1) で与えられた振動インフラトン場優勢な宇宙と完全流体優勢な宇宙でのゆらぎのふるまいを比較する。状態方程式 $P = w\rho$ に従う完全流体を考える時、(2.2) で与えられる背景 Einstein 方程式よりスケール因子、ハッブルパラメーターは

$$a(t) \propto t^{2/3(1+w)}, \quad H = \frac{2}{3(1+w)} \cdot \frac{1}{t} \quad (4.34)$$

に従う。これと周期平均から求めた振動インフラトン場での近似的ふるまい (4.4) と比べてみると、振動インフラトン場の背景時空は

$$w = \frac{n-1}{n+1} \quad (4.35)$$

とおいた場合の完全流体宇宙と同じ時間依存性をもつ。一方、小玉・濱崎 [43] によるとゲージ不変量 Φ , ζ は以下の発展方程式に従う：

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} + \left(\frac{5+3w}{2}\right) H\Phi &= \frac{3}{2}(1+w)H\zeta, \\ \dot{\zeta} + \frac{2}{3}\left(\frac{k}{aH}\right)^2 \left(\frac{w}{1+w}\right) H\Phi &= 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

ここで $\Phi = \Psi$ を用いた⁶。上式より長波長極限の成長モード・減衰モード

$$\begin{aligned} \Phi &\propto \text{constant}, \quad \frac{H}{a}, \\ \zeta &\propto \text{constant}, \quad \frac{1}{a^3 H} \end{aligned} \quad (4.37)$$

が求まる。振動スカラー場での結果と付き合わせると、Bardeen パラメーターの減衰モードを除くふるまいは一致する。従って長波長モードのふるまいをみる限り、時間平均した振動インフラトン場は状態方程式 $P = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)\rho$ に従う完全流体と区別がつかない。

4.2.2 流体モデルによる再加熱過程

上で述べたことから振動インフラトン場のエネルギー・運動量テンソル $T_{(\phi)}^{\mu\nu}$ は時間平均後、

$$T_{(f)}^{\mu\nu} = (\rho_f + P_f)U_{(f)}^\mu U_{(f)}^\nu + g^{\mu\nu} P_f, \quad P_f = w_f \rho_f \quad (w_f = \frac{n-1}{n+1}) \quad (4.38)$$

⁶[43][45] で使用される Φ は本論文で用いるゲージ不変量 $-\Psi$ を表す。

で表せるエネルギー・運動量テンソルに読み替えることができる。 $U_{(f)}^\mu$ はインフラトン流体の四元速度ベクトルである。こうしたおきかえはべき型ポテンシャルを持った一成分スカラー場において可能である [43]。一般に外場との相互作用がある場合に完全流体として扱えるかどうか不明であるが、ここでは1つの仮定として再加熱過程の間インフラトン場は流体として取り扱う。同様に、インフラトン流体と相互作用する外場（例えばラグランジアン (2.31) で与えられるような χ, ψ -場）もこうした仮定の下では $P_r = \rho_r/3$ に従う輻射流体として扱うことが許されるであろう。

こうした2成分流体系において、再加熱過程を表す相互作用はエネルギー・運動量テンソルを通じたエネルギー流のやり取りとして表せる。輻射流体のエネルギー・運動量テンソルを $T_{(r)}^{\mu\nu}$ とすると、全エネルギー・運動量テンソル

$$T^{\mu\nu} = T_{(f)}^{\mu\nu} + T_{(r)}^{\mu\nu} \quad (4.39)$$

に対する保存則が満足されるようなエネルギー流は

$$\nabla_\nu T_{(f)}^{\mu\nu} = -Q^\mu, \quad \nabla_\nu T_{(r)}^{\mu\nu} = Q^\mu \quad (4.40)$$

で表される。 Q^μ はエネルギー・運動量輸送項と呼ばれる。 Q^μ を通じたエネルギー流よりインフラトン崩壊のプロセスが記述される。 Q^μ は再加熱過程を表すモデルから与えられる流体量の関数である。スカラー場（あるいはフェルミオン場）を流体に置きかえた為、ラグランジアン (2.31) で与えられる再加熱モデルから直接 Q^μ を決めることはできない。従って Q^μ の関数形を決める為には現象論的考察が必要となる。

濱崎・小玉では、Born 近似による摂動論的崩壊プロセスの考察を下にして

$$Q^\mu = U_{(f)}^\mu \cdot Q \quad (4.41)$$

で与えられると仮定した。エネルギー輸送率 Q は、2.3.2節で述べた扱いによると $\Gamma\rho_f$ に比例する項であり、一般には ρ_f の関数と考えられる。さらにパラメーター共鳴による粒子生成の影響も考慮すると、 Q の関数依存性は

$$Q = G(\rho_f, \frac{1}{3}\nabla_\mu U_{(f)}^\mu) \quad (4.42)$$

という形になることが予想される。 $\nabla_\mu U_{(f)}^\mu/3$ はインフラトン場 ϕ が一定な空間超曲面上の膨張率を表し、背景宇宙においてはハッブルパラメーター H に対応するものである。2.3.3節で得た Mathieu 方程式 (2.44)(2.45) のふるまいによると、相互作用するボソン場の各波数モードの共鳴期間は膨張率に強く依存していた。従ってエネルギー輸送率にこうした依

存性を仮定することは自然であると考えられる。与えられた G の値は時間的に変化するものであり、特に共鳴期に大きな値 ($G/H\rho_f \gg 1$) を取ることが期待される。

以上の仮定を下にした再加熱モデルにおいて、背景宇宙のふるまいは以下の発展方程式で表される：

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}(\rho_f + \rho_r), \quad (4.43)$$

$$\dot{\rho}_f + 3H(1 + w_f)\rho_f = -G, \quad (4.44)$$

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = G. \quad (4.45)$$

(背景場を表す添字⁽⁰⁾は省略した。)

4.2.3 Bardeen パラメーターに対する共鳴の影響

(4.43)-(4.45) に従う背景宇宙に対する宇宙論的摂動は流体量にもとづくゲージ不変量を用いて記述される [29]。基本摂動量は Ψ , ζ のメトリック摂動の他に、密度ゆらぎ、速度ゆらぎのそれぞれ成分間の差を表す摂動量 (記号 Y , Z で表される) の4つから成る。この系における Bardeen パラメーターの時間発展は以下のような式で表される：

$$\dot{\zeta} = -\frac{2}{3} \left(\frac{k}{aH} \right)^2 \frac{1}{w+1} \frac{1}{h_{tot}} \left(w_f h_f + \frac{1}{3} h_f \right) H\Psi - \frac{4}{3} \frac{1+w_f}{(1+w)^2} \left(w_f - \frac{1}{3} \right) HY. \quad (4.46)$$

ただし、

$$w = \frac{P_f + P_r}{\rho_f + \rho_r}, \quad h_{tot} = h_f + h_r = (P_f + \rho_f) + (P_r + \rho_r). \quad (4.47)$$

上式は、スカラー場のシステムでは (3.36) に対応する。(4.46) では、波数依存性が陽に現れない右辺第2項が長波長における ζ に最も影響を与えられと考えられる。ゲージ不変量 Y は以下で定義されている：

$$Y = \frac{\rho_f \rho_r}{(\rho_f + \rho_r)^2} \cdot S_{fr} ; \quad S_{fr} = \frac{\Delta_{cf}}{1+w_f} - \frac{\Delta_{cr}}{1+1/3}. \quad (4.48)$$

Δ_{cf} , Δ_{cr} は物質場全系に対し静止系からみた、それぞれインフラトン流体、輻射流体の相対的なエネルギー密度のゆらぎを表す。 S_{fr} はエントロピーのゆらぎに対応する。Bardeen パラメーターの変化はエントロピーゆらぎが大きくなる時に現れる。この摂動を成長させる源はエネルギー輸送率 Q に対する摂動 δQ である。前節で仮定した Q の関数依存性 (4.42) より δQ は相対密度ゆらぎ Δ_{cf} 、速度ゆらぎ V_f に比例する項が現れる。しかしな

がらこれらを基本摂動量で書き表すと、 Y を除くすべての項に抑制因子 $(\frac{k}{aH})^2$ が現れ、超地平線スケールのゆらぎに対する δQ の影響は抑制されてしまうことが明らかになった。

濱崎・小玉の解析ではエネルギー輸送率の時間変化を適当に考慮し、発展方程式より基本摂動量の成長の上限をオーダー評価した。結果として、再加熱過程を通して変化する Bardeen パラメーターの上限値にも波数依存性の現れることが明らかになった。即ち長い波長をもったゆらぎに対しては、2成分流体系でも Bardeen パラメーターは時間的一定値を保つ。晴れ上がり時に地平線スケールの波長を持つゆらぎが再加熱時にこうした保存則を満たすような長い波長であったとすると、晴れ上がり時の温度から再加熱時のエネルギースケールを見積もることができる。彼らの評価によると再加熱終了時の温度が $T_{RH} \propto \rho_r^{1/4} \sim 10^2 \text{ GeV}$ という低い温度でも Bardeen パラメーターが変化しないという結果を得た。一般に、過去にさかのぼるほど宇宙は高温になりゆらぎの波長は地平線に比べてどんどん長くなる。従ってより現実的な再加熱過程 ($T_{RH} \geq 10^9 \text{ GeV}$) だと、波長はより長くなるために Bardeen パラメーターの保存則はよりよい精度で成り立つことになる。こうした結果より彼らは、パラメーター共鳴の効果を考えても再加熱による構造形成シナリオへの影響はないと結論づけた。

濱崎・小玉の結論は2つの大きな仮定に基づいている。1つは、スカラー場の流体的扱いである。振動周期で時間平均をとる為、完全流体に置き換えたモデルにはスカラー場の振動による速い時間変化は現れない。もう1つの仮定は、輻射場との相互作用を (4.40) で表されるとし Q^μ を現象論的に与える点にある。ラグランジアン (2.31) による再加熱モデルでは、スカラー場同士の相互作用は (4.40) という形には表せない。2.3.3節で述べたパラメーター共鳴の効果は、ラグランジアン (2.31) で与えられた表式から得られた結果である。インフラトン場のコヒーレントな振動性からボソン場のモード方程式は Mathieu 方程式に帰着され、不安定性の現れからモード関数の成長が生じた。これに対し彼らの扱いは、2.3.2節で述べた現象論的記述にもとづく再加熱過程の評価と基本的に変わらない。こうした扱いではパラメーター共鳴の効果を拾うことができないことは前に述べた通りである。彼らの解析ではインフラトン崩壊プロセスが考慮されているため、Born 近似で記述される再加熱過程の場合には妥当な結果だと思われる。しかしながら振動スカラー場の相互作用に対する考察は十分とはいえ、共鳴による再加熱過程に対しゆらぎの進化は断熱的であると結論づけることはできない。

パラメーター共鳴がゆらぎに対して影響を与えるかどうかを明らかにするためには、直接スカラー場のモデルを用いた解析が必要不可欠である。次章では2成分スカラー場の宇宙モデルにおいて宇宙論的摂動の解析を行い、再加熱期の Bardeen パラメーターのふるまいを考察する。次章の内容は副論文 [46] でなされた解析である。

5 2成分スカラー場モデルによる再加熱期の宇宙論的摂動

本章では副論文でなされた研究 [46] に基づき、相互作用する 2 成分スカラー場モデルを用いて宇宙論的摂動の解析を行い、再加熱期のゆらぎの進化を調べる。これまでの再加熱期における宇宙論的摂動の研究では、振動インフラトンのダイナミクスによって生じる再加熱過程が考察されていなかった。前章で紹介した濱崎・小玉の解析で初めてそうした扱いが議論されたが、彼らの得た結論は仮定に依るところが大きく共鳴の効果に対する考察は十分ではない。

ここでは共鳴主導の再加熱期における摂動解のふるまいに焦点をあて、こうした時期のゆらぎが断熱的か否かを明らかにする。構造形成におけるゆらぎについては地平線以上の大スケールのゆらぎが特に重要である。本章ではゆらぎの進化を長波長極限のモードに限定して解析する。摂動の発展方程式の性質より、長波長極限における摂動厳密解がわかり背景場の量を用いて書き表せることがわかる。これより再加熱時の摂動解のふるまいが背景場から調べることが可能となる。そこでくりこみ群的アプローチによる近似解法を適用し、再加熱時の背景場の近似解を構成する。これより摂動解のふるまいを求めることで Bardeen パラメーターの変化から共鳴の影響を調べる。

5.1 モデルと基礎方程式

ここで考える宇宙モデルはインフレーション後を想定して一様・等方かつ平坦な宇宙とする。再加熱期のゆらぎの進化が断熱的な否かを調べる時、最も注意しなければならない現象が振動インフラトンのダイナミクスが引き起こすパラメーター共鳴の効果である。こうした効果はボソン場との相互作用によって引き起こされることを考えると、再加熱の最も単純なモデルとして 2 成分のスカラー場モデルを用いて宇宙論的摂動の解析をすることが本質的である。ただし、スカラー場モデルを用いて再加熱時のゆらぎを解析する際に注意しなければいけないことは、ゆらぎは線型として扱うためゆらぎ自身の背景場への影響(反作用)を取り入れられない点である。再加熱過程はインフラトン崩壊を扱うプロセスであるからこのモデルを用いて再加熱期全般にわたるゆらぎの進化を解析することは出来ない。しかしながら共鳴以降に引き続いて起こるインフラトン崩壊の現象についての宇宙論的摂動はこれまでの研究から断熱的であることがわかっており、Bardeen パラメーターは時間的に一定値となる [35][38]。従って共鳴が主導的におこる期間を特に抽出した解析が重要となり、ゆらぎの進化を調べるために 2 成分スカラー場モデルを用いることは深い意味をもつ。

2成分スカラー場モデルの満たす背景 Einstein 方程式は以下のように表される：

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \left\{ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \dot{\chi}^2 + V(\phi, \chi) \right\}, \quad (5.1)$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa}{2} (\dot{\phi}^2 + \dot{\chi}^2), \quad (5.2)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0, \quad (5.3)$$

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} + V_{,\chi} = 0. \quad (5.4)$$

ϕ はインフラトン場を、 χ はボソン場を表す。ボソン場に対する相互作用の影響はポテンシャル $V(\phi, \chi)$ を通じて引き起こされる。取り扱いの簡単化のためここではボソン場を質量ゼロとして扱い、共鳴による再加熱過程の研究において典型的なポテンシャル

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{2} g^2 \phi^2 \chi^2. \quad (5.5)$$

で与えられる再加熱モデルを解析する。このモデルに対する再加熱の研究から、メトリック摂動を無視したボソン場の長波長ゆらぎには共鳴の効果が現れることが知られている。(文献 [14][18] もしくは 2.3.3節参照)。

こうしたスカラー場モデルに対して宇宙論的摂動を解析する際、Mukhanov の変数と呼ばれるゲージ不変量を用いると発展方程式が単純化される。2成分スカラー場の場合、Mukhanov の変数は

$$Q_\phi = \delta\phi + \frac{\dot{\phi}}{H} \Psi, \quad Q_\chi = \delta\chi + \frac{\dot{\chi}}{H} \Psi \quad (5.6)$$

と与えられる。 $\delta\phi$, $\delta\chi$ はスカラー場のゆらぎであり、 Ψ はゲージ不変ポテンシャルと呼ばれるメトリック摂動に対応する ((3.17) 参照)。摂動の力学的自由度は全てこの2変数に帰着し、全てのゲージ不変量は Mukhanov の変数を用いて書き表すことが出来る。3次元空間の曲率ゆらぎを表す Bardeen パラメーター ζ は

$$\zeta = \frac{H}{\dot{\phi}^2 + \dot{\chi}^2} (\dot{\phi} Q_\phi + \dot{\chi} Q_\chi) \quad (5.7)$$

と書ける。Mukhanov の変数が従う発展方程式は摂動 Einstein 方程式 (3.24)-(3.27) および関係 $\Phi = \Psi$ から導き出される：

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} Q_\phi \\ Q_\chi \end{pmatrix} + 3H \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Q_\phi \\ Q_\chi \end{pmatrix} + \mathbf{M}_k(t) \begin{pmatrix} Q_\phi \\ Q_\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

ただし 2×2 行列 M_k は

$$\{M_k\}_{ij} = \left(\frac{k}{a}\right)^2 \delta_{ij} + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} - \frac{\kappa}{a^3} \frac{d}{dt} \left(\frac{a^3}{H} \dot{\phi}_i \dot{\phi}_j \right) \quad (\phi_1 = \phi, \phi_2 = \chi) \quad (5.9)$$

で与えられる（この表式は一般の n 成分スカラー場の場合に拡張できることが知られている [47]）。

5.2 長波長極限の摂動解

我々が問題としているのは構造形成に関するゆらぎのふるまいである。再加熱期におけるこうしたゆらぎの波長は超地平線スケール ($k/a \ll H$) におよぶ。それゆえ構造形成にとって極限 $k \rightarrow 0$ のゆらぎの進化を知ることは重要である。こうした長波長極限に話を限ると 1 成分スカラー場の場合には厳密解の存在が知られており、背景量を用いて摂動解を書き表すことができる。ここでは 2 成分スカラー場にもそうした厳密解が存在することを示し、摂動解の性質について議論する。

5.2.1 1 成分スカラー場における厳密解

まず、1 成分スカラー場の場合 ($\chi = 0$) について考えてみる。Mukhanov 方程式 (5.8) は、背景場の方程式を使うことにより次のような形に帰着できることがわかる [48]：

$$\frac{H}{a^3 \dot{\phi}} \frac{d}{dt} \left[\frac{a^3 \dot{\phi}^2}{H^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{H}{\dot{\phi}} Q_\phi \right) \right] + \left(\frac{k}{a} \right)^2 Q_\phi = 0. \quad (5.10)$$

これより極限 $k \rightarrow 0$ にて解

$$Q_\phi = c_1 \frac{\dot{\phi}}{H} + c_2 \frac{\dot{\phi}}{H} \int^t dt \frac{H^2}{a^3 \dot{\phi}^2}, \quad (5.11)$$

をもつことがわかる。この解は次の方法でも導くことができる。新たに変数 $\alpha \equiv \log a$ を導入し、 α を時間パラメーターとして背景場方程式を書き直す。 $\chi = 0$ のもとで (5.3)(5.2) より任意のポテンシャル $V(\phi)$ に対し

$$\phi_{,\alpha\alpha} + \left(3 + \frac{H_{,\alpha}}{H} \right) \phi_{,\alpha} + \frac{V_{,\phi}}{H^2} = 0, \quad (5.12)$$

$$\frac{H_{,\alpha}}{H} = -\frac{\kappa}{2} \phi_{,\alpha}^2. \quad (5.13)$$

を得る。(5.12)をさらに α で微分して(5.12)(5.13)を用いる。すると

$$(\phi_\alpha)_{,\alpha\alpha} + \left(3 + \frac{H_\alpha}{H}\right) (\phi_\alpha)_{,\alpha} + \frac{1}{H^2} \left[V_{,\phi\phi} - \kappa H^2 \left\{ 2\phi_{\alpha\alpha}\phi_\alpha + \left(3 + \frac{H_\alpha}{H}\right) \phi_\alpha^2 \right\} \right] \phi_\alpha = 0 \quad (5.14)$$

という表式が得られる。第3項は次のようにまとめることができる：

$$\frac{\phi_\alpha}{H^2} \left[V_{,\phi\phi} - \kappa H^2 \left\{ 2\phi_{\alpha\alpha}\phi_\alpha + \left(3 + \frac{H_\alpha}{H}\right) \phi_\alpha^2 \right\} \right] = \frac{\phi_\alpha}{H^2} \left[V_{,\phi\phi} - \frac{\kappa}{a^3} \frac{d}{dt} \left(\frac{a^3}{H} \dot{\phi}^2 \right) \right] \quad (5.15)$$

最後の表式を用いて $\phi_\alpha \rightarrow Q_\phi$ というおきかえを行なうと長波長極限の Mukhanov 方程式

$$(Q_\phi)_{,\alpha\alpha} + \left(3 + \frac{H_\alpha}{H}\right) (Q_\phi)_{,\alpha} + \left[V_{,\phi\phi} - \frac{\kappa}{a^3} \frac{d}{dt} \left(\frac{a^3}{H} \dot{\phi}^2 \right) \right] \frac{Q_\phi}{H^2} = 0 \quad (5.16)$$

に一致する表式が得られる。従って背景量 ϕ を時間パラメーター α で微分したものは Mukhanov 方程式の独立解となる。残りの独立解はロンスキアン条件を用いて構成できるため、一般解

$$Q_\phi = c_1 \phi_{,\alpha} + c_2 \phi_{,\alpha} \int^\alpha \frac{d\alpha}{(\phi_\alpha)^2 H e^{3\alpha}} \quad (5.17)$$

が求まる。これは(5.11)に等しい。

具体的にポテンシャル $V = m^2 \phi^2/2$ で与えられる場合を考えてみる。(5.1)(5.3)よりスカラー場 ϕ が振動する時期($\phi \lesssim M_{pl}$)における背景近似解は

$$\phi \simeq \frac{\phi_0}{a^{3/2}} \cos(mt), \quad H \simeq \frac{2}{3t} \propto a^{-3/2} \quad (5.18)$$

という表式で与えられる(4.1.1節参照)。これを(5.11)に代入し右辺第2項に対しては速い振動部分のみ積分評価をする。係数 c_1, c_2 に比例する項からそれぞれ

$$Q_\phi \propto -\sin(mt), \quad \frac{\cos(mt)}{a^3} \quad (5.19)$$

というふるまいを得る。これは4.1.3節で得た長波長極限のふるまい(4.29)と一致しており正しい評価を与えることがわかる。長波長厳密解を用いると Bardeen パラメーターは

$$\zeta = \frac{H}{\phi} = c_1 + c_2 \int^\alpha \frac{d\alpha}{(\phi_\alpha)^2 H e^{3\alpha}} \quad (5.20)$$

と表される。パラメーター微分で表される解 ϕ_α は保存則を満足する断熱モードに対応している。一方、係数 c_2 に比例する項から周期的な発散を伴う減衰モードが得られる((4.33)参照)。

5.2.2 2成分スカラー場の厳密解

2成分スカラー場の場合にも、Mukhanov 方程式の厳密解はパラメーター微分により以下のようにして構成できる。まず背景スカラー場の解が

$$\phi = \phi(\alpha, C), \quad \chi = \chi(\alpha, C) \quad (5.21)$$

のように表されたとする。 $\alpha = \log a$ であり、 C は適当な積分定数の組み合わせで与えられるパラメーターとする。 α, C は配位空間 (ϕ, χ) 上にある背景解のトラジェクトリを特徴づけるパラメーターである。即ち α は時間パラメーターの役割をし、配位空間上のトラジェクトリの時間発展を追うことができる。一方、 C はトラジェクトリを区別するパラメーターで、各軌道毎に C は一定値をとる。解の表現 (5.21) を用いると一成分スカラー場と同様、背景場方程式 (5.3)(5.4) のパラメーターによる微分から $(d\phi/d\alpha, d\chi/d\alpha)$ 、 $(d\phi/dC, d\chi/dC)$ が $k=0$ とおいた時の Mukhanov 方程式を満足する。この証明は付録 C.1 に示されている。それゆえこれら接ベクトルは長波長極限における (5.8) の独立解となる。

(5.8) は2階の連立微分方程式であるから独立な解は全部で4つある。残り2つの解は定数変化法（あるいはロンスキアン条件）から得られる。ここで 2×2 行列 \mathbf{X} の各要素を次のように定義する：

$$\mathbf{X}_{11} = \frac{d\phi}{d\alpha}, \quad \mathbf{X}_{12} = \frac{d\phi}{dC}, \quad \mathbf{X}_{21} = \frac{d\chi}{d\alpha}, \quad \mathbf{X}_{22} = \frac{d\chi}{dC}, \quad (5.22)$$

この時、 \mathbf{X} は Mukhanov 方程式の解として以下を満たす：

$$\mathbf{X}_{,\alpha\alpha} + \left(3 + \frac{H_\alpha}{H}\right) \mathbf{X}_{,\alpha} + M_0 \mathbf{X} = 0 \quad (5.23)$$

M_0 は (5.9) における極限 $k \rightarrow 0$ を表す。定数変化法によれば、残りの独立解を行列 $\tilde{\mathbf{X}}$ と記すと $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{C}(\alpha)$ とおけばよい。上式に代入すると \mathbf{C} は

$$\mathbf{X} \mathbf{C}_{,\alpha\alpha} + \left\{ 2\mathbf{X}_{,\alpha} + \left(3 + \frac{H_{,\alpha}}{H}\right) \mathbf{X} \right\} \mathbf{C}_{,\alpha} = 0 \quad (5.24)$$

という式に従う。ここで付録 C.2節で示された関係

$$(\mathbf{X}^{-1})_{,\alpha} (\mathbf{X}^{-1})^T = (\mathbf{X}^{-1}) (\mathbf{X}^{-1})_{,\alpha}^T \quad (5.25)$$

を用いると解として

$$\mathbf{C}_{,\alpha} = \frac{1}{H e^{3\alpha}} \mathbf{X}^{-1} (\mathbf{X}^{-1})_{,\alpha}^T \quad (5.26)$$

が得られる。以上より一般解は行列 \mathbf{X} を用いて次のように表すことができる：

$$\begin{pmatrix} Q_\phi \\ Q_\chi \end{pmatrix} = \mathbf{X}_{ij} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \mathbf{X} \int \frac{dt}{a^3} \mathbf{X}^{-1} (\mathbf{X}^{-1})^T \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

ここで $(^T)$ は行列の転置、 $c_j (j = 1, \dots, 4)$ は任意定数を表す。

(5.27) で表される解のうち、係数 c_1 に比例する解（背景場を時間パラメーター α で微分して得られる解）は Bardeen パラメーター (5.7) を一定値に保つ断熱モードである。残りの独立解は一般に Bardeen パラメーターを変化させる。これらのふるまいは背景場に対する解の表式が具体的に求まらなるとわからない非自明な解である。共鳴のおこる再加熱期においてゆらぎが断熱優勢になるか否かは、こうした解のふるまいを知ることが重要となる。

5.3 再加熱期の背景場ダイナミクス

長波長極限に対する発展方程式の考察から背景量を用いて厳密解 (5.27) を書き下すことができた。しかしながら断熱モード以外の独立解は非自明な解であり、一般に背景場の具体的表式が必要になる。ここでは再加熱期におけるゆらぎの進化を理解するために背景場に対するふるまいを考察し、近似を用いて背景解の具体的表式を求める。

再加熱期におけるゆらぎのふるまいに重要だと思われるものは背景場同士の非線型な相互作用の影響である。パラメーター共鳴による再加熱過程は振動インフラトン場が優勢な時に起こる現象であった。このようなパラメーター共鳴の効果は背景スカラー場にも起こりうると期待される。そこで次のような条件を仮定する：

$$\phi, \chi \lesssim M_{pl} \quad (5.28)$$

$$g^2 \chi^2 \lesssim m^2. \quad (5.29)$$

(5.28) はスカラー場が振動的ふるまいをする条件であり、(5.29) はポテンシャル $V(\phi, \chi)$ のエネルギーがインフラトン場で満たされている状況を表している。

こうした条件のもとで背景場の方程式に現れるふるまいを予想する。条件 (5.29) により発展方程式 (5.1)-(5.4) を ϕ, χ についてそれぞれ分離して解くことができる。条件 (5.28) のもとで、(5.1)(5.3) からインフラトン場のふるまい

$$\phi \simeq \tilde{\phi}(t) \cos(mt), \quad \tilde{\phi} \propto \frac{1}{t} \quad (5.30)$$

を得る。これを (5.4) に代入すると χ -場の方程式は以下に帰着される：

$$(a^{3/2}\chi)'' + [A + 2q \cos(2\tau)](a^{3/2}\chi) = 0 ; a \propto \tau^{2/3}, \quad (\tau = mt) \quad (5.31)$$

ここで $(\prime) = d/d\tau$ を表し、係数 A, q は次の時間依存性

$$A = 2q = \frac{g^2}{2m^2} \tilde{\phi}^2(\tau) \quad (5.32)$$

を持つ関数である。(5.31) は Mathieu 方程式であり、係数 A, q によって解の安定・不安定性が特徴づけられる。ここで与えられた係数の変化を Mathieu 方程式の安定・不安定バンドチャートに投影すると $1/3 \leq q \leq 1$ となる領域に不安定性が存在する (図 9)。従って背景場 χ 自身の振幅が共鳴により成長することが予想される (2.3.3節で考えたボソン場のモード方程式 (2.44) と比較すると質量ゼロかつ極限 $k \rightarrow 0$ の場合と一致する)。

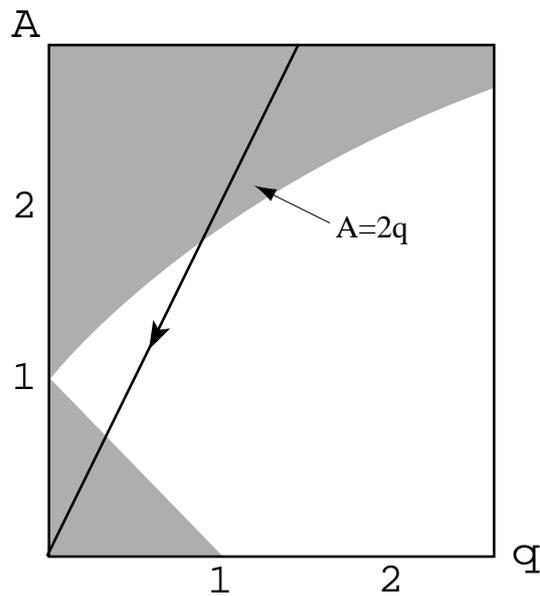


図 9: Mathieu 方程式の不安定・不安定バンドチャート。実線は背景 χ -場の方程式がもつ係数 (A, q) の時間変化を表す。不安定領域 (白色) を横切ることで χ 場の振幅に成長が現れる。

長波長摂動に対する解から Bardeen パラメーターの時間変化を調べるには (5.21) で与えられるような解の具体的表現を得る必要がある。そのため、上で述べた背景解の様子を記

述する精度の良い近似解を構成することを試みる。近似解を構成する手段としてここではくりこみ群的手法と呼ばれる微分方程式の漸近解法（RG法）を用いることにする。RG法は前章4.1.3節において Mukhanov 方程式の解析に用いたが、今のような非線型な微分方程式のふるまいを求める場合にも有効な手段である。RG法についての詳細は付録Aにて解説されている。

RG法の出発点は微小パラメーターを用いた方程式の摂動展開である。RG法適用のため、ここで一旦次の無次元量を導入する：

$$\tau = mt, \quad h = \frac{H}{m}, \quad x = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{\phi}{M_{pl}}, \quad y = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{\chi}{M_{pl}}, \quad \lambda = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{gM_{pl}}{m} \right)^2 \quad (5.33)$$

これらを用いて条件(5.28)(5.29)を書き表すと、

$$\begin{aligned} x, y &\lesssim 1 \\ \lambda y^2 &\lesssim 1 \end{aligned}$$

が得られる。これより場の振幅の大きさで表されるオーダーから

$$x, y \sim \mathcal{O}(\epsilon) < 1 \quad (5.34)$$

を満たす微小パラメーター ϵ が導入できる。一方(5.29)に対応する条件は結合定数 λ の大きさを決める。非線型相互作用の影響を考慮すると結合定数は小さくないと考えるべきである。ここでは(5.29)が満足されるように

$$\tilde{\lambda} \equiv \epsilon \lambda \sim \mathcal{O}(1) \quad (5.35)$$

という大きさを設定する。微小パラメーターにより背景量を以下のように展開する：

$$\begin{aligned} x &= \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots, \\ y &= \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 + \dots, \\ h &= \epsilon h_1 + \epsilon^2 h_2 + \dots. \end{aligned} \quad (5.36)$$

背景方程式(5.1)-(5.4)にこの手法を適用する上でもう一つ重要な操作がある。 χ -場 (y) に対して質量項 $\omega^2 y$ を挿入することである。 $\omega^2 = 1 + \epsilon\sigma$ とおき、計算の最後に極限 $\epsilon\sigma \rightarrow -1$ をとる。こうした操作は、 χ -場に現れるパラメーター共鳴の効果を取り出すのに必要なことが結果よりわかる。

RG法の背景方程式への適用は付録B.2に記されている。最終的な結果として $\mathcal{O}(\epsilon)$ までの解の表式を表すと

$$x = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{\phi}{M_{pl}} \simeq h \cos \Theta \cos(\tau + \theta), \quad y = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{\chi}{M_{pl}} \simeq h \sin \Theta \cos(\tau + \psi), \quad (5.37)$$

となる。ここで ϵh_1 を h にておきかえた。表式に現れる変数 h, Θ, θ, ψ は時間依存性を持ち、くりこみ群方程式と呼ばれる条件式(B.15)-(B.18)より決まる関数である。こうした関数は初期条件に対するくりこみの結果として与えられ、速い振動に対してゆっくりとした時間変化を記述する。

ここでは解析を簡単にするため、さらに $\chi \ll \phi$ ($\Theta \ll 1$)という条件を課すことにし、以後 $\Theta \ll 1$ の状況に限定して議論を進める。この時、(B.17)より

$$\theta' \simeq 0 \quad (5.38)$$

という式を得る。従って一般性を失うことなく以後 $\theta = 0$ とおくことができる ($\psi = \frac{\gamma}{2}$)。一方、(B.15)(B.16)(B.18)からは

$$\Theta' \simeq \frac{1}{2} q(\tau) \sin \gamma \cdot \Theta, \quad (5.39)$$

$$\gamma' \simeq -1 + q(\tau)(2 + \cos \gamma), \quad (5.40)$$

$$h' = -\frac{3}{2} h^2, \quad (5.41)$$

という方程式が得られる。ここで時間依存するパラメーターとして

$$q(\tau) = \frac{1}{4} \lambda h^2. \quad (5.42)$$

を定義した。(5.41)より $h \propto 1/\tau$ となることから $q(\tau)$ は時間的に減少する関数である。

(5.39)(5.40)のふるまいは $u = \Theta \cos \frac{\gamma}{2}$, $v = \Theta \sin \frac{\gamma}{2}$ という変数を導入すると理解しやすい。 u, v は以下の式に従う：

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 - q \\ 3q - 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (5.43)$$

(5.43)の右辺に現れる行列の固有値は、 $1/3 \leq q \leq 1$ の時に実数になることがわかる。従ってこの間、 u, v の振幅 Θ に成長モードが現れる。ここで現れたパラメーター q はMathieu方程式(5.31)の係数 q と一致していることがわかる。背景解(5.37)は $\Theta \ll 1$ において

$$\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{\phi}{M_{pl}} \simeq h \cos \tau, \quad \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{\chi}{M_{pl}} \simeq h \Theta \cos(\tau + \gamma/2) \quad (5.44)$$

と表せることから、 Θ の成長はパラメーター共鳴の結果による振幅 χ の増大として理解できる。パラメーター $q(\tau)$ が $1/3$ より小さくなると Θ は一定値に近づき、 χ -場の振幅は宇宙膨張 (h) によって次第に減衰していく。

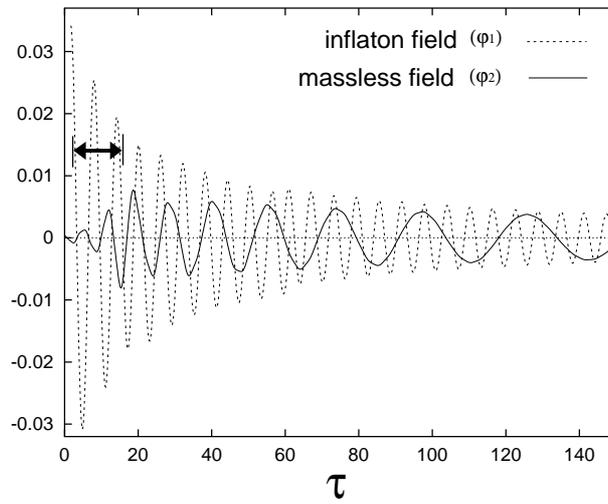


図 10: 数値計算による背景場 ϕ , χ の時間発展。破線と実線はそれぞれ無次元量 x , y で定義されたインフラトン、質量ゼロのスカラー場の振幅変化を表す。パラメーター共鳴により、矢印で示された区間において振幅 y は成長する。初期条件はくりこみ群法で得られた近似解 (5.37) の表式 $\tau = 0$ において、 $\lambda = 4000$, $h = 0.035$, $\Theta = 0.01$, $\gamma = 0.4$, $\theta = 0.0$ というパラメーターを選んだ。

背景場の方程式 (5.1)(5.3)(5.4) を実際に数値的に解くと、図 10 に表されるようなふるまいを得る。矢印で示される短い期間において実線で記された χ -場の振幅は増大している。この矢印の示す期間が $1/3 \leq q \leq 1$ に対応している。

くりこみ群方程式から共鳴期間における振幅 χ の増大率を評価してみる。(5.39) より、

$$\Theta \simeq \Theta_0 \exp \left[\frac{1}{2} \int_{\tau_i}^{\tau} d\tau' q \sin \gamma \right] \quad (5.45)$$

を得る。この表式を用いて共鳴期間中の変化の上限は以下のように表せる：

$$\frac{\Theta(\tau_f)}{\Theta(\tau_i)} \lesssim \exp(c_* \sqrt{\lambda}); \quad c_* = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \simeq 0.07, \quad (5.46)$$

ここで $q(\tau_f) = 1/3$, $q(\tau_i) = 1$ という関係を用いた。この評価は共鳴期間を通して $\Theta \ll 1$ が満足される状況下で有効である。(5.46) は共鳴による振幅増大が非線型カップリング λ の大きさに強く依存していることを表している。

5.4 Bardeen パラメーターのふるまい

RG 法によって得られた背景近似解を使うことによって長波長極限の一般解 (5.27) よりメトリック摂動 ζ のふるまいがわかる。摂動の独立解をそれぞれ評価するうえでパラメーター C の所在は重要である。 $\chi \ll \phi$ における背景解のふるまいはくりこみ群方程式 (5.39)-(5.41) により表される。このうち (5.39)(5.40) を解くとそれぞれ γ , Θ の初期値に対応する 2 つの積分定数を得る。 γ は共鳴期間 ($1/3 \leq q \leq 1$) において一定値に近づくことがわかる。断熱的な取り扱いとして q を定数とみなすと (5.40) より $\tau \gg 1$ において

$$\cos \gamma \rightarrow \frac{1-2q}{q} \quad (5.47)$$

という初期値に依らないふるまいを得る。これより背景解のトラジェクトリを特徴づけるパラメーター C は、共鳴期間において Θ の初期値 Θ_0 とみなすことができる。(5.41) の変数 h に含まれる積分定数は時間パラメーターをずらすもので C とは独立なパラメーターになる。

パラメーター C の同定により摂動解の評価が可能になる。表式 (5.27) の係数 c_1 , c_2 に比例する項からそれぞれ以下を得る：

$$\begin{pmatrix} Q_\phi^{(ad)} \\ Q_\chi^{ad} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{,\alpha} \\ \chi_{,\alpha} \end{pmatrix} \simeq -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} M_{pl} \begin{pmatrix} \cos \Theta \cdot \sin \tau \\ \sin \Theta \cdot \sin(\tau + \frac{\gamma}{2}) \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

$$\begin{pmatrix} Q_\phi^{(iso)} \\ Q_\chi^{(iso)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{,C} \\ \chi_{,C} \end{pmatrix} \simeq \sqrt{\frac{3}{4\pi}} M_{pl} \cdot (h\Theta_{,C}) \begin{pmatrix} -\sin \Theta \cdot \cos \tau \\ \cos \Theta \cdot \cos(\tau + \frac{\gamma}{2}) \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

ここで

$$\Theta_{,C} = \exp \left[\frac{1}{2} \int^\tau d\tau' q \sin \gamma \right] \quad (5.50)$$

である。独立解 (5.48) は ζ を一定値に保つ断熱モードである。非断熱的な摂動解 (5.49) に $(h\Theta_{,C})$ という増幅因子が現れていることは重要である。(5.48)(5.49) より行列 \mathbf{X} を構成し残りの解、係数 c_3 , c_4 に比例する独立解を評価する。積分の評価はこれまでと同じよう

に断熱的に扱う。即ち、ゆっくり時間変化する変数 (γ, Θ, h) は速い振動に比べて定数とみなす。これより正則な解の表式として

$$\begin{pmatrix} Q_\phi \\ Q_\chi \end{pmatrix}_3 \simeq \sqrt{\frac{3}{4\pi}} M_{pl} \begin{pmatrix} \cos \Theta \cdot \frac{\cos \tau}{e^{3\alpha}} \\ \sin \Theta \cdot \frac{\cos(\tau + \frac{\gamma}{2})}{e^{3\alpha}} \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

及び

$$\begin{pmatrix} Q_\phi \\ Q_\chi \end{pmatrix}_4 \simeq \sqrt{\frac{3}{4\pi}} M_{pl} \begin{pmatrix} 1 \\ h\Theta, C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \Theta \cdot \frac{\sin \tau}{e^{3\alpha}} \\ \cos \Theta \cdot \frac{\sin(\tau + \frac{\gamma}{2})}{e^{3\alpha}} \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

が求まる。(5.51)(5.52) はそれぞれ係数 c_3, c_4 に比例する独立解を表す。積分評価の結果より、(5.51) は $Q_{\phi, \chi}^{(ad)}$ 、(5.52) は $Q_{\phi, \chi}^{(iso)}$ に対する減衰モードの摂動に対応していると考えられる。

評価の妥当性をみるため、 $\chi = 0$ ($\Theta = 0$) の場合のふるまいを調べる。 Q_ϕ に対する(5.49)(5.52) からの寄与はない。従って係数 c_1, c_3 に比例する解から

$$Q_\phi \propto -\sin \tau, \quad \frac{\cos \tau}{e^{3\alpha}} \quad (5.53)$$

を得る。これは一成分スカラー場の場合に得られたふるまいと一致する ((4.29) または (5.19) 参照)。一方、 Q_χ のふるまいは (5.49)(5.52) から得られ、

$$Q_\chi \propto (h\Theta, C) \cdot \cos(\tau + \frac{\gamma}{2}), \quad (\frac{1}{h\Theta, C}) \cdot \frac{\sin(\tau + \frac{\gamma}{2})}{e^{3\alpha}} \quad (5.54)$$

と表される。このふるまいは Mukhanov 方程式から理解できる。 $\chi = 0$ のとき方程式 (5.8) は互いに分離するため、 Q_χ は

$$\ddot{Q}_\chi + 3H\dot{Q}_\chi + \left[\left(\frac{k}{a} \right)^2 + g^2 \phi^2 \right] Q_\chi = 0 \quad (5.55)$$

という方程式に従う。これはメトリック摂動を考慮しない場合の χ -場のモード方程式と一致する。インフラトン場の振動性 (5.30) を考慮すると上式は

$$(a^{3/2} Q_\chi)'' + [A_k + 2q \cos 2\tau] (a^{3/2} Q_\chi) = 0 \quad (5.56)$$

という Mathieu 方程式に帰着し、係数 A, q は

$$A = \left(\frac{k}{ma} \right)^2 + 2q, \quad q = \frac{g^2 \bar{\phi}}{4m^2} \propto \tau^{-2} \quad (5.57)$$

と与えられる。従って極限 $k \rightarrow 0$ にて (5.31) と比較すると背景 χ -場と同様の不安定性が現れることを表している。これは (5.54) で表されたふるまいと一致する。

以上の評価より、ゆらぎのふるまいを支配するのは断熱モード $Q_{\phi,\chi}^{(ad)}$ と増幅因子をもつ非断熱モード $Q_{\phi,\chi}^{(iso)}$ であることがわかる。再加熱期における共鳴の効果から、非断熱モードの摂動にその影響が現れたことは重要な結果であり注目に値する。そこで独立解 $Q_{\phi,\chi}^{(iso)}$ に注目し、Bardeen パラメーターのふるまいをみることにしよう。(5.49) を (5.7) に代入すると以下が得られる：

$$\zeta^{iso} \simeq h\Theta_{,C} \sin \Theta \cos \Theta \cdot \frac{\sin \tau \cos \tau - \sin(\tau + \frac{\gamma}{2}) \cos(\tau + \frac{\gamma}{2})}{\cos^2 \Theta \sin^2 \tau + \sin^2 \Theta \sin^2(\tau + \frac{\gamma}{2})} \quad (5.58)$$

ζ^{iso} は、1成分スカラー場の場合にも現れた周期的な鋭いピークを持つことがわかる。 $\Theta \ll 1$ を用いると、 $\dot{\phi} \approx 0$ 近傍において

$$\zeta^{iso} \longrightarrow -h\Theta_{,C}\Theta \frac{\sin(\tau + \frac{\gamma}{2}) \cos(\tau + \frac{\gamma}{2})}{\sin^2 \tau + \mathcal{O}(\Theta^2)} \quad (5.59)$$

となり、 $(-\Theta_0 \sin \gamma)$ と同符号の鋭いピークをつくる。共鳴期間の γ のふるまいからピークのもつ符号はほぼ同じになる。ピーク以外の ζ^{iso} は $Q_{\phi}^{(iso)}$ の振幅変化をトレースする：

$$\zeta^{iso} \sim h\Theta_{,C} \cdot \Theta \sin \gamma \quad (5.60)$$

従って、スカラー場の振動性による周期的ピークを除けば ζ^{iso} は次のようなふるまいをする。 $\Theta_0 \ll 1$ より初期時刻において ζ^{iso} はゼロに近い値を持つ。パラメーター共鳴により $\Theta_{,C}$ が成長するとそれに伴って ζ^{iso} の振幅も変化する。この時の振幅変化は (5.46)(5.58) より次のように見積もることができる：

$$\left| \frac{\zeta^{iso}(\tau_f)}{\zeta^{iso}(\tau_i)} \right| \lesssim \frac{h(\tau_f)}{h(\tau_i)} \exp(2c_* \sqrt{\lambda}) \quad (5.61)$$

τ_i, τ_f はそれぞれパラメーター共鳴の起こる初期時刻、終了時刻に対応する。 $\zeta^{iso}(\tau_f)$ の振幅は、 $\tau = \tau_i$ における背景 χ -場の初期振幅 Θ_0 にも依存していることに注意する必要がある。共鳴期間 ($\frac{1}{3} \leq q \leq 1$) をすぎると $\Theta_{,C}$ は一定値に近づくため、 ζ^{iso} の振幅は h に比例して次第に減衰していく。ただし $\Theta_0 = 0$ 、即ち $\chi = 0$ となる場合には $\zeta^{iso} = 0$ となる。こうした非断熱ゆらぎのふるまいは背景スカラー場の相互作用によりエントロピーのゆらぎが作りだされた結果と考えることができる (この非断熱ゆらぎは等曲率ゆらぎ (iso-curvature mode) と呼ばれることがある [9] [32][49])

背景場方程式 (5.1)-(5.4) 及び Mukhanov 方程式 (5.8) を数値的に解くと、(5.58) で表された ζ^{iso} のふるまいが実際に現れることが確認できる。図 11には ζ^{iso} に対する時間発展が示されている。図 10に現れる背景 χ -場の共鳴による成長に対応して、Bardeen パラメータの振幅が増大する（矢印の区間）。ピークのもつ符号、共鳴後の振幅変化も解析結果 (5.58) と一致している。

一般の Bardeen パラメータのふるまいは背景解、Mukhanov の変数に対する初期条件によって決まる。即ち、表式 (5.58) で与えられる ζ^{iso} と同じふるまいが一般の ζ にも現れるかどうかは、係数 $c_1 \sim c_4$ の値を与えたときに決まる独立解の重ね合わせかた (5.27) と相互作用の強さを表すカップリング λ による。しかしながらここで得られた結果は重要な意味がある。減衰モードを無視すると共鳴が起こる前では $\zeta^{iso} \ll 1$ により ζ のふるまいは時間的一定値を保つ断熱モードが支配的である。ところが共鳴が起こると ζ^{iso} の寄与が効き始め ζ は一定値からずれる。従って共鳴後には ζ に対する等曲率ゆらぎの影響が無視できなくなる場合が起こりうる。つまりインフレーション終了時において断熱的なゆらぎが優勢であったとしても再加熱の影響を通じて Bardeen パラメータが変化する可能性があることを示している。

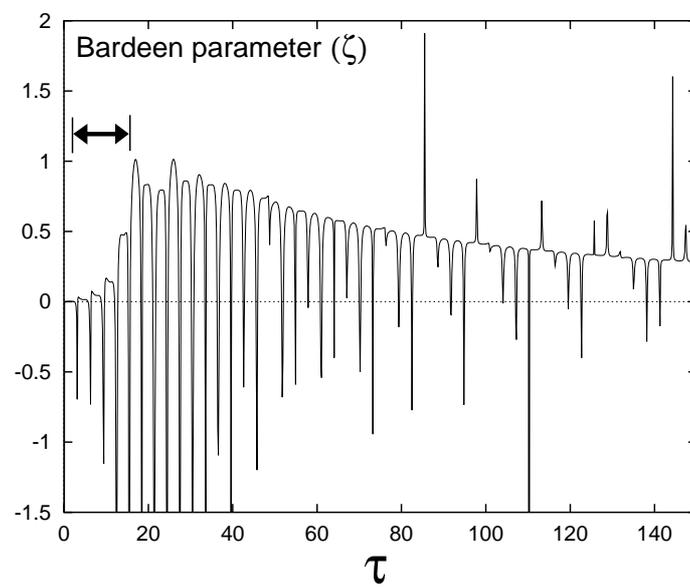


図 11: Bardeen パラメーター ζ^{iso} の時間変化。背景場に対しては図 10 と同じ初期条件を与えた。一方、摂動は表式 (5.49) において $\tau = 0$ で与えられる初期条件のもとで解いた。矢印で示された区間で ζ の振幅に成長が現れた後は、宇宙膨張により次第に減衰していく。

6 終章

6.1 まとめと議論

本論文ではインフレーション後の再加熱期のゆらぎの進化が断熱的か否かを解明するため、宇宙論的摂動論の定式にもとづいた解析について考察してきた。特に振動スカラー場の相互作用によって引き起こされる共鳴の影響を調べるため、5章では2成分スカラー場モデルにおける長波長極限の摂動解のふるまいを解析した。解析結果よりわかったことは以下の2点である：

- 背景解について、振動インフラトン場が相互作用を通じてパラメーター共鳴の効果を引き起こし、質量ゼロのボソン場 (χ) の振幅を増大させる。
- その不安定性は長波長極限の摂動解を通じて非断熱ゆらぎを成長させ、Bardeen パラメーターの振幅を増大させた。

従って再加熱期の振動インフラトン場による共鳴の効果が長波長モードのゆらぎにも影響を及ぼすことが明らかになった。解析結果では、共鳴による影響の程度がゆらぎの初期条件、相互作用の強さに依存していることを示している。

ここで波数依存性を無視した解析の妥当性について議論しておく。本文では5章では波数ゼロの長波長極限のゆらぎについて解析してきた。実際のゆらぎには超地平線スケールであるが小さな波数依存性をもつ。再加熱期における特徴的スケールはスカラー場の振動から与えられる。解析モデルではインフラトンの質量項より m^{-1} で決まる。波数依存性が重要になるスケールはこれより短い $k/a \gtrsim m$ というスケールである。一成分スカラー場のインフレーションモデルでは、 $3K$ 温度ゆらぎの観測からおおよそ $m \sim 10^{13} \text{ GeV}$ という質量スケールを持つとされている⁷。2成分モデルでは相互作用の影響から多少異なる値になると考えられるがそれほど大きな変化はないと予想される（少なくともオーダーが4、5桁も変わるような場合は考え難い）。従って構造形成に関わる長波長スケールのゆらぎを考える限り $(k/a) \ll m$ であり、長波長極限の摂動解による記述で正しい評価を得ることができる。ゆらぎの持つ弱い波数依存性は長波長摂動解 (5.27) の任意定数 $c_1 \sim c_4$ に押し込められる。

次に本文5章の解析結果と4.2節で述べた濱崎・小玉 [45] による完全流体モデルでの結果との違いについて考察する。彼らの解析では再加熱期におけるスカラー場の相互作用の

⁷ インフレーション期に生成された量子ゆらぎが密度ゆらぎとして進化、そのまま $3K$ 温度ゆらぎ ($\Delta T/T \sim 10^{-5}$) の起源となるとした場合に与えられる評価。瞬間再加熱を仮定している。

影響は波数依存性をもった抑制因子によっておさえられ、非断熱ゆらぎは長波長スケールでは成長しないという結論であった。この結論は流体モデルへとおきかえた仮定によっている。流体的取り扱いでは相互作用が影響する因果的スケールが流体の音速で特徴づけられてしまう。通常の流体だと音速は光速以下であるから相互作用の影響は超地平線以上の波長をもつゆらぎには及ばなくなる。彼らの解析は共鳴以後に起こりうる Born 近似的なインフラトン崩壊の場合には、これまでの現象論的記述にもとづく再加熱期の解析 [35][38] を支持する妥当な結果を与えている。ところがスカラー場自身には (定義はできるが) 音速という概念はなく、相互作用の及ぶ範囲を定めるような因果的スケールをもたない。実際、共鳴の引き起こすインフラトン場は非常に長いコヒーレンスをもって振動している。スカラー場モデルで Bardeen パラメーターが変化したのはこうした性質によるものであり、それが相互作用を通じて背景場の不安定性に現れ非断熱ゆらぎを成長させた。それゆえ、共鳴による再加熱の影響を調べるにはスカラー場を用いた解析が必要不可欠であったことが示される。

以上よりインフレーション起源のゆらぎの進化を考えると、ゆらぎは共鳴による再加熱の影響を受けて我々の宇宙へと進化していくと結論づけられる。つまり 3 K 温度ゆらぎには再加熱期の影響を通してインフレーション時のゆらぎが投影されていることを表し、観測から初期宇宙を探るうえで再加熱期のゆらぎの進化は重要であると改めて結論づけられる。

6.2 考察：再加熱期の影響と温度ゆらぎ

前節の結論をうけて本論文 5章で得られた結果から、3 K 温度ゆらぎの観測よりどのようなことがもたらされるのか考察する。インフレーション起源のゆらぎの進化において最も重要な帰結は現在観測される宇宙の大規模構造の説明であり、その直接的証拠と考えられるのが 3 K 温度ゆらぎなどに反映されるゆらぎの振幅、空間パターンである。従ってゆらぎのもつ性質、とくにパワースペクトルを理論的評価と比較することによりインフレーション宇宙の進化をうかがい知ることが出来る。本論文では Bardeen パラメーターと呼ばれる空間曲率のゆらぎに対応する摂動を評価してきた。Bardeen パラメーターは Sachs-Wolfe 効果を通じて晴れ上がり時における温度ゆらぎに直接読みかえできるから (3.5節参照) ζ に対するパワースペクトル $\mathcal{P}_\zeta(k)$ の評価が重要になる。パワースペクトルは次のように定義される：

$$\mathcal{P}_\zeta(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} \langle |\zeta(k)|^2 \rangle \quad (6.1)$$

ここで $\langle \dots \rangle$ は波数空間における微小体積要素 $\mathbf{k} + d^3\mathbf{k} \sim \mathbf{k}$ における空間平均を表す。(6.1) は2点相関関数 $\xi_\zeta(r)$ と次のような関係がある。

$$\xi_\zeta(r) \equiv \langle \zeta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \cdot \zeta(\mathbf{x}) \rangle = \int \frac{dk}{k} \frac{\sin(k|\mathbf{r}|)}{k|\mathbf{r}|} \cdot \mathcal{P}_\zeta(k). \quad (6.2)$$

温度ゆらぎの観測からこうしたパワースペクトルに対し晴れ上がり以降、おおよそ波長 $k^{-1} \sim 10^4 \text{ Mpc}$ のスケールにおいてスペクトルの振幅およびその傾きが、

$$\mathcal{P}_\zeta \simeq 3 \times 10^{-9} \propto k^{n-1}, \quad (6.3)$$

$$n = 1.2 \pm 0.3 \quad (6.4)$$

とわかっている [51]。

インフレーション時の量子ゆらぎは再加熱期の共鳴の影響を受けてこうしたスペクトルに反映されていると考えられる。減衰モードを無視した Bardeen パラメーターは

$$\zeta(k, \tau) = c_1(k) + c_2(k)\zeta^{iso}(\tau) ; \quad \tau = mt \quad (6.5)$$

で与えられる。 c_1, c_2 は量子ゆらぎの初期振幅より決まる係数で、インフレーション・再加熱のモデルパラメーターを含んでいる。従って Bardeen パラメーターを時間発展を晴れ上がりまで外挿してスペクトル (6.1) を評価すると、(6.3)(6.4) からモデルパラメーターに対する制限をつけることが出来る。従来の評価ではインフレーション時の量子ゆらぎは断熱的進化によりそのまま温度ゆらぎに反映すると考えられていた。従ってインフラトン場が優勢なインフレーションだとボソン場 χ の影響は無視され、インフラトンのもつモデルパラメーターのみに制限がつく (ここではインフラトンの質量 m)。しかしながら再加熱の影響を考えると、温度ゆらぎの評価には非断熱ゆらぎ ζ^{iso} の寄与が無視できなくなる場合が生じる。結果として相互作用の大きさ (g) にも制限が加わることになる。

具体的にパラメーターがどのように制限されるのか見ていこう。まず、再加熱の影響を考えない場合のスペクトル \mathcal{P}_ζ を評価する。この場合、ボソン場の影響を考えないのでゆらぎの評価は1成分スカラー場のモデルと本質的に変わらない。初期条件として与えられる量子ゆらぎの振幅は各波長毎に

$$|\delta\phi_k| = \left. \frac{H_k}{\sqrt{2k^3}} \right|_{k=aH_k} \quad (6.6)$$

で与えられる。添字 k は、波数 k でラベル付けされたゆらぎの各波長がインフレーション時に地平線を超える時刻 $aH = k$ にて評価された値を表す。スカラー場のゆらぎ $\delta\phi$ と

Mukhanov の変数 Q_ϕ は $Q_\phi = \delta\phi + (\dot{\phi}/H)\Phi$ で関係づけられているが、インフレーション時においては $|\dot{H}| \ll H^2$ がなりたつ。従って $\delta\phi_k \approx Q_\phi$ として振幅 (6.6) を Mukhanov の変数に対する初期条件として与えることができる。減衰モードを無視した Mukhanov の変数は

$$Q_\phi = c_1(k) \cdot \frac{\dot{\phi}}{H} \quad (6.7)$$

と表せるのでこれより、係数 c_1 が決まる：

$$|c_1(k)|^2 = \frac{1}{2k^3} \frac{H_k^4}{\dot{\phi}_k^2} \quad (6.8)$$

(6.8) はゆらぎの波長がハッブル地平線を横切る時刻により評価され、断熱ゆらぎに対する Bardeen パラメーターの振幅を与える。右辺に現れる背景量の評価には 2.2.1 節にて解説した slow-rolling 近似が使える。(6.8) を (6.1) に代入して slow-roll 近似 (2.17) を用いて書き直すと、パワースペクトルは

$$\mathcal{P}_\zeta = \frac{16\pi}{3} \left(\frac{m}{M_{pl}} \right)^2 \left(\frac{\phi_k}{M_{pl}} \right)^4 \quad (6.9)$$

と評価される。晴れ上がり時の各波長に対し、インフレーション時にハッブル地平線を横切る時刻がわかると ϕ_k が定まり、スペクトル曲線を描くことができる。この ϕ_k の値は任意ではなく下限値が存在する。ビッグバン理論の平坦性問題の解決のために宇宙はインフレーション終了までに e^{60} 倍大きくなることが要請される。slow-rolling 近似による評価 (2.20) では $\phi_k \gtrsim 3.1 M_{pl}$ である。これを用いると (6.3) よりインフラトンの質量パラメーターに対し

$$m \lesssim 1.4 \times 10^{-6} M_{pl} \quad (6.10)$$

という制限が得られる。

こうした評価に再加熱期の影響を考慮する場合、非断熱的なゆらぎ ζ^{iso} の寄与により相互作用の大きさにも制限がつくことを意味する。インフレーション時に与えられる初期スペクトルから評価しようとする、厳密には 2 成分スカラー場モデルに対する背景解と摂動解のふるまいをインフレーション期から再加熱期にわたるまで求めなければいけない。ここではモデルパラメーターがどのように決まるかということに議論を限定して、再加熱開始前 (共鳴が起こる前、おおよそ $\phi \sim 0.3 M_{pl}$) に (6.6) と同じ大きさの量子ゆらぎがボソン場にも与えられていた場合を考えよう (実際に与えられるゆらぎの振幅はこれより小さくなる)。この仮定にもとづく (6.5) に表される初期振幅 $c_2(k)$ は

$$|c_2(k)|^2 = \frac{H_k^2}{2k^3} \cdot \frac{1}{2M_{pl}^2} \quad (6.11)$$

と決まる。 ζ^{iso} は 5 章の近似評価よりその最大成長率を評価することができ、

$$\zeta^{iso} \simeq h(\tau) \cdot \Theta_{,C} \lesssim h(\tau) e^{0.035(gM_{pl}/m)} \quad (6.12)$$

を得る。ここで $h = H(t)/m$ であり、共鳴後の宇宙膨張による減衰を表す。共鳴後の再加熱過程は Born 近似を用いて記述される摂動的な粒子生成が主導プロセスとして働き、やがて再加熱は終了する。5 章で得た結果は共鳴後のゆらぎの進化を必ずしも正しく表しているとは限らないが、こうした時期のゆらぎは断熱ゆらぎが支配的になることが知られている。よって共鳴以後、非断熱ゆらぎは減衰していくことが予想され、その定性的ふるまいは (6.12) で表されるものと変わらないと考えられる。再加熱終了後は輻射優勢期へと移行するが、そのときの Bardeen パラメーターのふるまいについて考えてみる。(3.34) によると Bardeen パラメーターの時間発展は一般に

$$\dot{\zeta} = -\frac{H}{\dot{H}} \left(\frac{k}{a}\right)^2 \Phi + \frac{H}{\dot{H}} \tau \delta S \quad (6.13)$$

と表されていた。5 章で得た非断熱ゆらぎ ζ^{iso} の振幅増大は右辺第 2 項に現れるエントロピーゆらぎの成長が原因である。輻射優勢期ではエントロピーゆらぎは消えるため、長波長のゆらぎは全て断熱的にふるまう。従って再加熱終了以降は ζ^{iso} も一定値をとると考えるのが自然である。つまり再加熱終了時 t_{RH} に評価される Bardeen パラメーターが 3 K 温度ゆらぎの観測 (6.3)(6.4) へと反映されることになる。この時の時刻は再加熱温度 T_{RH} を用いて表すことができ、ハッブルパラメーターは

$$H^2(t_{RH}) = \frac{8\pi}{3M_{pl}^2} \rho_r = \frac{8\pi^3}{90} \cdot N_r \left(\frac{T_{RH}}{M_{pl}}\right)^4 M_{pl}^2 ; N_r \sim 10^2 - 10^3 \quad (6.14)$$

と記される。以上より、共鳴による非断熱ゆらぎ成長を考慮したパワースペクトルが求まる。(6.8)(6.11)(6.12) より

$$\mathcal{P}_\zeta = \frac{16\pi}{3} \left(\frac{m}{M_{pl}}\right)^2 \left(\frac{\phi_k}{M_{pl}}\right)^4 + \frac{2\pi^2}{135} N_r \left(\frac{T_{RH}}{M_{pl}}\right)^4 \left(\frac{\phi_k}{M_{pl}}\right)^2 e^{0.07(gM_{pl}/m)} \quad (6.15)$$

ここで量子ゆらぎとして与えられた振幅 c_1, c_2 は互いに独立なランダムネスをもつとした。状態数を $N_r = 10^2$ とおき、平坦性問題解消の要求として $\phi_k = 3.1M_{pl}$ とすれば、(6.3) から再加熱温度に応じて観測からモデルパラメーター (m, g) に対する制限が得られる。

図 1 2 は観測から決まるモデルパラメーターに対する制限を (6.15) に基づきグラフに表したものである。横軸は相互作用の大きさを表す gM_{pl}/m 、縦軸はインフラトンの質量に

対する無次元量 m/M_{pl} で、再加熱温度ごとに許されるモデルパラメーターの値が実線の上に示されている。横軸右側へ行くほど温度ゆらぎに対し、再加熱時の非断熱ゆらぎの寄与が大きくなる。温度ゆらぎの振幅以上に非断熱ゆらぎが成長することは観測によって許されない。従って相互作用の大きさに頭打ちが現れる。再加熱温度が低いほど大きな相互作用が許されるのは、共鳴後の減衰期間が長いために非断熱ゆらぎの影響が小さくなるためである。こうした観測からの制限は再加熱のモデルパラメーター g に上限を与える。グラフから読みとると、おおよそ $g \lesssim 10^{-4}$ と見積もることができる。

このような評価を通じていえることは、再加熱期のゆらぎの進化を考慮することによりインフレーション・再加熱のモデルパラメーターに対し新たな制限が加わることである。特に重要となるのが非断熱ゆらぎの影響である。ここでは再加熱開始時に与えたゆらぎから非断熱ゆらぎの影響を調べたが、インフレーション理論における初期宇宙モデルにはインフレーション時の初期ゆらぎに非断熱ゆらぎを含むモデルが存在する。このようなモデルでは特に再加熱期のゆらぎの進化が重要になってくると考えられる。非断熱ゆらぎを含むモデルとして挙げられるのは、ハイブリッドインフレーション、スカラー・テンソル重力理論におけるインフレーションといった多成分スカラー場のインフレーションモデルである [10][11]。ここの議論で用いられた観測データはスペクトルの振幅 (6.3) のみであったが、これらのモデルの中には初期振幅 $c_1(k)$, $c_2(k)$ の波数依存性がお互い異なるものも考えられる。このことは共鳴による再加熱期を経ることでゆらぎのスペクトルが変形する可能性があることを意味している。従ってスペクトルの形を表す (6.4) からの制限も重要になってくると考えられ、再加熱期の影響を調べることから従来の評価よりさらに強い制限がつけられると期待される。

以上の考察をふまえて、初期宇宙モデルの選択を行ううえでも再加熱時のゆらぎの進化は重要になってくると結論づけられる。さまざまある多成分スカラー場のインフレーションモデルに対して再加熱期のゆらぎの進化を調べ、構造形成シナリオにおける再加熱期の役割を明らかにしていく必要がある。従ってインフレーション時に与えられる初期振幅に対し、モデルによる再加熱期影響の違いを明らかにすることが重要であり、今後の課題として残されている。

6.3 展望

kofman らによって明らかにされた共鳴による再加熱過程は、初期宇宙における物質進化の理解を促進させた。本論文では彼らの結果を踏まえて構造形成シナリオに関する宇宙論的摂動論の解析を行い、インフレーション後のゆらぎの進化はこうした物質進化とも密接に関連があることを明らかにした。

最近の再加熱の研究では、パラメーター共鳴主導の“preheating”と呼ばれる状況での非線型場の進化に関心が集まっている [18][21][23]。これは再加熱初期に実現されると思われる状況にあたり、共鳴による場の非一様モードの成長が非常に速く非線型性が強い時の進化を表している。このため場のふるまいを解析的に調べるのが困難で、シミュレーションによる大規模な数値計算から古典的スカラー場崩壊の過程が調べられている [24][25][26][27]。もちろんこうした解析には場の重力的進化は考慮されていない (宇宙膨張を取り入れた解析はある)。preheating のような状況を宇宙論的摂動論にもとづいて解析する時、もはや物質分布の空間非一様性は線型摂動では扱えない。ゆらぎの急速な成長は背景場への反作用として影響を及ぼす、と考えなければならない。

Einstein 方程式において摂動の反作用問題は古くから研究・議論されてきた問題である [52][53][54]。こうした問題で考えられて来た状況設定は物理量は常に背景場と小さなゆらぎに分離できるという仮定である。しかしながら preheating においてこうした仮定は適用できないと思われる。急激に成長するゆらぎ (場の非一様成分) はやがて宇宙のエネルギー密度を支配し、コヒーレントな振動スカラー場の成分次第に消失していく。こうした非一様モードは、やがて平衡状態に達し最終的に輻射場としてみなすことができるようになる。それゆえ反作用を考慮して宇宙論的摂動論を拡張したとしてもこの仮定の下では preheating 時の物質非一様性の進化を扱うのは困難である。Hartree 近似のように非摂動的にゆらぎを取り扱う Einstein 方程式の非線型な摂動論を新たに定式化する必要があるのではないかと考える。

インフレーション理論が提唱されて以後、宇宙論的摂動論を用いた研究が数多くあるが、いまだにインフレーション期から現在のビッグバン宇宙までを矛盾なくつなぐ首尾一貫したゆらぎの進化の研究はなされていない。前節で行ったゆらぎのスペクトル評価においても、再加熱温度は未知のパラメーターとして残されていた。本来再加熱終了時の温度とゆらぎの振幅は、再加熱期におけるゆらぎと物質場の進化を同時に扱うことによって矛盾なく求まるものと考えられるから、前節で行った評価は十分とはいえないかもしれない。こういった問題の原点にあるのは再加熱期に対する我々の理解不足ではないかと考える。インフレーション理論を考える最大の理由の1つが構造形成シナリオの存在にある。インフレーション理論がビッグバン理論とともに宇宙の標準理論としてゆるぎない地位にたつために

は、理論にもとづく現在の観測宇宙に対する予言性が必要である。そのためにも preheating を含めた再加熱過程を理解し、その時期のゆらぎの進化を解明する必要があると思われる。

謝辞

指導教官である南部保貞助教授には、このテーマを選ぶにあたっていろいろご助言頂き、研究全般にわたって細かいご指導、ご助力を承りました。ここに深く感謝致します。また適宜有益なご助言、ご意見を承った冨松彰教授に感謝致します。本論文をまとめるにあたり、山口義幸氏には研究面でいろいろと励ましてもらうとともに有益な議論をすることができました。さらに恵木正史氏には本論文の図表の作成を含め、いろいろ議論に尽くしてもらいました。また、京都大学の阪上雅昭助教授には本論文の解析で用いたくりこみ群の方法を含め、再加熱期に関する様々な研究文献を紹介して頂き、有益な意見を承りました。くりこみ群的手法については、特異摂動法のセミナーにて小西哲郎助教授、山田裕康博士、中村康二博士、松葉健一氏と詳細な議論を行い、本論文の解析に役立てることができました。さらに、高橋真聡助教授、大城宜実博士、松村靖氏、山本葉子氏、小山博子氏をはじめとする CG 研究室の方々にはこの研究を遂行するにあたりいろいろ励ましていただきました。ここに深く感謝致します。

A くりこみ群的アプローチによる微分方程式の漸近解析

物理現象を理解するうえで最も重要な要素の1つとして、その現象を記述する基礎方程式（あるいはモデル方程式）を解析することが挙げられる。しかしながら解析的に方程式を解こうとしても多くの場合、厳密には解けない。そうした時でも近似解法により解析的表現を得ることが可能である。摂動論的手法は近似解法の常套手段としてよく用いられる方法である。方程式、あるいは境界条件の中にはしばしば微小パラメーター ($\epsilon \ll 1$) を含むことがある。この微小パラメーター ϵ を展開パラメーターとして方程式を展開し、逐次解を構成していく方法が摂動論的手法である。こうした手法には精度のいい近似解を得るために、問題に応じてさまざまな解法のテクニックが知られており特異摂動法と総称される [55] [56]。よく知られているものがWKB法、接合展開法、多尺度展開法である。

ここで解説するくりこみ群的手法 (RG法) とは、様々あるテクニックに対して統一したアプローチを提示する漸近解析の一手段である [57][58]。以下では常微分方程式を例に挙げながらその手法を紹介する。

A.1 境界層問題

次の微分方程式を考える：

$$\epsilon \ddot{y} + (1 + \epsilon) \dot{y} + y = 0 ; \quad \epsilon \searrow 0 \quad (\text{A.1})$$

ここで ϵ は正符号をもつ微小パラメーターである。上式を $y(0) = 0, y(1) = 1$ という境界条件で解く。(A.1) は厳密に解けて以下のような解を得る：

$$y(t) = \frac{e^{-t} - e^{-t/\epsilon}}{e^{-1} - e^{-1/\epsilon}} \quad (\text{A.2})$$

(A.2) には2つの特徴的ふるまいが現れている。 $0 \leq t \lesssim \epsilon$ においては $y \propto e^{-t/\epsilon}$ 、 $\epsilon \lesssim t \leq 1$ では $y \propto e^{-t}$ となり、 $t \simeq \epsilon$ を境界にしてふるまいが変わる。以下では境界を隔てたそれぞれの領域を内部 ($0 \leq t \lesssim \epsilon$)、外部 ($\epsilon \lesssim t \leq 1$) と呼ぶことにする。

こうしたふるまいを今度は ϵ を用いた摂動展開により求めることにしよう。まず y を

$$y = y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 + \dots \quad (\text{A.3})$$

と展開し、方程式 (A.1) に代入する。 ϵ のべきで方程式を整理すると各オーダーの項は次のようになる：

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\epsilon^0) : \quad & \dot{y}_0 + y_0 = 0, \\ \mathcal{O}(\epsilon^1) : \quad & \dot{y}_1 + y_1 = -(\ddot{y}_0 + \dot{y}_0). \end{aligned}$$

こうした展開では最高階微分項が高次のオーダーになり、2つの境界条件を同時に満足するような解は構成できない。そこで境界条件 $y_0(1) = 1$, $y_1(1) = 0$ を課し、まず外部領域で適用可能な解を構成する。これより、

$$y_0(t) = e^{1-t}, \quad y_1(t) = 0 \quad (\text{A.4})$$

を得る。ここで考える方法は、内部領域で適用可能な解を構成することで外部解との接続を図る接合展開法 (Matched Asymptotic Expansion Method) である。内部解を構成するために時間変数として新たに $\tau \equiv t/\epsilon$ を導入する。この変数のもとで (A.2) を ϵ のべきで整理すると

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\epsilon^0) : \quad & y_0'' + y_0' = 0, \\ \mathcal{O}(\epsilon^1) : \quad & y_1'' + y_1' = -(y_1' + y_0) \end{aligned}$$

を得る。ここで $(\prime) = \frac{d}{d\tau}$ を表す。内部領域の境界条件 $y_0(0) = 0$, $y_1(0) = 0$ を課すと

$$y_0(\tau) = A_0(1 - e^{-\tau}), \quad y_1(\tau) = A_1(1 - e^{-\tau}) - A_0\tau \quad (\text{A.5})$$

と求まる。 A_0, A_1 は任意定数で外部解との接続より決まる。解の接続は、内部解と外部解の適用範囲が互いに重なりあう中間領域と呼ばれる領域が存在する場合に可能である。中間領域を表す変数として

$$\xi \equiv \frac{t}{\epsilon^c} = \frac{\tau}{\epsilon^{c-1}} ; \quad 0 < c < 1 \quad (\text{A.6})$$

を定義する。 ξ を固定して極限 $\epsilon \rightarrow 0$ をとる時、変数 t, τ はそれぞれ 0 と ∞ に近づく。つまり外部変数は内部へ、内部変数は外部へと近づくことを表し、互いに重なり合う領域が構成される。(A.4)(A.5) を変数 ξ にて書き表し、 ϵ のべきでならべ直すとそれぞれ

$$\begin{aligned} y(t) &\simeq e(1 - \epsilon^c \xi + \dots) \\ y(\tau) &\simeq A_0 - \epsilon^c A_0 \xi + \epsilon A_1 \end{aligned}$$

となる。両者を比較すると、内部解の任意定数が $A_0 = e$, $A_1 = 0$ と定まる。

2つの領域でそれぞれ得た摂動解を用いると、全両域で適用可能な近似解が以下の操作で構成される [55] :

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} y \Big|_t + \lim_{\epsilon \searrow 0} y \Big|_\tau - \lim_{\epsilon \searrow 0} (y|_t)_\tau = e(e^{-t} - e^{-t/\epsilon}) \quad (\text{A.7})$$

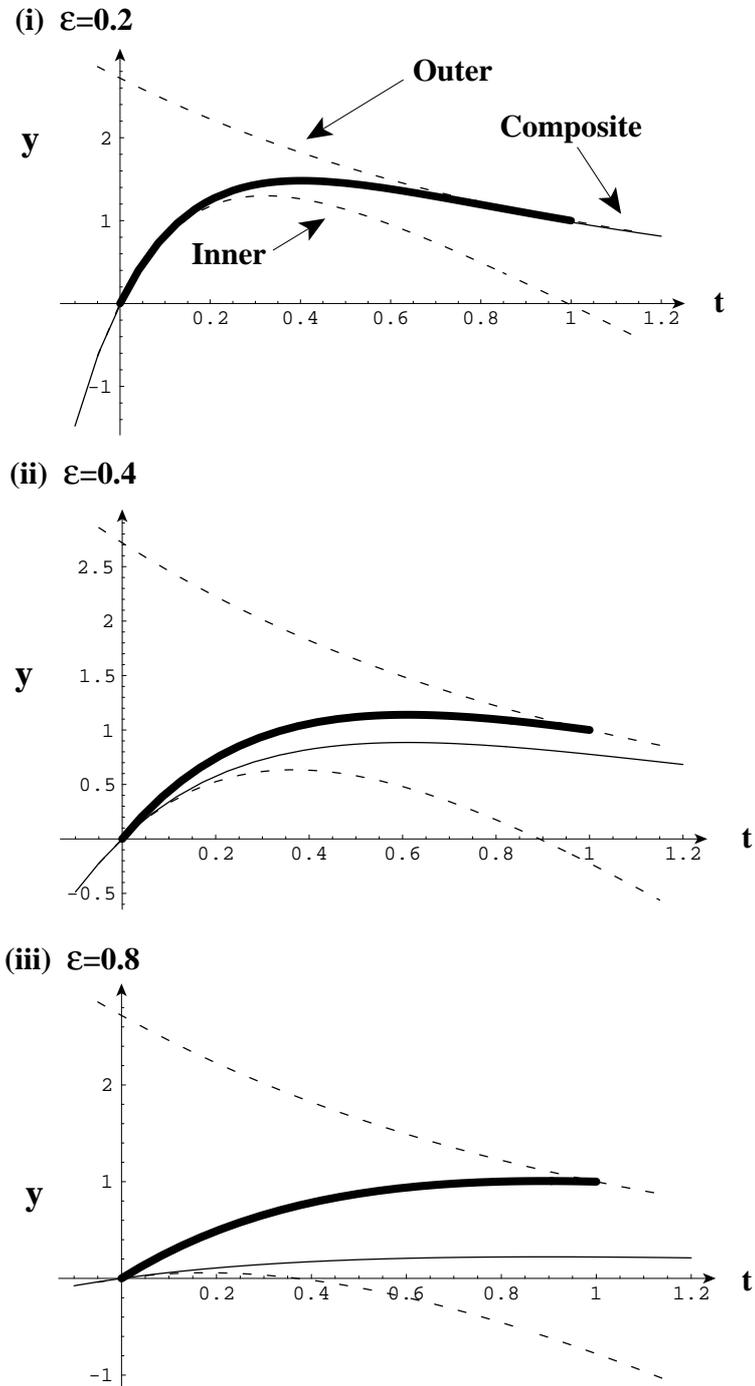


図 13: 厳密解と接合展開法による近似解との比較。点線は外部、内部解を表す。細線が両者の解を接合した解 (A.7) である。 ϵ が 1 に近づくとつれ、近似解は厳密解 (太線) とずれてくる。

合成された摂動解は厳密解 (A.2) と比べると $1/(1 - e^{1-1/\epsilon})$ の因子だけ異なる。そのため ϵ が 1 に近づくと近似解のふるまいは厳密解と大きくずれてくる (図 A.1)。

今度はくりこみ群的アプローチで解を構成する場合を考える。まず発見法的にくりこみの手法を導く。ここでは内部解のふるまいに注目する。境界条件を課す前の任意定数を含んだ内部解は

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \epsilon y_1 + \dots \\ &= A_0 + B_0 e^{-\tau} + \epsilon [A_1 + B_1 e^{-\tau} - A_0 \tau] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

のように表される。(A.8) をみると $\epsilon\tau$ に比例して成長する項が現れている。こうした項は永年項と呼ばれる。 $\epsilon\tau > 1$ において $y_1 > y_0$ となるため、有限項で展開を打ち切った表式は適用できなくなる。永年項は ϵ の高次のオーダーの評価をしても現れる。 (ϵ^n) まで展開すると τ^n の発散項が生じる。こうした永年項が現れる原因は、方程式の性質でなく展開のやり方そのものにある。従って永年項のふるまいが現れないように展開を取り直す必要がある。

ここで永年項に対し、

$$\tau \longrightarrow \tau - \mu \quad (\text{A.9})$$

という操作を行なう。この操作を元の摂動解 (A.8) から μ だけずれた時刻に移す変換だと考えると、任意定数もその分補正を受ける。永年項を除いた残りの項は斉次解として得られたものであるから、これらは 2 つの独立解で表せる。従ってパラメーター μ に依存した補正

$$\begin{aligned} A_0 + \epsilon A_1 &\longrightarrow A(\mu) \\ B_0 + \epsilon B_1 &\longrightarrow B(\mu) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

をすればよい。(A.8) から $\mathcal{O}(\epsilon)$ の精度でパラメーター依存性を持つ表式を得る：

$$y = A(\mu) + B(\mu)\epsilon^{-\tau} + \epsilon(\tau - \mu)A(\mu) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{A.11})$$

ところで元の微分方程式には μ に依存する項は現れない。従って解にもそうした依存性があるとはならない。そこで

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \mu} \right)_\tau = 0, \quad \text{for } \forall \tau \quad (\text{A.12})$$

という要請をおく。(A.11)を上式に代入すれば $\mathcal{O}(\epsilon)$ の精度で

$$0 = \frac{\partial y}{\partial \mu} = \left(\frac{dA}{d\mu} + \epsilon A \right) + \frac{dB}{d\mu} e^{-\tau} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{A.13})$$

となり、 A, B に対するパラメーター依存性を決める式が得られる：

$$\frac{dA}{d\mu} + \epsilon A = \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad \frac{dB}{d\mu} = \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{A.14})$$

これより $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ の項は落として考えると

$$A(\mu) = A(0)e^{-\epsilon\mu}, \quad B(\mu) = B(0) \quad (\text{A.15})$$

と求まる。表式 (A.11) には永年項が残っているが、時間 τ に合わせてパラメーターを動せば永年項が現れないようにできる。即ち、 $\mu = \tau$ と等置する。(A.11) から任意定数が時間依存性を持った表式が得られる。永年項が A, B の時間依存性にくりこまれた結果、境界条件を課すことで (A.15) の初期値が $A(0) = B(0) = (e^{-1} - e^{-1/\epsilon})^{-1}$ と決まり、

$$y(t) = \frac{e^{-\epsilon t} - e^{-t}}{e^{-1} - e^{-1/\epsilon}} \quad (\text{A.16})$$

という式になる。変数を $t = \epsilon\tau$ に戻すと厳密解の表現 (A.2) と一致することがわかる。

発見的にくりこみ群による手法を述べたが、この手法は多くの微分方程式の摂動論的解法に適用できる。基本的には次のような一連の操作で表せる。まず通常の摂動展開

$$y(\tau) = y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 + \dots \quad (\text{A.17})$$

を行い摂動解を構成する。0 次解 y_0 から積分定数 A_0 (B_0) を含んだ表式が得られる。 y_1, y_2, \dots の高次に対しては、各オーダーの方程式より非斉次解のみを評価すればよい。この時状況によっては、高次の項に $(\tau - \tau_0)$ のように任意の初期時刻 τ_0 から離れるとどんどん大きく成長する項 (永年項) が現れる。こうした場合、有限項で打ち切った表式が使えなくなる。くりこみ群的アプローチではこうした寄与を初期条件 A_0 に吸収させる。初期時刻 τ_0 に対して $\tau_0 \rightarrow \mu$ というおきかえを実行する。このおきかえを通して積分定数 A_0 もパラメーター依存する変数 $A(\mu)$ として変わるとする。この操作は次の変換で表すことができる：

$$A_0 = A(\mu)Z(\mu, \tau_0) \quad (\text{A.18})$$

Z はくりこみ定数と呼ばれ、 $Z = 1 + \sum_n \epsilon^n z_n$ のように摂動的に構成される。この自由度を用いて任意の ϵ のオーダーで $A_0 \rightarrow A(\mu)$ というおきかえができる。変換後はもとの方

程式にないパラメーターを含んだ表式になるから、解自身にもパラメーター依存性がないとする要請（くりこみ群方程式）

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)_\tau = 0, \quad \text{for } \forall \tau \quad (\text{A.19})$$

をおく。これにより初期条件 A に対するパラメーター依存性が決定される。最後に $\tau = \mu$ とおくことで永年項の消えたくりこまれた解 $y(A(\tau), \tau)$ を得る。

A.2 Mathieu 方程式

前節で学んだくりこみ群的手法を本文の各章でしばしば現れる Mathieu 方程式に適用し、くりこみ群的アプローチの有用性をみる。以下の表式で与えられる Mathieu 方程式を考える：

$$\ddot{y} + [\delta + 2\epsilon \cos(2t)]y = 0. \quad (\text{A.20})$$

本文 2.3.3節で述べたように、(A.20) の解のふるまいは係数 (δ, ϵ) によって特徴づけられる。係数に応じて、指数関数的成長をする不安定解と有限な振幅で振動する安定解に分類される（不安定・安定バンドチャート参照）。特に ϵ が小さい場合の解のふるまいは、ゆっくりした振幅変化、速い振動という2つのタイムスケールの変化で表される。 $\delta \approx 1$ 近傍に注目すると微小パラメーター ϵ によって解の安定・不安定性が分類されている。この近傍の解のふるまいを摂動的に調べる時、

$$\delta = 1 + \epsilon\delta_1 + \epsilon^2\delta_2 + \dots \quad (\text{A.21})$$

と書き表しておくとし、 ϵ の各オーダー毎に δ_1, δ_2 で表されるずれの値から解の安定・不安定性を決定できる。

この種の問題において適用される摂動論的解法に多尺度展開法 (Multiple Scale Method) が知られている [55][56]。この方法では多重時間 $\tau_n \equiv \epsilon^n t$ ($n = 0, 1, \dots$) を導入し、摂動展開より各タイムスケールに現れる変化を求める。くりこみ群の方法はこうした多重時間を必要としない。微小パラメーター ϵ による展開 $y(t) = y_0 + \epsilon y_1 + \dots$ だけでよい。(A.20) に (A.21) を代入して ϵ のべきで整理すると $O(\epsilon^1)$ のオーダーまでで

$$\begin{aligned} O(\epsilon^0) &: \quad \ddot{y}_0 + y_0 = 0, \\ O(\epsilon^1) &: \quad \ddot{y}_1 + y_1 = -[\delta_1 + \cos(2t)]y_0, \end{aligned}$$

を得る。前節で述べた操作に従って解を構成する。上式より通常の摂動展開として解

$$\begin{aligned} y_0 &= A_0 e^{it} + A_0^* e^{-it}, \\ y_1 &= \frac{i}{2}(t - t_0) (\delta_1 A_0 + A_0^*) e^{it} + \frac{1}{8} A_0 e^{i3t} + c.c. \end{aligned}$$

が求まる。ここで A_0 は初期振幅を表す複素定数、 $c.c.$ は複素共役を表す。 y_1 の表式には振動項の影響により $(t - t_0)$ に比例して発散する永年項が現れる。永年項を初期振幅にくりこむ作業としてまずおきかえ $t_0 \rightarrow \mu$ を行なう。 $\mathcal{O}(\epsilon^1)$ のオーダーまで考える場合は、(A.18) で与えられるくりこみ定数を

$$Z = 1 + \frac{i}{2} \epsilon (t_0 - \mu) (\delta_1 A + A^*) / A + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{A.22})$$

と与えればよい。その結果、パラメーター依存性を持った解の表式

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \epsilon y_1 + \dots \\ &= \left[A(\mu) + \frac{i}{2} \epsilon (t - \mu) (\delta_1 A(\mu) + A^*(\mu)) \right] e^{it} + \frac{1}{8} \epsilon A(\mu) e^{i3t} + c.c. + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

が得られる。上式に (A.19) を適用することにより、くりこみ群方程式として

$$\frac{dA}{d\mu} - \frac{i}{2} \epsilon (\delta_1 A + A^*) = \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{A.24})$$

が導かれる。 $A = (u + iv)/2$ とおくと (u, v は実数)

$$\frac{d}{d\mu} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\epsilon}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 - \delta_1 \\ 1 + \delta_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (\text{A.25})$$

を得る。右辺の行列の固有値は、 $-1 < \delta_1 < 1$ の時に実数値をとる。この時、振幅 $A(\mu)$ は指数関数的成長が現われ、

$$u(\mu), v(\mu) \propto e^{\pm \lambda \mu} ; \quad \lambda = \frac{\epsilon}{2} \sqrt{1 - \delta_1^2} \quad (\text{A.26})$$

という解を持つことがわかる。 λ は成長率と呼ばれ不安定性の程度を表す (本文 2.3.3 節では μ_k と記した)。 $|\delta_1| > 1$ では u, v は振動的なふるまいをする。 $\delta_1 = \pm 1$ は解の安定・不安定境界曲線を与える (バンドチャート参照)。 $\mu = t$ とおくことにより最終的にくりこまれた解がもとまる：

$$y(t) = u(t) \cos t - v(t) \sin t + \frac{\epsilon}{8} (u(t) \cos(3t) - v(t) \sin(3t)) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{A.27})$$

(A.26)にはゆっくりした時間変化 (ϵt) で成長するふるまいが表されている。多尺度展開と異なり、くりこみ群的手法ではこうしたタイムスケールが自然に現れてくることが特徴である。図 14は Mathieu 方程式の数値解との比較を表している。くりこみ群方程式 (A.25) と表式 (A.27) より得られるふるまい (点線) は、安定・不安定な場合どちらも数値解をよくトレースしていることがわかる。

くりこみ群的手法はここで挙げた以外に非線型常微分方程式に対しても効力を発揮する (本文 5.3節と付録 B.2参照)。偏微分方程式に対してもくりこみ群的手法は適用可能であり [57]、非線型解析としても有効な手段であると考えられている。

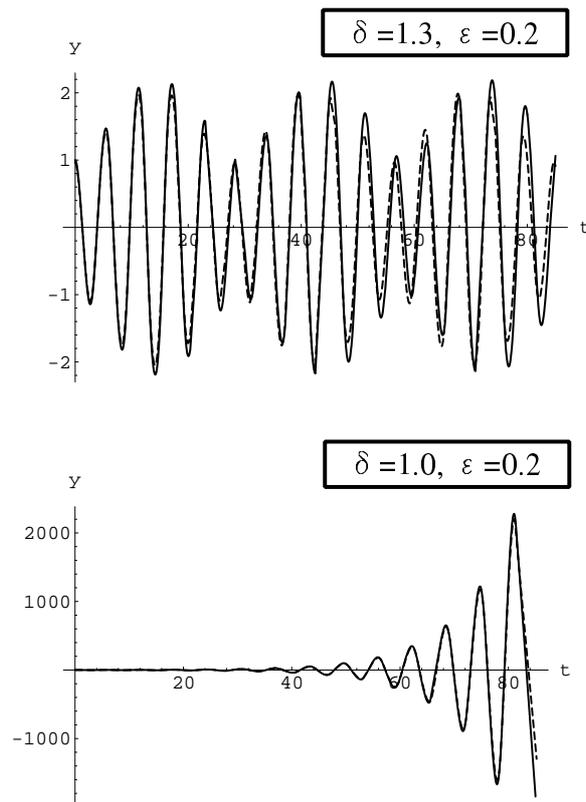


図 14: Mathieu 方程式の数値解との比較。点線はくりこみ群で求めた近似解。安定 ($\delta = 1.3, \epsilon = 0.2$) な場合、不安定な場合 ($\delta = 1.0, \epsilon = 0.2$) とも数値解 (実線) をよく再現している。

B RG法の適用

B.1 振動インフラトン場優勢宇宙における Mukhanov 方程式の解析

ここではべき型ポテンシャル (4.1) において $n \geq 2$ の場合の Mukhanov 方程式を解析する。背景場のふるまいより (4.11) に含まれる各項の時間依存性はそれぞれ

$$\begin{aligned} V_{\phi\phi} &= n(2n-1)m^2 a^{-6(n-1)/(n+1)} \tilde{\phi}^{2(n-1)} \sim \mathcal{O}\left(\left(\frac{\eta}{t_0}\right)^{2(1-n)}\right) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{H}}{H} + 3H\right) &= 6Hn^n \left(\frac{\eta}{t_0}\right)^{1-n} \tilde{\phi}^{2n-1} \tilde{\phi}_{,\eta} \sim \mathcal{O}\left(\left(\frac{\eta}{t_0}\right)^{1-2n}\right) \\ H^2, \dot{H} &\sim \mathcal{O}\left(\left(\frac{\eta}{t_0}\right)^{-2n}\right) \end{aligned}$$

となる。 $\eta > t_0$ において $(\frac{1}{\eta})$ のべきでオーダー評価すると H^2, \dot{H} は他の項に比べて高いオーダーとなる。従ってこれらの寄与を無視すると

$$\tilde{Q}_{,\eta\eta} + \left[n(2n-1)m^2 \tilde{\phi}^{2(n-1)} + k^2 a^{4(n-2)/(n+1)} + 4n(n+1) \frac{1}{\eta} \tilde{\phi}^{2n-1} \tilde{\phi}_{,\eta} \right] \tilde{Q} = 0 \quad (\text{B.1})$$

が得られる。4.1.3節で解析した $n=1$ の場合と異なり、 $\tilde{\phi}$ の解は三角関数では表せない。まず (B.1) の第3、4項がない場合を考える：

$$y_{,\eta\eta} + n(2n-1)m^2 \tilde{\phi}^{2(n-1)} y = 0 \quad (\text{B.2})$$

(4.7) より $y = \tilde{\phi}_{,\eta}$ が解となることがわかる。この解を

$$y = \tilde{\phi}_{,\eta} = m \sin(nm\eta) \quad (\text{B.3})$$

と近似する。 c は $\tilde{\phi}$ の振動周期を定義する定数である（この解析では c の値が何かを知る必要はない）。 $\tilde{\phi}$ の方程式を用いると (B.1) の第2、4項は

$$\begin{aligned} n(2n-1)m^2 \tilde{\phi}^{2(n-1)} &= -\frac{y_{,\eta\eta}}{y} \\ 2n(n+1)m^2 \tilde{\phi}^{2n-1} \tilde{\phi}_{,\eta} &= (\tilde{\phi}_{,\eta} \tilde{\phi})_{,\eta\eta} \end{aligned}$$

と表せる。そこで (B.3) を用いて (B.1) を書き直すと

$$\tilde{Q}_{,\tau\tau} + \left[1 + \left(\frac{k}{cm}\right)^2 a^{4(n-2)/(n+1)} - \frac{4}{\tau} \sin(2\tau) \right] \tilde{Q} = 0 \quad (\text{B.4})$$

となる。ここで無次元量 $\tau = cm\eta$ を導入した。4.1.3 節で得られた式と同様に、 $n \geq 2$ の場合にも Mathieu 方程式と同じ形に帰着する。上式は、 $c = 1$ とおくと $n = 1$ の場合も含んでいることに気付く ((4.14) 参照)。Mathieu 方程式 (4.15) に対応するパラメーター A, q は次のように表される：

$$A = 1 + \sigma\tau^{4(2-n)/3} = 1 + \sigma \left(\frac{q}{2}\right)^{4(2-n)/3} \quad (\text{B.5})$$

$$q = \frac{2}{\tau}$$

ただし、 $\sigma = (k/cm)^2(cnt_0m)^{4(n-2)/3}$ である。Mathieu 方程式の安定・不安定バンドチャートを見ると $n = 1$ の場合と同様、パラメーター共鳴によって \tilde{Q} の振幅が成長することがわかる (図 8 参照)。しかしながら時間が経つにつれトラジェクトリは安定領域へと移動し、振幅一定値を保って振動する。

\tilde{Q} の時間依存性は $n = 1$ の場合と同様にくりこみ群的手法によって解析できる。やり方は $n = 1$ と同じであり、ここでは結果だけを記す：

$$\tilde{Q} \simeq \mathcal{A}(\tau)e^{i\tau} + \mathcal{A}^*(\tau)e^{-i\tau} ; \quad \frac{d\mathcal{A}}{d\tau} + \frac{1}{2i} \left(\frac{k}{cm}\right)^2 a^{4(n-2)/(n+1)} \mathcal{A} + \frac{1}{\tau} \mathcal{A}^* = 0. \quad (\text{B.6})$$

$\mathcal{A} = (u + iv)/2$ と記すと u は

$$u_{,\tau\tau} - \frac{4}{3\tau}(n-2)u_\tau + \left[\frac{\sigma^2}{4}\tau^{8(n-2)/3} - \left(\frac{4}{3}n - \frac{2}{3}\right)\frac{1}{\tau^2} \right] u = 0 \quad (\text{B.7})$$

に従う。これより Bessel 関数を用いて

$$u = \tau^{(4n-5)/6} \mathbf{Z}_{\pm\nu} \left(\frac{3\sigma}{2(4n-5)} \tau^{(4n-5)/3} \right), \quad \nu = \frac{4n+1}{2(4n-5)} \quad (\text{B.8})$$

と求まる。一方、 v からは

$$v = \mp \tau^{(4n-5)/6} \mathbf{Z}_{\pm(\nu-1)} \left(\frac{3\sigma}{2(4n-5)} \tau^{(4n-5)/3} \right), \quad (\text{B.9})$$

を得る。長波長極限 ($k \rightarrow 0$) における \tilde{Q} の成長・減衰モードは

$$\tilde{Q} \propto a^{3/(n+1)} \sin \tau, \quad a^{-3/(n+1)} \cos \tau \quad (\text{B.10})$$

となる。これよりメトリック摂動のふるまいは以下のように求まる：

$$\begin{aligned}\Phi &\propto \text{constant}, & \tau^{-(4n+1)/3} &= \frac{H}{a} \\ \zeta &\propto \text{constant}, & \frac{a^{-6/(n+1)}}{\tan \tau + \mathcal{O}(1/\tau)} &\end{aligned}\tag{B.11}$$

Bardeen パラメーターの減衰モードには $n = 1$ の場合と同じように周期的なピークが現れる。

B.2 2成分スカラー場モデルにおける背景場の弱非線型解析

この節では本文 A 章で解説した、2成分スカラー場モデルの非線型な背景場方程式に対する RG 法の適用について述べる。5.3節で説明した取り扱いに従って展開列 (5.36) を (5.1)(5.3)(5.3) に代入し、方程式を ϵ のべきで展開する。無次元量 (5.33) による表示で

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\epsilon^1) : \quad & x_1'' + x_1 = 0, \\ & y_1'' + y_1 = 0, \\ & h_1 = \sqrt{x_1'^2 + x_1^2 + y_1'^2 + y_1^2}, \\ \mathcal{O}(\epsilon^2) : \quad & x_2'' + x_2 = -3h_1x_1' - \tilde{\lambda}y_1^2x_1, \\ & y_2'' + y_2 = -3h_1y_1' - \sigma y_1 - \tilde{\lambda}x_1^2y_1. \end{aligned}$$

を得る。まず上式を ϵ のオーダー毎に解いていく。 $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ までの解として

$$\begin{aligned} x = \epsilon & \left[A_0 + \epsilon(\tau - \tau_0) \left\{ -\frac{3}{2}h_1A_0 + i\frac{\tilde{\lambda}}{2} (2|B_0|^2A_0 + B_0^2A_0^*) \right\} \right] e^{i\tau} \\ & + \epsilon^2 \frac{\tilde{\lambda}}{8} B_0^2 A_0 e^{i3\tau} + c.c. + \mathcal{O}(\epsilon^3) \end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned} y = \epsilon & \left[B_0 + \epsilon(\tau - \tau_0) \left\{ -\frac{3}{2}h_1B_0 + i\frac{\tilde{\lambda}}{2} (2|A_0|^2B_0 + A_0^2B_0^*) + \frac{i}{2}\sigma B_0 \right\} \right] e^{i\tau} \\ & + \epsilon^2 \frac{\tilde{\lambda}}{8} A_0^2 B_0 e^{i3\tau} + c.c. + \mathcal{O}(\epsilon^3), \end{aligned}$$

を得る。 $c.c.$ は複素共役を表し、 h_1 は

$$h_1 = 2\sqrt{|A_0|^2 + |B_0|^2}. \quad (\text{B.12})$$

で与えられる。 A_0, B_0 は初期時刻 $\tau = \tau_0$ における初期振幅である。 $(\tau - \tau_0)$ に比例して大きくなる永年項の存在のため、得られた解の表式は $\epsilon(\tau - \tau_0) \lesssim 1$ でしか適用できない。永年項による摂動展開の発散を取り除くために任意パラメーター μ を導入し、初期時刻 τ_0 を μ におきかえる操作を行う。 $\tau - \tau_0$ を $\tau - \mu + \mu - \tau_0$ に分離し、 $A_0 = A(\mu)Z_A(\tau_0, \mu)$, $B_0 = B(\mu)Z_B(\tau_0, \mu)$ によって定義されるくりこみ定数 Z_A, Z_B に $\mu - \tau_0$ を含む項を吸収させる。

この結果、 μ に依存する解の表式が得られる：

$$x = \epsilon \left[A + \epsilon(\tau - \mu) \left\{ -\frac{3}{2}h_1 A + i\frac{\tilde{\lambda}}{2} (2|B|^2 A + B^2 A^*) \right\} \right] e^{i\tau} + \epsilon^2 \frac{\tilde{\lambda}}{8} B^2 A e^{i3\tau} + c.c. + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (\text{B.13})$$

$$y = \epsilon \left[B + \epsilon(\tau - \mu) \left\{ -\frac{3}{2}h_1 B + i\frac{\tilde{\lambda}}{2} (2|A|^2 B + A^2 B^*) + \frac{i}{2}\sigma B \right\} \right] e^{i\tau} + \epsilon^2 \frac{\tilde{\lambda}}{8} A^2 B e^{i3\tau} + c.c. + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (\text{B.14})$$

方程式にはこうしたパラメーターの依存性がないことから任意の時刻 τ に対して、 $(\partial\varphi_i/\partial\mu)_\tau = 0$ が要請される。その結果、くりこみ群方程式として

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\mu} &= \epsilon \left[-\frac{3}{2}h_1 A + i\frac{\tilde{\lambda}}{2} (2|B|^2 A + B^2 A^*) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \frac{dB}{d\mu} &= \epsilon \left[-\frac{3}{2}h_1 B + \frac{i}{2}\sigma B + i\frac{\tilde{\lambda}}{2} (2|A|^2 B + A^2 B^*) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

が導かれる。 $\mu \equiv \tau$ とおくことで (B.13)(B.14) から永年項が取り除かれた表式が得られる。さらにくりこまれた振幅 A, B を

$$A = \frac{1}{2}h_1 \cos \Theta e^{i\theta}, \quad B = \frac{1}{2}h_1 \sin \Theta e^{i\psi},$$

のように書き表しておけば、これと (B.12) より本文 (5.37) 式の表式を得る。またくりこみ群方程式は以下のように書き直される。

$$\Theta' = \epsilon \frac{\tilde{\lambda}}{16} h_1^2 \sin \gamma \sin 2\Theta, \quad (\text{B.15})$$

$$\gamma' = -1 + \epsilon \frac{\tilde{\lambda}}{4} h_1^2 \cos 2\Theta (2 + \cos \gamma), \quad (\text{B.16})$$

$$\theta' = \epsilon \frac{\tilde{\lambda}}{8} h_1^2 \cos \gamma \sin^2 \Theta, \quad \gamma = 2(\psi - \theta), \quad (\text{B.17})$$

$$h_1' = -\epsilon \frac{3}{2} h_1^2, \quad (\text{B.18})$$

ここで $\epsilon\sigma = -1$ とおいた。

C 背景量のパラメーター微分から求まる長波長摂動解

C.1 パラメーター微分より得られる摂動解

本文 5.2.2 節で述べた、背景場の方程式に対するパラメーター微分から $(\frac{d\phi}{d\alpha}, \frac{d\chi}{d\alpha})$ 、 $(\frac{d\phi}{dC}, \frac{d\chi}{dC})$ が Mukhanov 方程式の長波長極限の解になることを示す。簡潔のためここではパラメーター微分 C の場合だけを扱う。 α に関する微分も同様にして示すことができる。

(5.1)-(5.4) で与えられている背景場の方程式を時間パラメーター $\alpha = \log a$ で書き直す：

$$3H^2 = \kappa \left(\frac{H^2}{2} (\phi_\alpha^2 + \chi_\alpha^2) + V(\phi, \chi) \right), \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{H_\alpha}{H} = -\frac{\kappa}{2} (\phi_\alpha^2 + \chi_\alpha^2), \quad (\text{C.2})$$

$$\phi_{\alpha\alpha} + \left(3 + \frac{H_\alpha}{H}\right) \phi_\alpha + \frac{V_\phi}{H^2} = 0, \quad (\text{C.3})$$

$$\chi_{\alpha\alpha} + \left(3 + \frac{H_\alpha}{H}\right) \chi_\alpha + \frac{V_\chi}{H^2} = 0, \quad (\text{C.4})$$

まず (C.3)(C.4) をパラメーター C で微分する：

$$(\phi, C)_{\alpha\alpha} + \left(3 + \frac{H_\alpha}{H}\right) (\phi, C)_\alpha + \left(\frac{V_\phi}{H^2}\right)_{,C} + \left(\frac{V}{H^2}\right)_{,C} \phi_\alpha = 0, \quad (\text{C.5})$$

$$(\chi, C)_{\alpha\alpha} + \left(3 + \frac{H_\alpha}{H}\right) (\chi, C)_\alpha + \left(\frac{V_\chi}{H^2}\right)_{,C} + \left(\frac{V}{H^2}\right)_{,C} \chi_\alpha = 0. \quad (\text{C.6})$$

(C.5)(C.6) に現れる第 3、4 項をさらに書きかえるため、背景場方程式が以下の Hamilton-Jacobi の関係式で表される力学系と等価であることを用いる [41]：

$$3H^2 = \frac{2}{\kappa} (H_\phi^2 + H_\chi^2) + \kappa V ; \quad H = H(\phi, \chi), \quad (\text{C.7})$$

$$\phi_\alpha = -\frac{2}{\kappa} \frac{H_\phi}{H}, \quad \chi_\alpha = -\frac{2}{\kappa} \frac{H_\chi}{H}. \quad (\text{C.8})$$

これらの関係を使うと、

$$\begin{aligned} \left(\frac{V_\phi}{H^2}\right)_{,C} + \left(\frac{V}{H^2}\right)_{,C} \phi_\alpha &= \left(V_{\phi\phi} + 2\kappa V_\phi \phi_\alpha + \kappa^2 \phi_\alpha^2 V\right) \frac{\phi, C}{H^2} \\ &\quad + \left(V_{\phi\chi} + \kappa(V_\phi \chi_\alpha + V_\chi \phi_\alpha) + \kappa^2 \phi_\alpha \chi_\alpha V\right) \frac{\chi, C}{H^2} \\ &= \left\{ V_{\phi\phi} - \frac{\kappa}{a^3} \frac{d}{dt} \left(\frac{a^3}{H} \dot{\phi}^2 \right) \right\} \frac{\phi, C}{H^2} + \left\{ V_{\phi\chi} - \frac{\kappa}{a^3} \frac{d}{dt} \left(\frac{a^3}{H} \dot{\phi} \dot{\chi} \right) \right\} \frac{\chi, C}{H^2}. \end{aligned}$$

という形に帰着する。同様の操作をくり返すことで

$$\left(\frac{V_\chi}{H^2}\right)_{,C} + \left(\frac{V}{H^2}\right)_{,C} \phi_\alpha = \left\{ V_{\chi\chi} - \frac{\kappa}{a^3} \frac{d}{dt} \left(\frac{a^3}{H} \dot{\chi}^2 \right) \right\} \frac{\chi_{,C}}{H^2} + \left\{ V_{\phi\chi} - \frac{\kappa}{a^3} \frac{d}{dt} \left(\frac{a^3}{H} \dot{\phi} \dot{\chi} \right) \right\} \frac{\phi_{,C}}{H^2}.$$

を得る。最後に得られた表式において $(\phi_{,C}, \chi_{,C})$ を (Q_ϕ, Q_χ) に置きかえると Mukhanov 方程式 (5.8) の長波長極限と同じ表式を得る。従って $(d\phi/dC, d\chi/dC)$ は Mukhanov 変数に対する独立解を与えることが示される。

C.2 関係 (5.25) について

ここでは 5.2.2 節において 2 成分スカラー場の長波長摂動解を構成する時に用いた関係式 (5.25) が満足されることを示す。関係 (5.25) は以下のように書き表すことが出来る：

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}^{-1})_{,\alpha}(\mathbf{X}^{-1})^T &= \mathbf{X}^{-1}(\mathbf{X}_{,\alpha}^{-1})^T \\ \iff \mathbf{X}(\mathbf{X}^{-1})_{,\alpha} &= (\mathbf{X}^{-1})_{,\alpha}^T \mathbf{X}^T = \{\mathbf{X}(\mathbf{X}^{-1})_{,\alpha}\}^T \\ \iff \mathbf{X}_{,\alpha}(\mathbf{X}^{-1}) &= \{\mathbf{X}_{,\alpha}(\mathbf{X}^{-1})\}^T \end{aligned}$$

第 2 式への変形は $(\mathbf{X}^{-1})^T = (\mathbf{X}^T)^{-1}$ を、第 3 式への変形は $(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^{-1})_{,\alpha} = 0$ を用いた。従って (5.25) が満足するためには

$$\{\mathbf{X}_{,\alpha}(\mathbf{X}^{-1})\}_{12} = \{\mathbf{X}_{,\alpha}(\mathbf{X}^{-1})\}_{21} \implies \phi_{,C\alpha}\phi_{,\alpha} + \chi_{,C\alpha}\chi_{,\alpha} = \phi_{,\alpha\alpha}\phi_{,C} + \chi_{,\alpha\alpha}\chi_{,C} \quad (\text{C.9})$$

が示されれば十分である。

関係 (C.9) が成り立つことは、背景場の方程式 (C.1)-(C.4) から示すことができる。(C.1) をパラメーター C で微分して (C.2) を代入すると

$$\frac{2}{\kappa} \left(3 + \frac{H_{,\alpha}}{H} \right) H H_{,C} - (V_{\phi}\phi_{,C} + V_{\chi}\chi_{,C}) = H^2 (\phi_{,\alpha}\phi_{,\alpha C} + \chi_{,\alpha}\chi_{,\alpha C})$$

が得られる。ここで $H_{,C} = H_{\phi}\phi_{,C} + H_{\chi}\chi_{,C}$ であることを用いて Hamilton-Jacobi の関係 (C.8) を代入すると

$$-\left(3 + \frac{H_{,\alpha}}{H} \right) (\phi_{,\alpha}\phi_{,C} + \chi_{,\alpha}\chi_{,C}) - \left(\frac{V_{\phi}}{H^2}\phi_{,C} + \frac{V_{\chi}}{H^2}\chi_{,C} \right) = H^2 (\phi_{,\alpha}\phi_{,\alpha C} + \chi_{,\alpha}\chi_{,\alpha C})$$

従って上式は場の運動方程式 (C.3)-(C.4) から

$$\phi_{,\alpha\alpha}\phi_{,C} + \chi_{,\alpha\alpha}\chi_{,C} = \phi_{,\alpha}\phi_{,\alpha C} + \chi_{,\alpha}\chi_{,\alpha C} \quad (\text{C.10})$$

と書き直せる。これは (C.9) に等しい。よって関係 (5.25) は満足されることが示された。

参考文献

- [1] A.Guth, Phys.Rev.D **23** (1981) 347.
- [2] K.Sato, Mon.Not.R.Astro.Soc. **195** (1981) 467.
- [3] A.Vilenkin and L.H.Ford, Phys.Rev.D (1982) 1231.
- [4] A.D.Linde, Phys.Lett.B **116** (1982) 335.
- [5] S.W.Hawking, Phys.Lett.B **115** (1982) 295.
- [6] A.H.Guth and S.Y.Pi, Phys.Rev.Lett. **49** (1982) 1110.
- [7] A.A.Starobinsky, Phys.Lett.B **117** (1982) 175.
- [8] e.g, T.Tanaka and M.Sakagami, pre-print gr-qc/ 9705054, and references there in.
- [9] A.D.Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology* (Harwood, Chur, Switzerland, 1990)
- [10] A.D.Linde, Phys.Lett.B **259** (1991) 38; Phys.Rev.D **49** (1994) 748.
- [11] J.G.Bellido and D.Wands, Phys.Rev.D **52** (1995) 6739.
- [12] 小玉英雄, 相对論的宇宙論, (丸善, 1991).
- [13] L.A.Kofman, *3rd RESCEU International Symposium "Particle Cosmology", Tokyo, 1997.*
- [14] L.A.Kofman, A.D.Linde and A.A.Starobinsky, Phys.Rev.Lett. **73** (1994) 3195.
- [15] Y.Shtanov, J.Traschen and R.Brandenberger, Phys.Rev.D **51** (1995) 5438.
- [16] M.Yoshimura, Prog.Theor.Phys. **94** (1995) 873.
- [17] A.Dolgov and D.Kirilova, Sov.Nucl.Phys. **51** (1990) 273.
- [18] L.A.Kofman, A.D.Linde and A.A.Starobinsky, Phys.Rev.D **56** (1997) 3258.
- [19] L.A.Kofman, A.D.Linde and A.A.Starobinsky, Phy.Rev.Lett **76** (1996) 1011.

- [20] E.W.Kolb, A.D.Linde and A.Riotto, Phys.Rev.Lett, **77** (1996) 4290.
- [21] P.B.Greene, L.A.Kofman, A.D.Linde and A.A.Starobinsky, hep-ph/ 9705347.
- [22] D.Boyanovsky, H.J de Vega, R.Holman and J.F.J.Salgado, Phys.Rev.D **54** (1996)7570.
- [23] J.G.Bellido and A.D.Linde, hep-ph/ 9711360.
- [24] S.Khlebnikov and I.Tkachev, Phys.Rev.Lett **77** (1996) 219.
- [25] S.Khlebnikov and I.Tkachev, Phys.Lett.B **390** (1997) 80.
- [26] T.Prokopec and T.G.Roos, Phys.Rev.D **55** (1997) 3768.
- [27] S.Khlebnikov and I.Tkachev, hep-ph/ 9610477.
- [28] M.Abramowitz and I.Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, (Dover, New York, 1977).
- [29] H.Kodama and M.Sasaki, Prog.Theor.Phys.Suppl. **78** (1984) 1.
- [30] J.Bardeen, Phys.Rev.D **22** (1980) 1882.
- [31] V.F.Mukhanov,H.A.Feldman and R.Brandenberger, Phys.Rep. **215** (1992) 203.
- [32] J.G.Bellido and D.Wands, Phys.Rev.D **53** (1996) 5437.
- [33] J.Hwang, Astrophys.J. **375** (1991) 443.
- [34] R.K.Sachs and A.M.Wolfe, Astrophys.J. **147** (1967) 73.
- [35] D.S.Salopek, J.R.Bond and J.M.Bardeen, Phys.Rev.D **40** (1989) 1753.
- [36] N.Deruelle and V.F.Mukhanov, Phys.Rev.D **52** (1995) 5549.
- [37] M.Den and K.Tomita, Prog.Theor.Phys. **72** (1984) 989.
- [38] R.G.Moorhouse, A.B.Heinriques and L.E.Mendes, astro-ph/ 9705016.
- [39] V.F.Mukhanov, Sov.Phys.JETP **68** (1988) 1297.
- [40] D.Langlois, Class.Quantum.Grav. **11** (1994) 389.

- [41] D.S.Salopek, Phys.Rev.D **52** (1995) 5563.
- [42] Y.Nambu and A.Taruya, Prog.Theor.Phys. **97** (1997) 83.
- [43] H.Kodama and T.Hamazaki, Prog.Theor.Phys. **96** (1996) 949.
- [44] J.Hwang, Phys.Lett.B **401** (1997) 241.
- [45] T.Hamazaki and H.Kodama, Prog.Theor.Phys. **96** (1996) 1123.
- [46] A.Taruya and Y.Nambu, preprint, gr-qc/ 9709035 (DPNU-97-37).
- [47] J.Hwang, gr-qc/ 9608018.
- [48] J.Hwang, Phys.Rev.D **48** (1993) 3544.
- [49] D.Polarski and A.A.Starobinski, Phys.Rev.D **50** (1994) 6123.
- [50] A.R.Liddle and D.H.Lyth, Phys.Rep. **231** (1993) 1.
- [51] C.L.Bennett *et al.*, Astrophys.J.**464**, (1996) L1; K.M. Gorski *et al.*, *ibid.* **464**, (1996) L11.
- [52] D.Brill and J.Hartle, Phys.Rev. **135**, 1 (1964) B271.
- [53] R.Isaacson, Phys.Rev. **166**, 2 (1968) 1263-1271 and 1272-1280.
- [54] L.Abramo, R.Brandenberger and V.F.Mukhanov, gr-qc/ 9704037.
- [55] E.J.Hinch, *Perturbation Methods*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
- [56] A.H.Nayfeh, *Introduction to Perturbation Techniques*, (A Wiley-Interscience Publication, 1993).
- [57] L.Y.Chen, N.Goldenfeld and Y.Oono, Phys.Rev.E **54** (1996) 376.
- [58] T.Kunihiro, Prog.Theor.Phys. **94** (1995) 503.