物理に必要な数学について

2006年6月7日 (於　茨城大学教育学部)

東武大(高エネルギー加速器研究機構)
azumat@post.kek.jp
http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~azuma/index.html

目次

§1 - はじめに

物理学の重要性　⇒　自然科学における基礎的な学問

- 少数の法則から、様々な自然現象を記述
- 論理的な思考能力を身につける訓練

初等教育における物理嫌い

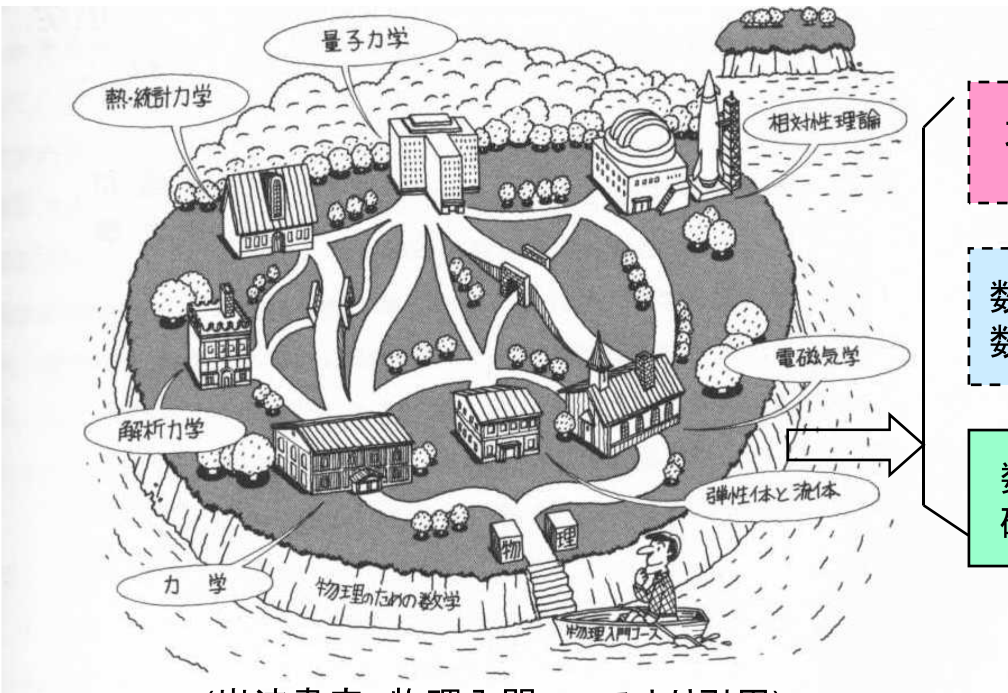
子どもの理科離れ：教師の卵から改善を！？
「物理好き」２割止まり－－経産省調査

教育系学部に在籍し、教職を目指す大学生の6割が高校で物理を学ばず、
「物理が好き」な学生も2割に満たないことが経済産業省の調査で分かった。
物理は理科学習の基礎分野で、同省は「子どもの理科離れを防ぐには、
先生の卵の物理嫌いを改善する必要がある」と提言している。
(毎日新聞　2006年2月7日　の記事より引用)

大学での物理: 力学、解析力学、電磁気学、量子力学、統計熱力学、
相対性理論等

数学を用いて記述される ⇒ 数学の理解は不可欠。

必要な数学の知識 (大学レベル以上):
微分積分、線形代数、ベクトル解析、複素函数論、微分方程式等



(岩波書店 物理入門コースより引用)

大学レベルの諸々の高度な数学

↑

数学III: 諸々の関数の微分積分法
数学C: 二次曲線、(2×2までの)行列、統計処理

↑

数学I,II,A,B :三角関数、複素平面の基礎、
確率、数列、多項式の微分積分など

参考文献:
微分積分、線形代数の教科書 ⇒ 和書、洋書ともに数え切れないほど多数。

数学III,Cの学習:
「チャート式基礎からの数学III+C 」 ISBN 4410105930

その他の参考書
「オイラーの贈物」 (ちくま学芸文庫) 吉田武 ISBN 4-480-08675-7
「物理数学の基礎」(サイエンス社) 香取眞理 ASIN: 4781909817
「物理数学の直感的方法」(通商産業研究社) 長沼伸一郎 ISBN: 4924460893

§ 2- 微分積分について

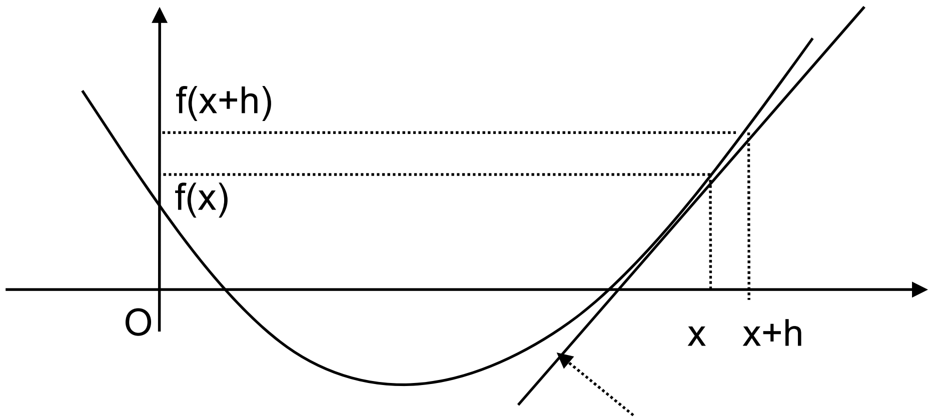
微分積分*(differential and integral calculus)*で扱う事柄

- 1st step : 多項式の微分積分法 (数学II)
- 2nd step : 諸々の関数(三角関数、対数関数など)の微分積分法(数学III)
- 3rd step : 極限･連続性などの厳密な定義、
  Taylor展開、多変数関数の偏微分及び重積分
  (Fourier展開、常微分方程式等)

(*) 高校までの検定教科書と違って、大学の教科書では、
教科書によって扱っている範囲が違うことがある。

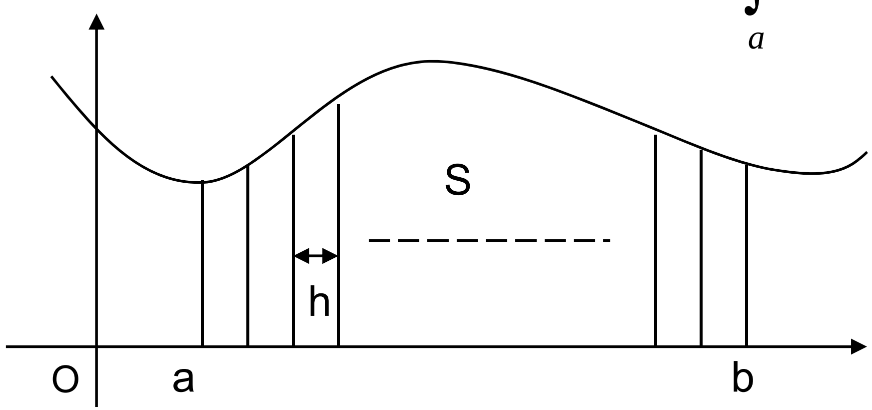
微分と積分について

微分: 関数の増減分を表す概念。 $\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$



df(x)/dxは、点xにおける曲線y=f(x)の接線の傾き。

積分: 曲線で囲まれた領域の面積。 $S = \int_a^b f(x)dx$



積分は、微分の逆演算。

力学と微分積分

諸々の物理量の関係

座標 x [m] (*coordinate*) $\xrightarrow{\text{微分}}$ 速度 v=dx/dt [m/s] (*velocity*)

速度 v=dx/dt [m/s] (*velocity*) $\xrightarrow[\text{積分}]{}$ 座標 x [m] (*coordinate*)

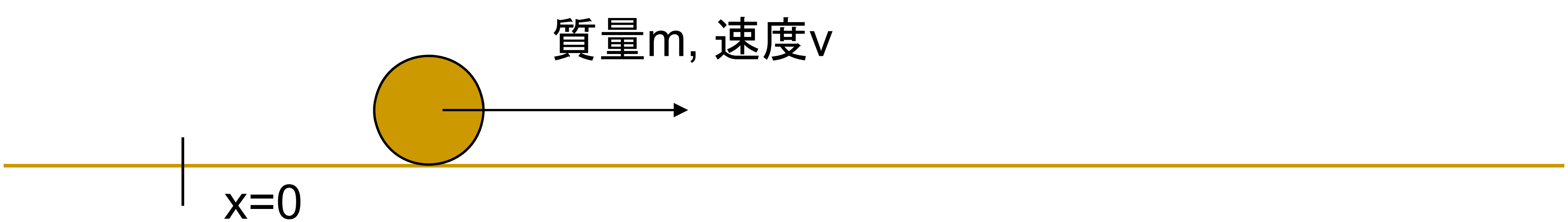
速度 v=dx/dt [m/s] (*velocity*) $\xrightarrow{\text{微分}}$ 加速度 a = d^{2}x/dt^2 [m/s^2] (*acceleration*)

加速度 a = d^{2}x/dt^2 [m/s^2] (*acceleration*) $\xrightarrow[\text{積分}]{}$ 速度 v=dx/dt [m/s] (*velocity*)

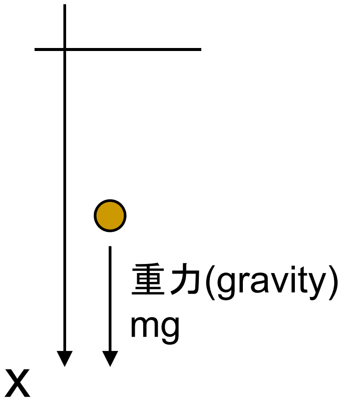
加速度 $\longleftrightarrow$ 力: Newtonの運動方程式 (*equation of motion*)

運動量 p=mv [kg m/s] (*momentum*) $\xrightarrow{\text{微分}}$ 力 F=ma = dp/dt [kg m/s^2] (*force*)

力 F=ma = dp/dt [kg m/s^2] (*force*) $\xrightarrow[\text{積分}]{}$ 運動量 p=mv [kg m/s] (*momentum*)



例題：等加速度運動　*(uniformly-accelerated motion)*



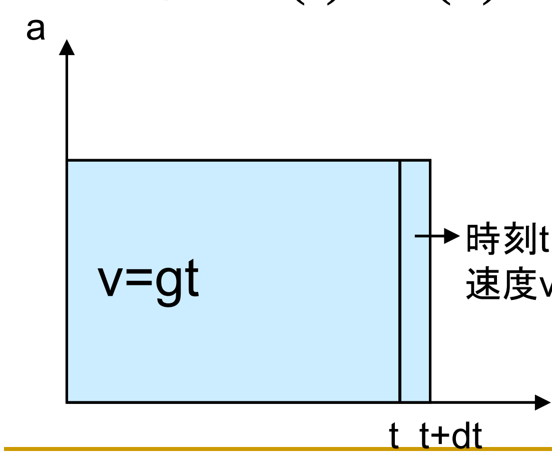
質量mの物体の自由落下運動*(free-falling motion)*

t=0で、x=0の地点から静かに(v=0)物体を落とす。
つまり、x(t=0)=0, v(t=0)=0。

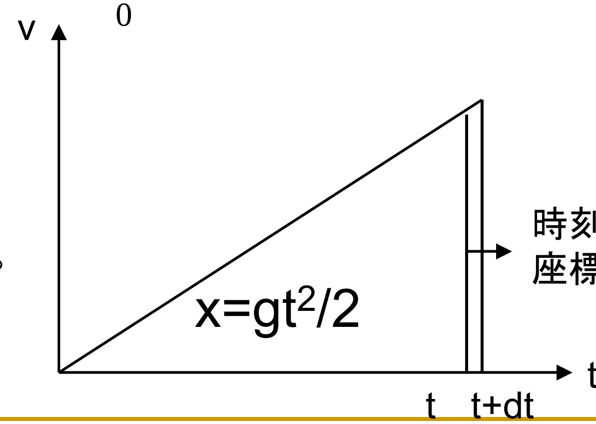
t秒後の速度と座標：

速度: $$v(t)=v(0)+\int_0^t g\,dt'=gt$$

座標: $$x(t)=x(0)+\int_0^t v(t')dt'=x(0)+\int_0^t gt'\,dt'=\tfrac{1}{2}gt^2$$



時刻tからt+dtの間に、
速度vがg×dtだけ増加。



時刻tからt+dtの間に、
座標xがv×dtだけ増加。

数学III及び大学で習う微分公式

三角関数*(trigonometric function)*

$$\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \cos x, \qquad \frac{d}{dx}\cos x = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = -\sin x$$

ネイピア*(Napier)*数

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.71828 \cdots$$

指数関数*(exponential function)*

$$\frac{d}{dx}a^x = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x \log a$$

[log aの底*(basis)*はe、つまり自然対数*(natural logarithm)*]

対数関数*(logarithmic function)*

$$\frac{d}{dx}\log x = \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h} = \frac{1}{x}$$

合成関数*(composed function)*

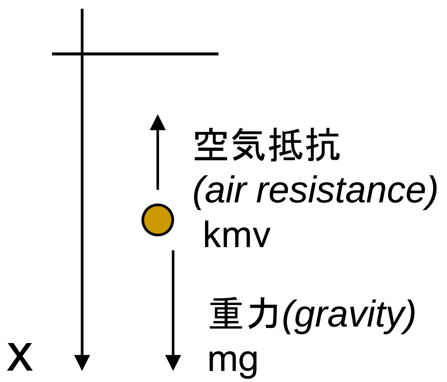
$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x)$$

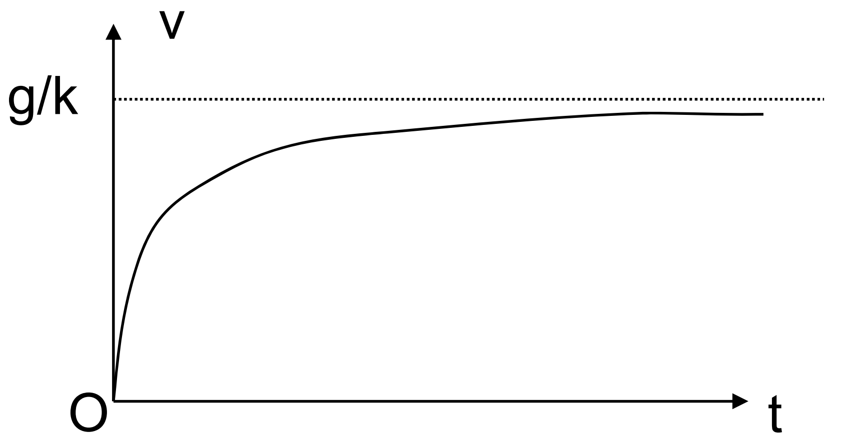
逆関数*(inverse function)*

y=f(x)の逆関数は、$x=f^{-1}(y)$ $\quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{f'(x)}$

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1<x<1), \qquad \frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

例題:空気抵抗*(air resistance)*がある系での落下運動*(falling motion)*





高校までの物理: 上記の落下運動の定性的な理解。

- 手を離した時点ではv=0なので、全く抵抗力を受けない。
- 加速するにつれて、空気抵抗が大きくなる。
- やがて、加速度が0になり、一定速度になる。

大学での物理: 微分方程式を用いた定量的な理解。

Newtonの運動方程式 *(equation of motion)*

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kmv$$

大学の微分積分では、変数分離法*(separation of variables)*を用いて解く。

$\dfrac{dv}{(v-\frac{g}{k})} = -kdt$ より、両辺を積分して次を得る(Cは積分定数)

$$\log(v-\tfrac{g}{k}) = -kt + C$$

つまり、 $v = \frac{g}{k} + C'e^{-kt}$ また、t=0で物体が静止(v=0)しているので

$C' = -\frac{g}{k}$ である。従って、速度は時間の関数として次のようになる。

$$v(t) = \frac{g}{k}(1-e^{-kt})$$

Taylor展開：関数の多項式による近似。

関数 f(x)は次の級数の和で書ける。

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \cdots$$

xが小さい(a=0)ときの、諸々の関数の近似

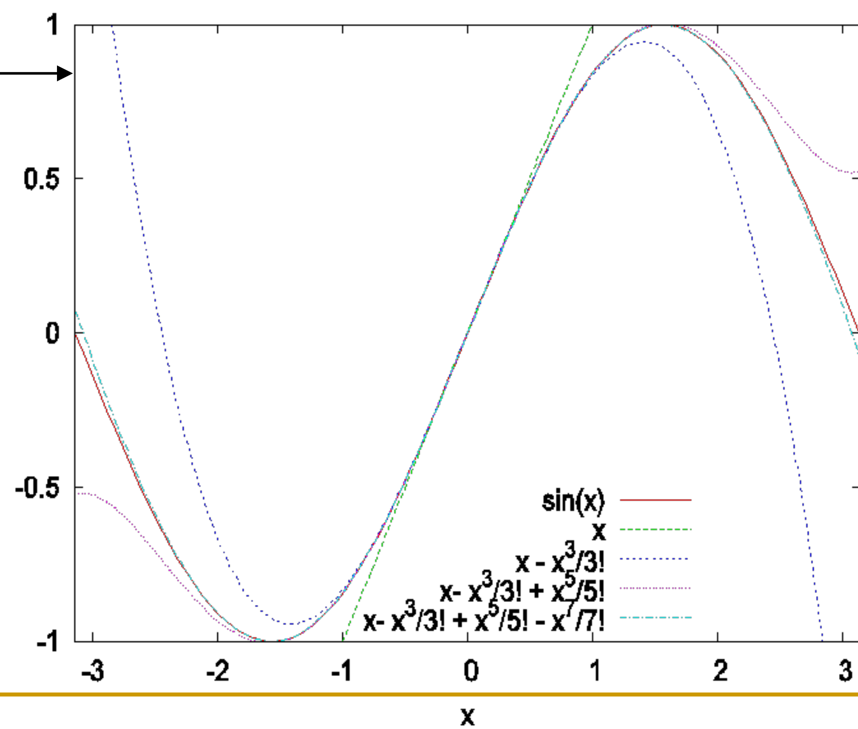
$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots,}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots,$$

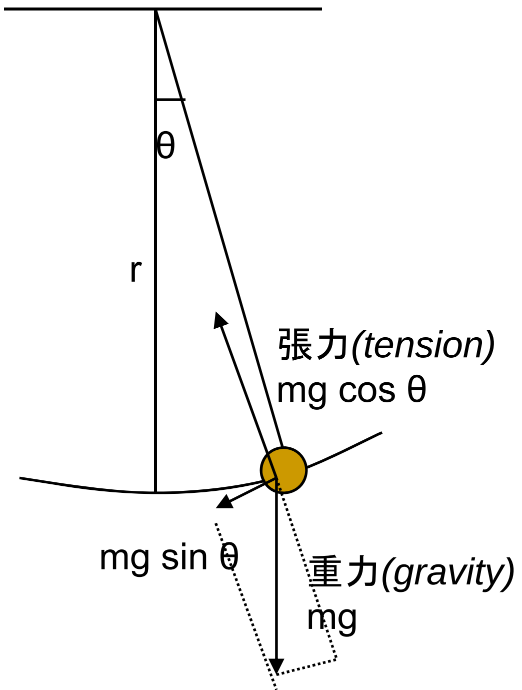
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots,$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots,$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots.$$



例題: 振り子*(pendulum)*の問題



接線方向の運動方程式： $m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\theta$

速度は、$v = r\frac{d\theta}{dt}$

|θ|<<1では、sinθ=θ+...

運動方程式：$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{r}\theta$

両辺に$\frac{d\theta}{dt}$ を掛けて、$\frac{d}{dt}[(\frac{d\theta}{dt})^2] = -\frac{r}{g}\frac{d(\theta^2)}{dt}$.

両辺をtについて積分して(aは積分定数から来る)

$(\frac{d\theta}{dt})^2 = \sqrt{\frac{g}{r}}\sqrt{a^2-\theta^2}$. つまり、次の式を得る。

$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{g}{r}}\sqrt{a^2-\theta^2}$ を変数分離法で解くと、

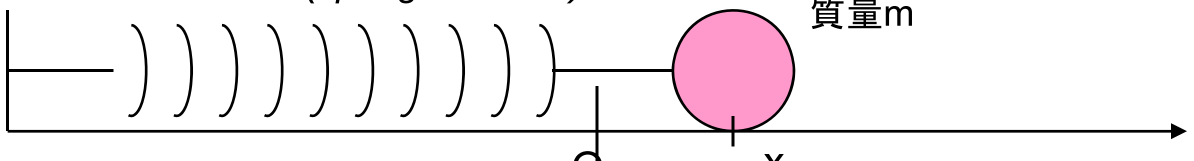
$$\sqrt{\frac{g}{r}}dt = \frac{d\theta}{\sqrt{a^2-\theta^2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{g}{r}}t + C = \arcsin(\frac{\theta}{a}).$$

よって、次の答えを得る。$\theta = a\sin(\sqrt{\frac{g}{r}}t + C)$.

振り子の周期*(period)* $T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$ は、質量に依存しない。

[参考] 単振動*(harmonic oscillation)*

振り子と同様の運動をする。



x: 自然長からの変位。次の運動方程式*(equation of motion)*に従う。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

- 変位:　$x = a\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + C)$
- 周期:　$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

§3- 線形代数について

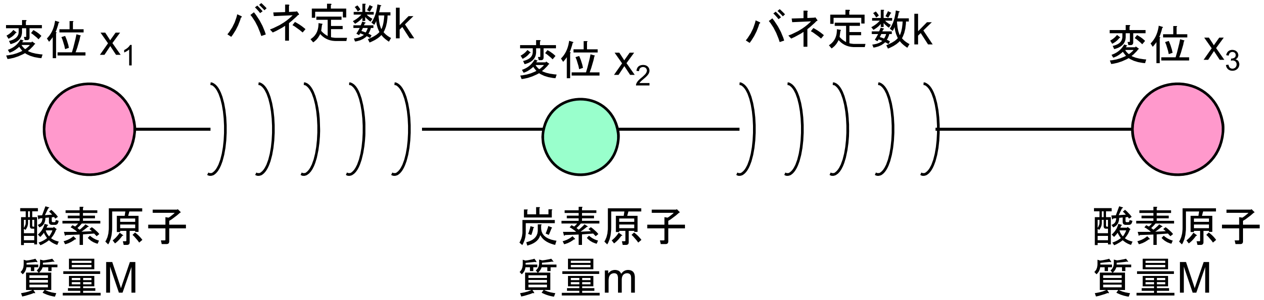
線形代数 *(linear algebra)*で扱う事柄:
行列*(matrix)*と一次変換*(linear transformation)*の進んだ理解

•数学C: 主に2×2までの行列の性質
•線形代数: 一般のN×N行列について勉強する。

物理への応用 (一例):
•多変数の1次連立方程式を解く。
•量子力学におけるエネルギー準位を求める。
(eigenvalue(固有値)という言葉は、量子力学の開祖Diracが命名。)
・*N×Nの行列による、自然界における相互作用の統一理論の定式化*
(詳細は、6月25日の公開講座にて講演)

例題: 複数の質点の運動

二酸化炭素CO_2分子の一直線上での原子の振動について。



運動方程式: $M\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2), \quad m\ddot{x}_2 = -k(2x_2 - x_1 - x_3), \quad M\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2)$

($\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ の意味である)

$x_i = A_i \cos(wt+\alpha)$ (i=1,2,3)として、上記の運動方程式に代入。

振幅*(amplitude)*に関する連立方程式

$$\begin{pmatrix} Mw^2 - k & k & 0 \\ k & mw^2 - 2k & k \\ 0 & k & Mw^2 - k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

振幅A_1,A_2,A_3が、A_1=A_2=A_3=0以外の解を持つための条件:
以下の行列式*(determinant)*がゼロになる。

$$\det\begin{pmatrix} Mw^2-k & k & 0 \\ k & mw^2-2k & k \\ 0 & k & Mw^2-k \end{pmatrix} = w^2(Mw^2-k)(mMw^2-(2M+m)k)=0$$

原子の振動数に対する条件: $w=\sqrt{\frac{k}{M}},\sqrt{\frac{k(2M+m)}{mM}}$

対応する振幅の条件:

$w=\sqrt{\frac{k}{M}}$のとき、$A_2=0,\quad A_3=-A_1$

$w=\sqrt{\frac{k(2M+m)}{Mm}}$のとき、$A_1=A_3,\quad A_2=-\frac{2M}{m}A_1$

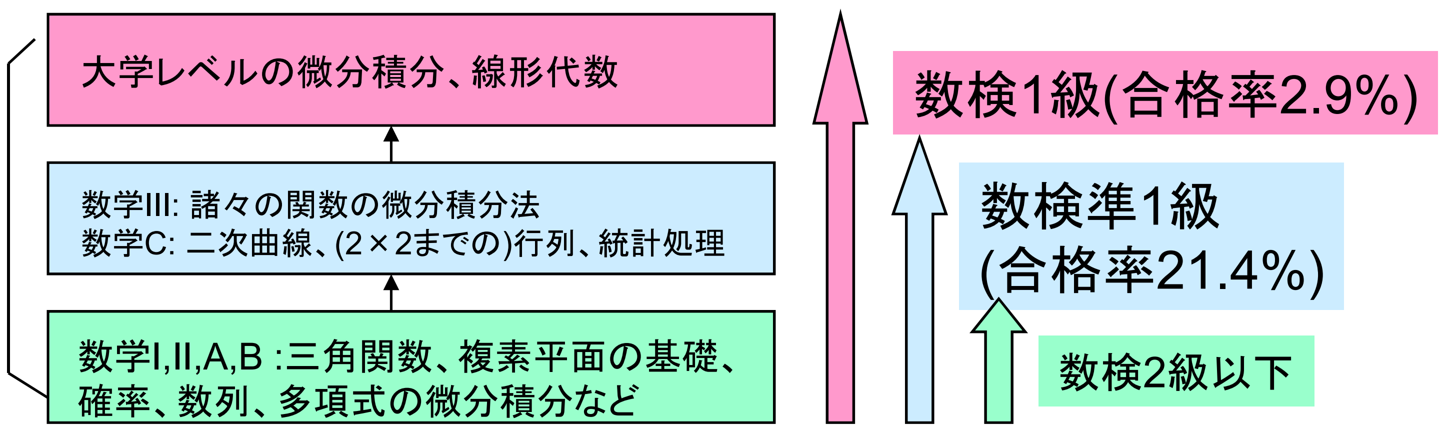
§4- 数学検定について

数学検定: (財) 日本数学検定協会によって実施。 http://www.suken.net/japan.html

2006年度の受験日: 7月23日 (申込締切 6月20日)、11月5日(申込締切10月2日)

[試験内容 (準1級、1級共通)]
1次試験 (計算技能検定) : 計算問題7問程度。答えのみ記入。試験時間60分、合格ライン約70%
2次試験 (数理技能検定) : 2題必須、2題選択、計4題。途中経過も含めて記述。
試験時間120分、合格ライン約60%
(1次試験、2次試験は同一日程で行なう)

数検準1級、1級の試験範囲



数検準1級の出題例

1次試験(計算技能検定)の出題例

不等式 |x-2|<x/2 を解きなさい。

[解答] 4/3<x<4

二次曲線 $x^2-3y^2=12$ の漸近線の方程式、及び焦点を求めなさい。

[解答] 漸近線: $y=\pm\frac{x}{\sqrt{3}}$ 焦点: $(\pm 4,0)$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{3n+3}-\sqrt{3n+2}}$ を求めなさい。

[解答] $\sqrt{3}$

2次試験(数理技能検定)の出題例

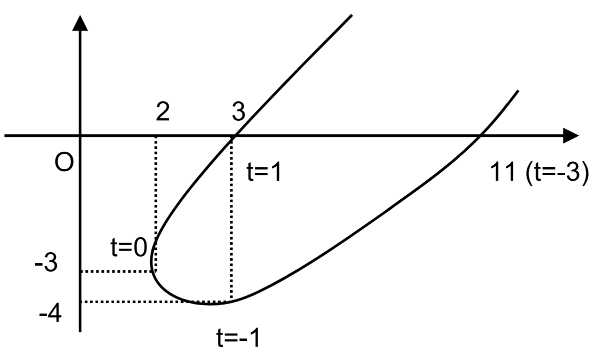
曲線Cを、$(x,y)=(t^2+2, t^2+2t-3)$ によって媒介変数表示された曲線とする。（tは全実数値を取る) 曲線Cとx軸で囲まれる領域の面積を求めなさい。

[解答] まず、(x,y)座標をtについて微分すると次を得る。

$$\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)=(2t, 2t+2)$$

これより、次の増減表を得る。

t	…	-1	…	0	…
dx/dt	-	-	-	0	+
dy/dt	-	0	+	+	+
x	減少	3	減少	2	増加
y	減少	-4	増加	-3	増加



また、t=1,-3においてy=0、つまり曲線Cはx軸と交わる。
交点は(3,0)と(11,0)である。
よって、グラフを図示すると左下にあるような形である。

求める面積Sは次で得られる。

$$S=\int_2^{11}(-y)dx-\int_2^{3}(-y)dx$$

$$=-\int_0^{-3}(t^2+2t-3)2tdt+\int_0^{1}(t^2+2t-3)2tdt$$

$$=\int_{-3}^{1}(2t^3+4t^2-6t)dt=\left[\frac{t^4}{2}+\frac{4t^3}{3}-3t^2\right]_{-3}^{1}=\frac{64}{3}.$$

数検1級の出題例

1次試験(計算技能検定)の出題例

行列式　$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を求めなさい。

[解答] -12

微分方程式 $\frac{dy}{dx} = y - y^2$ を、初期条件 $y(0) = \frac{1}{1+e}$ のもとで解きなさい。

[解答] $y = \frac{1}{1+e^{1-x}}$

2次試験(数理技能検定)の出題例

$\sum_{k=1}^{n} k^5$ を求めなさい(高校数学の復習)

[解答] 以下の数学Aで習った公式は既知のものとする。

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

これ等を導出したときと同様の方法で、まずk^{4}の和を求める。

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^5 - k^5] = 5\sum_{k=1}^{n} k^4 + 10\sum_{k=1}^{n} k^3 + 10\sum_{k=1}^{n} k^2 + 5\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = (n+1)^5 - 1$$

上記のk^{3}までの公式を代入して、次を得る。

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \tfrac{1}{30}(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n)$$

k^{5}の公式の導出も同様にして、次の式を用いる。

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^6 - k^6] = 6\sum_{k=1}^{n} k^5 + 15\sum_{k=1}^{n} k^4 + 20\sum_{k=1}^{n} k^3 + 15\sum_{k=1}^{n} k^2 + 6\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = (n+1)^6 - 1$$

k^{4}までの公式を代入して、次を得る。

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \tfrac{1}{12}(2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2)$$

$\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3k+2})$ を求めなさい(大学の微分積分の内容)

[解答]　先ず、この級数が収束することを示す。

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3k+2})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)(3k+2)}<\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{9k^2}<\frac{1}{9}(1+\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2})=\frac{2}{9}$$

より、この級数は収束する。そこで、次の関数を考える。

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{x^{3k+1}}{3k+1}-\frac{x^{3k+2}}{3k+2})$$

これを微分して、$g(x)=f'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(1-x)x^{3k}=\frac{1-x}{1-x^3}=\frac{1}{1+x+x^2}$　を得る。

求めたい級数はf(1)に相当するが、これはg(x)を積分することで得られる。g(x)の収束半径は|x|<1であるが、アーベルの定理よりg(x)は*閉区間*[0,1](x=1を含む)において連続である。

$$f(1)=\underbrace{f(0)}_{=0}+\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\frac{dx}{x^2+x+1}=\int_0^1\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

そこで、$t=\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})$ として変数変換をして、次を得る。

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3k+2}\right)=f(1)=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{dt}{t^2+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}[\arctan t]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

§5- まとめ

物理をよりよく理解するためには、数学の素養が不可欠。

中学・高校物理で習った力学の現象を、微分積分を用いて理解する。

数学学習の目標として、数検準1級、1級を紹介。

物理、数学の勉強をがんばっていきましょう。