場の理論のハミルトニアン形式とテンソルネットワーク法

伊藤　悦子(京大基研, 理研iTHEMS)

日本物理学会 2024年春季大会@オンライン, 2024/03/18

目次

- なぜ今、ハミルトニアン形式の(ゲージ)場の理論か？
- ラグランジアン形式からスピンハミルトニアンへ
1+1次元 U(1)ゲージ理論の場合
- ハミルトニアン形式での物理量の測定
- 高次元・非可換ゲージ理論の場合の課題と展望
- まとめ

ラグランジアン形式 or ハミルトニアン形式？

- K.Wilsonによるゲージ理論の格子正則化（1974)
- J.Kogut and L.Susskindによるハミルトニアン形式 (1975)

PHYSICAL REVIEW D VOLUME 11, NUMBER 2 15 JANUARY 1975

Hamiltonian formulation of Wilson's lattice gauge theories

John Kogut*
Laboratory of Nuclear Studies, Cornell University, Ithaca, New York 14853

Leonard Susskind†
Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, New York and Tel Aviv University, Ramat Aviv, Israel and Laboratory of Nuclear Studies, Cornell University, Ithaca, New York

(Received 9 July 1974)

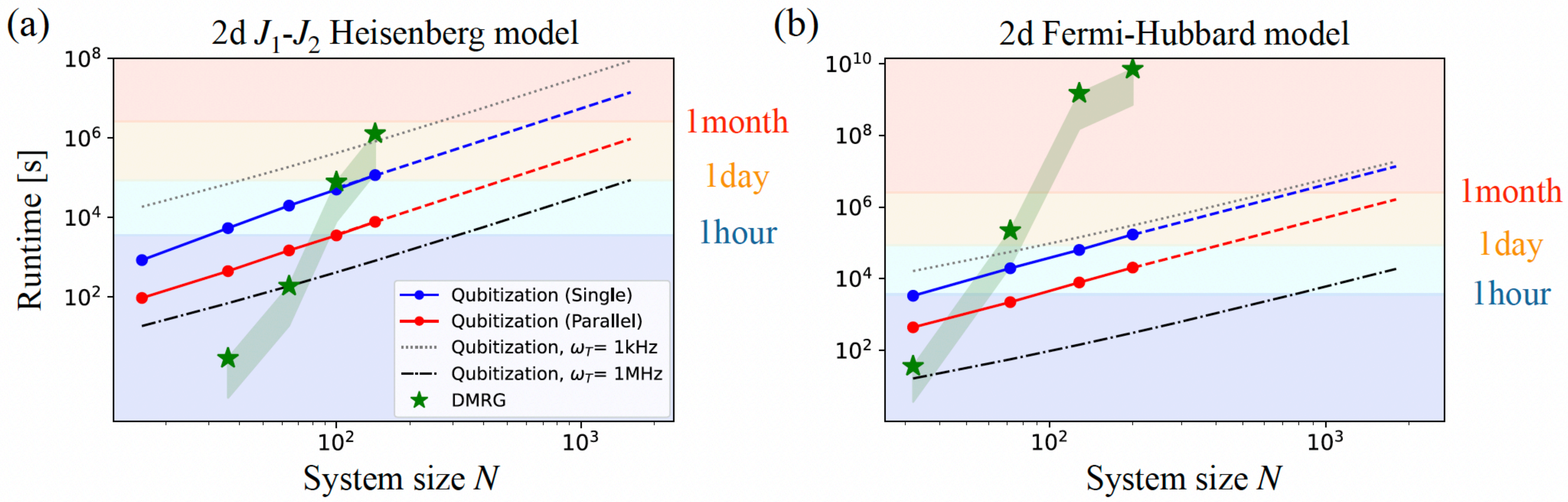
Wilson's lattice gauge model is presented as a canonical Hamiltonian theory. The structure of the model is reduced to the interactions of an infinite collection of coupled rigid rotators. The gauge-invariant configuration space consists of a collection of strings with quarks at their ends. The strings are lines of non-Abelian electric flux. In the strong-coupling limit the dynamics is best described in terms of these strings. Quark confinement is a result of the inability to break a string without producing a pair.

なぜ今、ハミルトニアン形式の場の理論か？

- 量子計算機の計算はハミルトニアン形式の場の理論の方が向いている

- テンソルネットワーク(TN)と量子計算(QC)が切磋琢磨している状況

Googleの量子超越性(2019)
「スパコンで1万年かかる問題をQCで200秒」
Y. Liu, et al. (2021)
「スパコン使ったTNで5分」



Yoshioka et al. (2022)

- 量子計算をやろうと思った素粒子・原子核理論の研究者が
物性理論で発展してきたテンソルネットワーク法(DMRG, PEPS)を使い始めた
cf.) ラグランジアン形式でのテンソルネットワーク法(TRG, 蔵増さん)

- 実時間発展はQCの方が良い？有限温度系はTNの方が良い？

ハミルトニアン形式での場の理論の長所・短所

😀 従来の格子QCD(重点サンプリング法)での符号問題なし

実時間発展

有限密度QCD (中性子星内部の物理)

トポロジカルθ項 (CPの破れ)

(cf.)「有限密度格子QCDと符号問題研究の現状と課題」

永田桂太郎, 素粒子論研究Vol.31 No.1

😀 励起状態を直接扱える

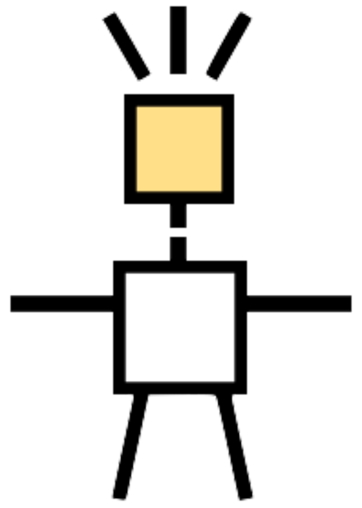
😔 ゲージ場(ボソン)のヒルベルト空間が無限大

(例外) 1+1次元 U(1)ゲージ理論(Schwinger model)の場合は

開境界条件を課しガウス則を解くとゲージ場の自由度を完全に取り除ける

テンソルネットワーク法：DMRG

- Density Matrix Renormalization Group(DMRG), White(1992)
  ハミルトニアンの固有状態を行列積(Matrix Product State, MPS)で表現
  ライブラリーが充実：ITensor written in C++, Julia, Fishman et al. 2022



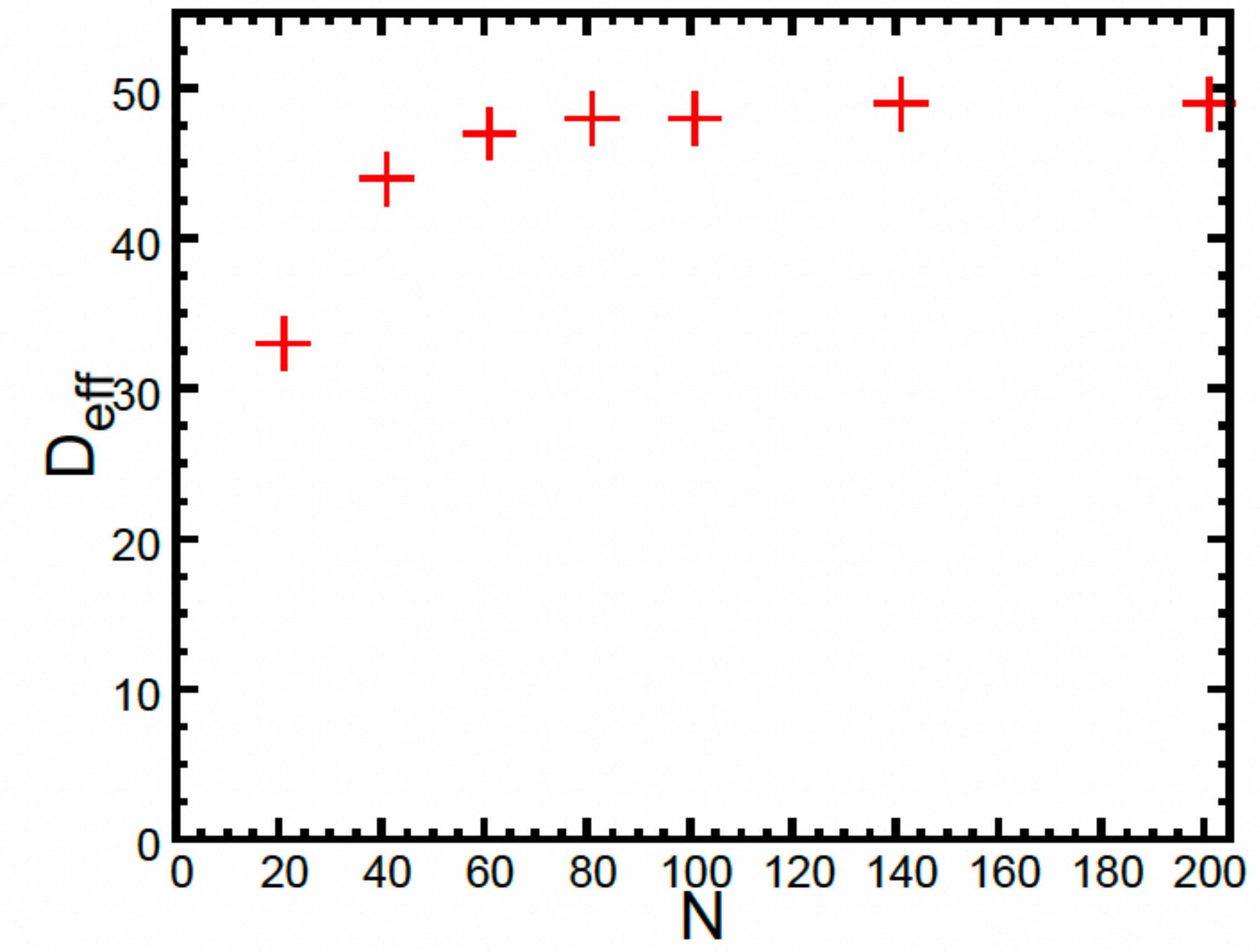
- 基底状態を見つけるのに変分アルゴリズム
  コスト関数：${}_{try}\langle\Psi|H|\Psi\rangle_{try}$, $|\Psi\rangle = \sum_{\{s_i\}} \mathrm{Tr}\left[A_0(s_0)\,A_1(s_1)\ \cdots\right]|s_0\,s_1\ \cdots\rangle$, $A_i(s_i)$が$D_{i-1}\times D_i$サイズの行列

  励起状態はコスト関数に下の状態との直交条件を加えて作る：$H \to H + \lambda \sum_{k=0}^{\ell-1} |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$

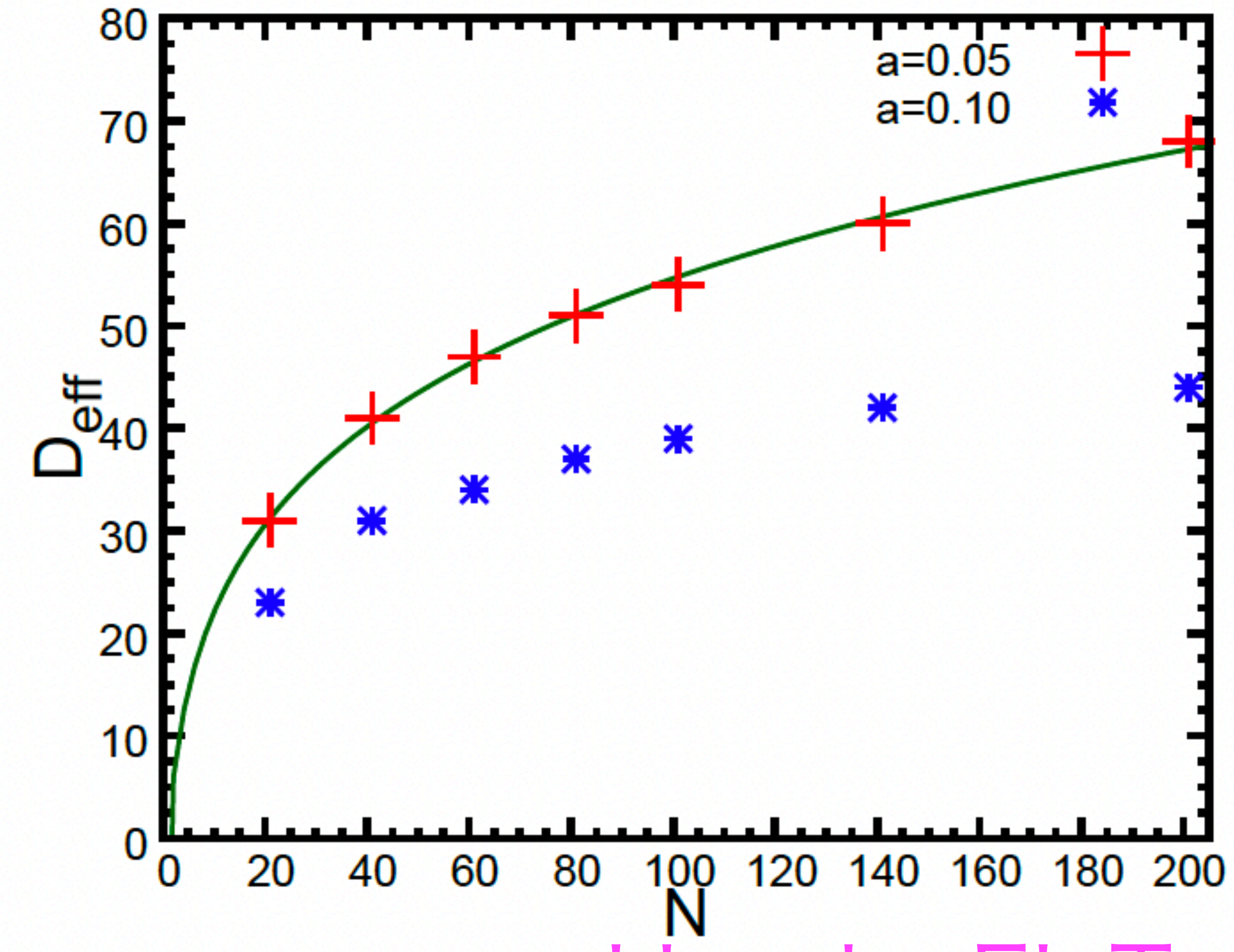
- 行列を特異値分解
  特異値にcutoff (ϵ)を導入し、小さいものは捨て行列サイズを小さくする
  必要な行列サイズ：ボンド次元(D_{eff})

ボンド次元とエンタングルメント

gapped理論のボンド次元



critical理論のボンド次元



Honda, El, Tanizaki(2022)

- gapped理論では系のサイズ$N \to \infty$で有限な値に収束

- criticalな理論では
エンタングルメント・エントロピー
$S_{EE} \sim \dfrac{c}{3} \ln N$に対して$D_{\mathrm{eff}} \geq O(N^{c/3})$

- 左図:電荷-q Schwingerの$\theta/(2\pi q) = 0.5$
連続極限でc=1/2のCFT
フィット関数 $c_1 N^{1/6} + c_2$

ラグランジアンから
スピンハミルトニアンへ
— U(1)ゲージ理論の場合 —

1+1次元 U(1)ゲージ理論：Schwinger model

- ラグランジアン (θ term)

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{g\theta_0}{4\pi}\epsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + igA_{\mu})\psi - m\bar{\psi}\psi$$

  従来のモンテカルロ法では符号問題

- masslessの時はボゾン化して厳密に解ける

- QCDの良いトイモデル

  (離散的) カイラル対称性

  スクリーニング/ 閉じ込め(分数電荷)ポテンシャル

  多フレーバーでは複合状態

Schwinger model + θ term (Nf=1)

Kogut and Susskind (1975)
Shaw et al. Quantum 4, 306 (2020)

- ラグランジアン

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \boxed{\frac{g\theta_0}{4\pi}\epsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu}} + i\bar{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + igA_{\mu})\psi - m\bar{\psi}\psi$$

Gauge fixing
Gauss law
Open BC
Jourdan-Winger trans.

- スピンハミルトニアン

$$H = J\sum_{n=0}^{N-2}\left[\underbrace{\sum_{i=0}^{n}\frac{Z_i + (-1)^i}{2}}_{\text{電場の運動項}} \boxed{+\frac{\theta_0}{2\pi}}\right]^2 + \underbrace{\frac{w}{2}\sum_{n=0}^{N-2}\left[X_nX_{n+1} + Y_nY_{n+1}\right] + \frac{m_{\mathrm{lat.}}}{2}\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^nZ_n}_{\text{電子の運動項・質量項}}$$

電場の運動項
(スピン変数で描かれる!)

電子の運動項・質量項

- θ_0 は定数背景電場

$$m_{\mathrm{lat}} := m - \frac{N_f g^2 a}{8}$$

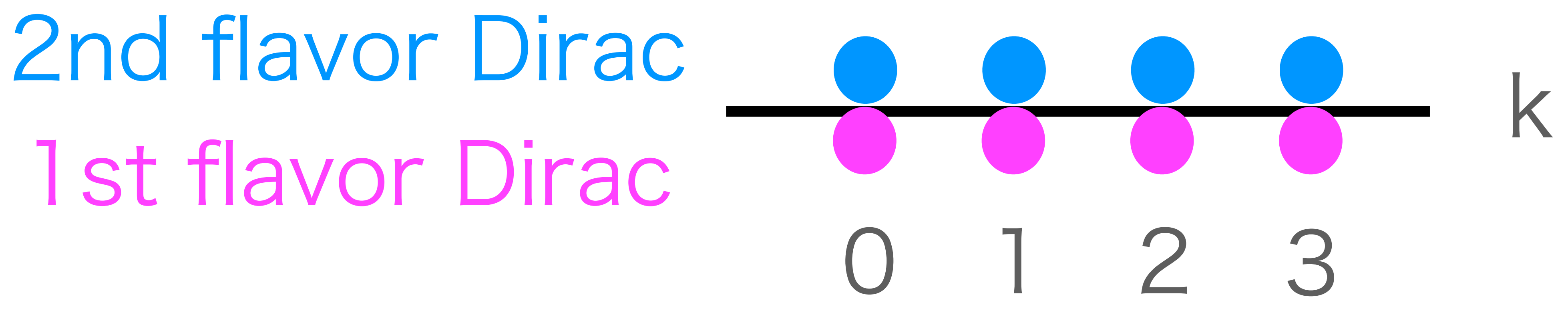
R.Dempsey et al. PRR 4 (2022) 043133

- Zのall-to-all 相互作用

Nf=1の時はmassless理論でもGapped system

多フレーバー Schwinger model: ２つの並べ方問題

- Dirac フェルミオン -> 格子フェルミオン (staggered fermion)



M.C. Banuls et al, PRL 118, 071601 (2017)
R.Dempsey et al., arXiv:2305.00437
El-Matsumoto-Tanizaki, JHEP11(2023)231
M.Rigobello et al., arXiv:2308.04488

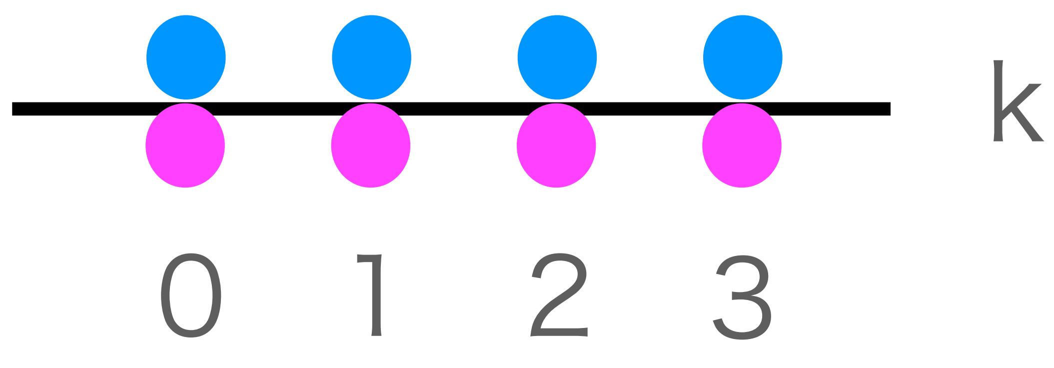
- 格子フェルミオン-> スピン変数 (Jordan-Wigner 変換)

多フレーバー Schwinger model: ２つの並べ方問題

- Dirac フェルミオン -> 格子フェルミオン (staggered fermion)

2nd flavor Dirac

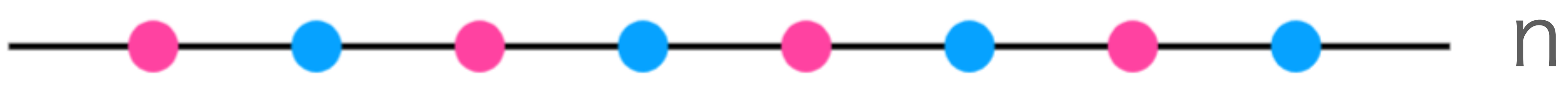
1st flavor Dirac



M.C. Banuls et al, PRL 118, 071601 (2017)
R.Dempsey et al., arXiv:2305.00437
El-Matsumoto-Tanizaki, JHEP11(2023)231
M.Rigobello et al., arXiv:2308.04488

Flavor ordering (n=k+N(f-1))

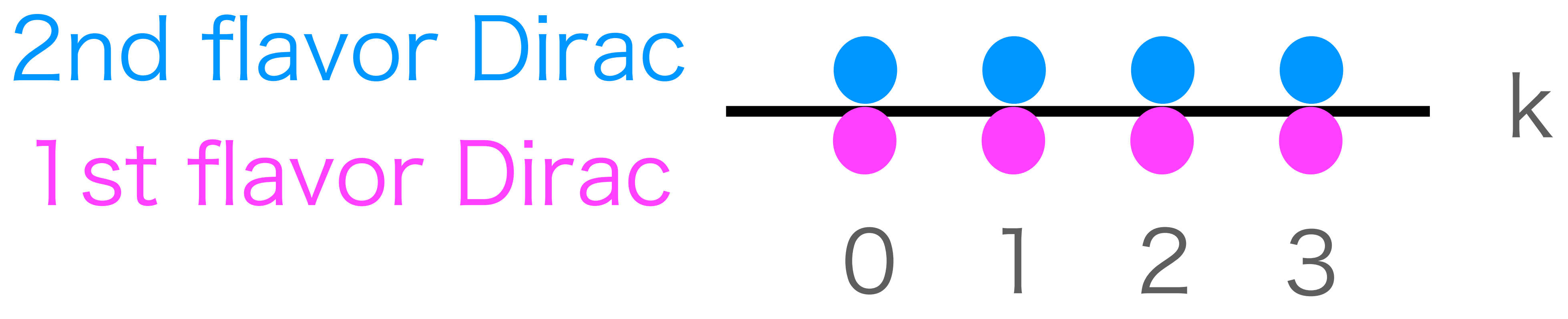
Staggered ordering (n=2k+(f-1))



- 格子フェルミオン-> スピン変数 (Jordan-Wigner 変換)

多フレーバー Schwinger model: ２つの並べ方問題

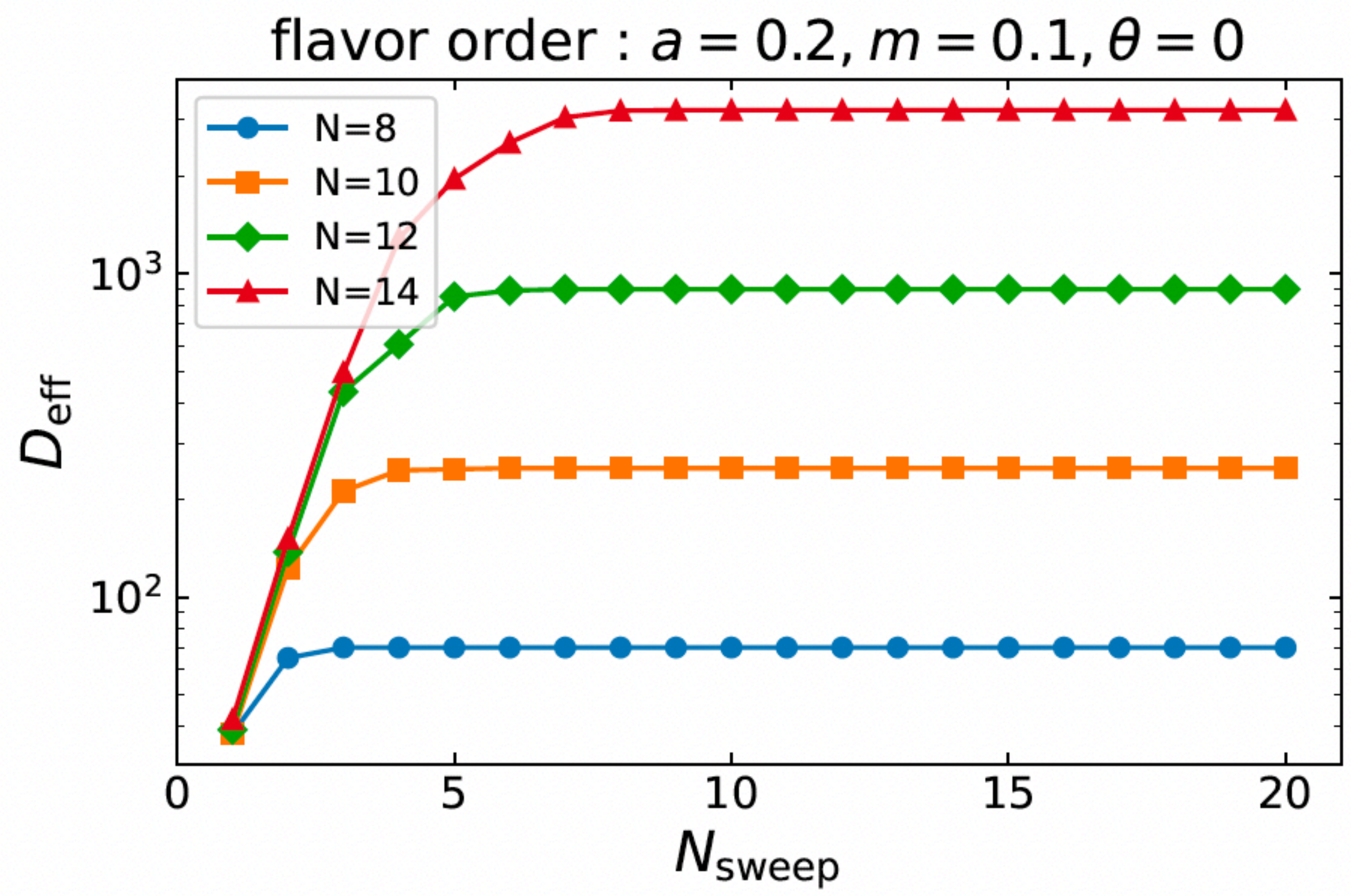
- Dirac フェルミオン -> 格子フェルミオン (staggered fermion)

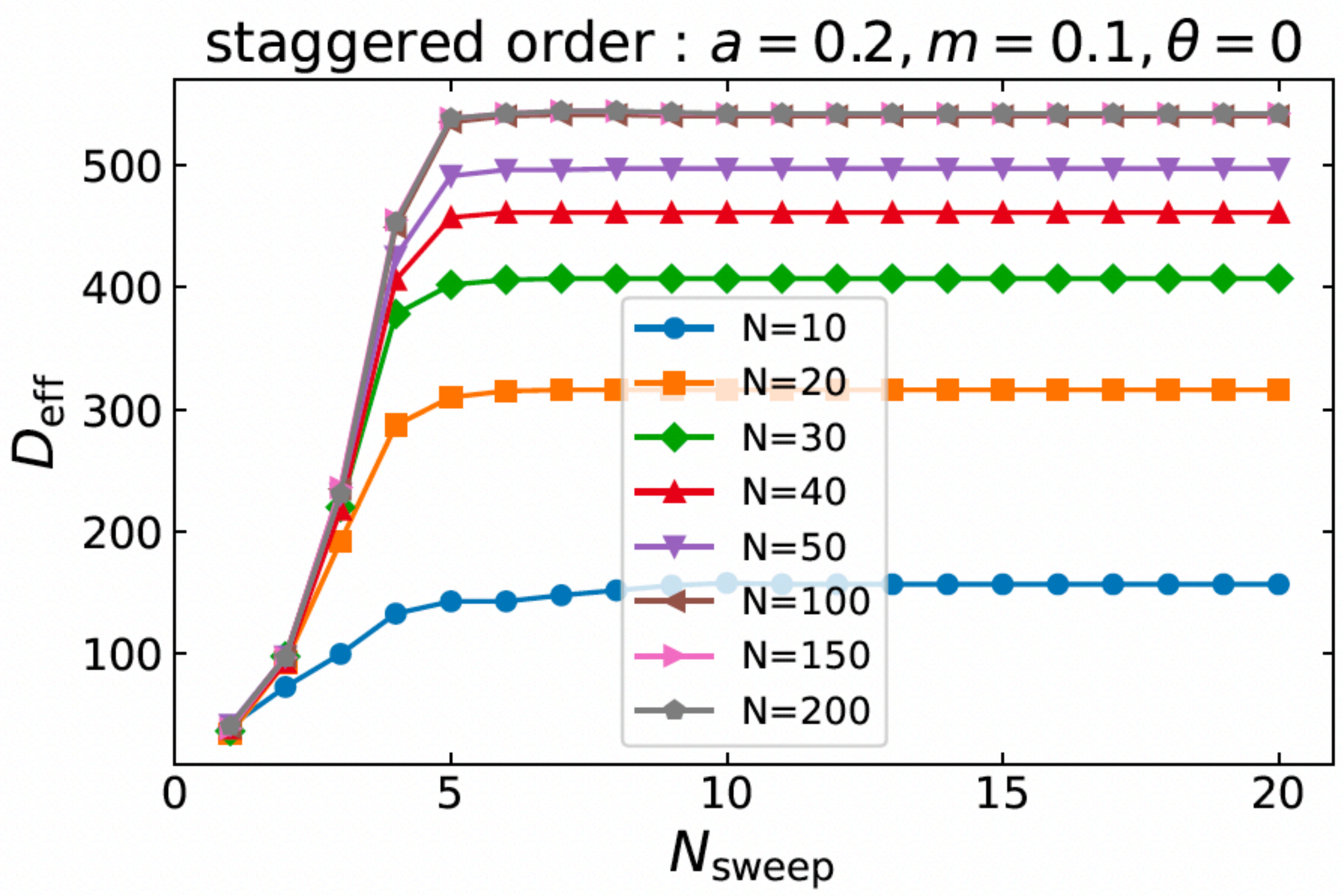


M.C. Banuls et al, PRL 118, 071601 (2017)
R.Dempsey et al., arXiv:2305.00437
El-Matsumoto-Tanizaki, JHEP11(2023)231
M.Rigobello et al., arXiv:2308.04488

Flavor ordering (n=k+N(f-1))

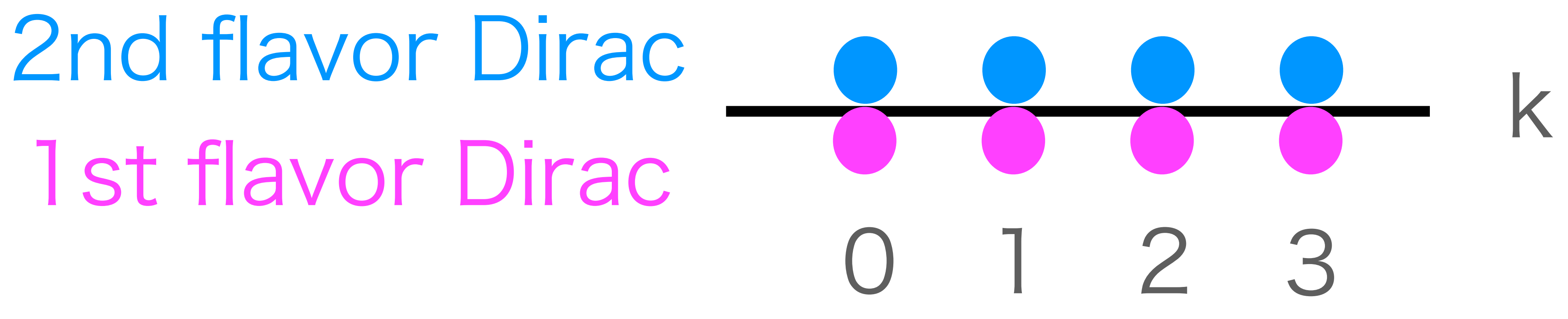
Staggered ordering (n=2k+(f-1))





多フレーバー Schwinger model: ２つの並べ方問題

- Dirac フェルミオン -> 格子フェルミオン (staggered fermion)



M.C. Banuls et al, PRL 118, 071601 (2017)
R.Dempsey et al., arXiv:2305.00437
El-Matsumoto-Tanizaki, JHEP11(2023)231
M.Rigobello et al., arXiv:2308.04488

Flavor ordering (n=k+N(f-1))

Staggered ordering (n=2k+(f-1))

- 格子フェルミオン-> スピン変数 (Jordan-Wigner 変換)

Nf - 格子フェルミオンが
満たす条件

$$\{\chi^\dagger_{f,n}, \chi_{\tilde{f},m}\} = \delta_{f,\tilde{f}}\delta_{n,m}$$

$$\{\chi_{f,n}, \chi_{\tilde{f},m}\} = \{\chi^\dagger_{f,n}, \chi^\dagger_{\tilde{f},m}\} = 0$$

我々の取り方
(El-Matsumoto-Tanizaki, 2023)

$$\chi_{1,n} = \frac{\sigma^x_{1,n} - \sigma^y_{1,n}}{2} \prod_{j=0}^{n-1} (-\sigma^z_{2,j}\sigma^z_{1,j})$$

$$\chi_{2,n} = \frac{\sigma^x_{2,n} - \sigma^y_{2,n}}{2} (-i\sigma^z_{1,n}) \prod_{j=0}^{n-1} (-\sigma^z_{2,j}\sigma^z_{1,j})$$

測定したい物理量が
少ないパウリ行列積でかけるため

ハミルトニアン形式での物理量の測定

ハミルトニアン形式による様々な物理の研究

Nf=1 Schwinger model

- 実時間発展

Schwinger effect, C.Muschik et al. NJ of Physics 19 103020
Martinez et al.,Nature 534, 516–519 (2016)
L.Nagano et al., arXiv:2302.10933

- 有限密度(初期状態でN粒子状態を手で与え、粒子数保存条件の下で基底状態を生成)

Variational algorithm, A. Yamamoto Phys. Rev. D 104, 014506 (2021), Tomiya arXiv:2205.08860
Entangelement entropy, K.Ikeda et al. arXiv:2305.00996

- トポロジカルθ項

カイラル凝縮

電荷間ポテンシャル

電荷-q Schwinger model ('t Hooft アノマリー)

質量スペクトル

…

Phase structure (DMRG): M.C.Banuls et al, PRD 93,094512 (2016)
L.Funcke et al. PRD 101, 054507 (2020)
Adiabatic state preparation: B.Chakraborty et al., PRD 105, 094503 (2022)

M.Honda, EI, et al. PRD105, 014504 (2022)
M.Honda, EI, Y.Kikuchi,Y.Tanizaki, PTEP (2022)
M.Honda, EI, Y.Tanizaki, JHEP (2022)

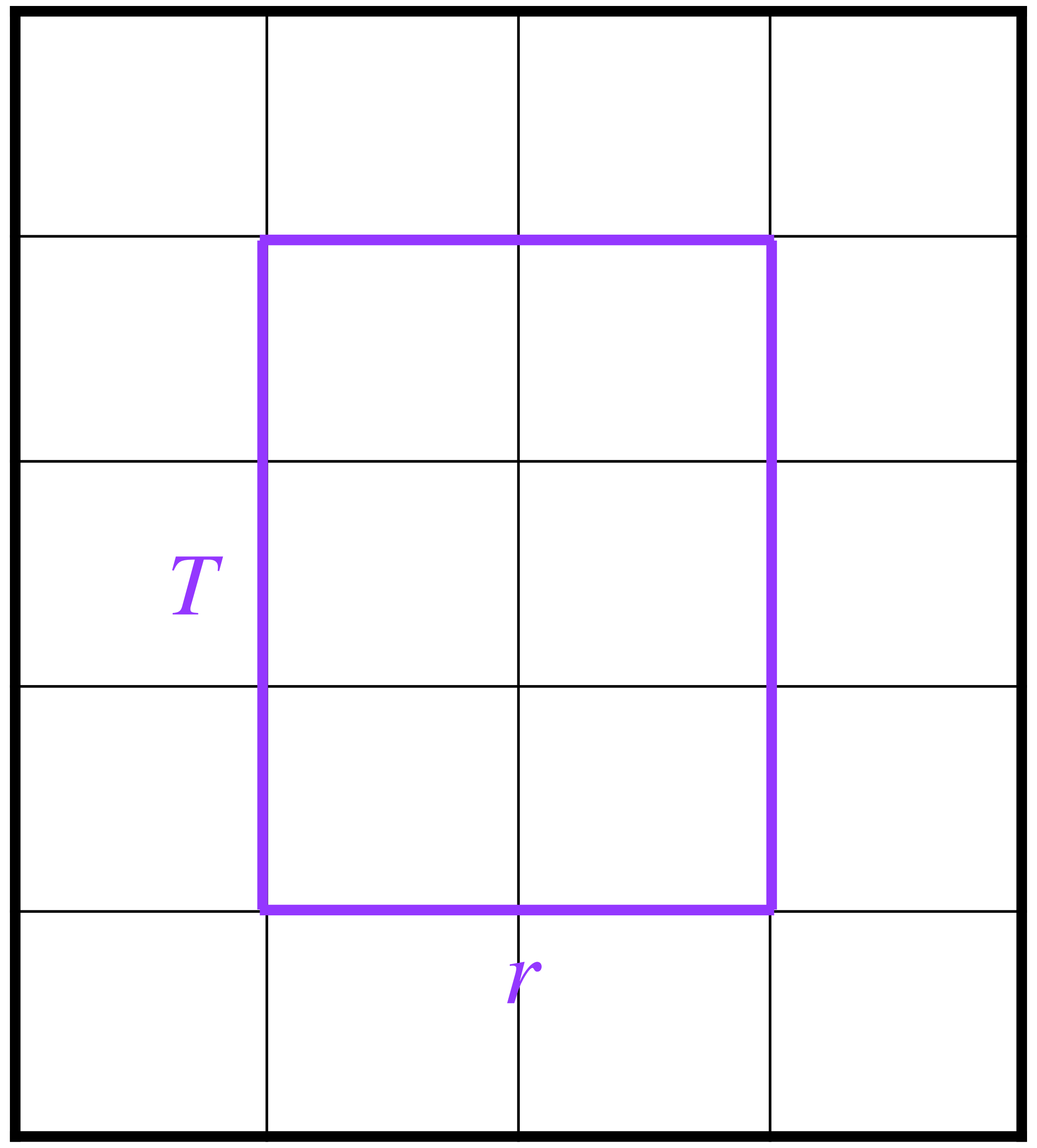
M.C.Banuls et al., JHEP 11 (2013)158

q-qbar potential

- ハミルトニアン形式では従来法(Lattice QCD)と異なる計算法ができる

ラグランジアン形式: Wilson loop

$$\langle W(C)\rangle \underset{T\to\infty}{\approx} e^{-TV(r)} = \mathrm{tr}\left[\prod_{i\in C} U_i\right]$$



測定量：リンク変数の積

rを変えて指数部分を読み取る

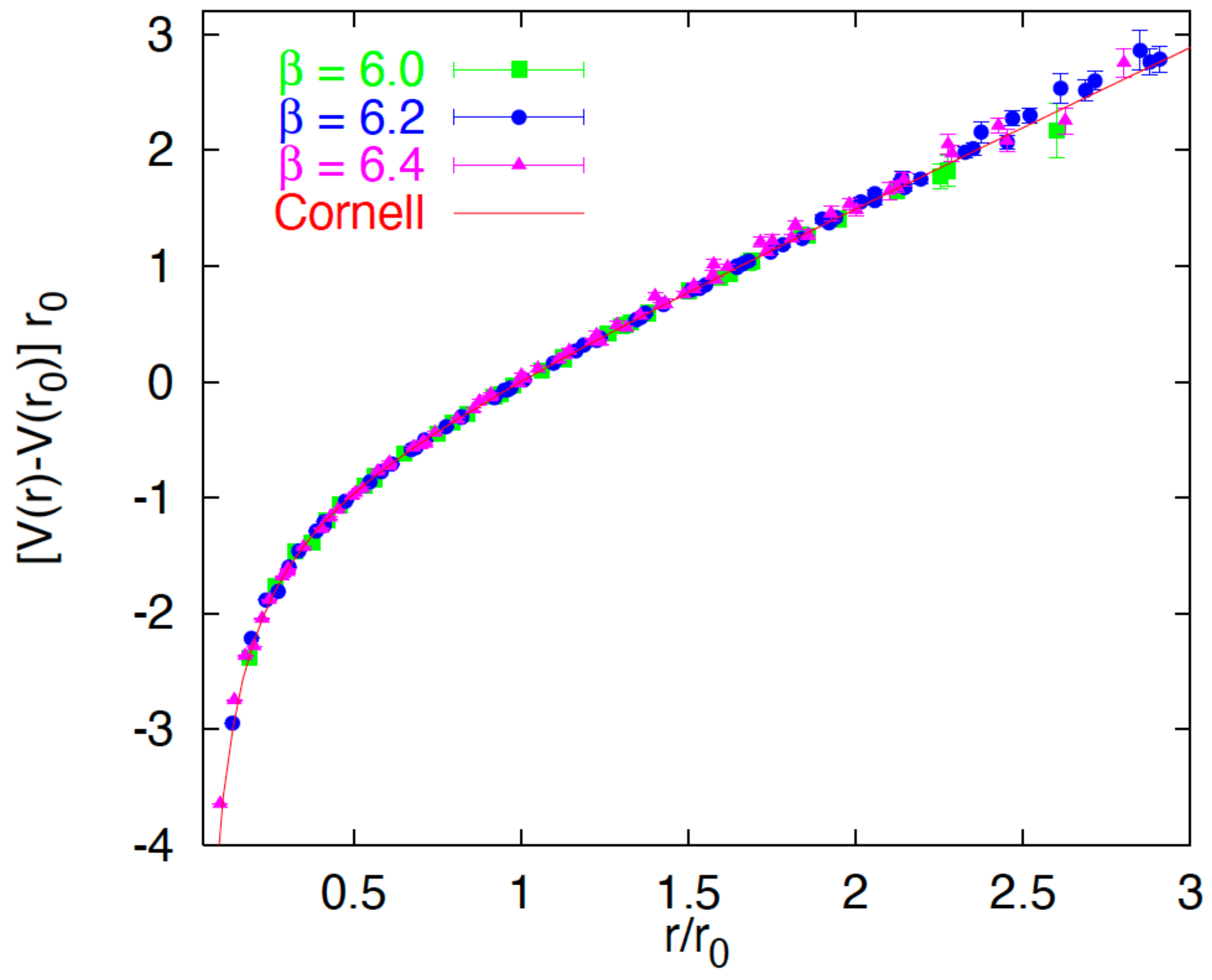
q-qbar potential

- ハミルトニアン形式では従来法(Lattice QCD)と異なる計算法ができる

ラグランジアン形式: Wilson loop

$$\langle W(C)\rangle \underset{T\to\infty}{\approx} e^{-TV(r)} = \mathrm{tr}\left[\prod_{i\in C} U_i\right]$$

G.Bali, Phys.Rept.343:1 (2000)



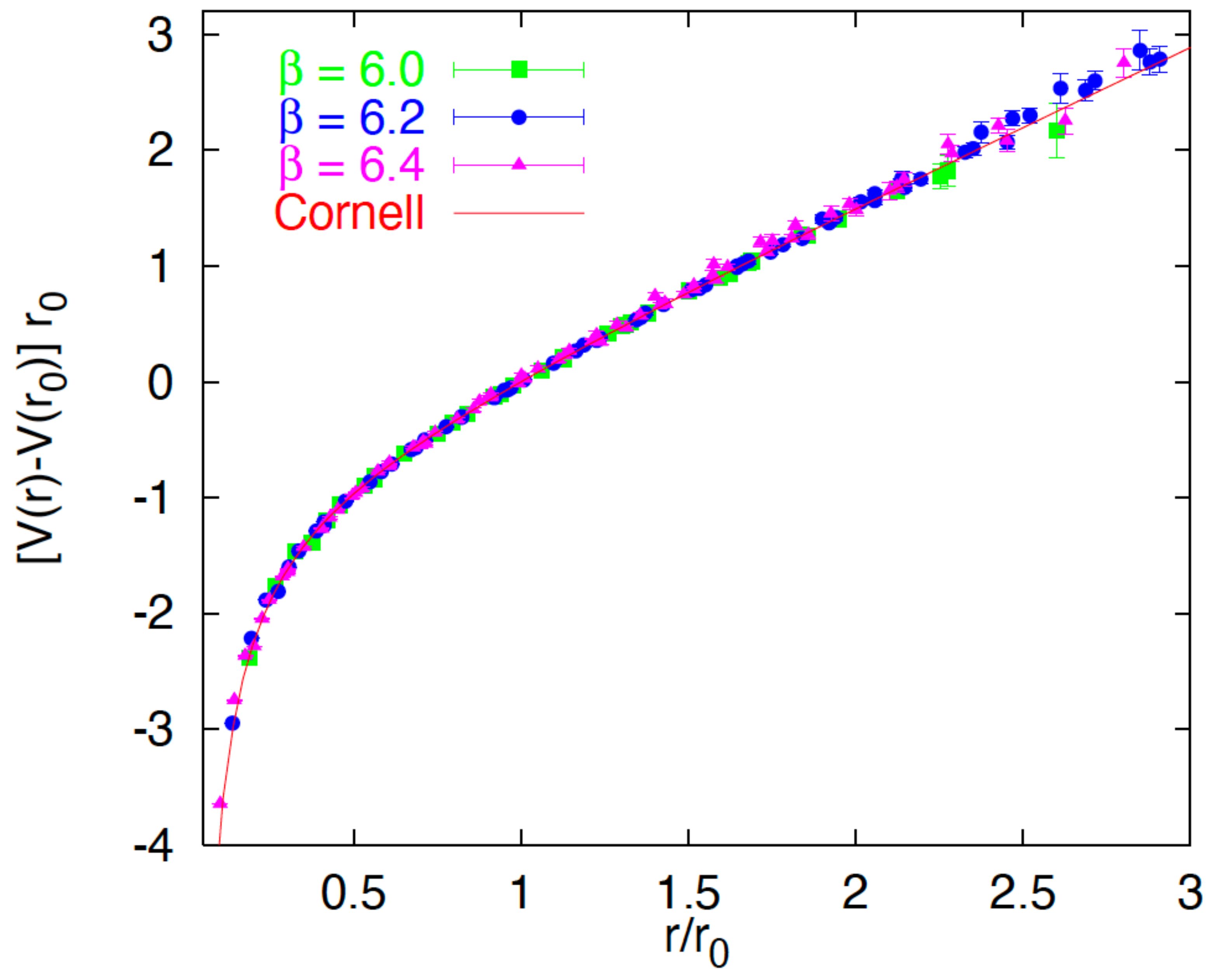
q-qbar potential

- ハミルトニアン形式では従来法(Lattice QCD)と異なる計算法ができる

ラグランジアン形式: Wilson loop

$$\langle W(C)\rangle \underset{T\to\infty}{\approx} e^{-TV(r)} = \mathrm{tr}\left[\prod_{i\in C} U_i\right]$$

G.Bali, Phys.Rept.343:1 (2000)

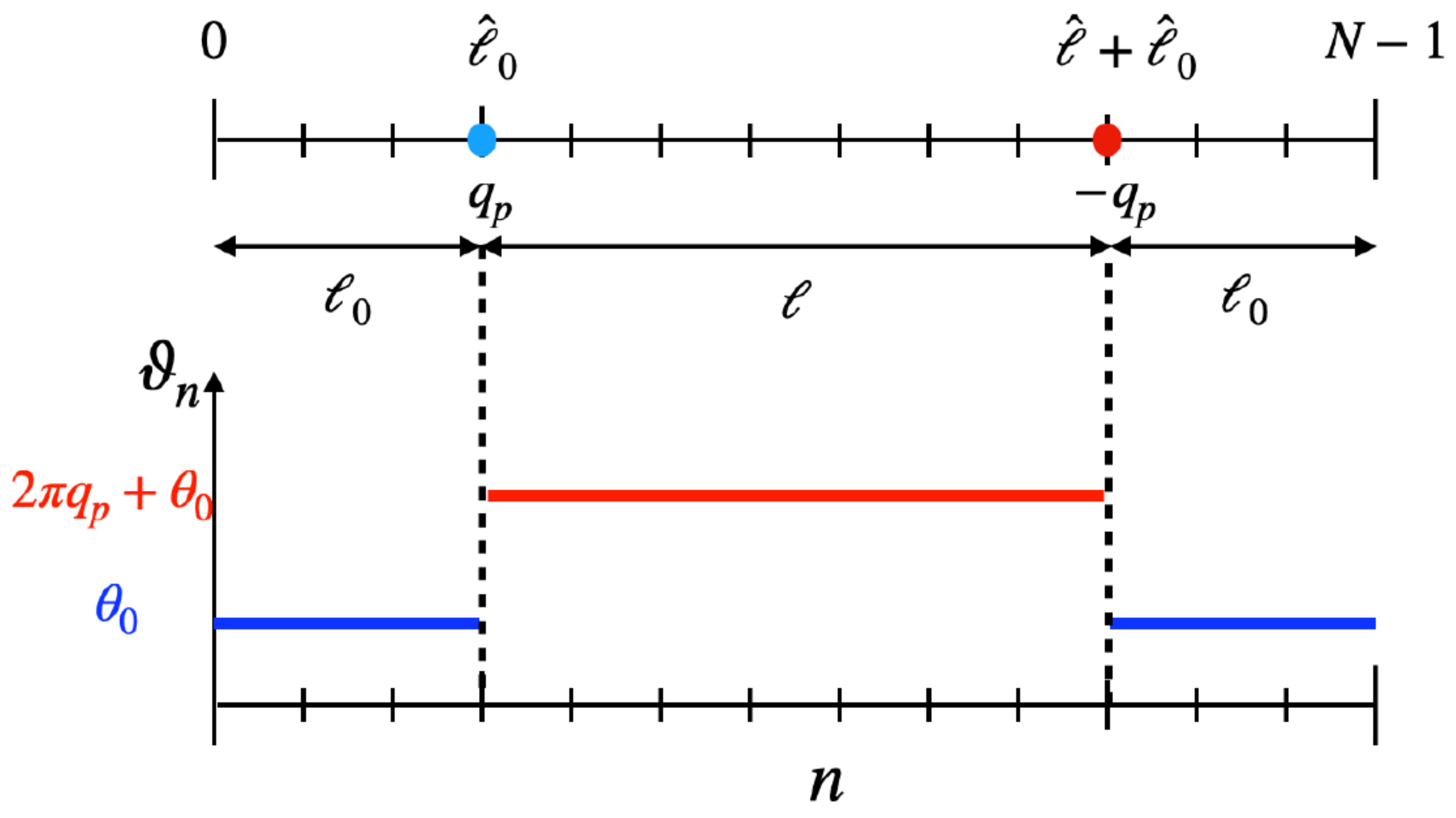


ハミルトニアン形式 (Schwinger model)

電荷がある時のHの期待値から直接測定

各ℓにおける$E(\ell) = \langle \Omega | H(\ell) | \Omega \rangle$を測定

ポテンシャル：$V(\ell) = E(\ell) - E(0)$



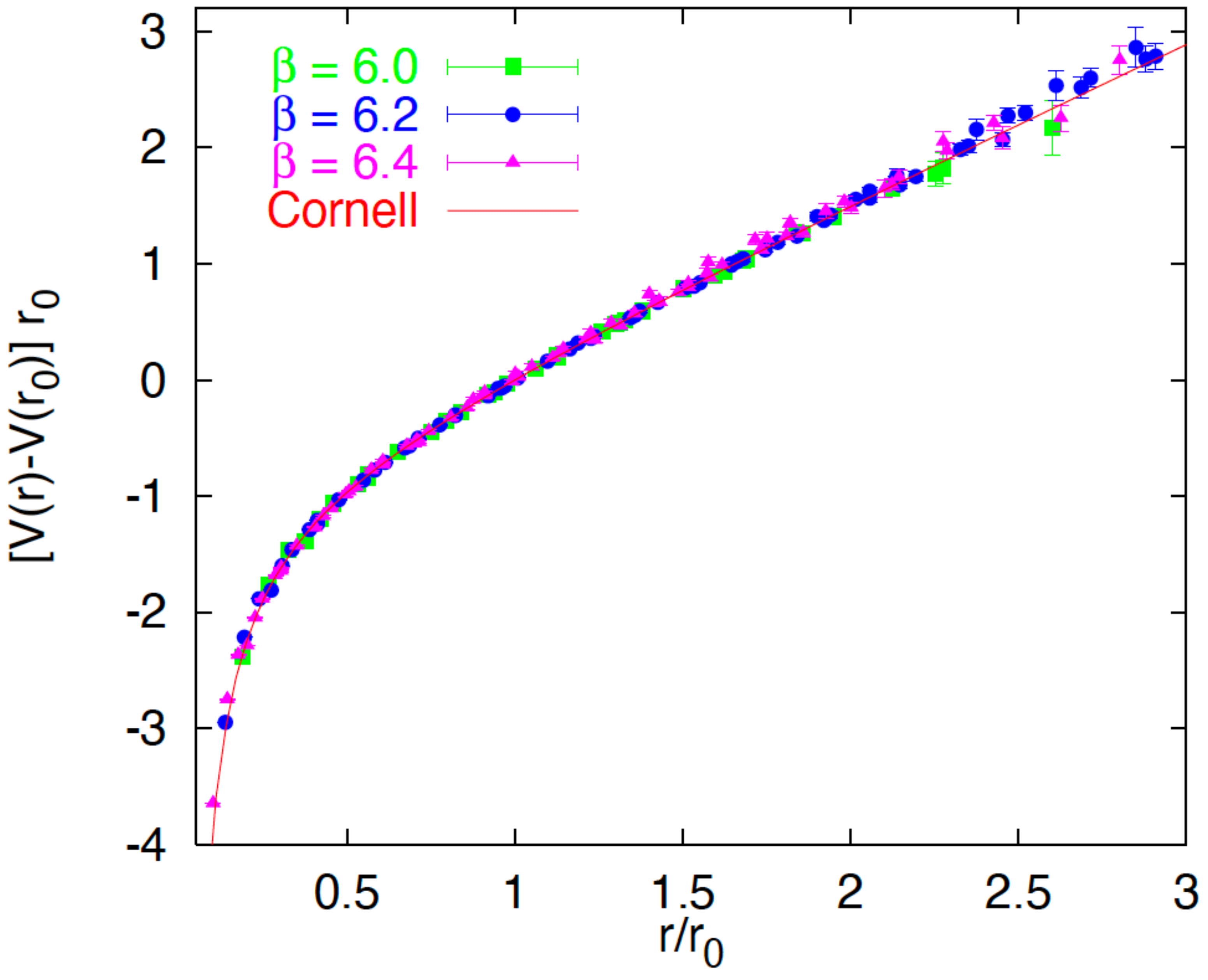
q-qbar potential

- ハミルトニアン形式では従来法(Lattice QCD)と異なる計算法ができる

ラグランジアン形式: Wilson loop

$$\langle W(C)\rangle \underset{T\to\infty}{\approx} e^{-TV(r)} = \mathrm{tr}\left[\prod_{i\in C} U_i\right]$$

G.Bali, Phys.Rept.343:1 (2000)



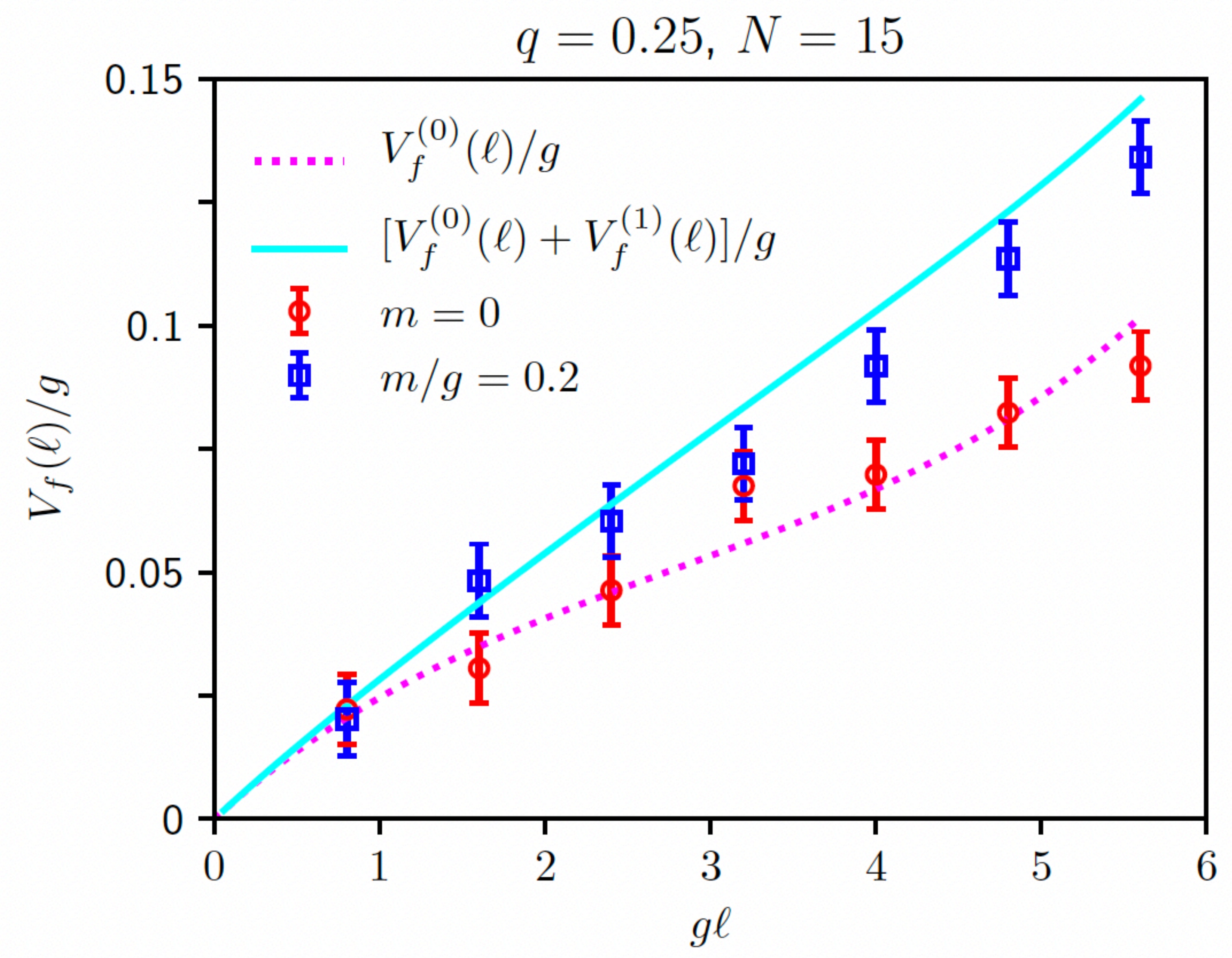
ハミルトニアン形式 (Schwinger model)

電荷がある時のHの期待値から直接測定

各ℓにおける$E(\ell) = \langle\Omega|H(\ell)|\Omega\rangle$を測定

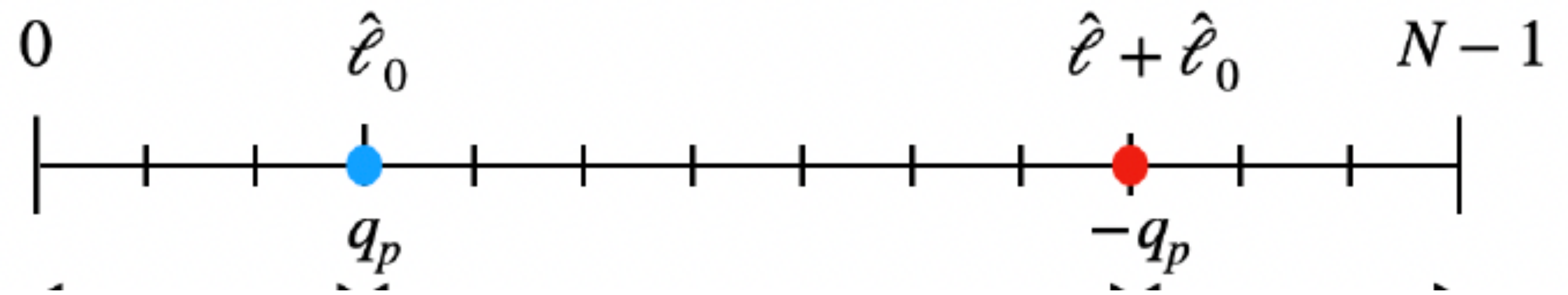
ポテンシャル：$V(\ell) = E(\ell) - E(0)$

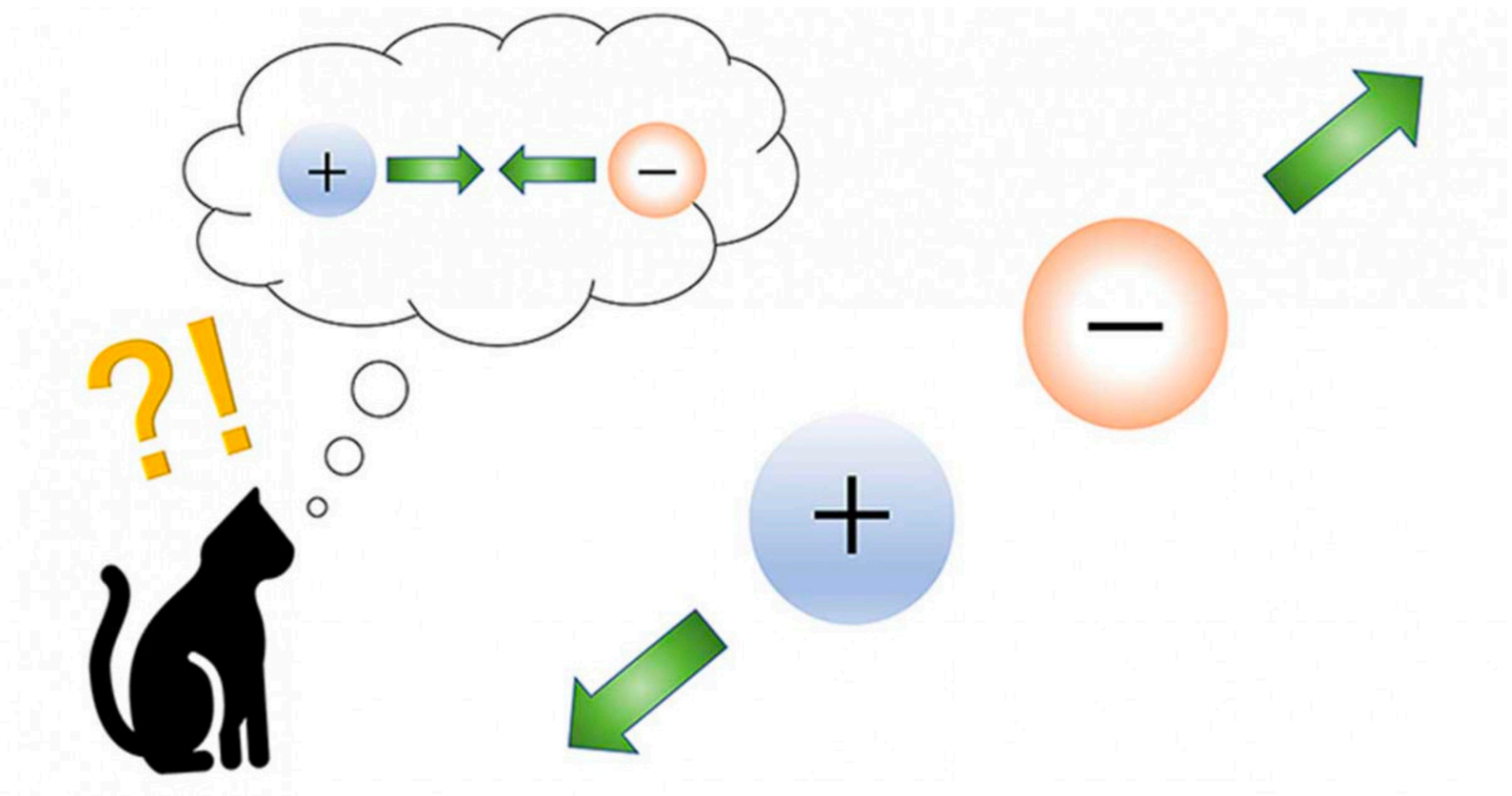
M.Honda, E.I., Y.Kikuchi, L.Nagano, T.Okuda, Phys.Rev.D 105 (2022) 1, 01450



電荷-q Schwinger model

M.Honda, EI, Y.Kikuchi,Y.Tanizaki, PTEP (2022)





Editors' choice

プレスリリース (京大・理研)
日刊工業新聞 (2022年3月3日　朝刊)
JPS hot topics
物理学会誌「PTEPの最近の注目論文から」

- topological θ termが入ると普通のモンテカルロ法では符号問題が生じる
- Massive 電荷-q (q>1) Schwinger modelは線形ポテンシャル topological θ termやprobe chargeの取り方で傾きの符号が変化する

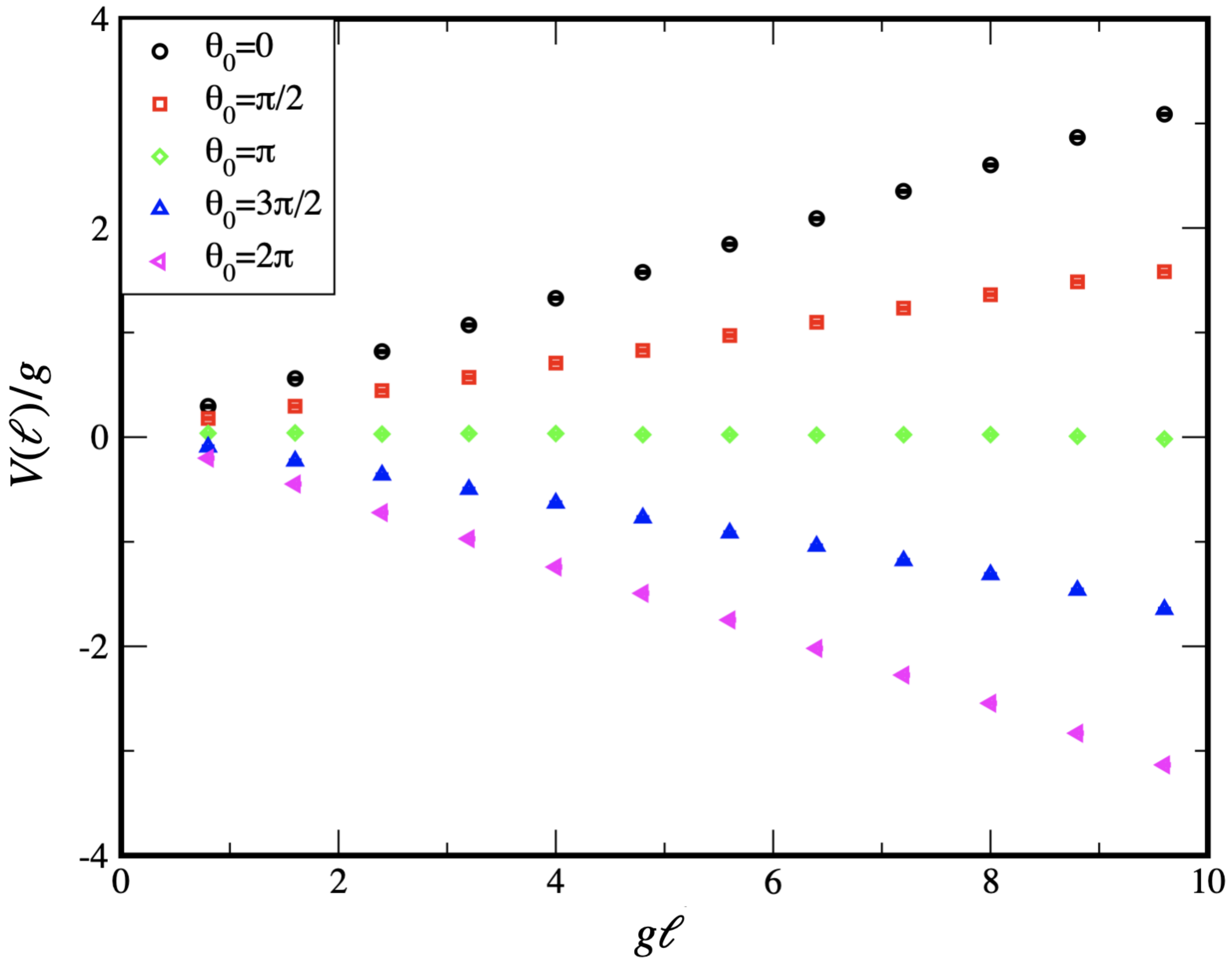
T.Misumi, Y.Tanizaki, M.Unsal, JHEP 07 (2019)018

- 負のストリングテンションが生じる場合でも真空(universe)が不安定にならない 背後に$\mathbb{Z}_q$対称性がある

電荷-q Schwinger model

M.Honda, EI, Y.Kikuchi,Y.Tanizaki, PTEP (2022)

Qiskit simulator results
Lattice size N=25



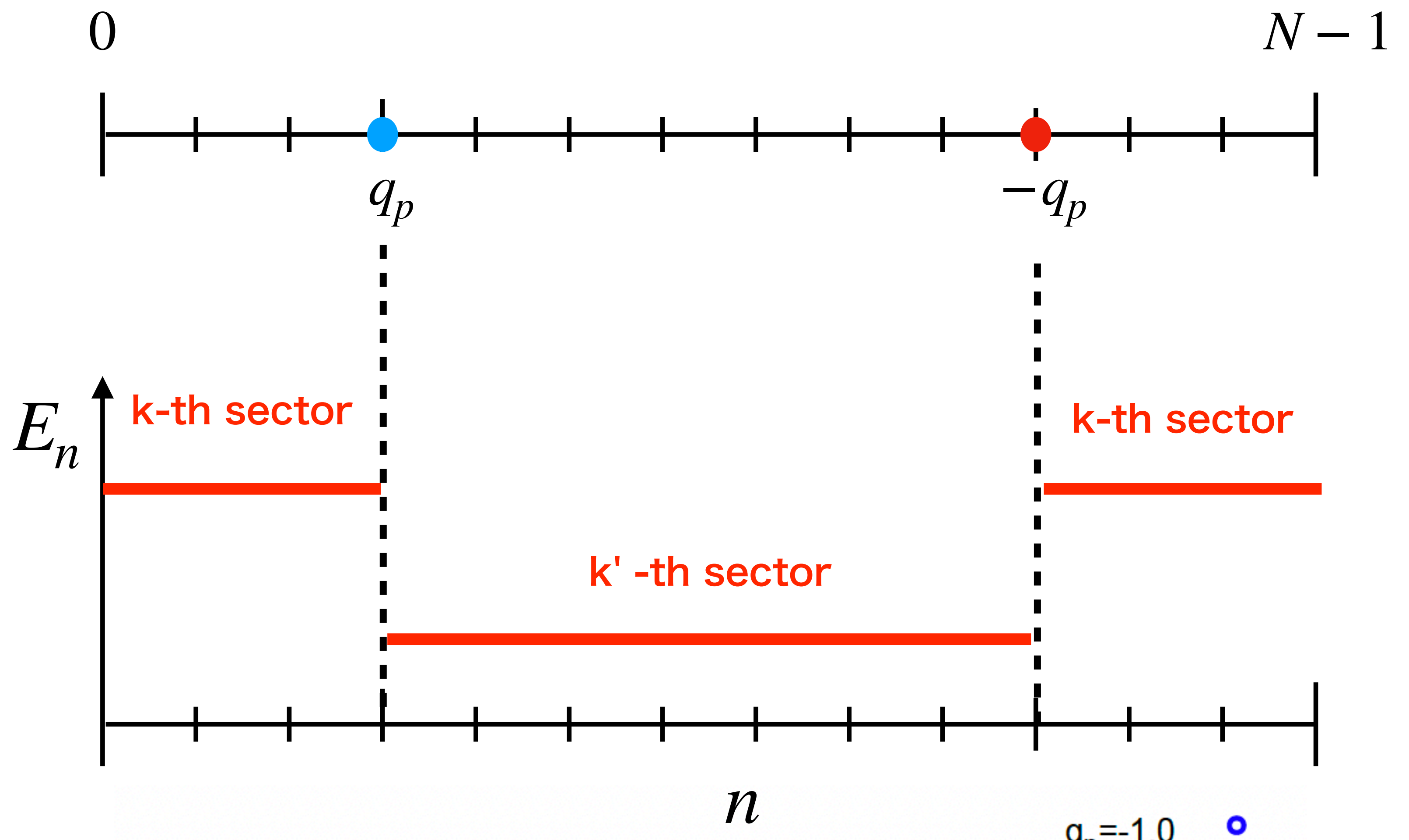
大きいθ の領域で負のストリングテンションが生じる

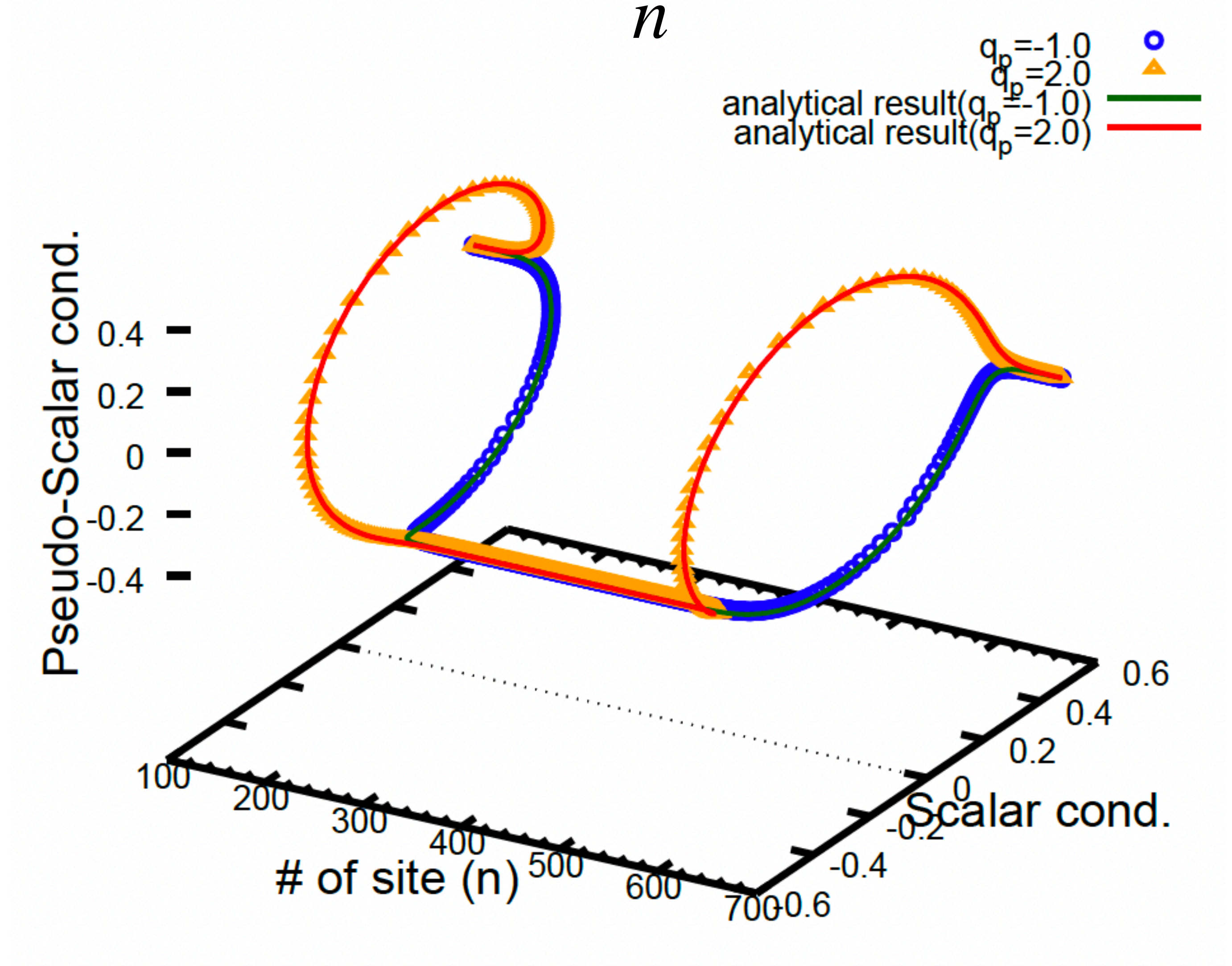
- topological θ termが入ると普通のモンテカルロ法では符号問題が生じる
- Massive 電荷-q (q>1) Schwinger modelは
  線形ポテンシャル
  T.Misumi, Y.Tanizaki, M.Unsal, JHEP 07 (2019)018
  topological θ termやprobe chargeの取り方で傾きの符号が変化する
- 負のストリングテンションが生じる場合でも真空(universe)が不安定にならない
  背後に$\mathbb{Z}_q$対称性がある

't Hooftアノマリーの検証

T.Misumi, Y.Tanizaki, M.Unsal,
JHEP 07 (2019)018

負のストリングテンションが
生じる時のsite毎の基底エネルギー





N~800のDMRG計算で確認

M.Honda, EI, Y.Tanizaki, JHEP (2022)

- 電荷-q Schwinger modelのラグランジアン

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{g\theta_0}{4\pi}\epsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_\mu + iqgA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi$$

- $q > 1$の時: ヒルベルト空間がq個に分離

$$E_k(\theta_0) = -m\frac{e^{\gamma}qg}{2\pi^{3/2}}\cos\left(\frac{\theta_0 - 2\pi k}{q}\right),$$

$$(k = 0,\cdots,q-1)$$

- U(1) 1form symmetry (pure Maxwell)
  -> $\mathbb{Z}_q$ 1form symmetry が背後にある

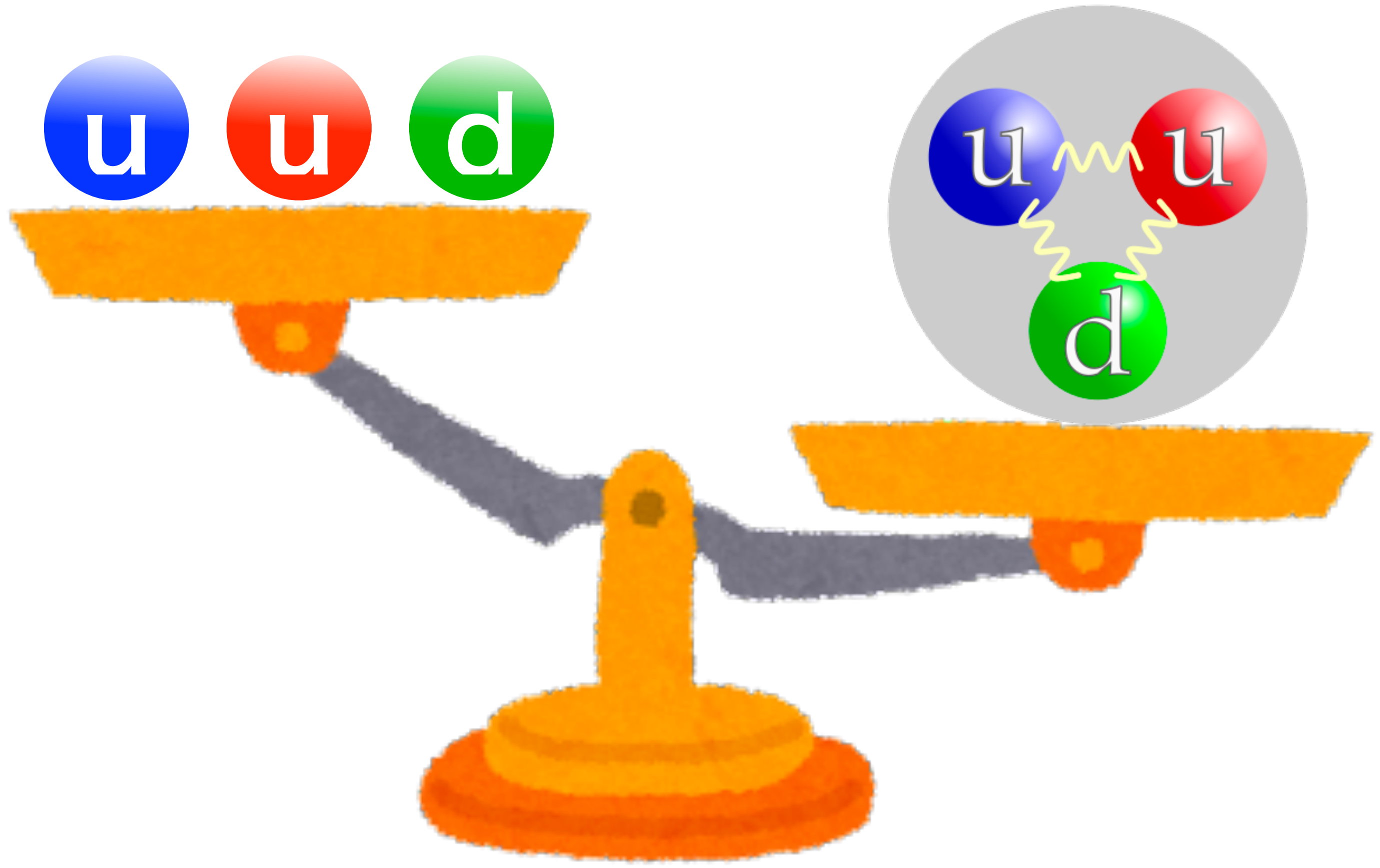
  秩序変数 $S(x) + iP(x) = \bar{\psi}\psi(x) \pm \bar{\psi}\bar{\gamma}_{\mathrm{E}}\psi(x)$ が

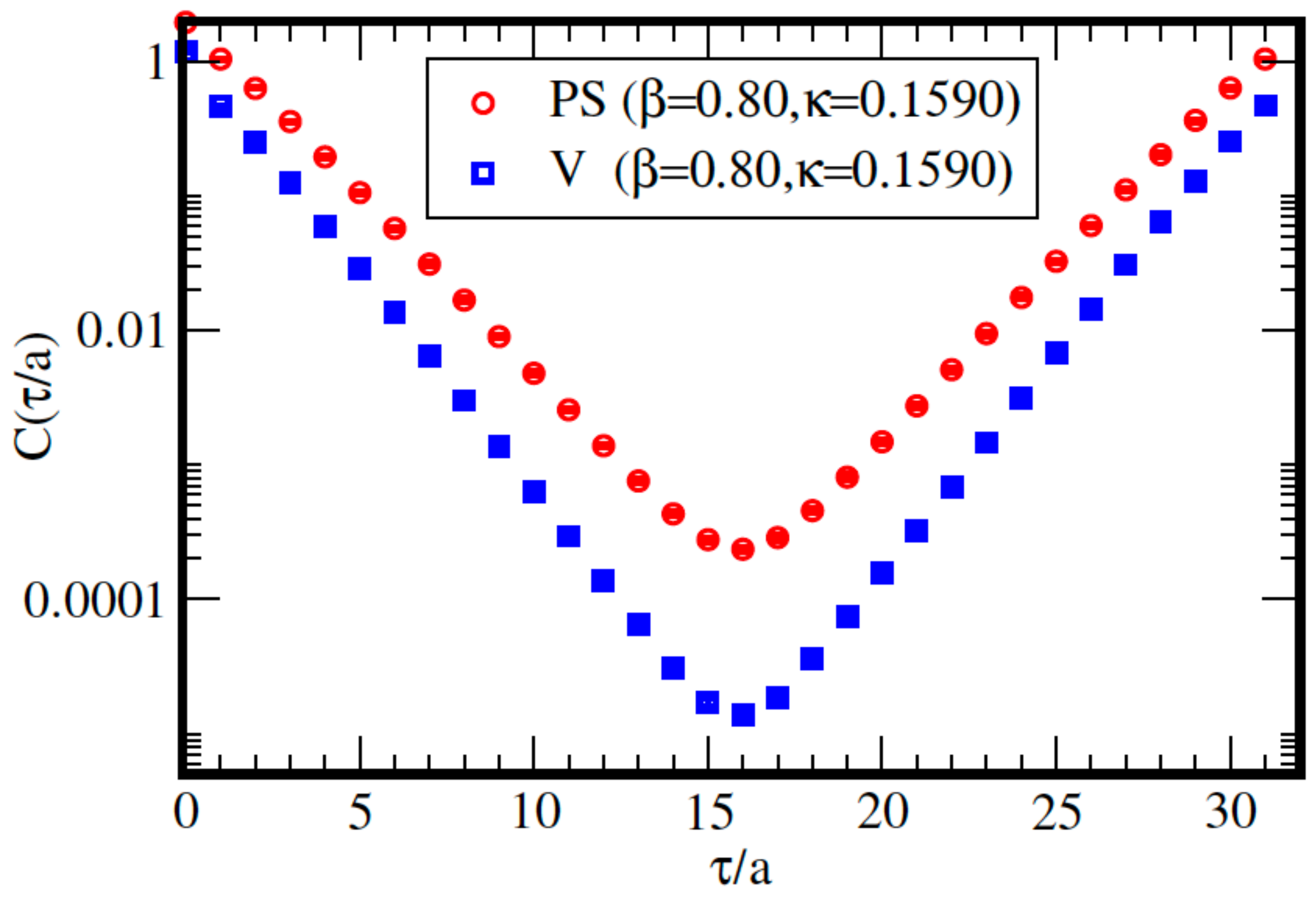
  プローブ電荷を横切る時に$e^{i\frac{2\pi q_p}{q}}$の位相を稼ぐ

Nf=2の場合：質量スペクトルの計算法

u,d quark mass ~ 2-5MeV

proton mass ~ 938MeV





$C(\tau) = \langle O(\tau) O(0) \rangle$

$$\lim_{\tau\to\infty} C(\tau) \sim e^{-m\tau}$$

pion: $O = \bar{\psi}\gamma_5\psi$

rho meson: $O = \bar{\psi}\gamma_1\psi$

- ハミルトニアン形式で複合状態のスペクトル計算法　El-Matsumoto-Tanizaki, JHEP11(2023)231

(1) 2点関数スキーム

(2) 1点関数スキーム

OBCでのSPT相の性質を利用

(3) 分散関係スキーム

- Nf=2 Schwinger modelの複合状態

パイオン: $\pi = -i\left(\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_1 - \bar{\psi}_2\gamma^5\psi_2\right),\ J^{PG} = 1^{-+}$

σメソン: $\sigma = \bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2,\ J^{PG} = 0^{++}$

ηメソン: $\eta = -i\left(\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_1 + \bar{\psi}_2\gamma^5\psi_2\right),\ J^{PG} = 0^{--}$

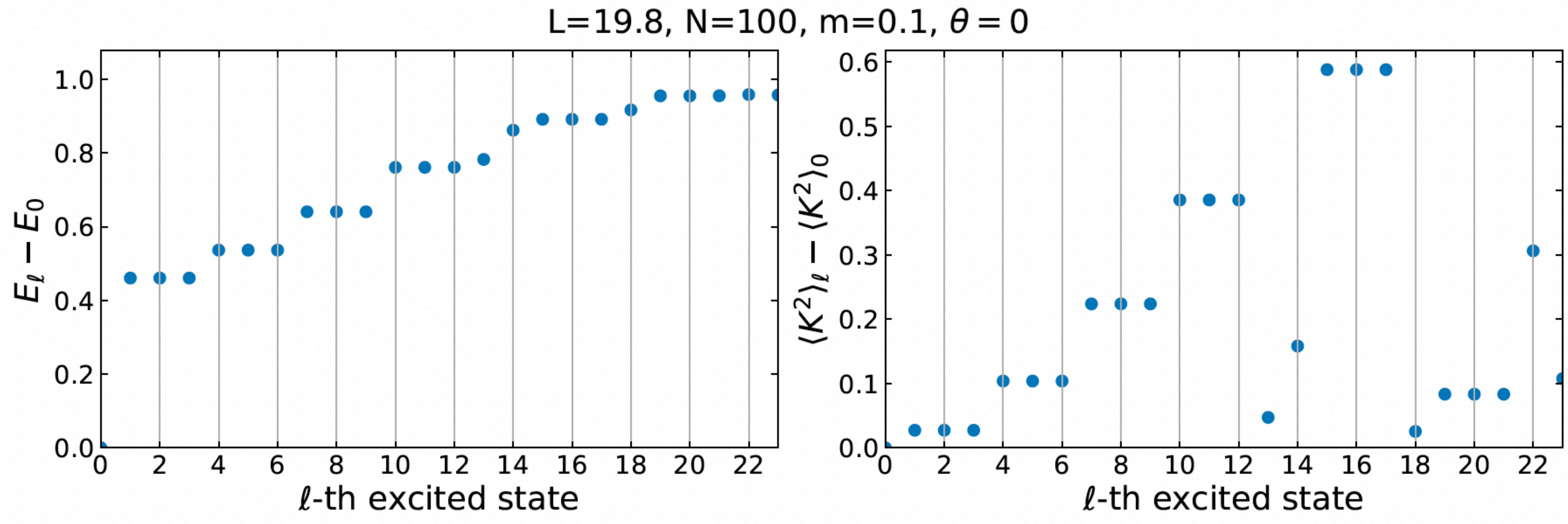
K.Harada et al. (1994)：ライトコーンによる解析

分散関係スキームの計算法

El-Matsumoto-Tanizaki, JHEP11(2023)231

20以上の励起状態のMPSを下から生成：$H_{eff} = H + \lambda \sum_{k=0}^{\ell-1} |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$

それぞれのエネルギーと運動量演算子の期待値を測定

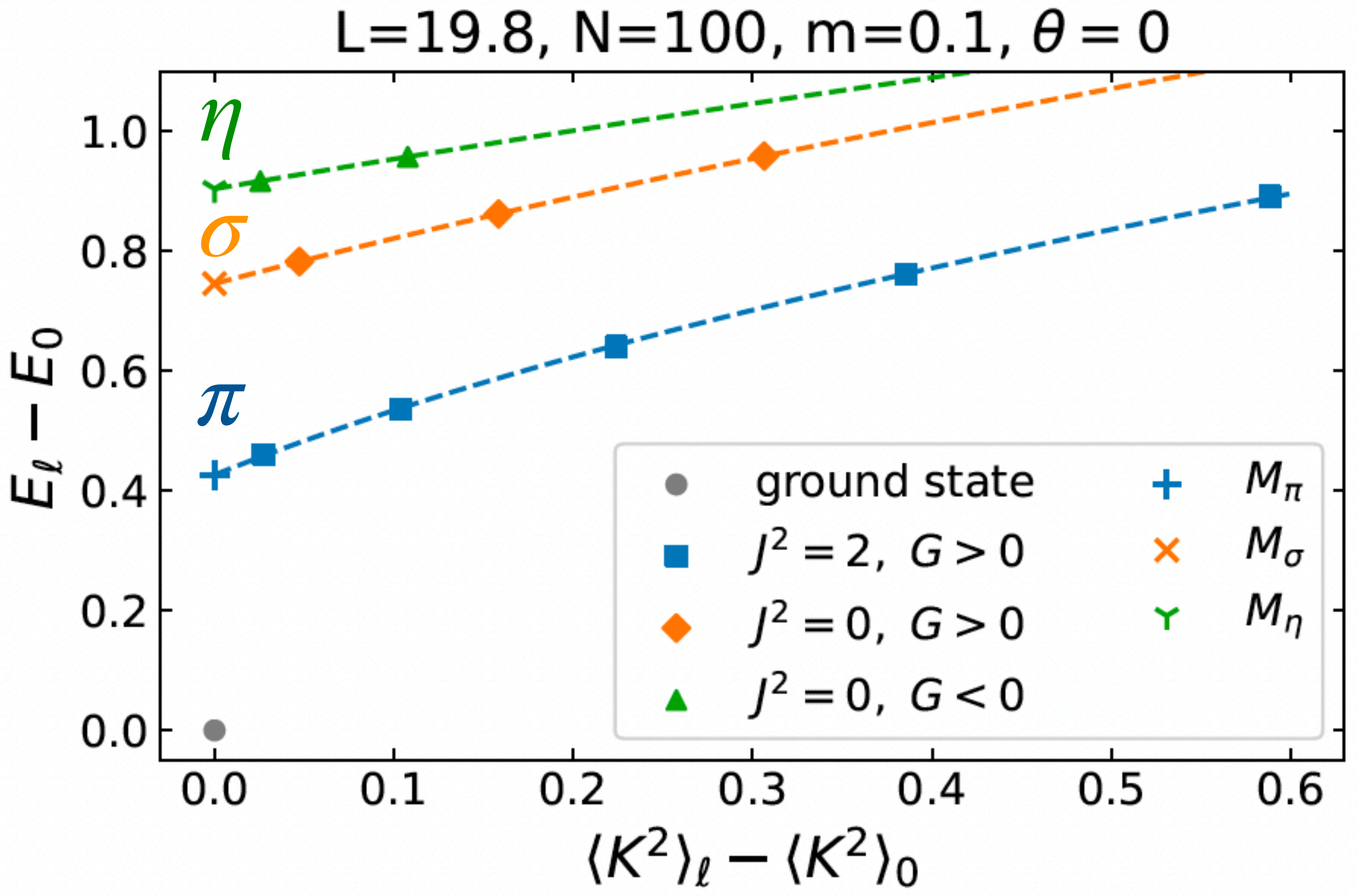


アイソスピン、G-パリティ、パリティなどの量子数を測定して
そのメソンに対応するかを判定

結果：３つのメソンの質量比較・計算手法比較

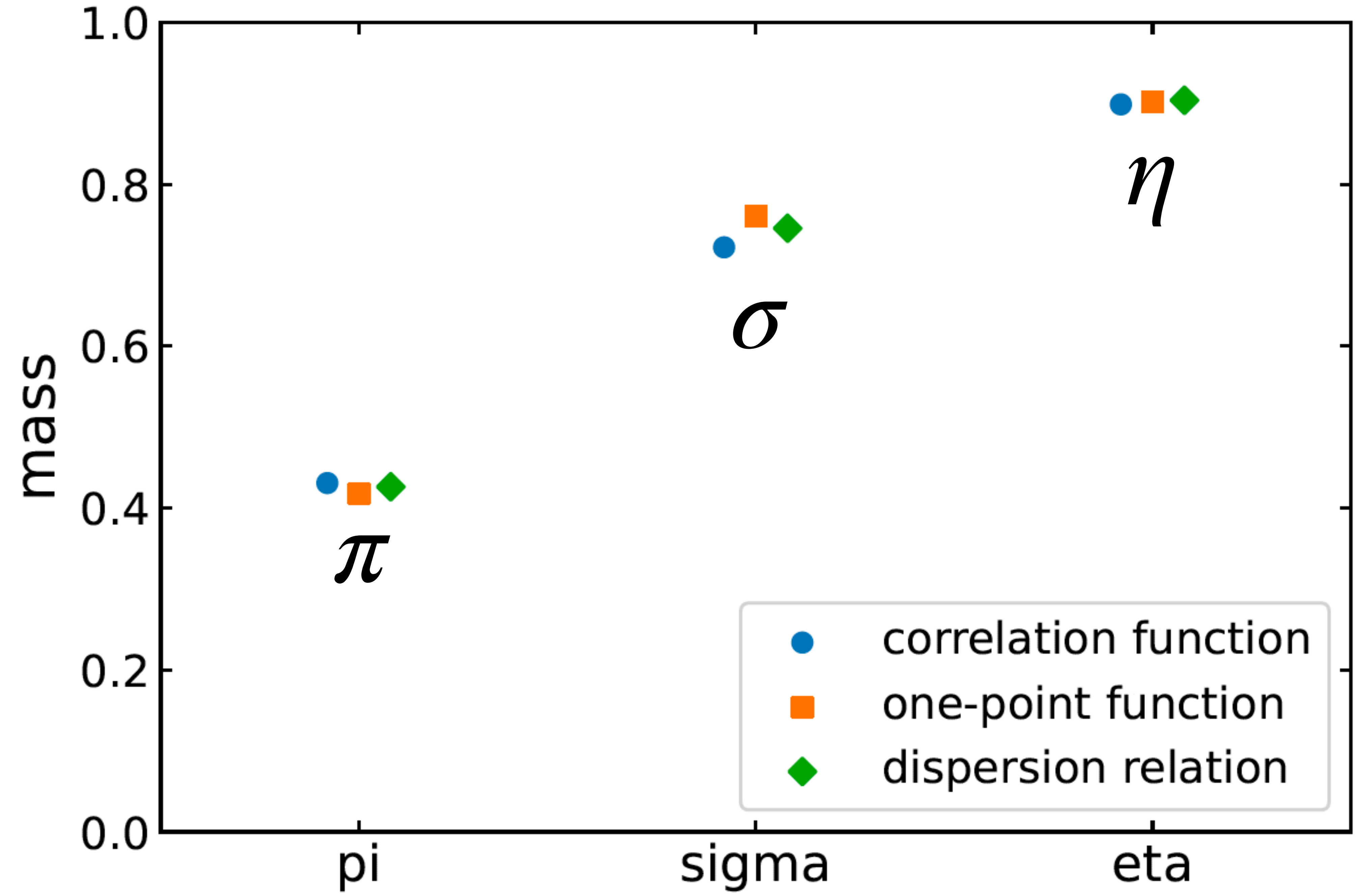
El-Matsumoto-Tanizaki, JHEP11(2023)231

それぞれのメソン：ΔE_ℓ(縦軸), ΔK_ℓ^2(横軸)でプロット



分散関係式$\Delta E = \sqrt{M^2 + b^2 \Delta K^2}$でフィット

３つの計算手法の比較 ($\theta = 0$)



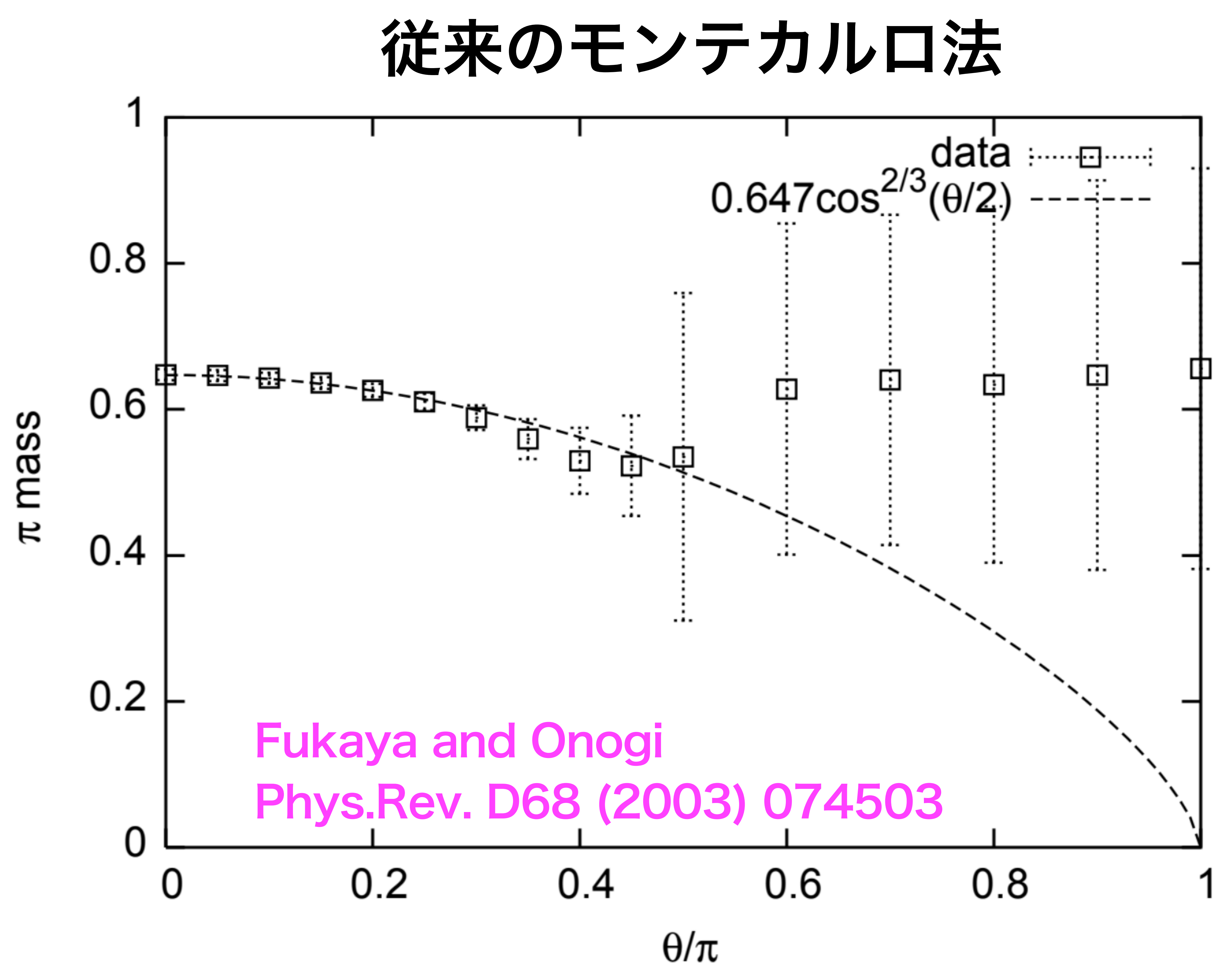
理論的予言 Coleman(1976), Dashen et al. (1975)

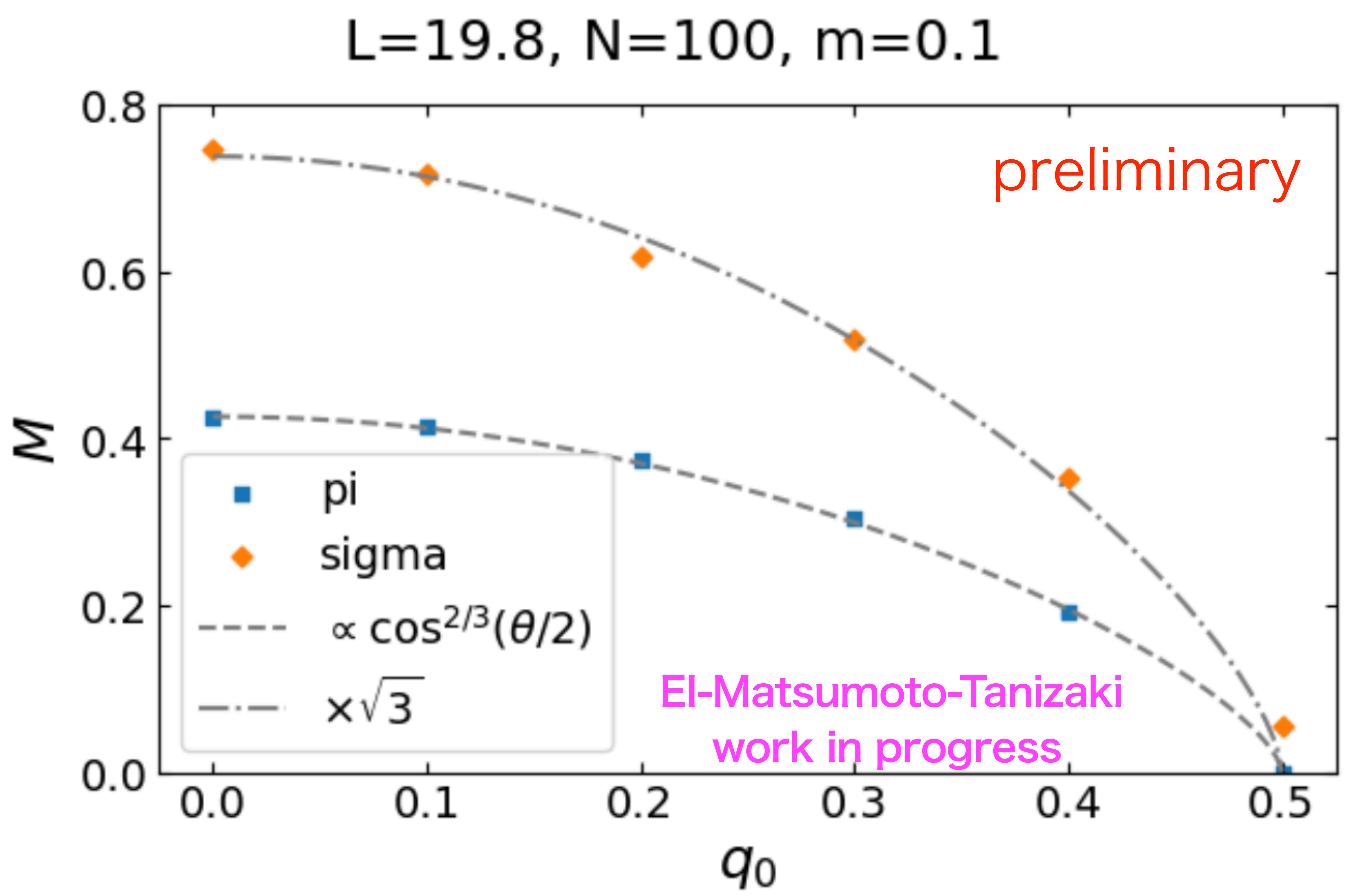
✔ $M_\pi < M_\sigma < M_\eta$: U(1) problem

✔$M_\eta = \mu + O(m)$ $(\mu = g\sqrt{N_f/\pi} \sim 0.8, \quad m = 0.1)$

✔$M_\sigma / M_\pi = \sqrt{3}$ (within 5% deviation)

$\theta \neq 0$領域





- θ の大きいところでは符号問題のためノイズが増大
- $\theta = 0$ でも重い ηメソンは測定が難しかった
  (σ メソンは測定してない)

非可換ゲージ理論の場合
課題と展望

高次元 / SU(N)ゲージ理論への取り組み

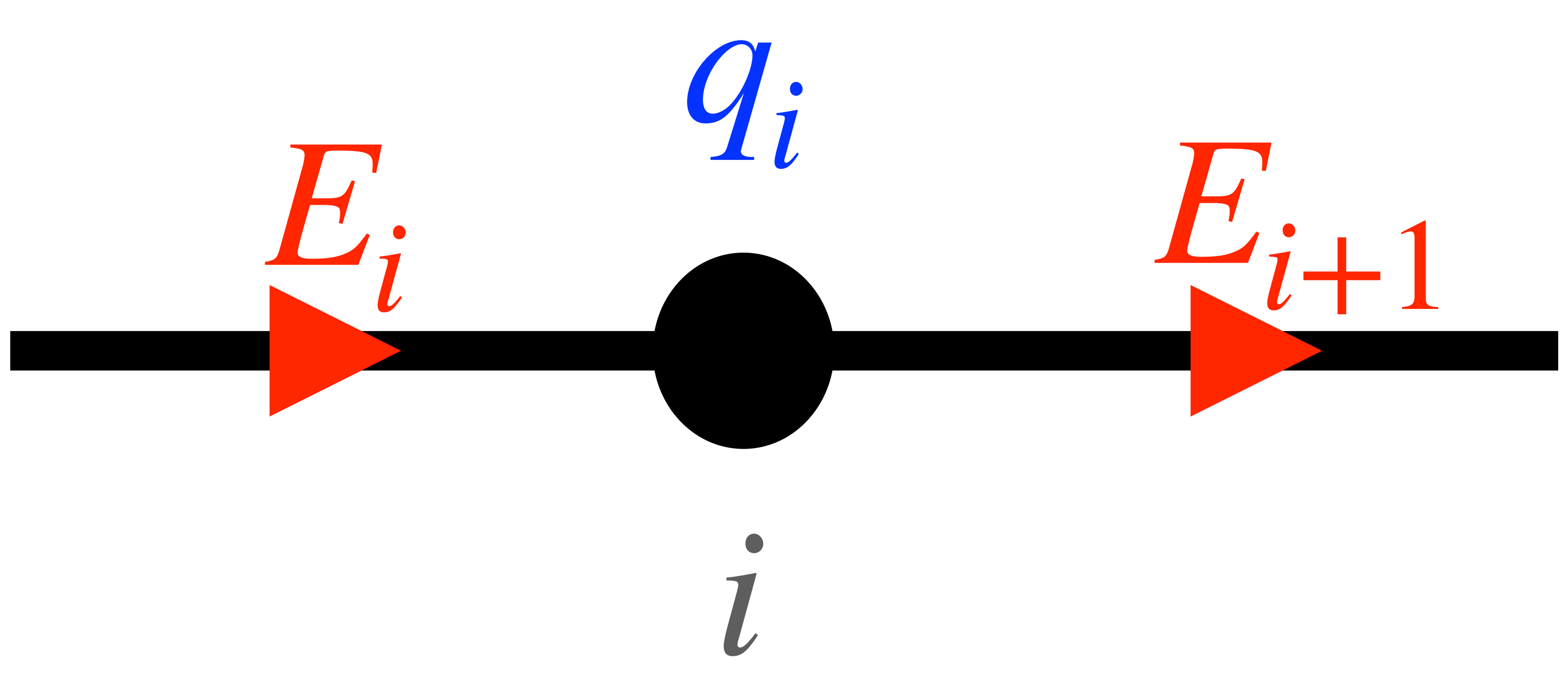
無限自由度を持つゲージ場をどう取り扱うか？

(1) ヒルベルト空間にカットオフを導入

(2) ゲージ対称性を離散的にする (例. 離散群($\mathbb{Z}_N$, $\mathbb{D}^N$,…))

ゲージ場の自由度はどう消えた？

1+1次元 U(1)ゲージ理論



q_i: electron (+1)

positron (-1)

何もいない (0)

- Gauss law at each vertex

$$\hat{G}_i = \hat{E}_i - \hat{E}_{i+1} - \hat{q}_i,\ \hat{G}_i|\Psi_{\mathrm{phys}}\rangle = \epsilon_i|\Psi_{\mathrm{phys}}\rangle$$

$$(\epsilon_i = 0)$$

- 開境界条件

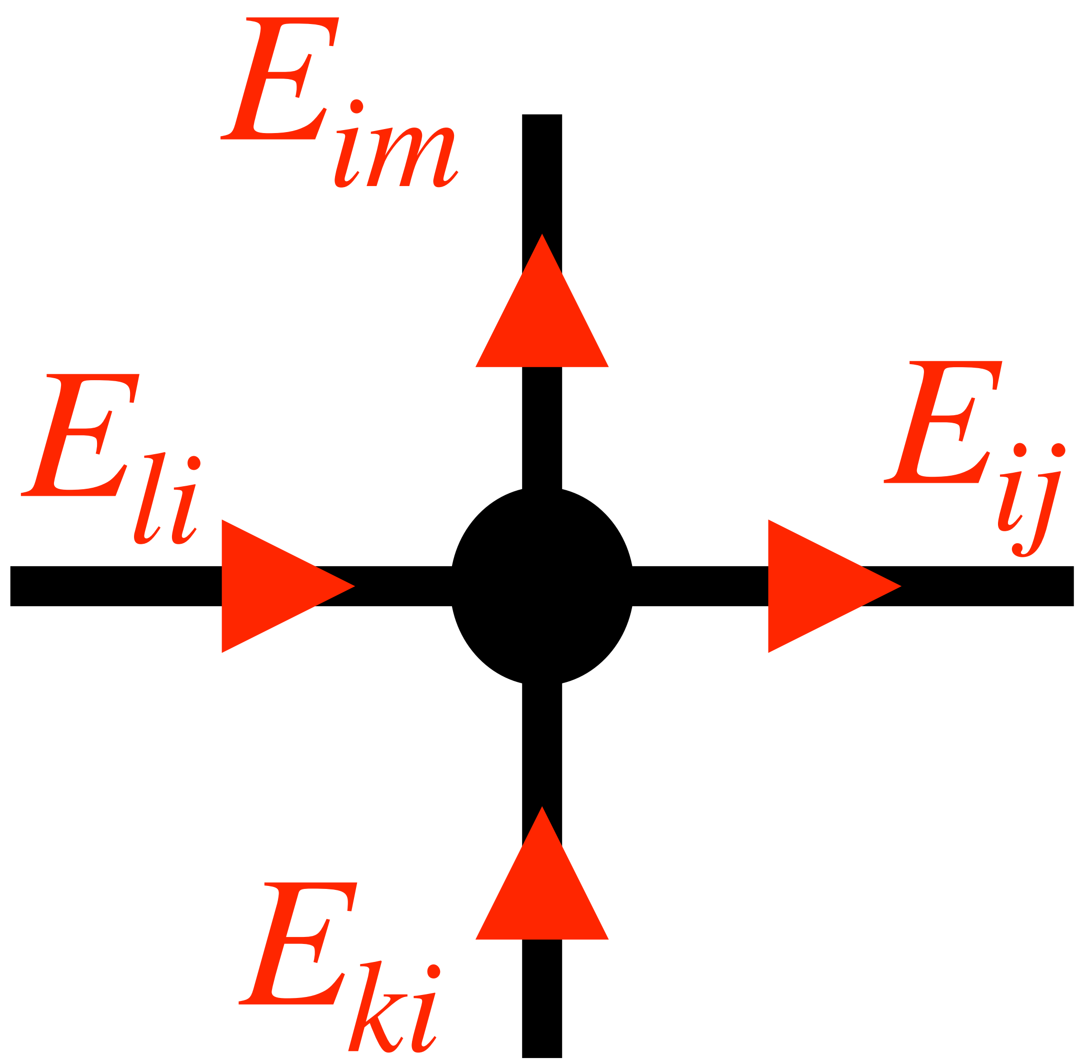
  端点の電場の値 $E_{-1} = 0$とおいた

- 周期的境界条件を取ると定数ゼロモードが残る

  -> 無限大の自由度

高次元の場合

2+1次元 U(1)ゲージ理論



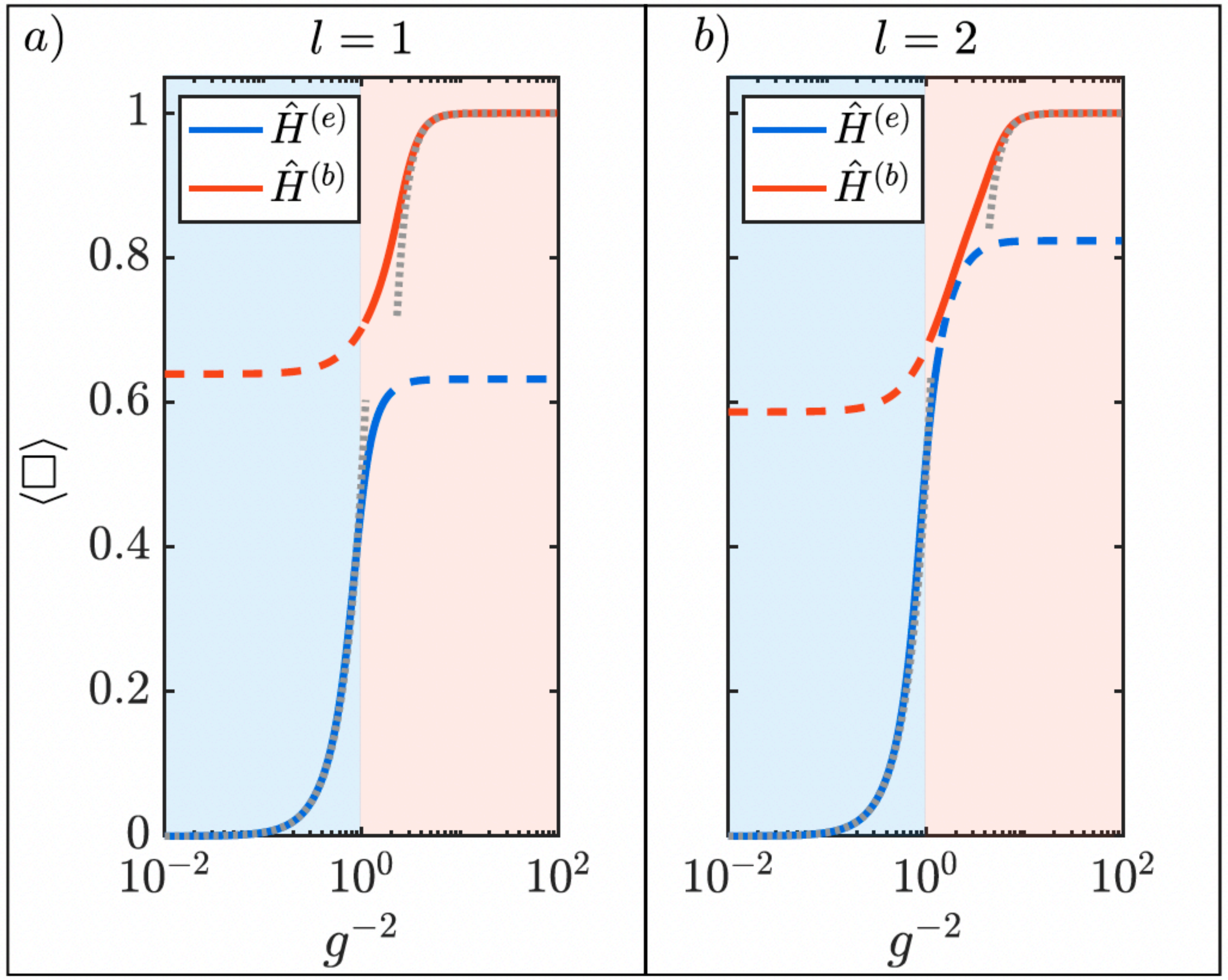
- Gauss law at each vertex

$$\hat{G}_i = \hat{E}_{li} - \hat{E}_{ij} + \hat{E}_{ki} - \hat{E}_{im} - \hat{q}_i$$

- 開境界条件の下でガウス則を課しても１つのゲージ自由度が残る

高次元U(1)ゲージ理論

プラケット(エネルギー密度)



Paulson et al. (2020)

(計算自体はVQEを使った)

- 高次元ゲージ理論のハミルトニアン

$$H = g^2 H_E - \frac{1}{g^2} H_B$$

$$H_E = \sum_n \hat{E}^2_{n,\hat{x}} + \hat{E}^2_{n,\hat{y}},\ H_B = \sum_n (\hat{P}_n + \hat{P}^\dagger_n)$$

- 電場演算子 $\hat{E}_{n,\hat{\mu}} | E_{n,\hat{\mu}} \rangle = E_{n,\hat{\mu}} | E_{n,\hat{\mu}} \rangle$, 固有値 $E_{n,\hat{\mu}} \in \mathbb{Z}$

  磁場演算子 $\hat{P}_n | p_n \rangle = | p_n - 1 \rangle$ (運動量昇降演算子に対応)

- U(1)を$\mathbb{Z}_{2L+1}$ゲージ理論に近似

  さらにヒルベルト空間をtrancate ($l < L$)

  $| -l \rangle, | -l+1 \rangle, \cdots, | 0 \rangle, \cdots | l \rangle$

- 強結合から弱結合(連続極限)へ滑らかに繋がる結果を得るのは難しい

高次元 / SU(N)ゲージ理論への取り組み

無限自由度を持つゲージ場をどう取り扱うか？

(1) ヒルベルト空間にカットオフを導入

q-変形による修正, Zache et al., Hayata and Hidaka

量子群に変形 $SU(N) \to SU(N)_k$,

trancationを"滑らかに" $[l] = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{k+3}l\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{k+3}\right)}$

(2) ゲージ対称性を離散的にする (例. 離散群($\mathbb{Z}_N$, $\mathbb{D}^N$,...))

PEPsによる 2+1d $\mathbb{Z}_3$ゲージ理論 Cirac, Zohar et al.

Quantum link model, Wiese et al. Montangero et al.

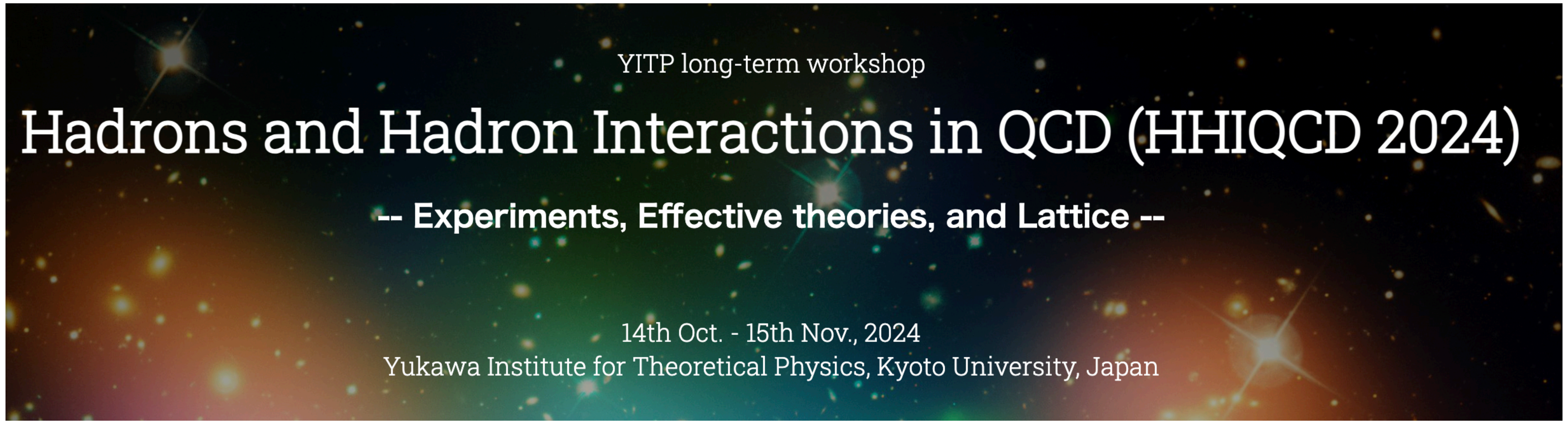
(ある極限を取るとゲージ理論と同じユニバーサリティクラスに属すスピン系)

宣伝

2024年10月14日 - 11月15日

京大基礎物理学研究所

滞在型研究会：HHIQCD202



1st and 2nd weeks: Hadron interactions, scattering

3rd week : symposium for all subjects

4th week：hot and dense QCD

5th week：Formal aspect and quantum computations

Invited speakers for 3rd and 5th weeks

- Zohreh Davoudi (Maryland U.)
- Erez Zohar (Hebrew U. of Jerusalem)
- Muhammad Asaduzzaman (U. of Iowa)
- Yahui Chai (DESY)
- Tomoya Hayata (Keio U.)
- Marc Illa (U. Washington)
- David B. Kaplan (Washington U.)
- Scott Lawrence(Los Alamos Natl. Lab.)
- Akira Matsumoto (YITP, Kyoto U.)
- Indrakshi Raychowdhury (BITS, Pilani)
- Pietro Silvi (Università di Padova)
- Judah Unmuth-Yockey (Fermilab)
- Uwe-Jens Wiese (Bern U.)
- Arata Yamamoto (U. Tokyo)
- Xiaojun Yao (U. Washington)
- Torsten V. Zache (Innsbruck U.)

… and more

まとめ

まとめと展望

- 従来の格子QCDにおける符号問題が難しすぎた
  符号問題が最初から生じないハミルトニアン形式のゲージ場の理論が注目
  (実時間発展、有限密度QCD、トポロジカルθに関しては難しくない)

- 主な計算手法：量子計算アルゴリズム、テンソルネットワーク法

- 計算機に乗せるにはゲージ場の自由度をどう扱うか？

- 一方でハミルトニアン形式ならではの物理量の新しい測定法・新しい物理量の測定を考えるのも面白い
  (q-qbar ポテンシャル, ハドロンスペクトル, 実時間発展による真空崩壊...)

$\mathscr{L}$ から $\mathscr{H}$ へ

Ex) Schwinger model with open b.c.

- Lagrangian in continuum

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{g\theta_0}{4\pi}\epsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + igA_{\mu})\psi - m\bar{\psi}\psi$$

- Hamiltonian in continuum

$$H_{\rm con} = \int dx \left[\frac{1}{2}\left(\Pi - \frac{g\theta_0}{2\pi}\right)^2 - i\bar{\psi}\gamma^1(\partial_1 + igA_1)\psi + m\bar{\psi}\psi\right]$$

- Hamiltonian on lattice (staggered fermion, link variable)

$$H = J\sum_{n=0}^{N-2}\left(L_n + \frac{\vartheta_n}{2\pi}\right)^2 - iw\sum_{n=0}^{N-2}\left(\chi_n^{\dagger}U_n\chi_{n+1} - \chi_{n+1}^{\dagger}U_n^{\dagger}\chi_n\right) + m\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\chi_n^{\dagger}\chi_n$$

- Remove gauge d.o.f. (OBC and Gauss law constraint)

$$H = J\sum_{n=0}^{N-2}\left(\epsilon_{-1} + \sum_{i=0}^{n}\left(\chi_i^{\dagger}\chi_i - \frac{1-(-1)^i}{2}\right) + \frac{\vartheta_n}{2\pi}\right)^2 - iw\sum_{n=0}^{N-2}\left(\chi_n^{\dagger}\chi_{n+1} - \chi_{n+1}^{\dagger}\chi_n\right) + m\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\chi_n^{\dagger}\chi_n$$

- Spin Hamiltonian using Pauli matrices(Jordan-Wigner trans.)

$$H = J\sum_{n=0}^{N-2}\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{Z_i + (-1)^i}{2} + \frac{\vartheta_n}{2\pi}\right]^2 + \frac{w}{2}\sum_{n=0}^{N-2}\left[X_nX_{n+1} + Y_nY_{n+1}\right] + \frac{m}{2}\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^nZ_n$$

Canonical momentum: $\Pi = \partial_0 A^1 + \frac{g\theta}{2\pi}$

Link variable: $L_n \leftrightarrow -\Pi(x)/g, \quad U_n \leftrightarrow e^{-iagA^1(x)}$,

Staggered fermion: $\frac{\chi_n}{\sqrt{a}} \leftrightarrow \begin{cases}\psi_u(x) & n: \text{even} \\ \psi_d(x) & n: \text{odd}\end{cases}$

Gauss law:
$0 = \partial_1\Pi + g\psi^{\dagger}\psi \to L_n - L_{n-1} = \chi_n^{\dagger}\chi_n - \frac{1-(-1)^n}{2}$

Jordan-Wigner trans.: $\chi_n = \frac{X_n - Y_n}{2}\prod_{i=0}^{n-1}(-iZ_i)$

量子コンピュータ版 "ムーアの法則"

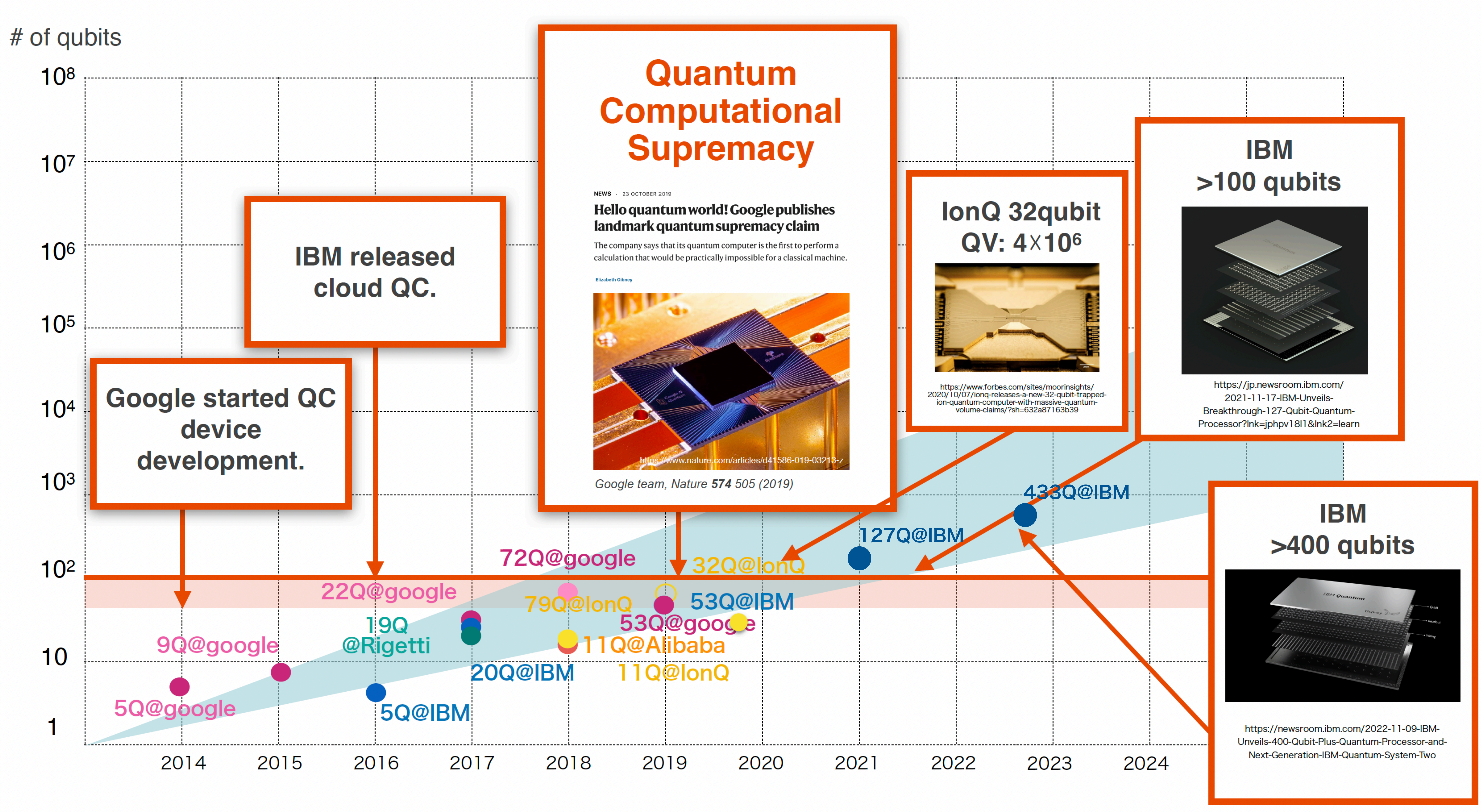


Figure given by Keisuke Fujii @QIQB, Osaka U.

量子版ムーアの法則

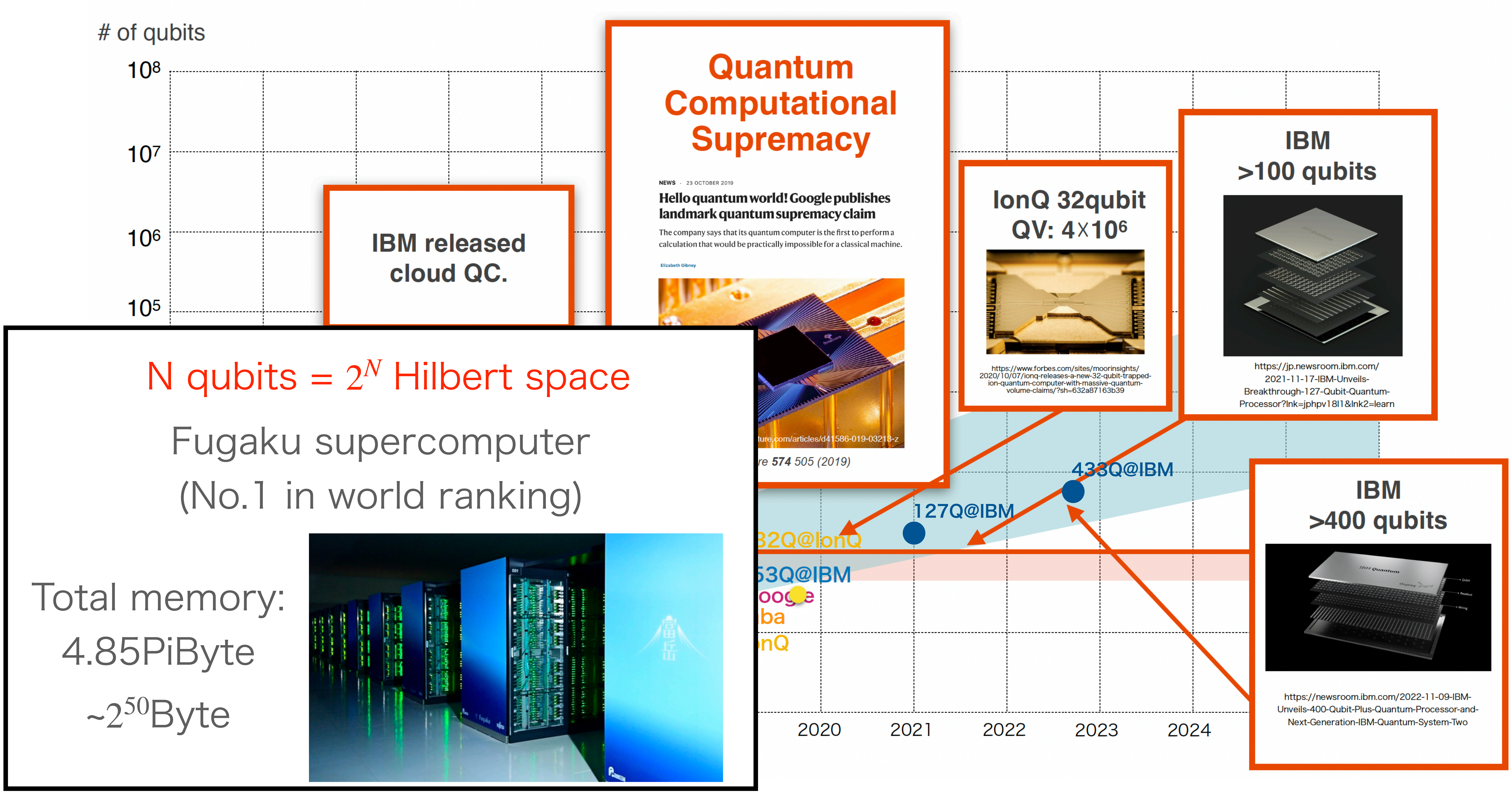
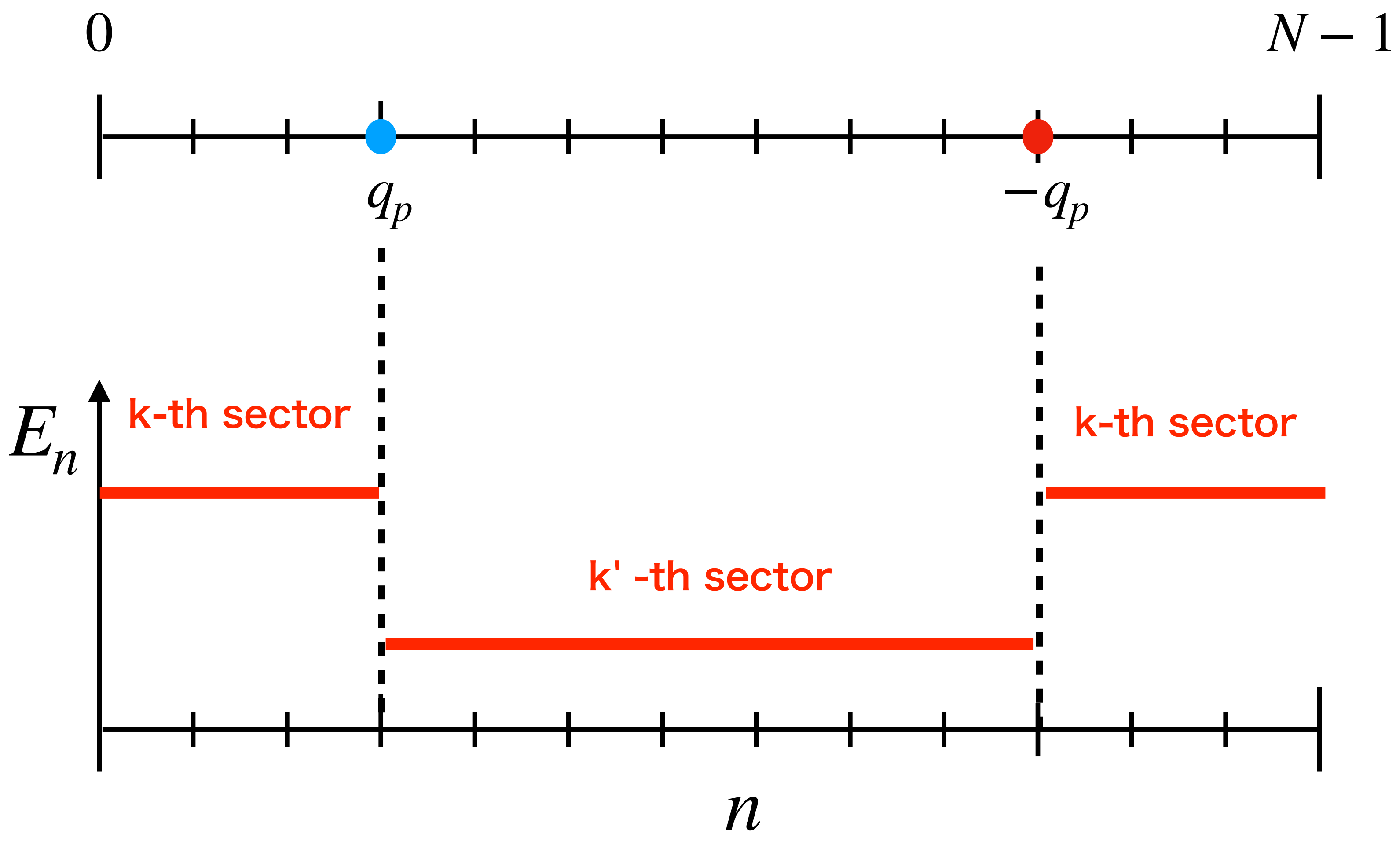
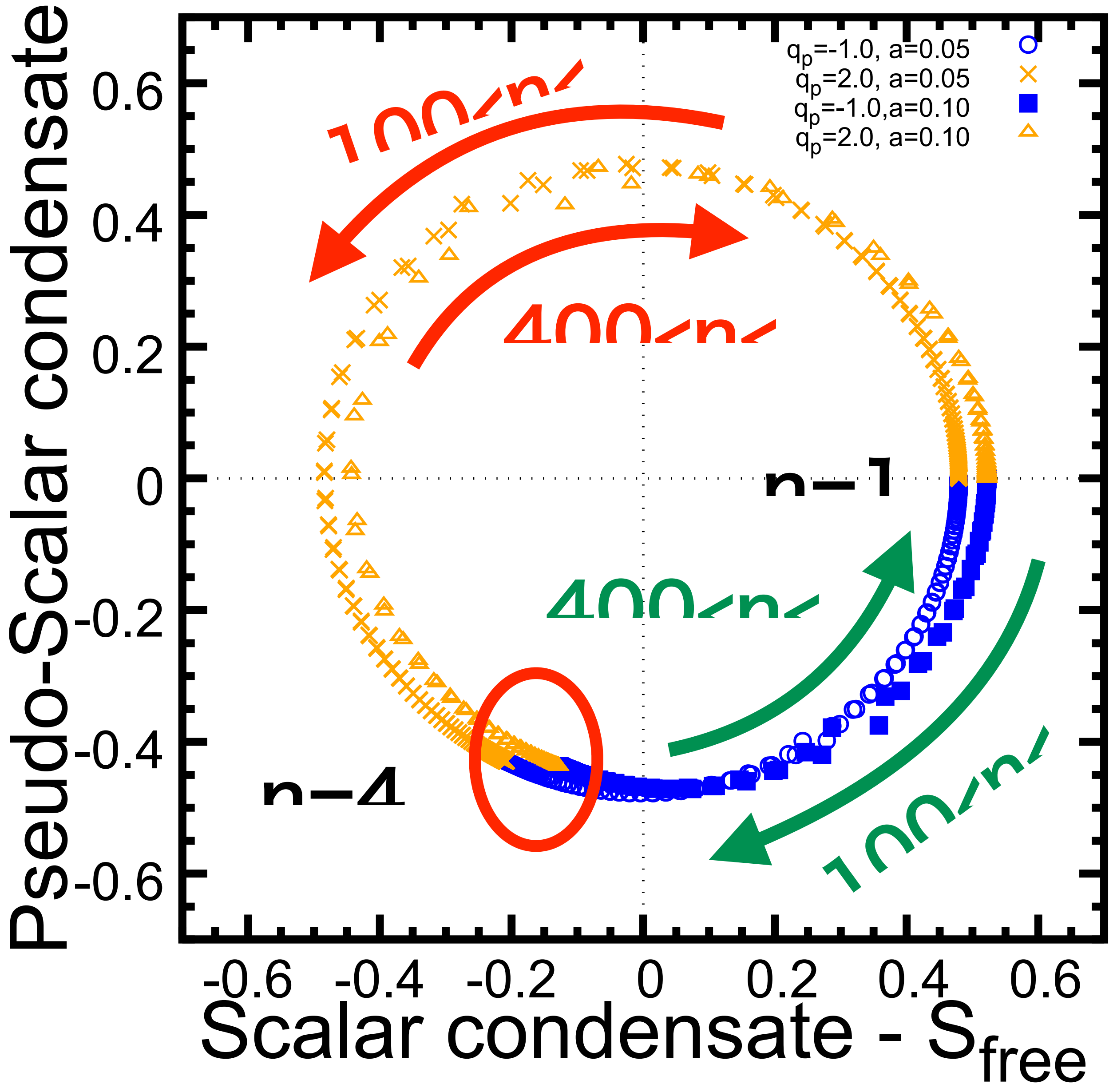


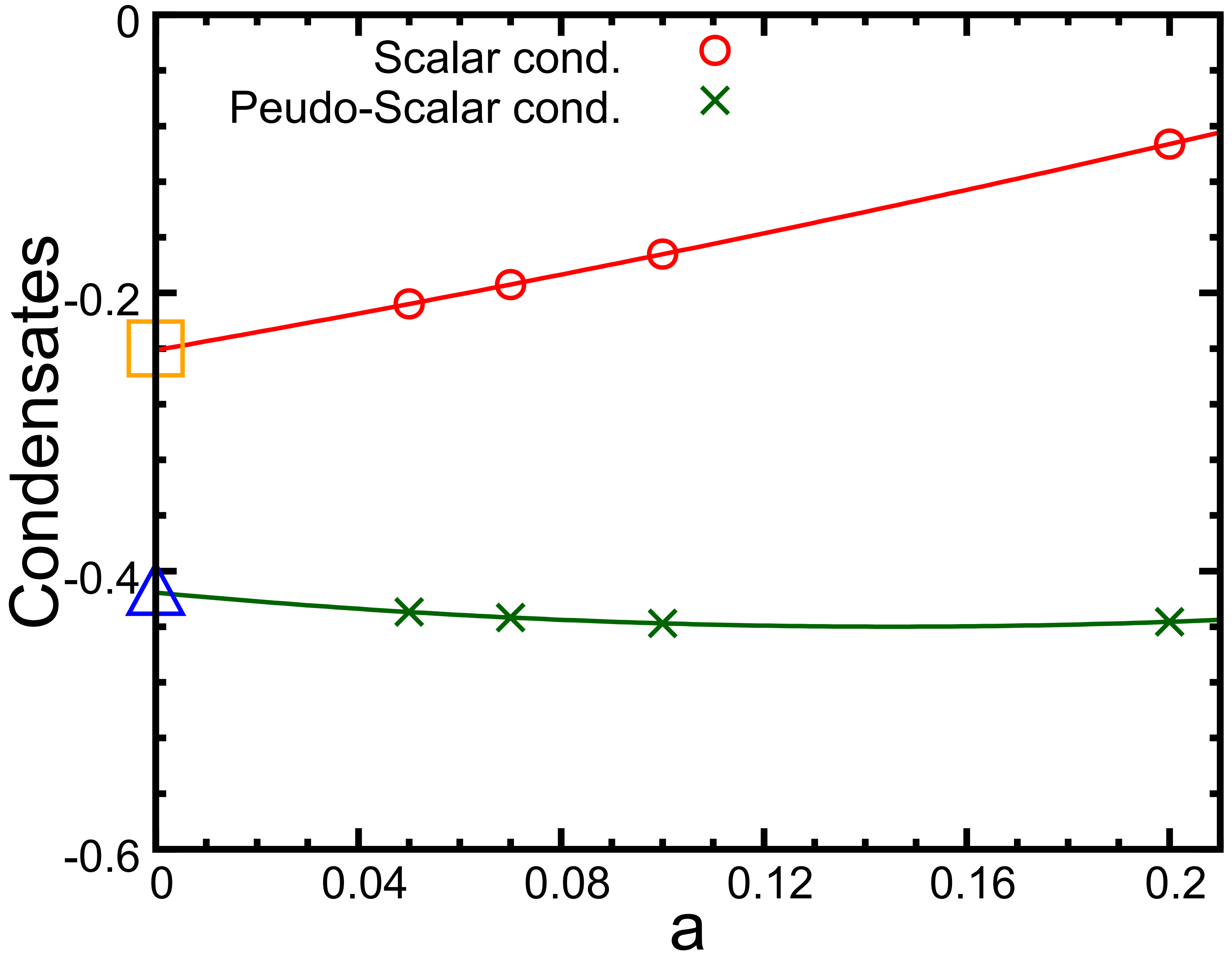
Figure given by Keisuke Fujii @QIQB, Osaka U.

charge-q Schwinger model ('t Hooft anomaly matching)

負のストリングテンションが
生じる時のsite毎の基底エネルギー







Order parameter: $S(x) + iP(x) = \bar{\psi}\psi(x) \pm \bar{\psi}\gamma_{\mathrm{E}}\psi(x)$ 連続極限をとると複素平面で $2\pi q_p/q$ (mod q)回転している

Wison loopの内側と外側で
離散カイラルの異なるセクター

横切る時 $e^{i\frac{2\pi q_p}{q}}$の位相を稼ぐ

charge-q Schwinger model ('t Hooft anomaly matching)

Staggered fermionのmass補正

masslessの時もlog発散はゼロではない？

$$S^{\rm free} = -\frac{m}{\pi\sqrt{1+(\mu a)}}K\left(\frac{1}{\sqrt{1+(\mu a)^2}}\right)$$

ハミルトニアン形式におけるstaggered fermionの連続理論との対応に O(a)の補正が生じる

$$m_{\rm lat} = m - \frac{q^2 g^2 a}{8}$$

Dempsey, Klebanov, Pufu, Zan:arXiv:2206.05308