ドジッター背景時空上における赤外効果の統計的性質

徳田 順生(京都大学天体核研究室)

in collaboration with 田中 貴浩(京都大学天体核研究室)

2017/03/01-3 若手による重力・宇宙論研究会@YITP

インフレーション宇宙：密度ゆらぎの生成機構

インフレーション
||
宇宙の加速的膨張
↑
$\ddot{a} > 0$　（$a(t)$: スケール因子）

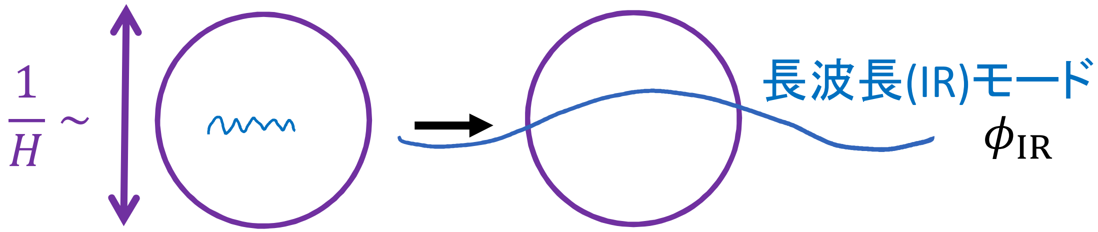
⇐ インフラトンϕが引き起こす

インフラトンϕの量子ゆらぎは引き伸ばされる。

あるkに対して、

$$k_{\mathrm{ph}} = \frac{k}{a} \quad \text{vs} \quad H$$

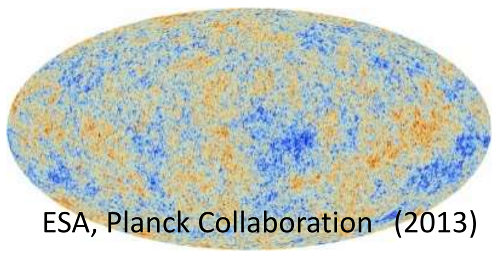
$$\partial_t\left(\frac{H}{k_{\mathrm{ph}}}\right) = \frac{1}{k}\partial_t(aH) = \frac{\ddot{a}}{k} > 0$$



ハッブルホライズン(~膨張宇宙の曲率半径)

⇒ **宇宙マイクロ波背景放射ゆらぎ**

相関関数　$<\phi_{\mathrm{IR}}\phi_{\mathrm{IR}}>$


ESA, Planck Collaboration (2013)

$<\phi_{IR}\phi_{IR}>$ へのループ補正は？

ループ補正→赤外成長

ドジッター時空(インフレーション時空)上のゼロ質量スカラー場(インフラトン)の弱結合理論

Late timeで破綻！

~~摂動的QFT~~

e.g.　ゼロ質量　$\lambda\phi^4$ 理論($\lambda \ll 1$)
(背景時空:ドジッター時空　$a(t) \propto e^{Ht}$)

$<\phi_{\mathrm{IR}}^2(x)>$　　$k \geq a_o H$：赤外カットオフ

$\ln\frac{a}{a_0} \sim t - t_0$

$$
\begin{aligned}
&\sim \ln\frac{a}{a_0} + 1 \\
&+\lambda\left[\left(\ln\frac{a}{a_0}\right)^3 + \left(\ln\frac{a}{a_0}\right)^2 + \left(\ln\frac{a}{a_0}\right) + 1\right] \\
&+\lambda^2\left[\left(\ln\frac{a}{a_0}\right)^5 + \left(\ln\frac{a}{a_0}\right)^4 + \left(\ln\frac{a}{a_0}\right)^3 + \cdots\right] \\
&+\cdots
\end{aligned}
$$

leading order (LO)　Sub-LO

λに関する摂動展開に頼らない計算方法

LOでは存在する。

赤外効果のLO：Stochastic Formalism

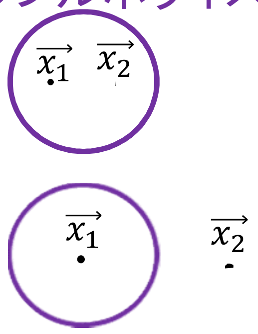
A. A. Starobinsky (1986)　　N. C. Tsamis and R. P. Woodard, (2005)
V.Vennin and A.A.Starobinsky(2015)　A.A.Starobinsky and J.Yokoyama(1994)

Stochastic Formalism：赤外効果のLOを再現

$$\dot{\phi}_{\rm IR} = \underbrace{-\frac{1}{3H}V'(\phi_{\rm IR})}_{\text{決定論的}} + \underbrace{\xi}_{\text{確率論的}}$$

ハッブルホライズン

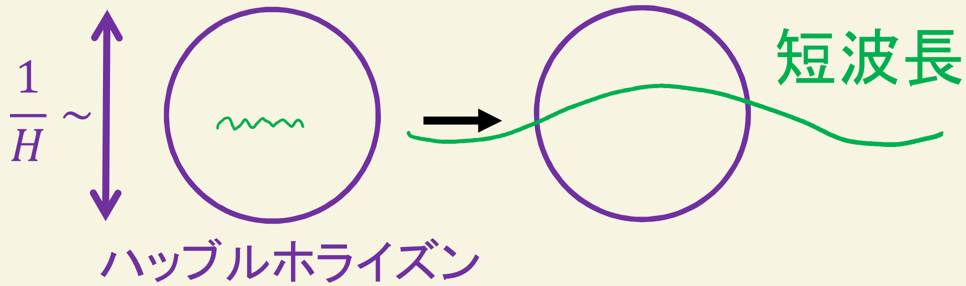
$$< \xi(x_1)\xi(x_2) >\sim \begin{cases} H^3\delta(t_1 - t_2) & \text{for} \\ 0 & \text{for} \end{cases}$$



ポテンシャルの上を転がりながらランダムウォーク

λ に関して摂動展開せずに解くことができる

ξの物理的意味



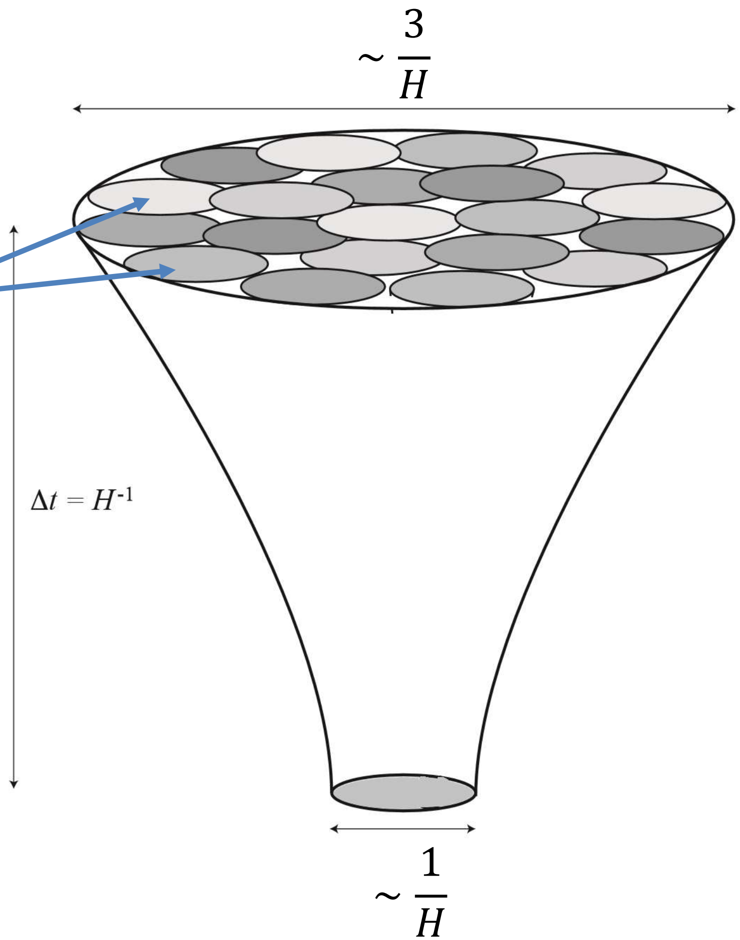
短波長(UV)モード → IRモードに加わる（位相：ランダム）
→ ランダム力（ストカスティックノイズ）

Stochastic Formalismにおける インフレーション宇宙の描像 :確率的に時間発展

A.Linde(1986)
T.Fujita *et al*.(2013)

- 各ハッブルホライズン
  :独立にランダムウォーク

色の違い:異なる$\phi_{\rm IR}$の値



赤外効果のLOしか考えていない

K.K.Boddy, S.M.Carrol and J.Pollack(2016) 加筆・修正

Sub-LOまで含めるとどうなる…？

$\lambda\phi^4$ 理論$(\lambda \ll 1)$

$< \phi_{\mathrm{IR}}^2(x) >$

$$
\begin{aligned}
\sim\ & \ln\frac{a}{a_0} + 1 \\
+\lambda & \left[\left(\ln\frac{a}{a_0}\right)^3 + \left(\ln\frac{a}{a_0}\right)^2 + \left(\ln\frac{a}{a_0}\right) + 1\right] \\
+\lambda^2 & \left[\left(\ln\frac{a}{a_0}\right)^5 + \left(\ln\frac{a}{a_0}\right)^4 + \left(\ln\frac{a}{a_0}\right)^3 + \cdots\right] \\
+\cdots &
\end{aligned}
$$

LO
(Leading order)

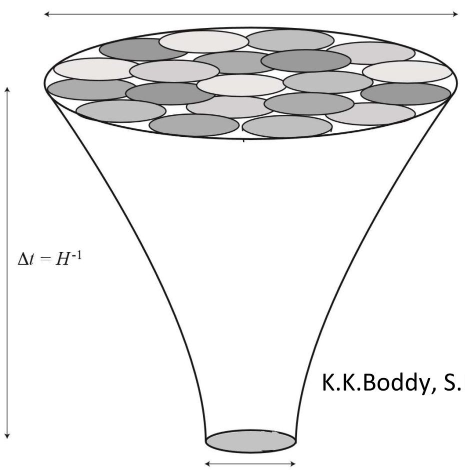
Sub-LO

どのようなダイナミクスで記述される？

- ダイナミクスが確率過程として
  解釈できない可能性

- 確率過程として表せても、
  長時間相関を持つ可能性

➡ LOと**定性的に全く異なる**可能性



➡ インフレーション宇宙の確率的描像

・・・本当に成り立つのか？

K.K.Boddy, S.M.Carrol and J.Pollack(2016)　加筆・修正

Our Work : 本研究の成果

$\lambda\phi^4$ 理論$(\lambda \ll 1)$

$$
\begin{aligned}
< \phi_{\mathrm{IR}}^2(x) > \sim\ & \ln\frac{a}{a_0} + 1 \\
& + \lambda\left[\left(\ln\frac{a}{a_0}\right)^3 + \left(\ln\frac{a}{a_0}\right)^2 + \left(\ln\frac{a}{a_0}\right) + 1\right] \\
& + \lambda^2\left[\left(\ln\frac{a}{a_0}\right)^5 + \left(\ln\frac{a}{a_0}\right)^4 + \left(\ln\frac{a}{a_0}\right)^3 + \cdots\right] \\
& + \cdots
\end{aligned}
$$

LO　NLO　Sub-LO

(Next-to-leading order)

1. すべてのオーダーの赤外効果を記述するIRモードの有効EoMの系統的導出法を構築した。

2. NLOの赤外効果までを記述する有効EoMを導出した。

   ⇒ NLOの赤外効果までは確率解釈可能と分かった。

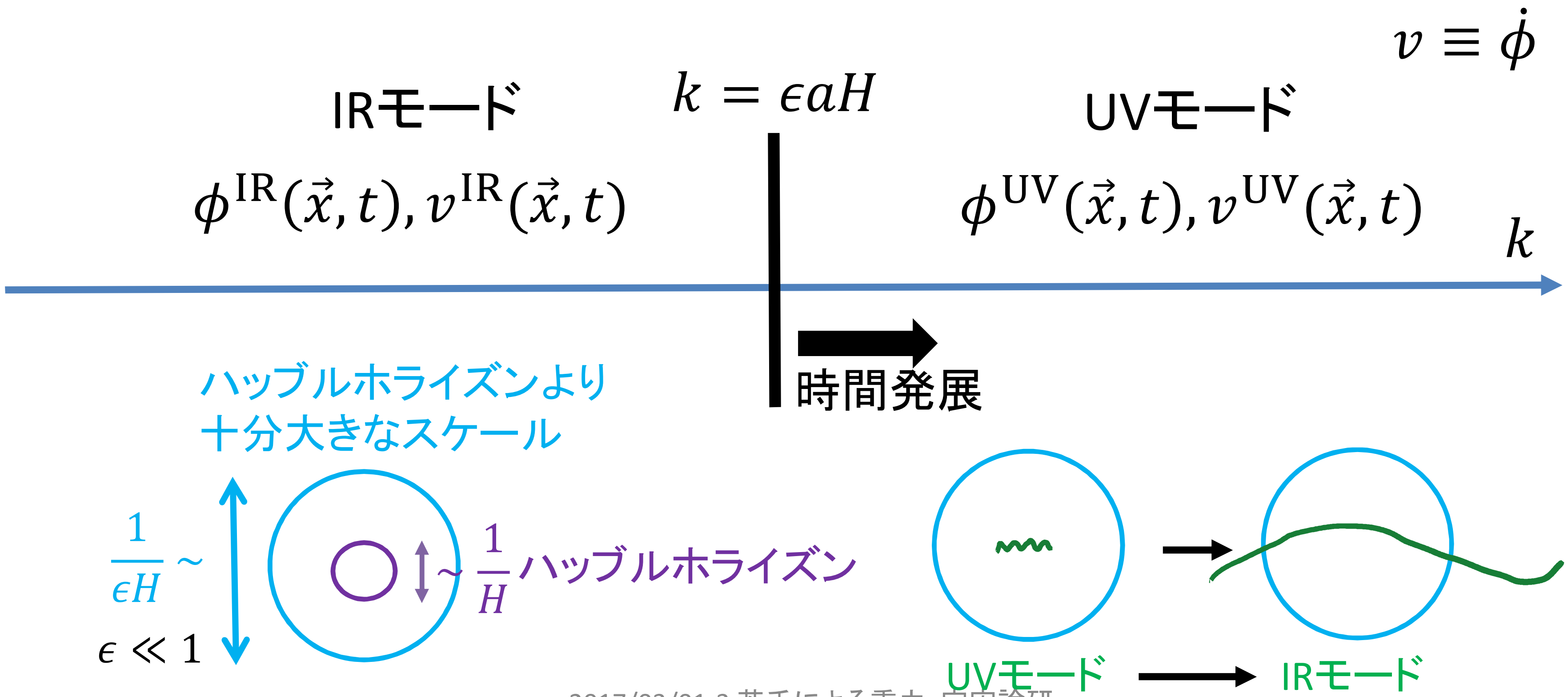
3. 重み関数の実性を一般に示した。

セットアップ

- **扱うトイモデル**: $\lambda\phi^4$ 理論　on ドジッター背景時空: $a(t) \propto e^{Ht}$

$$S = \int \mathrm{d}^4 x a^3 \left[-\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \right]$$

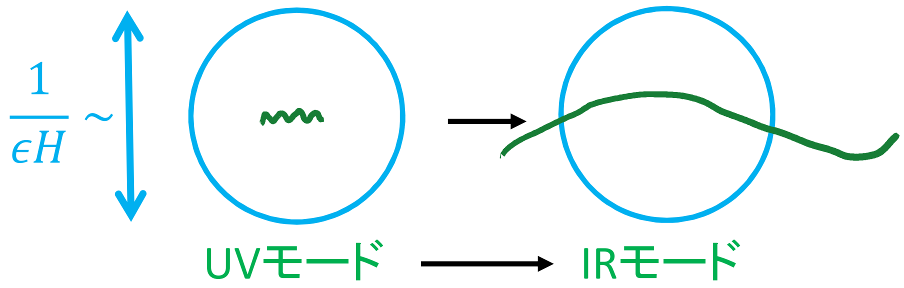
- **UVモードとIRモードの分割**



戦略

- **考える状況**

初期時刻t_0においてIRモードは存在しないとする。
（赤外カットオフ $k_0 = \epsilon a_0 H$を導入する）



UVモード$\phi^{\mathrm{UV}}, v^{\mathrm{UV}}$ をintegrate out

⇒ IRモード$\phi^{\mathrm{IR}}, v^{\mathrm{IR}}$の従う有効EoM

⟶ **経路積分表式が便利**

M.Morikawa(1990)

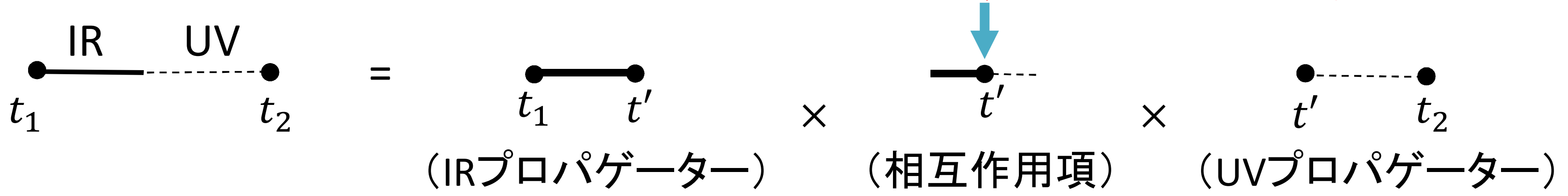
UVとIRに分割した経路積分表式

UVモードを
integrate outしたい

UVモードとIRモードに分割した
経路積分表式を導出したい

$$\int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}v\,\mathrm{e}^{iS_0} \longrightarrow \int \mathcal{D}\phi^{\mathrm{IR}}\mathcal{D}v^{\mathrm{IR}}\mathrm{e}^{iS_0^{\mathrm{IR}}} \int \mathcal{D}\phi^{\mathrm{UV}}\mathcal{D}v^{\mathrm{UV}}\mathrm{e}^{iS_0^{\mathrm{UV}}} \boxed{\mathrm{e}^{iS_{\mathrm{bilinear}}}}$$

UV→IRの遷移を表す相互作用項



UVモード→IRモード遷移を表す相互作用項を導入

経路積分をUVモードとIRモードに**分割できる。**

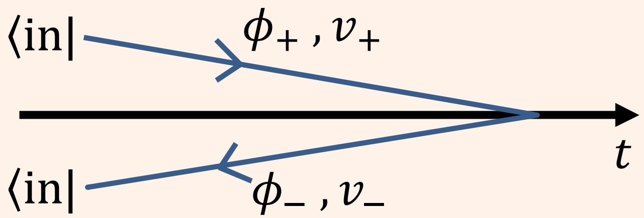
IRモードの有効EoM

◆IRモードの生成汎関数$Z[J^{\mathrm{IR}}]$

UV→IRの遷移を表す相互作用項

$$Z[J^{\mathrm{IR}}] = \int \mathcal{D}\phi_c^{\mathrm{IR}}\mathcal{D}\phi_\Delta^{\mathrm{IR}}\mathcal{D}v_c^{\mathrm{IR}}\mathcal{D}v_\Delta^{\mathrm{IR}} e^{iS_0^{\mathrm{IR}}+iJ_\phi^{\mathrm{IR}}\cdot\phi^{\mathrm{IR}}+iJ_v^{\mathrm{IR}}\cdot v^{\mathrm{IR}}} \int \mathcal{D}\phi_c^{\mathrm{UV}}\mathcal{D}\phi_\Delta^{\mathrm{UV}}\mathcal{D}v_c^{\mathrm{UV}}\mathcal{D}v_\Delta^{\mathrm{UV}} e^{iS_0^{\mathrm{UV}}} \boxed{e^{iS_{\mathrm{bilinear}}}} e^{iS_{\mathrm{self}}} \equiv e^{i\Gamma'}$$

初期状態|in⟩を定め、
系を時間発展



$\phi_c \equiv \frac{\phi_+ + \phi_-}{2}$, $\phi_\Delta \equiv \phi_+ - \phi_-$

◆ IRモードの有効EoMの求め方

$e^{i\Gamma'}$を計算することで性質がわかる

$$e^{i\Gamma'} \longrightarrow e^{i[\phi_\Delta^{\mathrm{IR}}(\cdots)+v_\Delta^{\mathrm{IR}}(\cdots)]}$$

$$f(x) = \int dk\, \tilde{f}(k) e^{ikx}$$

xについて一次

$$\int \mathcal{D}\phi_\Delta^{\mathrm{IR}}\mathcal{D}v_\Delta^{\mathrm{IR}}$$

$$\dot{\phi}_c^{\mathrm{IR}} = v_c^{\mathrm{IR}} + \xi_\phi$$

$$\dot{v}_c^{\mathrm{IR}} = -3Hv_c^{\mathrm{IR}} - V'_{\mathrm{eff}}(\phi_c^{\mathrm{IR}}) + \xi_v$$

有効EoM

結果・結論: NLO＝**場の値に依存する**ランダムウォーク

- NLOの赤外効果までを記述する有効EoMは、

$$\dot{\phi}_c^{\rm IR} = v_c^{\rm IR} + \xi_\phi, \quad \dot{v}_c^{\rm IR} = -3Hv_c^{\rm IR} - \frac{\lambda}{6}{\phi_c^{\rm IR}}^3 + \xi_v$$

$$< \xi_\phi(x_1)\xi_\phi(x_2) > = \frac{H}{4\pi^2}\left[\overset{\rm LO}{H^2} + \underbrace{\lambda l(\epsilon){\phi_c^2}^{\rm IR}(x_1)}_{\rm NLO}\right]\underbrace{\delta(t_1 - t_2)j_0(\epsilon a(t_1)H|\vec{x_1} - \vec{x_2}|)}_{\rm LO}$$

$$< \xi_\phi(x_1)\xi_v(x_2) > = -\frac{H\lambda}{48\pi^2}\underbrace{{\phi_c^2}^{\rm IR}(x_1)}_{\rm NLO}\underbrace{\delta(t_1 - t_2)j_0(\epsilon a(t_1)H|\vec{x_1} - \vec{x_2}|)}_{\rm LO}$$

$$< \xi_v(x_1)\xi_v(x_2) > = \mathcal{O}(\epsilon^2) \simeq 0 \qquad l(\epsilon) := -\frac{1}{6}\left[\ln\frac{1}{\epsilon} - \ln 2 - \gamma + 2\right].$$

LOの時との違い
- ノイズの大きさ
  : 場の値に依存する($\phi_c^{\rm IR}$依存する。)
- 共役運動量のノイズも含まれている。

ノイズの時間相関・空間相関
：LOの時と同じ

少なくともNLOの赤外効果までは、確率解釈が可能。

ここまでやってきたこと

$\lambda\phi^4$ 理論($\lambda \ll 1$)

$$
\begin{aligned}
<\phi_{\mathrm{IR}}^2(x)> \sim\ & \ln\frac{a}{a_0} + 1 \\
& + \lambda\left[\left(\ln\frac{a}{a_0}\right)^3 + \left(\ln\frac{a}{a_0}\right)^2 + \left(\ln\frac{a}{a_0}\right) + 1\right] \\
& + \lambda^2\left[\left(\ln\frac{a}{a_0}\right)^5 + \left(\ln\frac{a}{a_0}\right)^4 + \left(\ln\frac{a}{a_0}\right)^3 + \cdots\right] \\
& + \cdots
\end{aligned}
$$

LO　NLO　Sub-LO

(Next-to-leading order)

1. すべてのオーダーの赤外効果を記述するIRモードの有効EoMの系統的導出法を構築した。
2. NLOの赤外効果までを記述する有効EoMを導出した。

NLOの赤外効果までは確率解釈可能と分かった。

NLOを超えてSub-LOの赤外効果も含めた時、確率解釈可能か？

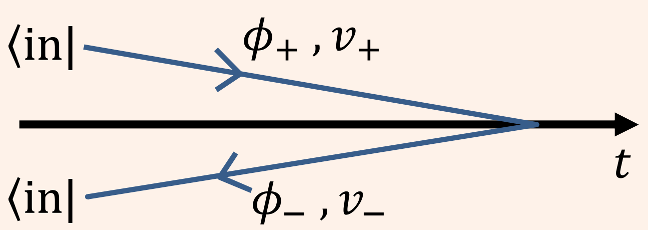
IRモードの有効EoM

◆IRモードの生成汎関数$Z[J^{\mathrm{IR}}]$

UV→IRの遷移を表す相互作用項

$$Z[J^{\mathrm{IR}}] = \int \underline{\mathcal{D}\phi_c^{\mathrm{IR}}\mathcal{D}\phi_\Delta^{\mathrm{IR}}\mathcal{D}v_c^{\mathrm{IR}}\mathcal{D}v_\Delta^{\mathrm{IR}}}\, \mathrm{e}^{iS_0^{\mathrm{IR}}+iJ_\phi^{\mathrm{IR}}\cdot\phi^{\mathrm{IR}}+iJ_v^{\mathrm{IR}}\cdot v^{\mathrm{IR}}} \boxed{\int \underline{\mathcal{D}\phi_c^{\mathrm{UV}}\mathcal{D}\phi_\Delta^{\mathrm{UV}}\mathcal{D}v_c^{\mathrm{UV}}\mathcal{D}v_\Delta^{\mathrm{UV}}}\, \mathrm{e}^{iS_0^{\mathrm{UV}}}\boxed{\mathrm{e}^{iS_{\mathrm{bilinear}}}}\mathrm{e}^{iS_{\mathrm{self}}}} \equiv e^{i\Gamma'}$$

初期状態|in⟩を定め、
系を時間発展



$\phi_c \equiv \frac{\phi_+ + \phi_-}{2},\ \phi_\Delta \equiv \phi_+ - \phi_-$

◆ IRモードの有効EoMの求め方

$$e^{i\Gamma'} \longrightarrow e^{i[\phi_\Delta^{\mathrm{IR}}(\cdots)+v_\Delta^{\mathrm{IR}}(\cdots)]}$$

$f(x) = \int dk\, \tilde{f}(k) e^{ikx}$

xについて一次

$$\int \mathcal{D}\phi_\Delta^{\mathrm{IR}}\mathcal{D}v_\Delta^{\mathrm{IR}} \Rightarrow$$

$e^{i\Gamma'}$を計算することで
性質がわかる

$$\dot{\phi}_c^{\mathrm{IR}} = v_c^{\mathrm{IR}} + \xi_\phi$$

$$\dot{v}_c^{\mathrm{IR}} = -3Hv_c^{\mathrm{IR}} - \underline{V'_{\mathrm{eff}}(\phi_c^{\mathrm{IR}})} + \xi_v$$

有効EoM

ノイズの性質の求め方

$\Gamma' = \left(\phi_\Delta^{\mathrm{IR}}, v_\Delta^{\mathrm{IR}}\right.$に関して一次の項$\left.\right) + \underline{(\text{二次以上の項})} \equiv \Gamma$

- Γを、$\phi_\Delta^{\mathrm{IR}}, v_\Delta^{\mathrm{IR}}$に関して一次の形に書き換える

$$e^{i\Gamma} = \int d\xi_\phi \int d\xi_v P[\xi_\phi, \xi_v, \phi_c^{\mathrm{IR}}] e^{i\int d^4x a^3 \phi_\Delta^{\mathrm{IR}}(x)\xi_v(x)} e^{-i\int d^4x a^3 v_\Delta^{\mathrm{IR}}(x)\xi_\phi(x)}$$

重み関数

- ノイズ相関は次のように与えられる。

$$< \xi_v(y_1)\cdots\xi_v(y_d)\xi_\phi(z_1)\cdots\xi_\phi(z_v) >$$
$$:= \int d\xi_\phi \int d\xi_v P[\xi_\phi, \xi_v, \phi_c^{\mathrm{IR}}]\xi_v(y_1)\cdots\xi_v(y_d)\xi_\phi(z_1)\cdots\xi_\phi(z_v)$$
$$= \left[\left(\frac{\delta}{ia^3(y_1)\delta\phi_\Delta^{\mathrm{IR}}(y_1)}\right)\cdots\left(\frac{\delta}{ia^3(y_d)\delta\phi_\Delta^{\mathrm{IR}}(y_d)}\right)\left(\frac{-\delta}{ia^3(z_1)\delta v_\Delta^{\mathrm{IR}}(z_1)}\right)\cdots\left(\frac{-\delta}{ia^3(z_d)\delta v_\Delta^{\mathrm{IR}}(z_v)}\right)\right] e^{i\Gamma}\Big|_{\phi_\Delta^{\mathrm{IR}}, v_\Delta^{\mathrm{IR}}=0} .$$

⇒ $e^{i\Gamma}$を計算すれば、このようにノイズ相関が求まる。

確率解釈 ⟶ 重み関数Pの実性

重み関数Pの実性1/2

$$e^{i\Gamma}=\int d\xi_\phi\int d\xi_v \underbrace{P[\xi_\phi,\xi_v,\phi_c^{\mathrm{IR}}]}_{\text{重み関数}}e^{i\int d^4xa^3\phi_\Delta^{\mathrm{IR}}(x)\xi_v(x)}e^{-i\int d^4xa^3v_\Delta^{\mathrm{IR}}(x)\xi_\phi(x)}$$

$$P[\xi_\phi,\xi_v,\phi_c^{\mathrm{IR}}]=\int d\phi_\Delta^{\mathrm{IR}}\int dv_\Delta^{\mathrm{IR}}e^{i\Gamma[\phi_c^{\mathrm{IR}},\phi_\Delta^{\mathrm{IR}},v_c^{\mathrm{IR}},v_\Delta^{\mathrm{IR}}]}e^{i\int d^4xa^3(v_\Delta^{\mathrm{IR}}(x)\xi_\phi(x)-\phi_\Delta^{\mathrm{IR}}(x)\xi_v(x))}$$

$$\boxed{i\Gamma[\phi_c^{\mathrm{IR}},\phi_\Delta^{\mathrm{IR}},v_c^{\mathrm{IR}},v_\Delta^{\mathrm{IR}}]=(i\Gamma[\phi_c^{\mathrm{IR}},-\phi_\Delta^{\mathrm{IR}},v_c^{\mathrm{IR}},-v_\Delta^{\mathrm{IR}}])^*}$$

$$(P[\xi_\phi,\xi_v,\phi_c^{\mathrm{IR}}])^*=\int d\phi_\Delta^{\mathrm{IR}}\int dv_\Delta^{\mathrm{IR}}e^{(i\Gamma[\phi_c^{\mathrm{IR}},-\phi_\Delta^{\mathrm{IR}},v_c^{\mathrm{IR}},-v_\Delta^{\mathrm{IR}}])^*}e^{i\int d^4xa^3(v_\Delta^{\mathrm{IR}}(x)\xi_\phi(x)-\phi_\Delta^{\mathrm{IR}}(x)\xi_v(x))}$$

$$\boxed{i\Gamma[\phi_c^{\mathrm{IR}},\phi_\Delta^{\mathrm{IR}},v_c^{\mathrm{IR}},v_\Delta^{\mathrm{IR}}]=(i\Gamma[\phi_c^{\mathrm{IR}},-\phi_\Delta^{\mathrm{IR}},v_c^{\mathrm{IR}},-v_\Delta^{\mathrm{IR}}])^*}$$

を示せば、重み関数Pの実性を示せる。

重み関数Pの実性2/2

$\boxed{i\Gamma[\phi_c^{\mathrm{IR}},\phi_\Delta^{\mathrm{IR}},v_c^{\mathrm{IR}},v_\Delta^{\mathrm{IR}}] = (i\Gamma[\phi_c^{\mathrm{IR}},-\phi_\Delta^{\mathrm{IR}},v_c^{\mathrm{IR}},-v_\Delta^{\mathrm{IR}}])^*}$ を示す。

$$i\Gamma' \sim d\cdot\phi_\Delta^{\mathrm{IR}} + \underbrace{a\cdot{\phi_\Delta^{\mathrm{IR}}}^2 + ib\cdot{\phi_\Delta^{\mathrm{IR}}}^3 + c\cdot{\phi_\Delta^{\mathrm{IR}}}^4 + \cdots}_{i\Gamma}$$

（$a,b,c\cdots$： ϕ_c^{IR}のみの関数）

相関関数の実性

$$\left\langle\left(\phi^{\mathrm{IR}}(x)\right)^{2n}\right\rangle = \int \mathcal{D}\phi_{c,\Delta}^{\mathrm{IR}}\mathcal{D}v_{c,\Delta}^{\mathrm{IR}}\ \left(\phi_c^{\mathrm{IR}}(x)\right)^{2n} e^{i\Gamma'}e^{iS_0^{\mathrm{IR}}}$$

$\in \mathbb{R}$

$$\sim d'\cdot\left(G_{c\Delta}^{\mathrm{IR}}\right) + a'\cdot\left(G_{c\Delta}^{\mathrm{IR}}\right)^2 + ib'\cdot\left(G_{c\Delta}^{\mathrm{IR}}\right)^3 + c'\cdot\left(G_{c\Delta}^{\mathrm{IR}}\right)^4 + \cdots$$

$a' =$ (実数) $\times\, a$
$b' =$ (実数) $\times\, b$
$c' =$ (実数) $\times\, c$
$d' =$ (実数) $\times\, d$

$G_{c\Delta}^{\mathrm{IR}}$ ＝遅延グリーン関数＝純虚数

$$G_{c\Delta}^{\mathrm{IR}} \equiv \int \mathcal{D}\phi_{c,\Delta}^{\mathrm{IR}}\mathcal{D}v_{c,\Delta}^{\mathrm{IR}}\ \phi_c^{\mathrm{IR}}\phi_\Delta^{\mathrm{IR}}e^{iS_0^{\mathrm{IR}}}$$

$$a,b,c\cdots\in\mathbb{R}$$

$$\boxed{i\Gamma[\phi_c^{\mathrm{IR}},\phi_\Delta^{\mathrm{IR}},v_c^{\mathrm{IR}},v_\Delta^{\mathrm{IR}}] = (i\Gamma[\phi_c^{\mathrm{IR}},-\phi_\Delta^{\mathrm{IR}},v_c^{\mathrm{IR}},-v_\Delta^{\mathrm{IR}}])^*}$$

重み関数Pの実性（まとめ）

相関関数の実性

$$\langle \left(\phi^{\mathrm{IR}}(x)\right)^{2n} \rangle$$
$$\Cup$$
$$\mathbb{R}$$

⇩

$$\boxed{i\Gamma[\phi_c^{\mathrm{IR}}, \phi_\Delta^{\mathrm{IR}}, v_c^{\mathrm{IR}}, v_\Delta^{\mathrm{IR}}] = (i\Gamma[\phi_c^{\mathrm{IR}}, -\phi_\Delta^{\mathrm{IR}}, v_c^{\mathrm{IR}}, -v_\Delta^{\mathrm{IR}}])^*}$$

⇩

重み関数Pの実性

まとめ

◆Motivation

- 軽いスカラー場のループ補正 ➡ 赤外成長項による摂動論の破綻
- LOの赤外効果：Stochastic Formalism ➡ 確率的に時間発展

sub-LOの赤外効果はどのような方程式で記述されるか？

◆Our Work

1. **すべての赤外効果を記述**する長波長モードの有効EoMを
   系統的に導出する方法を構築。
2. NLOの赤外効果までを記述する有効EoMを導出。
   少なくとも**NLOの赤外効果までは確率解釈が可能**と分かった。
3. ノイズの**重み関数Pの実性**を一般に示した。