Einstein 方程式の適切な離散式構築について

土屋拓也

早稲田大学

2017 年 3 月 3 日
若手による重力･宇宙論研究会

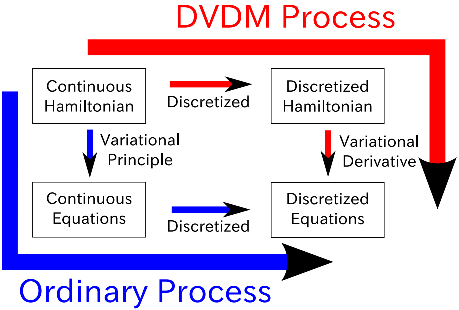
動機と研究テーマ

- 微分方程式を数値計算するには, 連続な微分方程式を離散方程式 (漸化式) に変形しないとならない.
- 離散化はターゲットとなる方程式の性質に依存し, 適当に行うとうまくいかない (すぐに計算が破綻する).
- よく知られている離散化法 (離散スキーム) は, Crank-Nicolson や Runge-Kutta など. これらの離散化法は方程式の性質に大きく依存せず, 汎用性が高い手法. $\Rightarrow$ 頻繁に用いられる.
- しかし, 汎用性が高い一方で, 方程式に合わない部分の誤差が生じる可能性がある.
- Runge-Kutta は Einstein 方程式に最適なのか?
最適でないなら, 最適な手法を構築する方法はないか?

動機と研究テーマ

- Einstein 方程式は 2 階連立非線形偏微分方程式なので構築への方針が掴みづらく, 適当に離散化すると選択肢 (空間差分と時間差分の組み合わせ数) が多すぎて決定できない.
  $\Rightarrow$ 力押しで離散方程式を構築することは不可能 (な気がする).
- 方程式に特化した離散化手法を作る手法のうち "幾何学的数値解法 (Gemoetric Numerical Integration)" や "構造保存数値解法" と呼ばれる方法がある.
- その中で "離散変分導関数法 (Discrete Variational Derivative Method(DVDM))" という方法に注目.
  (ちょうど作成者の 1 人である松尾宇泰さんの講演: "非線形偏微分方程式に対する構造保存数値解法" が 2012 年日本数学会であったので)
- この手法では, 変分構造 (Lagrange 関数や Hamilton 関数) を持っている方程式に対して適用可能 (ただ, 複雑な方程式系には未適用).
  $\Rightarrow$ Einstein 方程式も可能だろうと考えた.

DVDM の概念



一般の正準形式の離散方程式の構築方法は次のようになる (青線).

- Hamilton 関数を与え, 変分原理から (連続の) 発展方程式を作る.
- 発展方程式を離散化し, 離散発展方程式を得る.
  $\Rightarrow$ 離散化手法が適切かどうかは発展方程式に依存.

DVDM では以下のように作成する (赤線).

- Hamilton 関数を離散化し, 離散変分により離散発展方程式を得る.
- 離散 Hamilton 関数に特化した適切な離散化された発展方程式が得られる.

変数の説明

- $u^{(n)}_{(k)}$: 時刻 n, 空間 k 番目の離散変数.
本来 3 次元であれば, x, y, z に対応させて $u^{(n)}_{(i),(j),(k)}$ と表記すべきだが, 見づらくなるため (k) のみで表している.
- $\widehat{\delta}^{+}_{i}$: $i = 1, 2, 3$ として, それぞれ x, y, z 方向への前進差分を表す線形演算子. つまり, 変数 $u^{(n)}_{(k)}$ に対して $\widehat{\delta}^{+}_{i} u^{(n)}_{(k)} \equiv \dfrac{u^{(n)}_{(k+1)} - u^{(n)}_{(k)}}{\Delta x^i}$.
- $\widehat{\delta}^{-}_{i}$: $i = 1, 2, 3$ として, それぞれ x, y, z 方向への後退差分を表す線形演算子. つまり, 変数 $u^{(n)}_{(k)}$ に対して $\widehat{\delta}^{-}_{i} u^{(n)}_{(k)} \equiv \dfrac{u^{(n)}_{(k)} - u^{(n)}_{(k-1)}}{\Delta x^i}$.
- $$\widehat{\delta}^{\langle 1\rangle}_{i} \equiv \frac{1}{2}(\widehat{\delta}^{+}_{i} + \widehat{\delta}^{-}_{i}), \qquad \widehat{\delta}^{\langle 2\rangle}_{ij} \equiv \begin{cases} \widehat{\delta}^{+}_{i}\widehat{\delta}^{-}_{i}, & (i = j) \\ \widehat{\delta}^{\langle 1\rangle}_{i}\widehat{\delta}^{\langle 1\rangle}_{j}. & (i \neq j) \end{cases}$$

(上記の差分演算子は Leibniz ルールを満たさない.)

正準形式における離散化 (一般編)

正準形式を離散化する場合は次のようになる:

$\boxed{\text{一般の場合}}$

1. Hamilton 関数 $\mathcal{H}(q,p)$ (q,p: 共役ペア) を与える.
2. 正準方程式:

$$\partial_t q = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p}, \quad \partial_t p = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q},$$

   により発展方程式を得る.
3. その後, 上記の方程式を (Runge-Kutta 等の何らかの) 離散化法により離散方程式を得る.

正準形式における離散化 (DVDM 編)

DVDM の場合

1. Hamilton 関数 $\mathcal{H}(q,p)$ を与える.
2. その後, Hamilton 関数 $\mathcal{H}(q,p)$ を離散化する. これを $\mathcal{H}^{(n)}_{(k)}(q^{(n)}_{(k)}, p^{(n)}_{(k)})$ と表すことにする.
3. 以下の離散正準方程式で離散方程式系を構築:

$$\frac{q^{(n+1)}_{(k)} - q^{(n)}_{(k)}}{\Delta t} = \frac{\widehat{\delta}\mathcal{H}}{\widehat{\delta}(p^{(n+1)}_{(k)}, p^{(n)}_{(k)})}, \quad \frac{p^{(n+1)}_{(k)} - p^{(n)}_{(k)}}{\Delta t} = -\frac{\widehat{\delta}\mathcal{H}}{\widehat{\delta}(q^{(n+1)}_{(k)}, q^{(n)}_{(k)})},$$

それぞれ右辺の量は次で定義される:

$$\mathcal{H}^{(n+1)}_{(k)} - \mathcal{H}^{(n)}_{(k)} = \frac{\widehat{\delta}\mathcal{H}}{\widehat{\delta}(p^{(n+1)}_{(k)}, p^{(n)}_{(k)})}(p^{(n+1)}_{(k)} - p^{(n)}_{(k)}) + \frac{\widehat{\delta}\mathcal{H}}{\widehat{\delta}(q^{(n+1)}_{(k)}, q^{(n)}_{(k)})}(q^{(n+1)}_{(k)} - q^{(n)}_{(k)})$$

$(q^{(n+1)}_{(k)} - q^{(n)}_{(k)})$ や $(p^{(n+1)}_{(k)} - p^{(n)}_{(k)})$ がそれぞれ δq や δp に対応.

つまり, $\mathcal{H}^{(n+1)} - \mathcal{H}^{(n)}$ が恒等的に 0 となるように, 離散方程式を構築する.

$\Rightarrow$ 離散的に $\mathcal{H}$ が満たされる構造.

正準形式における離散化 (DVDM 編)

例

- $$\mathcal{H}^{(n)}_{(k)} = \frac{1}{2}(q^{(n)}_{(k)})^2 + \frac{1}{2}(p^{(n)}_{(k)})^2.$$

- このとき,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{(n+1)}_{(k)} - \mathcal{H}^{(n)}_{(k)} &= \frac{1}{2}\{(q^{(n+1)}_{(k)})^2 - (q^{(n)}_{(k)})^2\} + \frac{1}{2}\{(p^{(n+1)}_{(k)})^2 - (p^{(n)}_{(k)})^2\} \\ &= \boxed{\frac{1}{2}(q^{(n+1)}_{(k)} + q^{(n)}_{(k)})}(q^{(n+1)}_{(k)} - q^{(n)}_{(k)}) + \boxed{\frac{1}{2}(p^{(n+1)}_{(k)} + p^{(n)}_{(k)})}(p^{(n+1)}_{(k)} - p^{(n)}_{(k)}).\end{aligned}$$

- 離散方程式は

$$\frac{q^{(n+1)}_{(k)} - q^{(n)}_{(k)}}{\Delta t} = \boxed{\frac{1}{2}(p^{(n+1)}_{(k)} + p^{(n)}_{(k)})}, \quad \frac{p^{(n+1)}_{(k)} - p^{(n)}_{(k)}}{\Delta t} = -\boxed{\frac{1}{2}(q^{(n+1)}_{(k)} + q^{(n)}_{(k)})},$$

- 上記は Crank-Nicolson スキームになっている.

Einstein 方程式の正準形式

- 実際に, Einstein 方程式に適用してみる.
- Einstein-Hilbert 作用:

$$I = \int d^4x\, \mathcal{L}^{\mathsf{GR}}, \quad \mathcal{L}^{\mathsf{GR}} \equiv \sqrt{-g}\, {}^{(4)}R. \tag{1}$$

${}^{(4)}R$ は 4 次元スカラー曲率, $g = \mathrm{det}(g_{\mu\nu})$

- Hamilton 関数は

$$\mathcal{H}^{\mathsf{GR}} \equiv \pi^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - \mathcal{L}^{\mathsf{GR}}. \tag{2}$$

γ_{ij} は 3 次元計量, $\pi^{ij} \equiv \dfrac{\partial \mathcal{L}^{\mathsf{GR}}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}}$.

Einstein 方程式の正準形式

Hamilton 関数 $\mathcal{H}^{\mathrm{GR}}$ は整理すると

$$\mathcal{H}^{\mathrm{GR}} = -\alpha\sqrt{\gamma}\{{}^{(3)}R + (\pi^2/2 - \pi_{ij}\pi^{ij})/\gamma\} - 2\beta^i\sqrt{\gamma}D_j(\pi^j{}_i/\sqrt{\gamma}). \tag{3}$$

α, β^i はそれぞれ lapse 関数と shift ベクトルである．また，${}^{(3)}R$ は 3 次元スカラー曲率，γ は 3 次元計量 γ_{ij} の行列式，$\pi = \pi^{ij}\gamma_{ij}$，$D_i$ は γ_{ab} に沿った共変微分．$\mathcal{H}^{\mathrm{GR}}$ を正準方程式に代入すると以下を得る:

Einstein 方程式 (正準形式)

$$\mathcal{H} \equiv \sqrt{\gamma}\{{}^{(3)}R + (\pi^2/2 - \pi_{ij}\pi^{ij})/\gamma\} \approx 0, \tag{4}$$

$$\mathcal{M}_i \equiv 2\sqrt{\gamma}D_j(\pi^j{}_i/\sqrt{\gamma}) \approx 0, \tag{5}$$

$$\partial_t\gamma_{ij} = -\alpha(\pi\gamma_{ij} - 2\pi_{ij})/\sqrt{\gamma} + \mathcal{L}_\beta(\gamma_{ij}), \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\partial_t\pi^{ij} = &-\alpha\sqrt{\gamma}{}^{(3)}R^{ij} - \gamma^{ij}(\pi^2/2 - \pi^{mn}\pi_{mn})/\sqrt{\gamma} + \alpha(\pi\pi^{ij} - 2\pi^{\ell i}\pi_\ell{}^j)/\sqrt{\gamma}\\ &+ 2\sqrt{\gamma}(D_mD_n\alpha)\gamma^{m[i}\gamma^{n]j} + \pi^{ij}(D_\ell\beta^\ell) + \sqrt{\gamma}\mathcal{L}_\beta(\pi^{ij}/\sqrt{\gamma})\\ &+ \alpha\gamma^{ij}\mathcal{H}/2.\end{aligned} \tag{7}$$

${}^{(3)}R_{ij}$ は 3 次元 Ricci テンソル，$\mathcal{L}_\beta$ は β^i 方向に沿った Lie 微分である．

Einstein 方程式の離散 Hamilton 関数

$$\mathcal{H}^{\mathrm{GR}}{}_{(k)}^{(n)} = -\alpha_{(k)}^{(n)} \left\{ \sqrt{\gamma}_{(k)}^{(n)} {}^{(3)}R_{(k)}^{(n)} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}_{(k)}^{(n)}} \left(\frac{1}{2} (\pi_{(k)}^{(n)})^2 - \pi^{ij}{}_{(k)}^{(n)} \pi_{ij}{}_{(k)}^{(n)} \right) \right\}$$
$$- 2\beta^{i}{}_{(k)}^{(n)} \left\{ \gamma_{\ell i}{}_{(k)}^{(n)} (\widehat{\delta}_j^{\langle 1 \rangle} \pi^{ij}{}_{(k)}^{(n)}) + \pi^{ij}{}_{(k)}^{(n)} \, {}^{(3)}\Gamma^{\langle 1 \rangle}{}_{\ell ij}{}_{(k)}^{(n)} \right\}, \tag{8}$$

$${}^{(3)}R_{(k)}^{(n)} \equiv {}^{(3)}R_{ij}{}_{(k)}^{(n)} \gamma^{ij}{}_{(k)}^{(n)}, \quad \pi_{(k)}^{(n)} \equiv \pi^{ij}{}_{(k)}^{(n)} \gamma_{ij}{}_{(k)}^{(n)},$$

$${}^{(3)}R_{ij}{}_{(k)}^{(n)} \equiv \frac{1}{2} \gamma^{m\ell}{}_{(k)}^{(n)} (\widehat{\delta}_j^{+} \widehat{\delta}_\ell^{-} \gamma_{mi}{}_{(k)}^{(n)} + \widehat{\delta}_i^{+} \widehat{\delta}_m^{-} \gamma_{\ell j}{}_{(k)}^{(n)} - \widehat{\delta}_m^{+} \widehat{\delta}_\ell^{-} \gamma_{ij}{}_{(k)}^{(n)} - \widehat{\delta}_i^{+} \widehat{\delta}_j^{-} \gamma_{m\ell}{}_{(k)}^{(n)})$$
$$+ \frac{1}{2} \gamma^{\ell a}{}_{(k)}^{(n)} \left({}^{(3)}\Gamma^{+}{}_{bi\ell}{}_{(k)}^{(n)} \, {}^{(3)}\Gamma^{+b}{}_{aj}{}_{(k)}^{(n)} + {}^{(3)}\Gamma^{-}{}_{bi\ell}{}_{(k)}^{(n)} \, {}^{(3)}\Gamma^{-b}{}_{aj}{}_{(k)}^{(n)} \right)$$
$$- \frac{1}{2} \gamma^{\ell a}{}_{(k)}^{(n)} \left({}^{(3)}\Gamma^{+}{}_{bij}{}_{(k)}^{(n)} \, {}^{(3)}\Gamma^{+b}{}_{a\ell}{}_{(k)}^{(n)} + {}^{(3)}\Gamma^{-}{}_{bij}{}_{(k)}^{(n)} \, {}^{(3)}\Gamma^{-b}{}_{a\ell}{}_{(k)}^{(n)} \right),$$

$${}^{(3)}\Gamma^{\pm}{}_{\ell ij} \equiv \frac{1}{2} (\widehat{\delta}_j^{\pm} \gamma_{\ell i} + \widehat{\delta}_i^{\pm} \gamma_{\ell j} - \widehat{\delta}_\ell^{\pm} \gamma_{ij}), \quad {}^{(3)}\Gamma^{\pm \ell}{}_{ij} \equiv \gamma^{\ell m} \, {}^{(3)}\Gamma^{\pm}{}_{mij},$$

$${}^{(3)}\Gamma^{\langle 1 \rangle}{}_{\ell ij} \equiv \frac{1}{2} (\widehat{\delta}_j^{\langle 1 \rangle} \gamma_{\ell i} + \widehat{\delta}_i^{\langle 1 \rangle} \gamma_{\ell j} - \widehat{\delta}_\ell^{\langle 1 \rangle} \gamma_{ij}), \quad {}^{(3)}\Gamma^{\langle 1 \rangle \ell}{}_{ij} \equiv \gamma^{\ell m} \, {}^{(3)}\Gamma^{\langle 1 \rangle}{}_{mij}.$$

Einstein 方程式の離散方程式 (DVDM)

離散 Hamilton 関数 $\mathcal{H}^{\mathrm{GR}(n)}_{(k)}$ (8)に DVDM を適用することで, 離散拘束方程式と離散方程式系が得られる:

離散 Einstein 方程式 (DVDM)

$$\mathcal{H}^{(n)}_{(k)} \equiv \sqrt{\gamma}^{(n)}_{(k)}{}^{(3)}R^{(n)}_{(k)} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}^{(n)}_{(k)}}\left(\frac{1}{2}(\pi^{(n)}_{(k)})^2 - \pi^{ij}{}^{(n)}_{(k)}\pi_{ij}{}^{(n)}_{(k)}\right), \tag{9}$$

$$\mathcal{M}_{\ell}{}^{(n)}_{(k)} \equiv 2\gamma_{\ell i}{}^{(n)}_{(k)}(\widehat{\delta}^{\langle 1\rangle}_{j}\pi^{ij}{}^{(n)}_{(k)}) + 2\pi^{ij}{}^{(n)}_{(k)}\,{}^{(3)}\Gamma^{\langle 1\rangle}{}_{\ell ij}{}^{(n)}_{(k)}, \tag{10}$$

$$\frac{\gamma_{ab}{}^{(n+1)}_{(k)} - \gamma_{ab}{}^{(n)}_{(k)}}{\Delta t} = -\alpha^{(n+1)}_{(k)}\frac{\pi^{(n+1)}_{(k)} + \pi^{(n)}_{(k)}}{2\sqrt{\gamma}^{(n)}_{(k)}}\gamma_{ab}{}^{(n)}_{(k)} + \cdots, \tag{11}$$

$$\frac{\pi^{ab}{}^{(n+1)}_{(k)} - \pi^{ab}{}^{(n)}_{(k)}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\widehat{\delta}^{+}_{c}\widehat{\delta}^{-}_{j}(\alpha^{(n+1)}_{(k)}\sqrt{\gamma}^{(n+1)}_{(k)}\gamma^{jb}{}^{(n+1)}_{(k)}\gamma^{ac}{}^{(n+1)}_{(k)}) + \cdots. \tag{12}$$

テスト計算

Polarized Gowdy wave

$$ds^2 = t^{-1/2}e^{\lambda/2}(-dt^2 + dx^2) + t(e^P dy^2 + e^{-P} dz^2), \tag{13}$$

$$P = J_0(2\pi t)\cos(2\pi x), \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\lambda = &-2\pi t J_0(2\pi t) J_1(2\pi t)\cos^2(2\pi x) + 2\pi^2 t^2 [J_0^2(2\pi t) \\ &+ J_1^2(2\pi t)] - (1/2)\{(2\pi)^2[J_0^2(2\pi) + J_1^2(2\pi)] \\ &- 2\pi J_0(2\pi) J_1(2\pi)\}.\end{aligned} \tag{15}$$

ここで, J_n は Bessel 関数. この初期値は, 時間発展とともに宇宙が膨張していくものを表したものである. 時間を逆に発展させると, 宇宙が収縮し特異点に向かっていくことを表す.

- gauge 条件: Harmonic slicing $\left(\partial_t \alpha = -\dfrac{\alpha^2 \pi}{2\sqrt{\gamma}}\right)$, $\beta^i = 0$.
- 境界条件: 周期境界条件.
- 空間分割数: 200, CFL 条件: 0.25.
- 比較対象として, Crank-Nicolson(CN) スキームを選ぶ.

数値計算結果

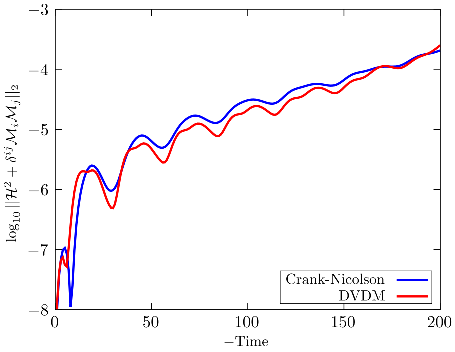


Figure: 横軸は時間, 縦軸は拘束条件の破れの大きさを表す. (TT-Yoneda, JGRG23@Hirosaki University)

- あまり変化がない? 少なくとも劇的な変化はない.
- そもそも DVDM は効果的な方法なのか?

Maxwell 方程式

- Einstein 方程式に対して複雑な解析を行う前に, まず Maxwell 方程式でやってみてから考えてみることにする.

Maxwell 方程式

$$
\begin{aligned}
\mu_0\epsilon_0\partial_t E_i - \varepsilon_i{}^{mn}\partial_m B_n &= -\mu_0 J_i, &\quad (16)\\
\partial_t B_i + \varepsilon_i{}^{mn}\partial_m E_n &= 0, &\quad (17)\\
\partial_i E^i &= \frac{1}{\epsilon_0}\rho, &\quad (18)\\
\partial_i B^i &= 0. &\quad (19)
\end{aligned}
$$

E_i: 電場, B_i: 磁束密度, ρ: 電荷密度, J_i: 電流密度,
ϵ_0: 真空の誘電率, μ_0: 真空の透磁率.

- また, 電荷保存則:

$$
\partial_t \rho + \partial_i J^i = 0, \tag{20}
$$

も成り立つ.

Maxwell 方程式の Lagrange 関数

- まずは, Maxwell 方程式の正準形式を構築する.
- Maxwell 方程式の Lagrange 関数は以下で与えられる:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\mathrm{EM}} &\equiv \frac{\epsilon_0}{2}E_iE^i - \frac{1}{2\mu_0}B_iB^i - \rho\phi + J^iA_i \\ &= \frac{\epsilon_0}{2}(\partial_i\phi + \partial_tA_i)(\partial_i\phi + \partial_tA_i) - \frac{1}{2\mu_0}(\partial^aA^b - \partial^bA^a)(\partial_aA_b) \\ &\quad - \rho\phi + J^iA_i.\end{aligned} \tag{21}$$

- ここで, ϕ と A_i はそれぞれ, スカラーポテンシャル, ベクトルポテンシャルで,

$$E_i = -\partial_i\phi - \partial_tA_i, \quad B_i = \varepsilon_i{}^{mn}\partial_mA_n, \tag{22}$$

を満たすように定められる.

Maxwell 方程式の Hamilton 関数

- ϕ と A_i が変数となるがそれぞれの正準運動量が

$$\pi \equiv \frac{\delta \mathcal{L}^{\mathsf{EM}}}{\delta(\partial_t \phi)} = 0, \tag{23}$$

$$\Pi^i \equiv \frac{\delta \mathcal{L}^{\mathsf{EM}}}{\delta(\partial_t A_i)} = \epsilon_0(\partial^i \phi + \partial_t A^i) \left(= -\epsilon_0 E^i\right), \tag{24}$$

となるので, ϕ は発展変数ではなくゲージ変数となる.

- このとき, Hamilton 関数は

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{\mathsf{EM}} &\equiv \Pi^i \partial_t A_i - \mathcal{L}^{\mathsf{EM}} \\ &= \phi(\partial_i \Pi^i + \rho) + \frac{1}{2\epsilon_0}\Pi_i \Pi^i + \frac{1}{2\mu_0}(\partial^a A^b - \partial^b A^a)(\partial_a A_b) - J^i A_i, \end{aligned} \tag{25}$$

と与えられる.

Maxwell 方程式の正準形式

- したがって, Maxwell 方程式の正準形式は以下となる:

Maxwell 方程式 (正準形式)

$$\mathcal{C} \equiv -\frac{\delta \mathcal{H}^{\mathsf{EM}}}{\delta \phi} = -\rho - \partial_i \Pi^i \approx 0, \tag{26}$$

$$\partial_t A_i \equiv \frac{\delta \mathcal{H}^{\mathsf{EM}}}{\delta \Pi^i} = -\partial_i \phi + \frac{1}{\epsilon_0} \Pi_i, \tag{27}$$

$$\partial_t \Pi^i \equiv -\frac{\delta \mathcal{H}^{\mathsf{EM}}}{\delta A_i} = \frac{1}{\mu_0} \partial_j \partial^j A^i - \frac{1}{\mu_0} \partial_j \partial^i A^j + J^i. \tag{28}$$

- (26)の Constraint Propagation(拘束条件式の時間発展式) は電荷保存の式を使うと

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{C} &= -\partial_t \rho - \partial_t \partial_i \Pi^i \\ &= \partial_i J^i - \partial_i \left(\frac{1}{\mu_0} \partial_j \partial^j A^i - \frac{1}{\mu_0} \partial^i \partial_j A^j + J^i \right) = 0, \end{aligned} \tag{29}$$

となり, $\mathcal{C}$ が時間発展後も保存されることが保証されている.

DVDM による離散 Maxwell 方程式

- 離散 Hamilton 関数を以下で定める:

$$\mathcal{H}^{\mathrm{EM}}{}^{(n)}_{(k)} \equiv -\Pi^i{}^{(n)}_{(k)}(\widehat{\delta}^{\langle 1\rangle}_i \phi^{(n)}_{(k)}) + \frac{1}{2\epsilon_0}\Pi_i{}^{(n)}_{(k)}\Pi^i{}^{(n)}_{(k)} - J_i{}^{(n)}_{(k)}A^i{}^{(n)}_{(k)} + \frac{1}{2\mu_0}(\widehat{\delta}^{\langle 1\rangle i}A^j{}^{(n)}_{(k)} - \widehat{\delta}^{\langle 1\rangle j}A^i{}^{(n)}_{(k)})(\delta^{\langle 1\rangle}_i A_j{}^{(n)}_{(k)}) + \rho^{(n)}_{(k)}\phi^{(n)}_{(k)}. \tag{30}$$

- このとき, DVDM による離散 Maxwell 方程式は次のようになる:

離散 Maxwell 方程式 (DVDM)

$$\mathcal{C}^{(n)}_{(k)} = -\rho^{(n)}_{(k)} - \widehat{\delta}^{\langle 1\rangle}_i \Pi^i{}^{(n)}_{(k)} \approx 0, \tag{31}$$

$$\frac{A_i{}^{(n+1)}_{(k)} - A_i{}^{(n)}_{(k)}}{\Delta t} = -(\widehat{\delta}^{\langle 1\rangle}_i \phi^{(n+1)}_{(k)}) + \frac{1}{2\epsilon_0}(\Pi_i{}^{(n+1)}_{(k)} + \Pi_i{}^{(n)}_{(k)}), \tag{32}$$

$$\frac{\Pi^i{}^{(n+1)}_{(k)} - \Pi^i{}^{(n)}_{(k)}}{\Delta t} = \frac{1}{2\mu_0}\widehat{\delta}^{\langle 1\rangle}{}_j \widehat{\delta}^{\langle 1\rangle j}(A^i{}^{(n+1)}_{(k)} + A^i{}^{(n)}_{(k)}) - \frac{1}{2\mu_0}\widehat{\delta}^{\langle 1\rangle}_j \widehat{\delta}^{\langle 1\rangle i}(A^j{}^{(n+1)}_{(k)} + A^j{}^{(n)}_{(k)}) + J^i{}^{(n)}_{(k)}. \tag{33}$$

DVDM による離散 Constraint Propagation

- 電荷保存の式を

$$\frac{\rho^{(n+1)}_{(k)} - \rho^{(n)}_{(k)}}{\Delta t} + \widehat{\delta}^{\langle 1\rangle}_i J^{i\,(n)}_{(k)} = 0 \tag{34}$$

  とする.
- このとき, 離散 Constraint Propagation は

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{C}^{(n+1)}_{(k)} - \mathcal{C}^{(n)}_{(k)}}{\Delta t} &= -\frac{\rho^{(n+1)}_{(k)} - \rho^{(n)}_{(k)}}{\Delta t} - \widehat{\delta}^{\langle 1\rangle}_i \frac{\Pi^{i\,(n+1)}_{(k)} - \Pi^{i\,(n)}_{(k)}}{\Delta t} \\
&= \widehat{\delta}^{\langle 1\rangle}_i J^{i\,(n)}_{(k)} - \widehat{\delta}^{\langle 1\rangle}_i \Big\{ \frac{1}{2\mu_0} \widehat{\delta}^{\langle 1\rangle}_j \widehat{\delta}^{\langle 1\rangle j} (A^{i\,(n+1)}_{(k)} + A^{i\,(n)}_{(k)}) \\
&\qquad - \frac{1}{2\mu_0} \widehat{\delta}^{\langle 1\rangle}_j \widehat{\delta}^{\langle 1\rangle i} (A^{j\,(n+1)}_{(k)} + A^{j\,(n)}_{(k)}) + J^{i\,(n)}_{(k)} \Big\} \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{35}$$

  となり, $\mathcal{C}^{(n)}_{(k)}$ が保存されることがわかる.

CN スキームによる離散 Maxwell 方程式

- 一般のスキームの中で比較対象として数式の見やすい (あまり複雑でない)CN スキームを選ぶ.
- CN スキームによる離散 Maxwell 方程式は以下となる:

離散 Maxwell 方程式 (CN スキーム)

$$\mathcal{C}^{(n)}_{(k)} = -\rho^{(n)}_{(k)} - \widehat{\delta}^{\langle 1\rangle}_{i} \Pi^{i}{}^{(n)}_{(k)} \approx 0, \tag{36}$$

$$\frac{A_{i}{}^{(n+1)}_{(k)} - A_{i}{}^{(n)}_{(k)}}{\Delta t} = -\frac{1}{2}\widehat{\delta}^{\langle 1\rangle}_{i} \left(\phi^{(n+1)}_{(k)} + \phi^{(n)}_{(k)}\right) + \frac{1}{2\epsilon_0}\left(\Pi_{i}{}^{(n+1)}_{(k)} + \Pi_{i}{}^{(n)}_{(k)}\right), \tag{37}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Pi^{i}{}^{(n+1)}_{(k)} - \Pi^{i}{}^{(n)}_{(k)}}{\Delta t} = &\frac{1}{2\mu_0}\widehat{\delta}^{\langle 2\rangle j}_{j} \left(A^{i}{}^{(n+1)}_{(k)} + A^{i}{}^{(n)}_{(k)}\right) \\ &- \frac{1}{2\mu_0}\widehat{\delta}^{\langle 2\rangle i}_{j} \left(A^{j}{}^{(n+1)}_{(k)} + A^{j}{}^{(n)}_{(k)}\right) + \frac{1}{2}\left(J^{i}{}^{(n+1)}_{(k)} + J^{i}{}^{(n)}_{(k)}\right),\end{aligned} \tag{38}$$

CN スキームによる離散 Constraint Propagation

- また，電荷保存の式は

$$\frac{\rho^{(n+1)}_{(k)} - \rho^{(n)}_{(k)}}{\Delta t} + \frac{1}{2}\widehat{\delta}^{\langle 1\rangle}_{i}\left(J^{i\,(n+1)}_{(k)} + J^{i\,(n)}_{(k)}\right) = 0 \tag{39}$$

となる．

- このとき，離散 Constraint Propagation は

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{C}^{(n+1)}_{(k)} - \mathcal{C}^{(n)}_{(k)}}{\Delta t} &= -\frac{\rho^{(n+1)}_{(k)} - \rho^{(n)}_{(k)}}{\Delta t} - \widehat{\delta}^{\langle 1\rangle}_{i}\frac{\Pi^{i\,(n+1)}_{(k)} - \Pi^{i\,(n)}_{(k)}}{\Delta t}\\ &= -\frac{1}{2\mu_0}\widehat{\delta}^{\langle 1\rangle}_{i}\left\{\widehat{\delta}^{\langle 2\rangle\,j}_{j}(A^{i\,(n+1)}_{(k)} + A^{i\,(n)}_{(k)})\right.\\ &\qquad \left. - \widehat{\delta}^{\langle 2\rangle\,i}_{j}(A^{j\,(n+1)}_{(k)} + A^{j\,(n)}_{(k)})\right\}.\end{aligned} \tag{40}$$

となり，一般的には $\mathcal{C}^{(n)}_{(k)}$ は保存されない．

テスト計算

初期値

$$A_i = \frac{2\pi}{\omega^2}\begin{pmatrix}\cos(\omega t + 2\pi x)\\ \sin(\omega t + 2\pi y)\\ \omega^2\sin(2\pi(x+y+z))\end{pmatrix}, \tag{41}$$

$$\Pi^i = \frac{2\pi}{\omega}\begin{pmatrix}-\sin(\omega t + 2\pi x)\\ \cos(\omega t + 2\pi y)\\ -\omega t\sin(2\pi z)\end{pmatrix}, \tag{42}$$

$$\phi = t\cos(2\pi z), \tag{43}$$

$$\rho = \frac{4\pi^2}{\omega}\{\cos(\omega t + 2\pi x) + \sin(\omega t + 2\pi y) + \omega t\cos(2\pi z)\}, \tag{44}$$

$$J_i = -2\pi\begin{pmatrix}\cos(\omega t + 2\pi x) + 4\pi^2\sin(2\pi(x+y+z))\\ \sin(\omega t + 2\pi y) + 4\pi^2\sin(2\pi(x+y+z))\\ \sin(2\pi z) - 8\pi^2\sin(2\pi(x+y+z))\end{pmatrix}, \tag{45}$$

上記は Maxwell 方程式の厳密解．また, $\omega = 1$, $t = 1$．境界条件は周期境界条件, CFL は 0.1, 空間分割数は 100.

数値計算結果

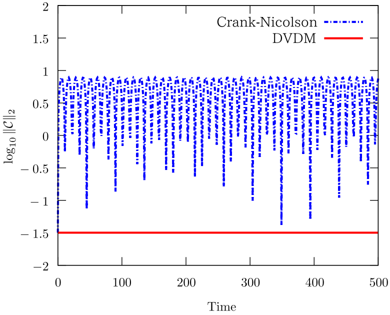


Figure: 横軸は時間, 縦軸は拘束条件の破れを表す. (TT-Yoneda, 1610.04370)

- 離散変分法の結果 (赤線) は水平で時間発展による変化がない.
- 一方で, CN スキームの結果 (青線) は振動してしまっている.
- この結果から離散 Constraint Propagation 満たされていることが良いスキームの指標となることがわかる.
- 離散方程式の解析をきちんと行えば, Einstein 方程式でもうまくいくはず.

Einstein 方程式での問題点

- Maxwell の結果を見る限り, Constraint Propagation の離散式が恒等的に満たされて入れば数値計算はうまくいく.
- しかし, Einstein 方程式の Constraint Propagation は結構複雑.
- Einstein 方程式自体をもっと簡単な表記で表すことができないか?

Einstein 方程式での問題点

- Einstein 方程式の Lagrange 関数は時空分解により次のようになる:

$$\mathcal{L}^{\mathrm{GR}} = \alpha\sqrt{\gamma}({}^{(3)}R - K^2 + K_{ij}K^{ij}) \tag{46}$$

- 離散方程式が複雑になってしまう主要な原因は, γ と ${}^{(3)}R$ の存在.
- γ は計量 γ_{ij} の行列式であり連続ではその変分は

$$\delta\gamma = \gamma\gamma^{mn}\delta\gamma_{mn}, \tag{47}$$

を満たす.
- 一方, DVDM を用いると

$$\begin{aligned}\gamma^{(n+1)}_{(k)} - \gamma^{(n)}_{(k)} = \frac{1}{6}\Big\{&2\gamma^{(n+1)}_{(k)}(\gamma^{ab}{}^{(n+1)}_{(k)} + \gamma^{ab}{}^{(n)}_{(k)}) + \varepsilon^{cda}\varepsilon^{ijb}\gamma_{ci}{}^{(n+1)}_{(k)}\gamma_{dj}{}^{(n)}_{(k)}\Big\}\\ &\cdot(\gamma_{ab}{}^{(n+1)}{}_{(k)} - \gamma_{ab}{}^{(n)}{}_{(k)})\end{aligned} \tag{48}$$

とかなり汚い式となり, 連続の場合とずいぶんと違った表記になる.
(ただし, 連続極限では一致する.)

共形変換

- Lagrange 関数に含まれる γ は, 連続における方程式と離散における方程式の差を必ず作りだしてしまうので, 変数変換により表記上消してしまう. $\Rightarrow$ 共形変換.
- 変換の指針としては
  - 変換後, Lagrange 関数に γ が含まれないこと.
  - 変換後の γ_{ij} の発展方程式に γ が現れないこと.
- 変数 $\alpha, \gamma_{ij}, K_{ij}$ に対して,

$$\tilde{\alpha} = \gamma^{-1/2}\alpha, \quad \tilde{\gamma}_{ij} = \gamma^{-1}\gamma_{ij}, \quad \tilde{\pi}^{ij} = -\gamma^{-3/2}K^{ij}$$

  という共形変換を考える.
- このとき, Lagrange 関数は

$$\mathcal{L}^{\mathrm{GR}} = \tilde{\alpha}\left\{ {}^{(3)}\tilde{R} + \tilde{\gamma}^{ij}(\partial_i \tilde{\Gamma}^m{}_{mj}) - \tilde{\Gamma}^m{}_{mi}\tilde{\gamma}^{ab}\tilde{\Gamma}^i{}_{ab} - \frac{1}{8}\tilde{\Gamma}^m{}_{mi}\tilde{\Gamma}^n{}_{nj}\tilde{\gamma}^{ij} - \tilde{\pi}^2 + \tilde{\pi}^{ij}\tilde{\pi}_{ij} \right\} \tag{49}$$

となり, 表記上, γ を消すことができる.

共形変換での Einstein 方程式の正準形式

- ${}^{(3)}R$ には計量の 2 階微分が含まれており, これが複雑さの原因.
- ${}^{(3)}R$ の複雑さについては, 今回は変数を t のみとすることで簡略化を図ることにする.
- このとき, Hamilton 関数は

$$\tilde{\mathcal{H}}^{\mathsf{GR}} = \tilde{\alpha}(-\tilde{\pi}^2 + \tilde{\pi}^{ij}\tilde{\pi}_{ij}), \tag{50}$$

であり, 発展方程式は

$$\partial_t \tilde{\gamma}_{ij} \equiv \frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}^{\mathsf{GR}}}{\delta \tilde{\pi}^{ij}} = -2\tilde{\alpha}\tilde{\pi}\tilde{\gamma}_{ij} + 2\tilde{\alpha}\tilde{\pi}_{ij}, \tag{51}$$

$$\partial_t \tilde{\pi}^{ij} \equiv -\frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}^{\mathsf{GR}}}{\delta \tilde{\gamma}_{ij}} = 2\tilde{\alpha}\tilde{\pi}\tilde{\pi}^{ij} - 2\tilde{\alpha}\tilde{\pi}^{mi}\tilde{\pi}_m{}^j, \tag{52}$$

となる.

Constraint Propagation

- 拘束条件は

$$\tilde{\mathcal{H}} \equiv -\frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}^{\mathrm{GR}}}{\delta \tilde{\alpha}} = \tilde{\pi}^2 - \tilde{\pi}^{ij}\tilde{\pi}_{ij}, \tag{53}$$

$$\tilde{\mathcal{M}}_i \equiv -\frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}^{\mathrm{GR}}}{\delta \tilde{\beta}^i} = 0. \tag{54}$$

- $\tilde{\mathcal{H}}$ の Constraint Propagation は

$$\begin{aligned}
\partial_t \tilde{\mathcal{H}} &= 2\tilde{\pi}\tilde{\pi}^{ij}(\partial_t \tilde{\gamma}_{ij}) + 2\tilde{\pi}\tilde{\gamma}_{ij}(\partial_t \tilde{\pi}^{ij}) - 2\tilde{\pi}^{ij}\tilde{\pi}_i{}^m(\partial_t \tilde{\gamma}_{jm}) - 2\tilde{\pi}_{ij}(\partial_t \tilde{\pi}^{ij}) \\
&= 2\tilde{\pi}\tilde{\pi}^{ij}(-2\tilde{\alpha}\tilde{\pi}\tilde{\gamma}_{ij} + 2\tilde{\alpha}\tilde{\pi}_{ij}) + 2\tilde{\pi}\tilde{\gamma}_{ij}\left(2\tilde{\alpha}\tilde{\pi}\tilde{\pi}^{ij} - 2\tilde{\alpha}\tilde{\pi}_m{}^i\tilde{\pi}^{mj}\right) \\
&\quad - 2\tilde{\pi}^{ij}\tilde{\pi}_i{}^m(-2\tilde{\alpha}\tilde{\pi}\tilde{\gamma}_{jm} + 2\tilde{\alpha}\tilde{\pi}_{jm}) - 2\tilde{\pi}_{ij}\left(2\tilde{\alpha}\tilde{\pi}\tilde{\pi}^{ij} - 2\tilde{\alpha}\tilde{\pi}_m{}^i\tilde{\pi}^{mj}\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

であり, $\mathcal{M}_i$ の場合も恒等的 0 となる.

DVDM による正準 Einstein 方程式

離散 Hamilton 関数を

$$\tilde{\mathcal{H}}^{\mathsf{GR}(n)} \equiv \tilde{\alpha}^{(n)} \left(-(\tilde{\pi}^{(n)})^2 + \tilde{\pi}^i{}_j{}^{(n)} \tilde{\pi}^j{}_i{}^{(n)} \right), \tag{55}$$

と定めると, DVDM を用いた離散発展方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{\gamma}_{ij}^{(n+1)} - \tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n)}}{\Delta t} &= -\tilde{\alpha}^{(n+1)}(\tilde{\pi}^{(n+1)} + \tilde{\pi}^{(n)})\tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n)} \\
&\quad + \frac{1}{2}\tilde{\alpha}^{(n+1)}(\tilde{\pi}^\ell{}_i{}^{(n+1)} + \tilde{\pi}^\ell{}_i{}^{(n)})\tilde{\gamma}_{j\ell}{}^{(n)} \\
&\quad + \frac{1}{2}\tilde{\alpha}^{(n+1)}(\tilde{\pi}^\ell{}_j{}^{(n+1)} + \tilde{\pi}^\ell{}_j{}^{(n)})\tilde{\gamma}_{i\ell}{}^{(n)},
\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{\pi}^{ij(n+1)} - \tilde{\pi}^{ij(n)}}{\Delta t} &= \tilde{\alpha}^{(n+1)}(\tilde{\pi}^{(n+1)} + \tilde{\pi}^{(n)})\tilde{\pi}^{ij(n+1)} \\
&\quad - \frac{1}{2}\tilde{\alpha}^{(n+1)}(\tilde{\pi}^i{}_\ell{}^{(n+1)} + \tilde{\pi}^i{}_\ell{}^{(n)})\tilde{\pi}^{\ell j(n+1)} \\
&\quad - \frac{1}{2}\tilde{\alpha}^{(n+1)}(\tilde{\pi}^j{}_\ell{}^{(n+1)} + \tilde{\pi}^j{}_\ell{}^{(n)})\tilde{\pi}^{\ell i(n+1)}.
\end{aligned} \tag{57}$$

DVDM による離散 Constrait Propagation

離散 Constraint Propagation は

$$
\begin{aligned}
\frac{\tilde{\mathcal{H}}^{(n+1)} - \tilde{\mathcal{H}}^{(n)}}{\Delta t} &= (\tilde{\pi}^{(n+1)} + \tilde{\pi}^{(n)})\tilde{\pi}^{ij\,(n+1)} \frac{\tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n+1)} - \tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n)}}{\Delta t} \\
&\quad + (\tilde{\pi}^{(n+1)} + \tilde{\pi}^{(n)})\tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n)} \frac{\tilde{\pi}^{ij\,(n+1)} - \tilde{\pi}^{ij\,(n)}}{\Delta t} \\
&\quad - (\tilde{\pi}^{i}{}_{\ell}{}^{(n+1)} + \tilde{\pi}^{i}{}_{\ell}{}^{(n)})\tilde{\pi}^{\ell j\,(n+1)} \frac{\tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n+1)} - \tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n)}}{\Delta t} \\
&\quad - (\tilde{\pi}^{\ell}{}_{j}{}^{(n+1)} + \tilde{\pi}^{\ell}{}_{j}{}^{(n)})\tilde{\gamma}_{i\ell}{}^{(n)} \frac{\tilde{\pi}^{ij\,(n+1)} - \tilde{\pi}^{ij\,(n)}}{\Delta t}
\end{aligned}
$$

DVDM による拘束伝播方程式

$$
\begin{aligned}
&= -\tilde{\alpha}^{(n+1)}(\tilde{\pi}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{(n)})\tilde{\pi}^{ij(n+1)}(\tilde{\pi}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{(n)})\tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n)} \\
&\quad +\frac{1}{2}\tilde{\alpha}^{(n+1)}(\tilde{\pi}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{(n)})\tilde{\pi}^{ij(n+1)}(\tilde{\pi}^{\ell}{}_{i}{}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{\ell}{}_{i}{}^{(n)})\tilde{\gamma}_{j\ell}{}^{(n)} \\
&\quad +\frac{1}{2}\tilde{\alpha}^{(n+1)}(\tilde{\pi}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{(n)})\tilde{\pi}^{ij(n+1)}(\tilde{\pi}^{\ell}{}_{j}{}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{\ell}{}_{j}{}^{(n)})\tilde{\gamma}_{i\ell}{}^{(n)} \\
&\quad +\tilde{\alpha}^{(n+1)}(\tilde{\pi}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{(n)})\tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n)}(\tilde{\pi}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{(n)})\tilde{\pi}^{ij(n+1)} \\
&\quad -\frac{1}{2}\tilde{\alpha}^{(n+1)}(\tilde{\pi}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{(n)})\tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n)}(\tilde{\pi}^{i}{}_{m}{}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{i}{}_{m}{}^{(n)})\tilde{\pi}^{mj(n+1)} \\
&\quad -\frac{1}{2}\tilde{\alpha}^{(n+1)}(\tilde{\pi}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{(n)})\tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n)}(\tilde{\pi}^{j}{}_{m}{}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{j}{}_{m}{}^{(n)})\tilde{\pi}^{mi(n+1)} \\
&\quad +\tilde{\alpha}^{(n+1)}(\tilde{\pi}^{i}{}_{\ell}{}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{i}{}_{\ell}{}^{(n)})\tilde{\pi}^{\ell j(n+1)}(\tilde{\pi}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{(n)})\tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n)} \\
&\quad -\frac{1}{2}\tilde{\alpha}^{(n+1)}(\tilde{\pi}^{i}{}_{\ell}{}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{i}{}_{\ell}{}^{(n)})\tilde{\pi}^{\ell j(n+1)}(\tilde{\pi}^{m}{}_{i}{}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{m}{}_{i}{}^{(n)})\tilde{\gamma}_{jm}{}^{(n)} \\
&\quad -\frac{1}{2}\tilde{\alpha}^{(n+1)}(\tilde{\pi}^{i}{}_{\ell}{}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{i}{}_{\ell}{}^{(n)})\tilde{\pi}^{\ell j(n+1)}(\tilde{\pi}^{m}{}_{j}{}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{m}{}_{j}{}^{(n)})\tilde{\gamma}_{im}{}^{(n)} \\
&\quad -\tilde{\alpha}^{(n+1)}(\tilde{\pi}^{\ell}{}_{j}{}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{\ell}{}_{j}{}^{(n)})\tilde{\gamma}_{i\ell}{}^{(n)}(\tilde{\pi}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{(n)})\tilde{\pi}^{ij(n+1)} \\
&\quad +\frac{1}{2}\tilde{\alpha}^{(n+1)}(\tilde{\pi}^{\ell}{}_{j}{}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{\ell}{}_{j}{}^{(n)})\tilde{\gamma}_{i\ell}{}^{(n)}(\tilde{\pi}^{i}{}_{m}{}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{i}{}_{m}{}^{(n)})\tilde{\pi}^{mj(n+1)} \\
&\quad +\frac{1}{2}\tilde{\alpha}^{(n+1)}(\tilde{\pi}^{\ell}{}_{j}{}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{\ell}{}_{j}{}^{(n)})\tilde{\gamma}_{i\ell}{}^{(n)}(\tilde{\pi}^{j}{}_{m}{}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{j}{}_{m}{}^{(n)})\tilde{\pi}^{mi(n+1)} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

と連続の場合と同じく恒等的に 0 となることがわかる.

一方, CN スキームにおける離散方程式は

$$
\begin{aligned}
&\frac{\tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n+1)} - \tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n)}}{\Delta t} \\
&= -\frac{1}{8}(\tilde{\alpha}^{(n+1)} + \tilde{\alpha}^{(n)})(\tilde{\pi}^{mn(n+1)} + \tilde{\pi}^{mn(n)})(\tilde{\gamma}_{mn}{}^{(n+1)} + \tilde{\gamma}_{mn}{}^{(n)}) \\
&\quad \cdot (\tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n+1)} + \tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n)}) + \frac{1}{8}(\tilde{\alpha}^{(n+1)} + \tilde{\alpha}^{(n)})(\tilde{\pi}^{mn(n+1)} + \tilde{\pi}^{mn(n)}) \\
&\quad \cdot (\tilde{\gamma}_{mi}{}^{(n+1)} + \tilde{\gamma}_{mi}{}^{(n)})(\tilde{\gamma}_{nj}{}^{(n+1)} + \tilde{\gamma}_{nj}{}^{(n)}), \qquad (58) \\
&\frac{\tilde{\pi}^{ij(n+1)} - \tilde{\pi}^{ij(n)}}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{8}(\tilde{\alpha}^{(n+1)} + \tilde{\alpha}^{(n)})(\tilde{\pi}^{mn(n+1)} + \tilde{\pi}^{mn(n)})(\tilde{\gamma}_{mn}{}^{(n+1)} + \tilde{\gamma}_{mn}{}^{(n)}) \\
&\quad \cdot (\tilde{\pi}^{ij(n+1)} + \tilde{\pi}^{ij(n)}) - \frac{1}{8}(\tilde{\alpha}^{(n+1)} + \tilde{\alpha}^{(n)})(\tilde{\pi}^{mi(n+1)} + \tilde{\pi}^{mi(n)}) \\
&\quad \cdot (\tilde{\pi}^{nj(n+1)} + \tilde{\pi}^{nj(n)})(\tilde{\gamma}_{mn}{}^{(n+1)} + \tilde{\gamma}_{mn}{}^{(n)}). \qquad (59)
\end{aligned}
$$

CN スキームによる離散正準 Einstein 方程式

CN スキームにおける離散 Constraint Propagation は

$$
\begin{aligned}
\frac{\tilde{\mathcal{H}}^{(n+1)}-\tilde{\mathcal{H}}^{(n)}}{\Delta t} = & -\frac{1}{8}(\tilde{\alpha}^{(n+1)}+\tilde{\alpha}^{(n)})(\tilde{\pi}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{(n)})(\tilde{\pi}^{(n+1)}-\tilde{\pi}^{(n)}) \\
& \cdot(\tilde{\pi}^{mn(n+1)}+\tilde{\pi}^{mn(n)})(\tilde{\gamma}_{mn}{}^{(n+1)}+\tilde{\gamma}_{mn}{}^{(n)}) \\
& +\frac{1}{8}(\tilde{\pi}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{(n)})(\tilde{\pi}^{i}{}_{n}{}^{(n+1)}-\tilde{\pi}^{i}{}_{n}{}^{(n)})(\tilde{\alpha}^{(n+1)}+\tilde{\alpha}^{(n)}) \\
& \cdot(\tilde{\pi}^{mn(n+1)}+\tilde{\pi}^{mn(n)})(\tilde{\gamma}_{mi}{}^{(n+1)}+\tilde{\gamma}_{mi}{}^{(n)}) \\
& +\frac{1}{8}(\tilde{\pi}^{i}{}_{\ell}{}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{i}{}_{\ell}{}^{(n)})(\tilde{\pi}^{\ell}{}_{i}{}^{(n+1)}-\tilde{\pi}^{\ell}{}_{i}{}^{(n)})(\tilde{\alpha}^{(n+1)}+\tilde{\alpha}^{(n)}) \\
& \cdot(\tilde{\pi}^{mn(n+1)}+\tilde{\pi}^{mn(n)})(\tilde{\gamma}_{mn}{}^{(n+1)}+\tilde{\gamma}_{mn}{}^{(n)}) \\
& -\frac{1}{8}(\tilde{\pi}^{i}{}_{\ell}{}^{(n+1)}+\tilde{\pi}^{i}{}_{\ell}{}^{(n)})(\tilde{\pi}^{\ell j(n+1)}\tilde{\gamma}_{mi}{}^{(n+1)}-\tilde{\pi}^{\ell j(n)}\tilde{\gamma}_{mi}{}^{(n)}) \\
& \cdot(\tilde{\alpha}^{(n+1)}+\tilde{\alpha}^{(n)})(\tilde{\pi}^{mn(n+1)}+\tilde{\pi}^{mn(n)})(\tilde{\gamma}_{nj}{}^{(n+1)}+\tilde{\gamma}_{nj}{}^{(n)}),
\end{aligned}
$$

となり, これは恒等的には 0 にならない.

テスト計算

Kasner metric

$$ds^2 = -dt^2 + t^{-4/7}dx^2 + t^{6/7}dy^2 + t^{12/7}dz^2. \tag{60}$$

- 初期時刻: $t = 20$.
- 時間幅: $dt = 0.25$.
- ゲージ条件: 厳密解.
- 境界条件: 周期境界条件.

さらに, 初期時刻を $t = 20$ とし,

$$\gamma_{11} = \gamma_{11} + 0.05.$$

という摂動を加えて計算を行う.

数値計算結果

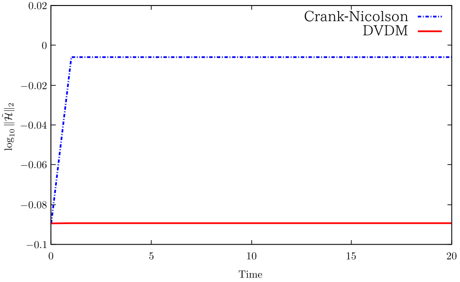


Figure: 横軸は時間, 縦軸は拘束条件の破れを表す. (TT-Yoneda, 1610.04543

- 離散変分法の結果 (赤線) は水平で時間発展による変化がない.
- 一方で, CN スキームの結果 (青線) は計算開始後増加し破れが大きくなってしまっている.
- Einstein 方程式においても, DVDM が有効な離散手法であると思われる.

まとめ

- 数値計算を "きちんと" 行うには適切な離散化の方法が必要.
- 離散変分導関数法 (DVDM) は, Constraint Propagation を離散的にも満たすように作ることで方程式特化の離散方程式が得られる.
- 非線形性の強い Einstein 方程式にも DVDM による離散化方程式の構築は可能だと思われる.
  $\Rightarrow$ そのために, 残った問題 (スカラー曲率 ${}^{(3)}R$ の離散化に関する問題) を解決する必要はある.

今後の展望 (?)

- もっと物理的なモデルに対する計算を成功させる.
- そのために解決すべき問題: 境界条件, 数値計算の精度の向上, ゲージの選択など.
- 数値解析の観点からは, 誤差解析をきちんとできる形式まで発展させたい. (有限要素法とか精度保証付き数値計算とか)
- そのために解決すべき問題: 弱形式の構築, 精度保証付き数値計算のできる現実的な状況までもっていくこと.