A simple test for the stability of a black hole

Class.Quant.Grav. **34** (2017) 235007
[arXiv:1706.01447]

木村匡志
CENTRA, IST, Universidade de Lisboa

3rd Mar 2018

Introduction

ブラックホール時空における(線形)重力摂動

重力波

定常摂動

時空の安定性 etc

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(\mathrm{0th})} + \epsilon h_{\mu\nu}$$

対称性が高い(静的な)ブラックホールまわりでは 重力摂動の基礎方程式は

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V(x)\right]\tilde{\Phi} = 0$$

という形を取ることが多い

Introduction

時間について変数分離 $\tilde{\Phi}(t,x) = e^{-i\omega t}\Phi(x)$

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V\right]\Phi = \omega^2\Phi$$

1次元Schrödinger方程式と同じ形

不安定mode $\rightarrow$ ω が虚数 $\rightarrow$ ω^2 が負
負のエネルギーの束縛状態に対応

負のエネルギーの束縛状態が存在
しないことを示せれば線形安定

Introduction

もし V が至る所非負なら 明らかに安定

もし V が負になる領域があると 非自明
- 高次元BH, 修正重力でのBH, とあるボゾンスター 等

今回はそのような場合に負エネルギー束縛状態が存在しないための簡単な判定条件を考えた

Introduction

個人的な研究動機

10年ほど前に書いた論文中で とあるブラックホールの 安定性を示せていなかった箇所があった

従来の方法で安定性を解析的に示すことは容易ではなかったので 何かいい方法はないかを密かに考えていた

(→ 業界ではあまり知られていないだけで
便利な方法は実は既にいくつかあった)

Contents

- Introduction
- S-deformation
- 今回考えた方法
- 具体例
- この方法のメリット 等
- Summary

S-deformation [Kodama and Ishibashi 2003]

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2}+V\right]\Phi=\omega^2\Phi$$

複素共役 $\bar{\Phi}$ をかけて積分

$$\Longrightarrow \left[\bar{\Phi}\frac{d\Phi}{dx}\right]_{-\infty}^{\infty}+\int dx\left[\left|\frac{d\Phi}{dx}\right|^2+V|\Phi|^2\right]=\omega^2\int dx|\Phi|^2$$

$V\geq 0$ ならば $\omega^2<0$ mode はない

しかし 一般には V が負になる領域を持つことがある

S-deformation [Kodama and Ishibashi 2003]

$$-\frac{d}{dx}\left[\bar{\Phi}\frac{d\Phi}{dx}+S|\Phi|^2\right]+\left|\frac{d\Phi}{dx}+S\Phi\right|^2+\underbrace{\left(V+\frac{dS}{dx}-S^2\right)}_{=\tilde{V}}|\Phi|^2=\omega^2|\Phi|^2$$

連続かつ有界な S に対しては
1項目の積分は表面項になる

$$-\left[\bar{\Phi}\frac{d\Phi}{dx}+S|\Phi|^2\right]_{-\infty}^{\infty}+\int dx\left[\left|\frac{d\Phi}{dx}+S\Phi\right|^2+\tilde{V}|\Phi|^2\right]=\omega^2\int dx\,|\Phi|^2$$

$\tilde{V}\geq 0$ ならば $\omega^2<0$ mode はないと言える

適切な関数 S を見つけられるかが問題

$$\tilde{V} = V + \frac{dS}{dx} - S^2$$

を非負にするような S を解析的に求める一般的な方法は知られていない

try and error で求まらないとき 従来は2次元PDE(波動方程式)を数値計算で解き時間発展を追い安定性が議論されてきた

今回考えた方法

$\tilde{V}=0$ つまり $V+\dfrac{dS}{dx}-S^2=0$

を解き S を求める

なんと とても簡単に数値計算で求められる

解の存在はあくまで安定性の十分条件のはずであるが確認した限り 安定なケースは常に この方法で S が求まった

Comment

$$V + \frac{dS}{dx} - S^2 = W (\geq 0)$$

$$\iff \quad V - W + \frac{dS}{dx} - S^2 = 0$$

より深いポテンシャルになる $\rightarrow$ より難しい

$W = 0$ ケースを考えることが最も効率的

Local existence $V + \frac{dS}{dx} - S^2 = 0$

常微分方程式の一意性定理から

局所的な解 は常に存在

$$
\left(
\begin{array}{l}
S = \sum_{n=0}^{\infty} s_n (x - x_0)^n \qquad V = \sum_{n=0}^{\infty} v_n (x - x_0)^n \\
\Longrightarrow \qquad s_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left[-v_n + \sum_{m=0}^{n} s_m s_{n-m} \right]
\end{array}
\right)
$$

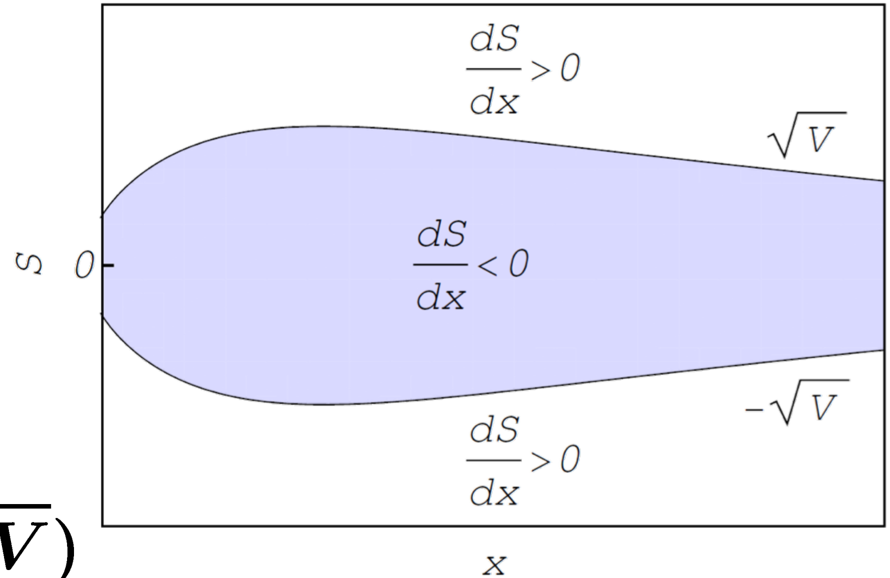
$\frac{dS}{dx} - S^2$ は有限だが S はどこかで発散する可能性がある　$-\infty < x < \infty$ で有界かつ連続な解の存在は非自明

Positive potentialのケース(自明に安定)

Proposition. *If the potential is positive and bounded above in* $-\infty < x < \infty$*, there exists a continuous and bounded solution in* $-\infty < x < \infty$

証明の概要:

S がどこか有限な点で発散する可能性を排除すればよい

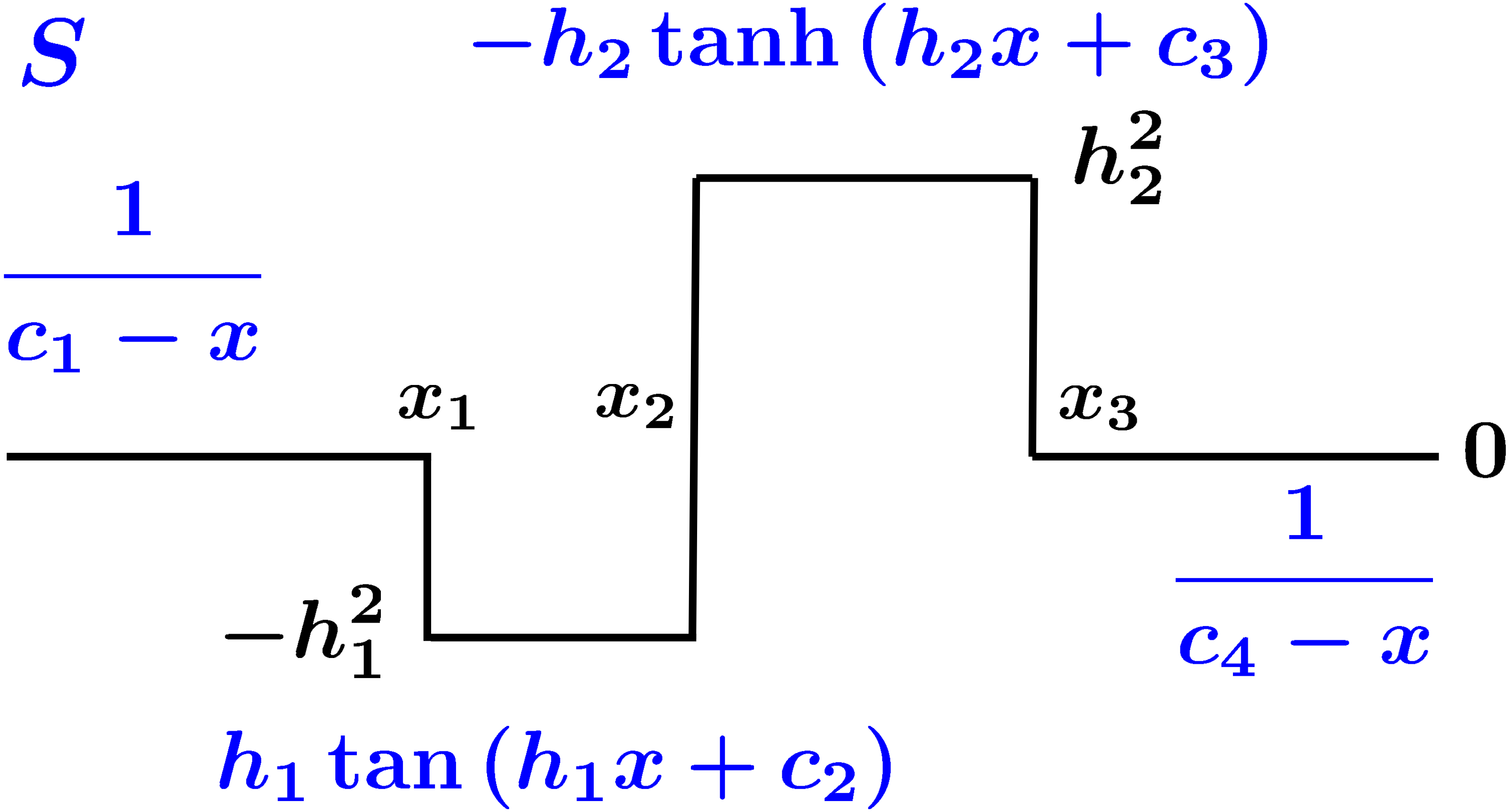


$$dS/dx = (S - \sqrt{V})(S + \sqrt{V})$$

厳密に解けるtoy model

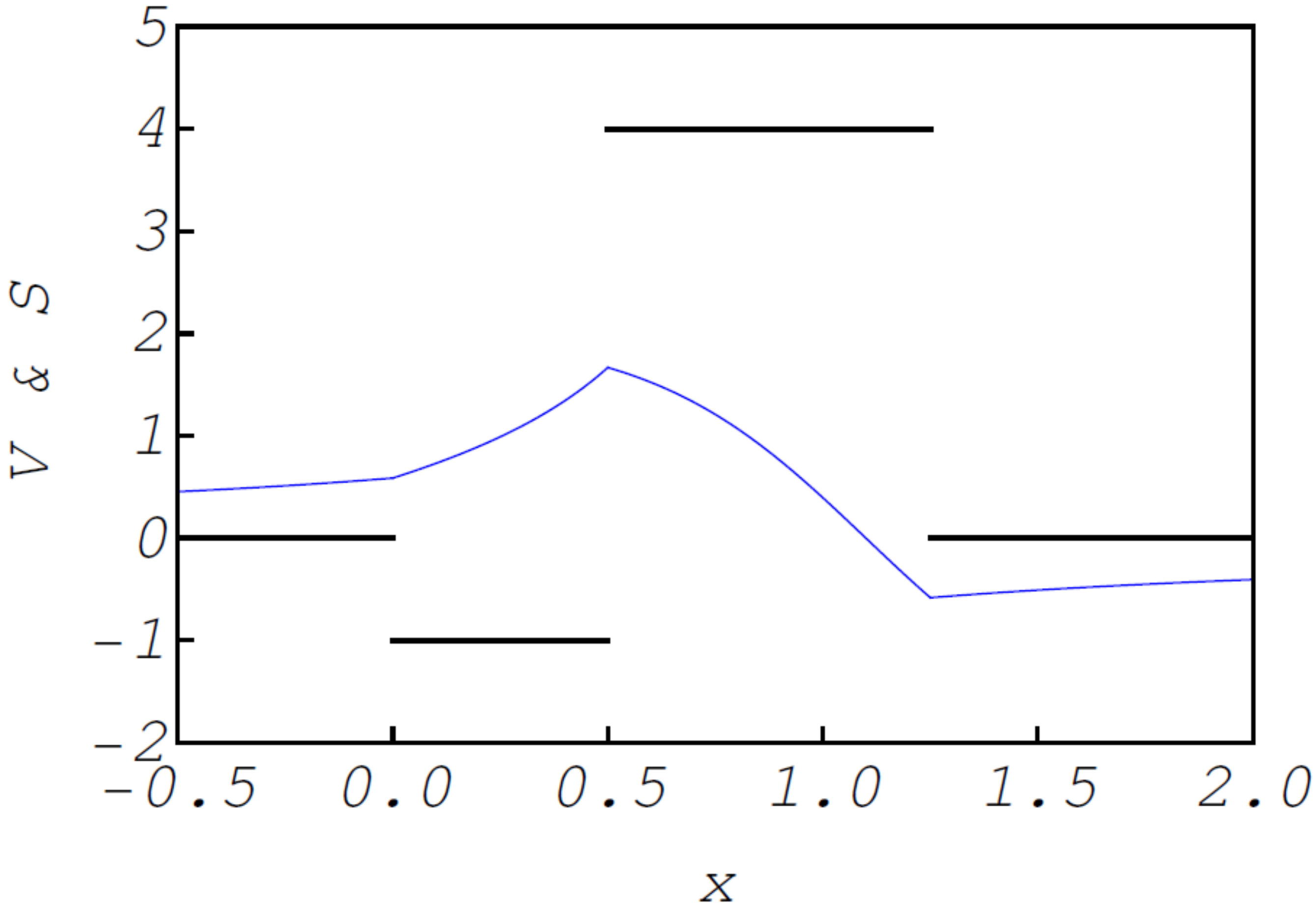
S

$V =$

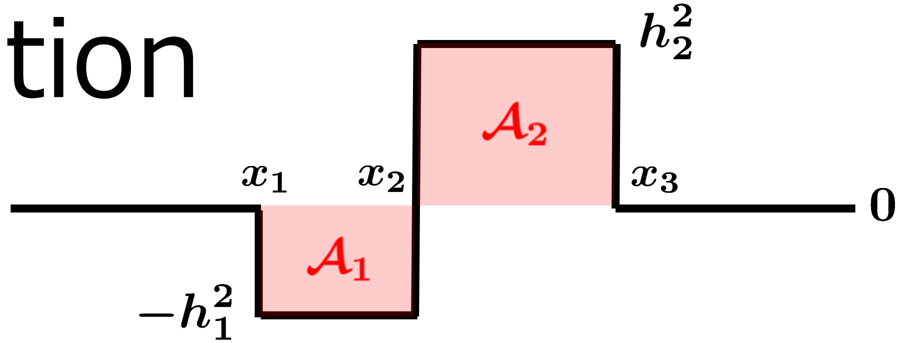


- continuity at $x = x_1, x_2, x_3$
- $S|_{x\to\pm\infty} \sim \mp$
- $S|_{x_1} > 0, S|_{x_2} > 0, S|_{x_3} < 0$

typical case



Existence condition



$$\Gamma := \frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}$$

連続有界な S が存在するための条件

$$\Gamma \geq \Gamma_{\mathrm{cr}}$$

$$\frac{\sqrt{x_3 - x_2}}{\sqrt{x_2 - x_1}} \tan\left(h_1(x_2 - x_1)\right) = \sqrt{\Gamma_{\mathrm{cr}}} \tanh\left(h_1 \sqrt{\Gamma_{\mathrm{cr}}} \sqrt{x_2 - x_1} \sqrt{x_3 - x_2}\right)$$

束縛状態が存在しないための条件

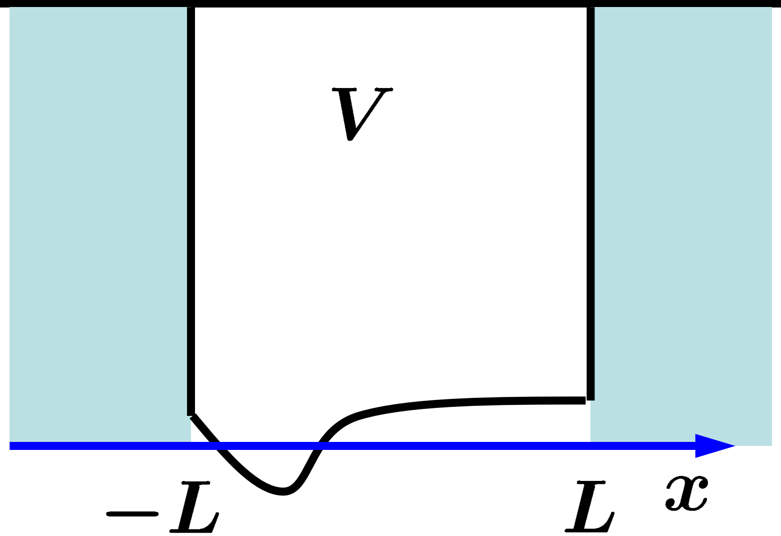
$$\Gamma \geq \Gamma_{\mathrm{cr}}$$

束縛状態の非存在条件

$=$ 連続有界な S の存在条件

S の存在についての定理

$$V = \begin{cases} \infty & (\ |x| \geq L\ ) \\ \textbf{function of } x & (\ |x| < L\ ) \end{cases}$$



Proposition. *If the potential is in a finite size box, there exists an appropriate S-deformation for stable case*

L が無限のケースでもいくつかの仮定の
元で証明できる (with 田中さん in prep.)

Schrödinger方程式との関係

$$V + \frac{dS}{dx} - S^2 = 0$$ はリッカチ型の微分方程式

$$\frac{1}{\phi}\frac{d\phi}{dx} := -S$$ とすると線形微分方程式になる

$$\rightarrow \quad -\frac{d^2\phi}{dx^2} + V\phi = 0$$

これはゼロエネルギーのSchrödinger方程式

どこにもゼロ点を持たない解がregularなSに対応している

Nodal theorem

Sturm−Liouville の定理の1つ

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2}+V\right]\Phi = E\Phi$$

ゼロエネルギーのSchrödinger方程式を十分遠方で $\Phi=0, d\Phi/dx=1$ の境界条件で解いたときのゼロ点の数がnegative energy bound state の数になる

regularな S の存在はこれにより保証

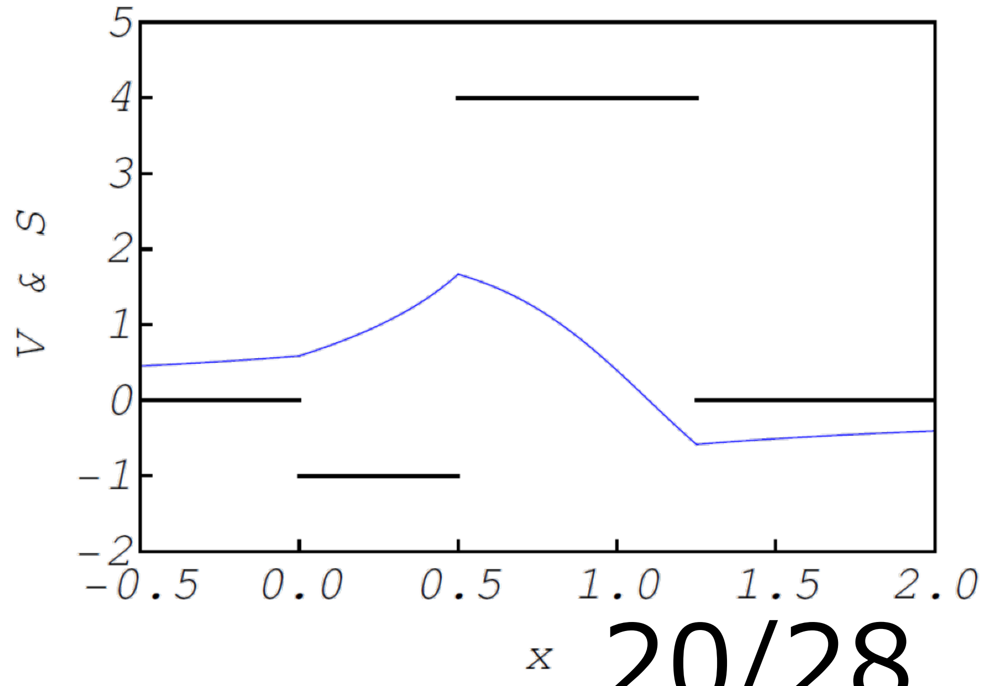
Numerical calculation

$$V + \frac{dS}{dx} - S^2 = 0$$

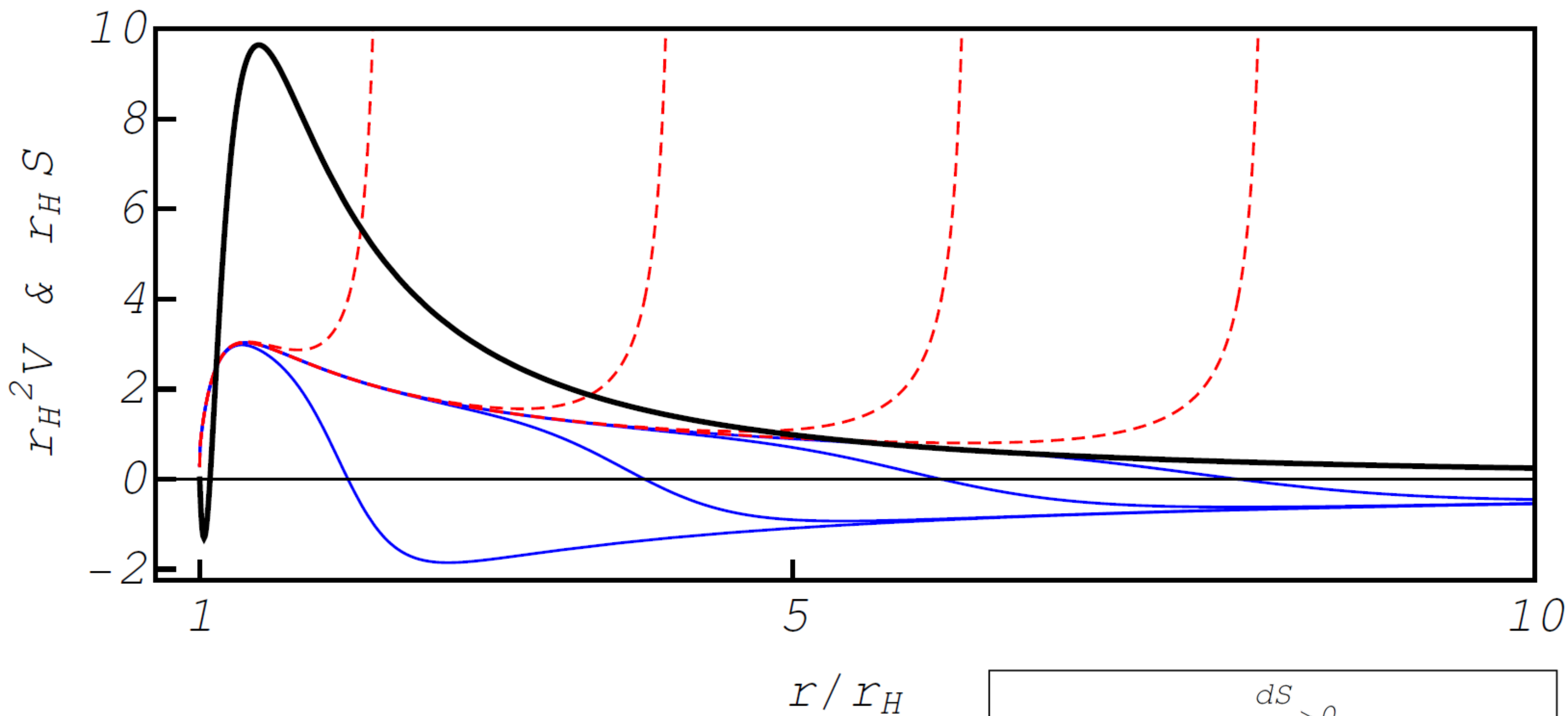
- $S|_{x\to\pm\infty} \sim \mp$
- S は $-\infty < x < \infty$ で有界

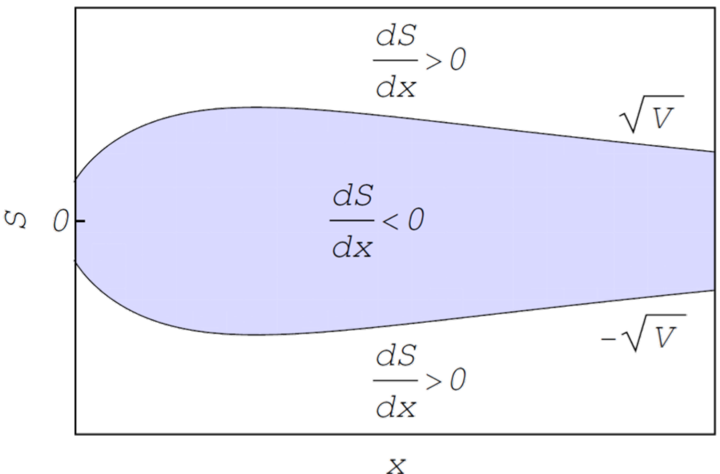
となるような境界条件を見つける必要がある

適切な境界条件は
$V > 0$ の領域で
$S = 0$ とすると
得られることが多い



10 Dim Schwarzschild BH

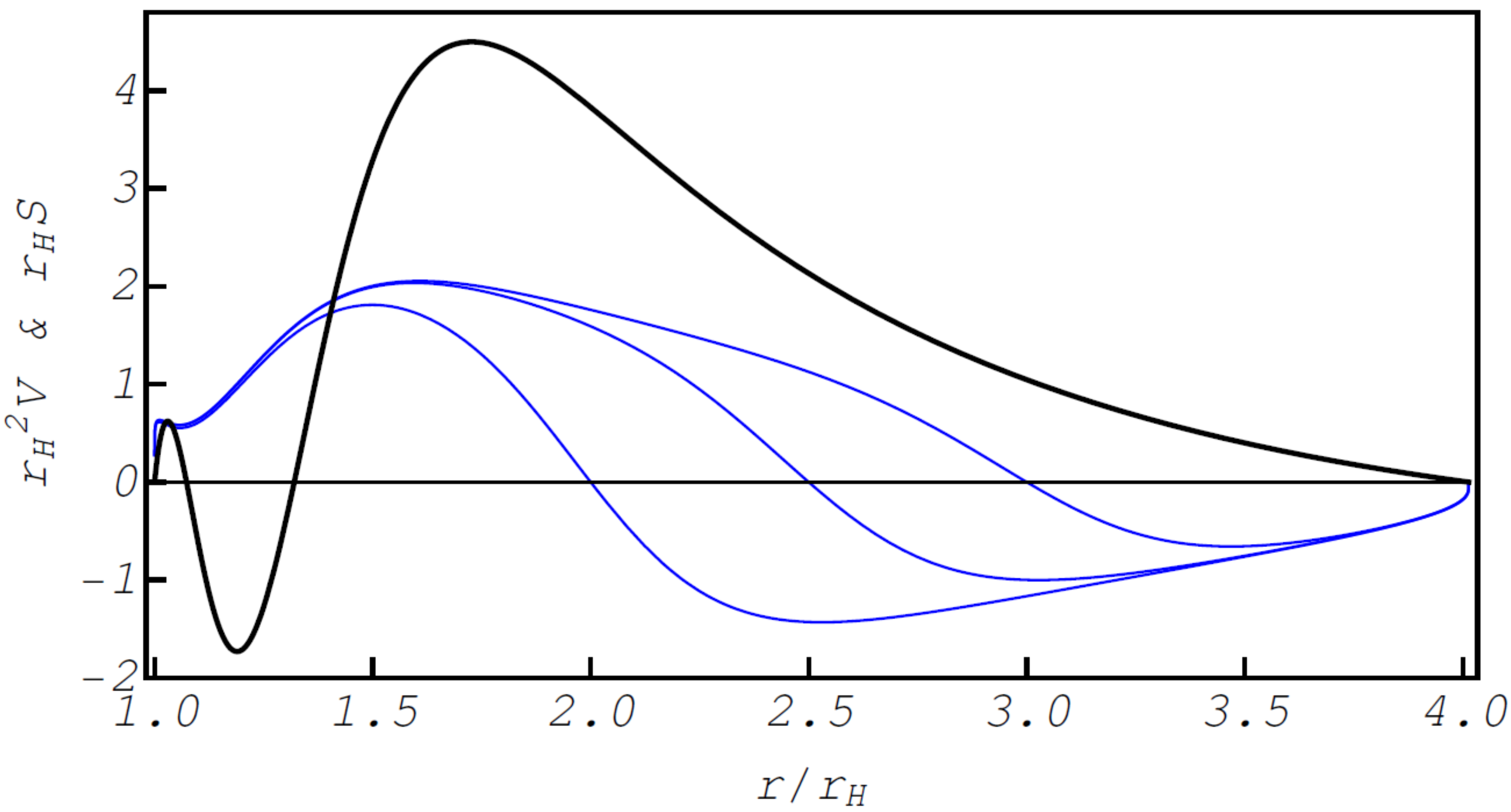




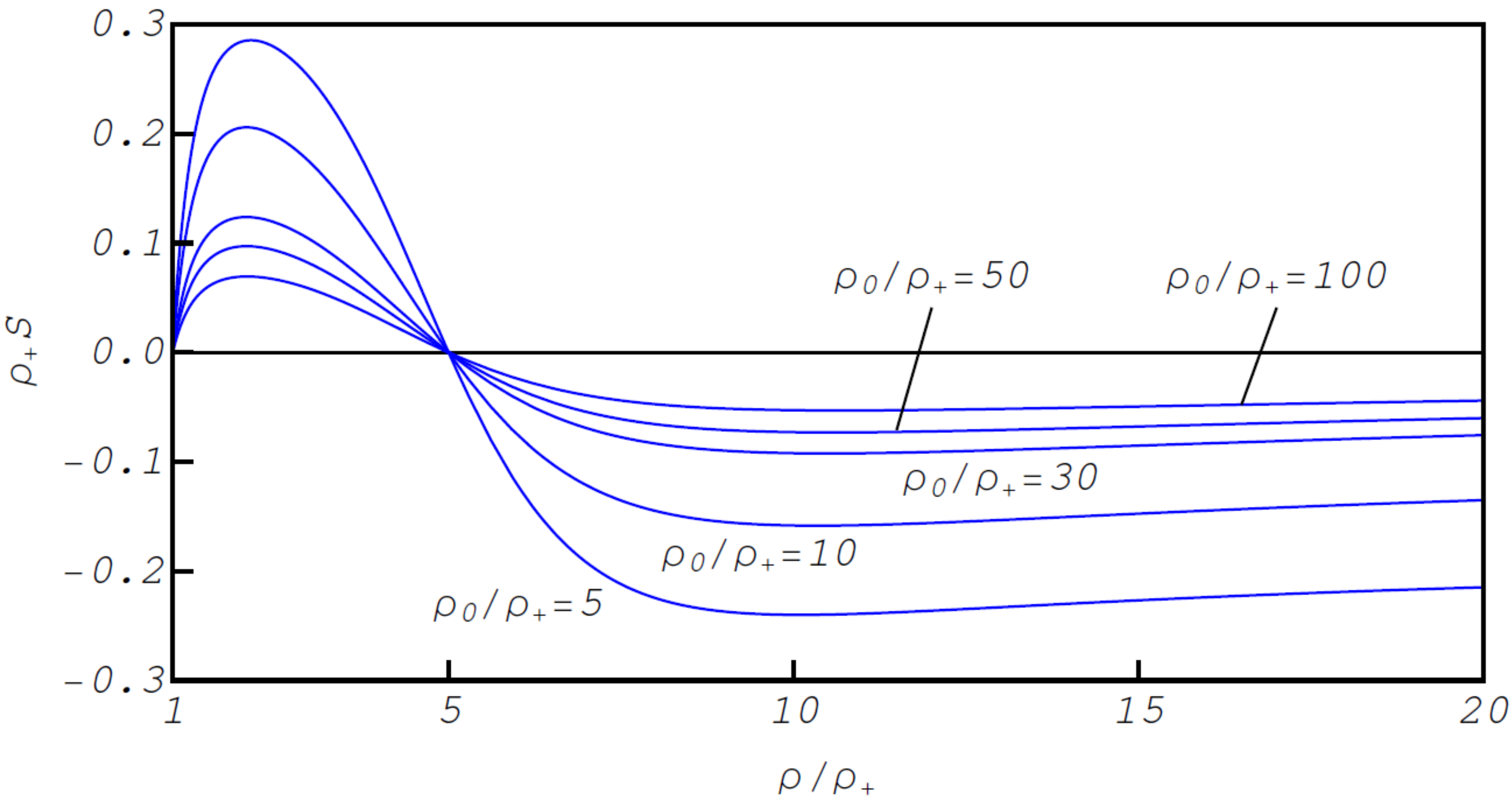
$$dS/dx = (S - \sqrt{V})(S + \sqrt{V})$$

if $V > 0$

10 Dim Schwarzschild-dS BH

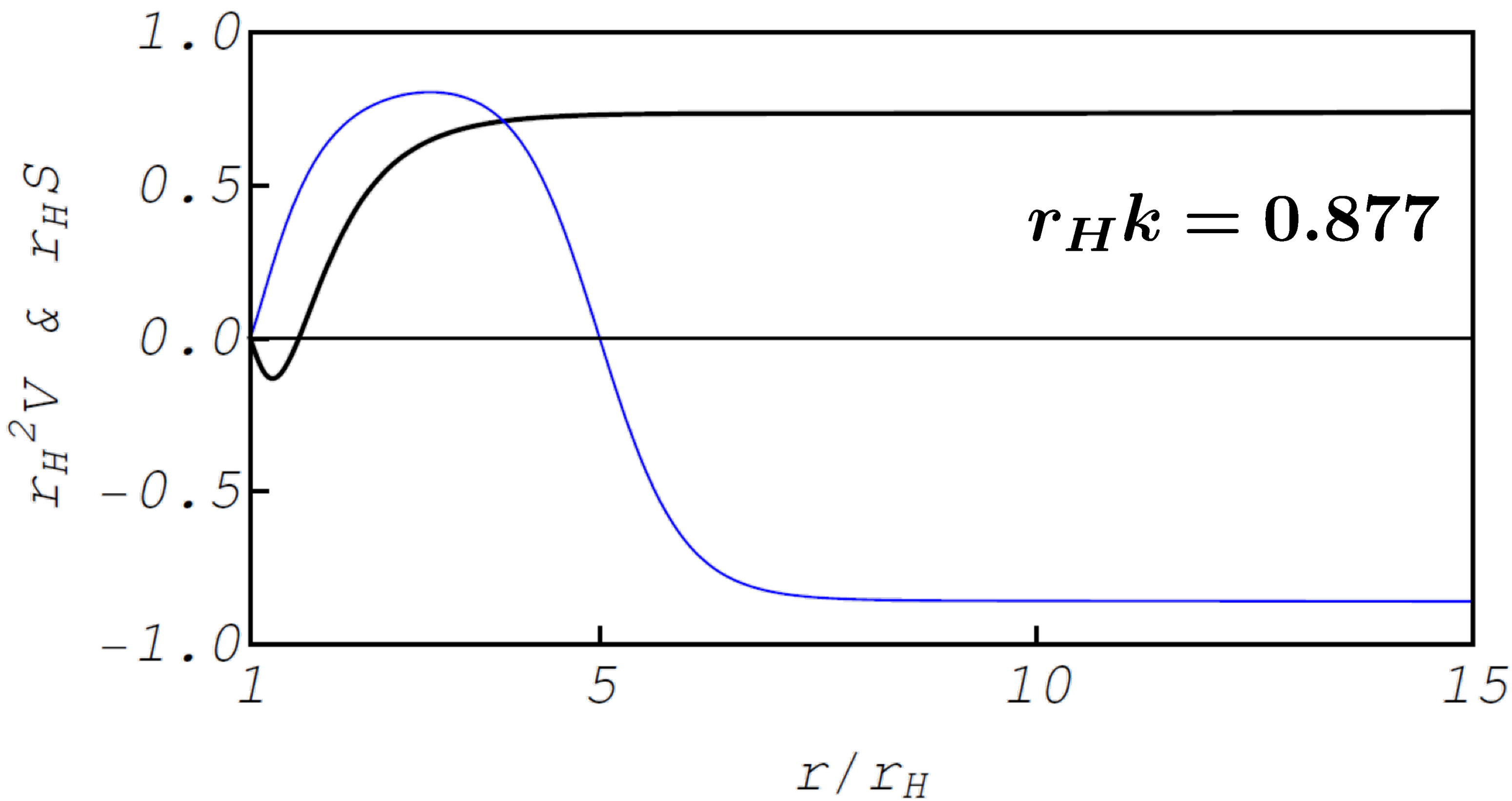


Squashed Kaluza-Klein BH (κ=1)



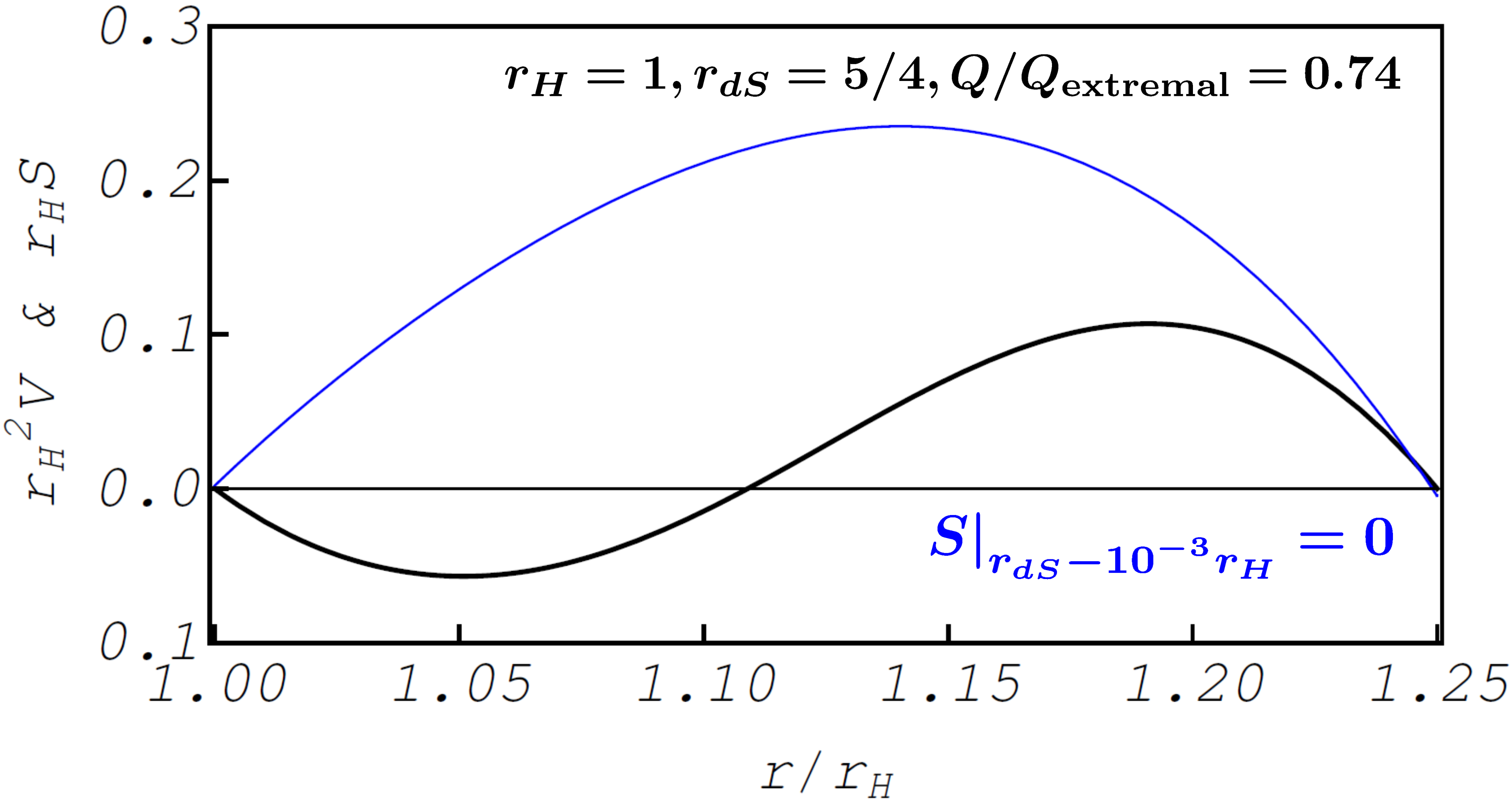
10年前の未解決問題も解けた

Black string



$r_H k < r_H k_{\rm cr} \simeq 0.876$ だと不安定modeがが存在する [Gregory and Laflamme, 1993]

10 Dim RN-dS BH



$Q/Q_{\mathrm{extremal}} > q_{\mathrm{cr}} \simeq 0.75$ だと不安定modeが存在する [Konoplya and Zhidenko, 2008]

S-deformation methodのメリット

- boundary conditionをあまり気にしなくて良い

（nodal theoremだとdecay modeを見つける必要があるが，一般にはdecay modeの漸近系を求めるのは難しい）

- 経験上はfine tuneなど必要なく普通に解けば求まる（精度には注意）
- ゼロモードがないことを容易に示せる

Summary and discussion

- 安定性を示すための簡単な方法について考えた

$$V + \frac{dS}{dx} - S^2 = 0$$

- 安定なら常に解は存在する

- 摂動方程式が得られたならまずは今回の方法を試してみるのが良いテストになる

- 不安定性が現れるパラメータの閾値の値を探すためにも使える

Future works

- AdS BH, ボゾンスター
- 複数のmodeがcoupleしているケースでも計算してみるとうまくいくので現在議論中