Fourier-Mukai 変換

向井 茂 述
浜中 真志 記

1998 年 12 月 9 日

Fourier-Mukai 変換 (以下 FM 変換と書く) というのは、Fourier 変換の拡張です。Fourier 変換というのは普通、関数を展開してやるものですが、これを層でやるというのが FM 変換です。

Fourier 変換の拡張という話はいろいろあります。一番簡単なものですと、例えば次のようなものがあります。G を有限アーベル群とします。このとき、G の双対というのは $G^* = \mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^\times)$ で与えられます：

$$\begin{aligned} G \quad & : \text{ 有限アーベル群} \\ G^* \quad &= \mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^\times) \ : \text{ 指標群} \end{aligned}$$

そうすると、勝手な関数

$$f \ : \ G \to \mathbf{C} \tag{1}$$

に対して、

$$\begin{array}{cccc} \hat{f} & : & G^* & \to & \mathbf{C} \\ & & \chi & \mapsto & \sum_{g \in G} f(g)\chi(g) \end{array} \tag{2}$$

が定義されます。このように対応づけてやりますと G 上の関数と G^* 上の関数との間に

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}(G, \mathbf{C}) & \stackrel{\text{isometry}}{\longleftrightarrow} & \mathrm{Map}(G^*, \mathbf{C}) \\ f & \longleftrightarrow & \hat{f} \end{array} \tag{3}$$

の関係が成り立ちます。

ここからいろいろな話を続けていくことができます。これからやる FM 変換の場合により近い例としては、 次のようなものがあります。まず、

$$V \ : \ \text{有限次元 (実) ベクトル空間} \tag{4}$$

を持ってきて、

$$V^* \ : \ \text{双対ベクトル空間} \tag{5}$$

を考えます。それで、自然な内積を

$$(\ ,\ ) \ : \ V \times V^* \to \mathbf{R} \tag{6}$$

で表します。さて、V 上の関数 f に対して、その Fourier 変換 $\hat{f}$ は、

$$\hat{f}(\alpha) = \int_V dv \ f(v) e^{2\pi i (v,\alpha)} \tag{7}$$

で定義されます。これが、V 上の 2 乗可積分関数全体のなすヒルベルト空間 $L^2(V)$ と V^* 上の 2 乗可積分関数全体のなすヒルベルト空間 $L^2(V^*)$ との間の等長変換 (isometry) を与えます：

$$\begin{array}{ccc} L^2(V) & \leftrightarrow & L^2(V^*) \\ & \text{isometry} & \\ f & \leftrightarrow & \hat{f} \end{array} \tag{8}$$

こういうのは結局、一般の関数を特殊関数で展開して「モジュライ」上の関数を作るということを行っています。上の例では、この特殊関数というのは指標でしたが、他にもラプラシアンの固有関数で展開するとか、いろいろな場合があります。

で、こういうのをここまでは多様体上の関数に対してやっていたんですが、今度は多様体上の層に対してやればどうなるかということを考えます。

そのためにまず、基本単語の説明をします。

- カテゴリー (category)
  数学的には

$$\begin{cases} \text{object} \\ \text{morphism} \end{cases} \tag{9}$$

  のペアのことです。例としては、

	object	morphism
(i)	集合	その間の写像
(ii)	多様体	その間の射
(iii)	群	その間の準同型
(iv)	ベクトル空間	その間の線型写像

  というものがあります。(iii) までくると、X と Y がともに可換という仮定の下で、両 object

の間の射の全体 $Hom(X,Y)$ が群構造を持ち、(iv) までくると、X と Y という object の間の射の全体 $Hom(X,Y)$ がベクトル空間の構造を持ちます。それから、今日の話で関係するカテゴリーは

	object	morphism
(v)	代数的 (複素) 多様体 X 上の (連接) 層	その間の準同型

です。これには少し戸惑うかもしれませんが、恐れる程のことはありません。

- 層 (sheaf)
  大雑把にいって

$$\text{層} \simeq X \text{ 上の代数的 (正則) ベクトル束} \tag{10}$$

です (X が代数多様体のときは「代数的」、複素多様体のときは「正則」が対応します)。こう思って大体話が通じますが、時々話が通じないことも事実です。そのときに何に注意すればいいかと言いますと、X の閉部分多様体 Y 上のベクトル束を (補集合 $X-Y$ では零になるように) 拡げたものも層だということです。層というのは多様体の各点にベクトル空間が生えたものです。このベクトル空間の次元が各点で全て同じならば、本当にベクトル束です。ただ各点で次元がジャンプすることがあります。例えば、摩天楼層がそうです。摩天楼層というのは X の 1 点 $x \in X$ に有限次元ベクトル空間を生やしたものです。

関数の Fourier 変換を層の Fourier 変換 (FM 変換) に拡張するためにどうすればいいかですが、結論から先に言いますと次の置き換えをすることになります：

関数の Fourier 変換	層の Fourier 変換 (FM 変換)
実ベクトル空間 V	複素トーラス X
V の双対空間 $\hat{V}$	X の双対トーラス $\hat{X}$
関数 f	連接層 F
核関数 $e^{2\pi i(v,\alpha)}$ on $V \times \hat{V}$	Poincaré 直線束 $\mathcal{P}$ on $X \times \hat{X}$
関数の積分	層のコホモロジー群

それで、まず複素トーラス X ですが、それは次のように定義されます。

$$\begin{aligned} X &= \mathbf{C}^g/\Gamma \qquad (11) \\ \Gamma &\simeq \mathbf{Z}^{2g} \ : \ \text{格子} \end{aligned}$$

トーラスがあれば、その双対トーラスもあります：

$$\hat{X} = \bar{\mathbf{C}}^{g,*}/\Gamma^* \tag{12}$$

ただし、Γ^* は Γ の双対格子で、

$$\Gamma^* = \left\{\alpha \in \bar{\mathbf{C}}^{g,*} \mid \mathrm{Im} < \alpha, \gamma > \in \mathbf{Z},\ {}^\forall\gamma \in \Gamma\right\} \tag{13}$$

で与えられるものです。この双対トーラスは X 上の位相的に自明な正則直線束のモジュライ空間となっています。これを用いて層を展開します。位相的に自明なので、基本群 π_1 の表現を見ればいいということです。この場合の π_1 は、

$$\alpha \quad : \quad \mathbf{C}^g \to \mathbf{C} \quad R\text{ 線型},\ \mathbf{C}\text{ 線型} \tag{14}$$

$$e^{2\pi i\alpha} \quad : \quad \mathbf{C}^g \to \mathbf{C}^\times \quad \mathbf{C}\text{ 反正則写像} \tag{15}$$

$$\rho_\alpha \quad : \quad \Gamma \to \mathbf{C}^\times \text{ は } e^{2\pi i\alpha}\text{の } \Gamma \text{ への制限} \tag{16}$$

で理解されます。ρ_α でねじると、

$$P_\alpha = \mathbf{C}^\times \times \mathbf{C}/_{\rho_\alpha}\Gamma \tag{17}$$

として、X 上の直線束が得られます。これを並べて $X \times \hat{X}$ 上の直線束にしたものを Poincaré 直線束といいます。これによって、

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Pic}^0 X \\ \alpha & \mapsto & [P_\alpha] \end{array} \tag{18}$$

という同型が成り立ちます。これは複素構造も含めて同型です。

いよいよ本題に入ります。

F : X 上の層

$H^0(X, F)$: 大域切断全体のなすベクトル空間

$H^i(X, F)$: 層係数コホモロジー (これも有限次元ベクトル空間)

とします。計算するときは Čech でやればいいです。問題となってくるのは関数を特殊関数で展開したときの重複度です。ベクトル空間 $H^0(X, F \otimes P_\alpha)$ を、F を展開したときの P_α^{-1} の係数と考えて $\hat{X}$ 上の層 S^0F を作ります：

$$S^0F \overset{\text{大体}}{\simeq} \coprod_\alpha H^0(F \otimes P_\alpha) \tag{19}$$

これは FM 変換の 0 次の部分です。ここで注意ですが、$H^0(X, F \otimes P_\alpha)$ の次元が $\alpha \in \hat{X}$ によらないとき上の $\overset{\text{大体}}{\simeq}$ は $=$ で、しかも S^0F はベクトル束になります。次元が一定でないときは S^0F と

いうのは必ずしもベクトル空間 $H^0(F \otimes P_\alpha)$ が X の上に並んでいるわけではありません。そこがすっきりといかない点ですが、今は 0 だけ見ているから問題が生じているわけで、全ての i について見てやれば正しい、そういうことは言えます。上の (19) と同様に

$$S^i F \overset{\text{大体}}{\simeq} \coprod_\alpha H^i(F \otimes P_\alpha) \tag{20}$$

とおきます。F の FM 変換というのは大雑把には $\hat{X}$ 上の層の集まり $\{S^i F\}$ です。また、どれか一つの $i = i_0$ を除いて $S^i F = 0$ のとき、$S^{i_0} F$ を F の FM 変換といいます。これを $\hat{F}$ で表します。i_0 を F の指数といいます。最も一般的な定義は $\hat{F}$ を導圏 (derived category) $D(\hat{X})$ の object として定義するものですが、ここでは扱いません。ただ、あとで便利なのでこの記号を使うかもしれません。

例を挙げましょう。

- 摩天楼層 k(0) : X の原点にだけ $\mathbf{C}$ を生やしたもの
  これについて FM 変換を考えましょう。

$$\begin{aligned} H^0(k(0) \otimes P_\alpha) &= \mathbf{C} \quad \forall \alpha \\ H^i(k(0) \otimes P_\alpha) &= 0 \quad i = 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{21}$$

  ですから、この場合の FM 変換は

$$\hat{k}(0) = (\text{直線束}) \tag{22}$$

$$\text{指数} = 0 \tag{23}$$

  となります。ちょうど、Dirac のデルタ関数の Fourier 変換が定数関数 1 であることに対応しています。一つ言い忘れましたが、FM 変換の定義において、$\hat{k}(0)$ が自明な直線束になるように正規化してあります。その方法はちゃんとあります。

- $\mathcal{O}_X$
  今度は逆に自明な直線束 $\mathcal{O}_X$ をとってきます。そうすると、

$$H^i(\mathcal{O}_X \otimes P_\alpha) = \begin{cases} \underbrace{\mathbf{C} \times \cdots \times \mathbf{C}}_{\binom{g}{i}\text{個}} & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha \neq 0 \end{cases} \tag{24}$$

  となります。これでちょっと non-trivial な気がします。これを FM 変換したやつ $S^i \mathcal{O}_X$ はとにかくサポートは 0 にしかなりません。各 i についてコホモロジー $H^i(\mathcal{O}_X)$ が出て来ます。

$S^i\mathcal{O}_X$ は全ての i で出てくるのではなくて $i=g$ のところだけ $\mathbf{C}$ が出て来ます。$S^g\mathcal{O}_X$ については正しく $\mathbf{C}$ が出て来ます。ということでこの変換の FM 変換は、

$$\hat{\mathcal{O}}_X = k(0) \tag{25}$$

$$\text{指数} = g \tag{26}$$

となります。

この 2 つの例を見ますと想像がつきますが、

$$k(0) \overset{\text{FM 変換}}{\longleftrightarrow} \mathcal{O}_X \tag{27}$$

という対応が成り立ちます。

ここで、主定理を述べます：

定理

F を X 上の層とし、その FM 変換 $\hat{F}$ が $\hat{X}$ 上の層として、定まるとする

($S^iF = 0\ (i \neq i_0),\ \hat{F} = S^{i_0}F$)。

このとき、$\hat{\hat{F}}$ も層として定まる。

また、指数は $g - i_0$ で $\hat{\hat{F}} = (-1_X)^*F$ が成り立つ。

導圏の言葉で書けば、

定理

$$D(X) \underset{\mathcal{F}}{\overset{\mathcal{F}}{\begin{smallmatrix}\longrightarrow\\ \longleftarrow\end{smallmatrix}}} D(\hat{X}) \tag{28}$$

において、

$$\mathcal{F}^2 = (-1_X)^*[g] \tag{29}$$

が成り立つ ($[g]$ は複体のシフトを表す。)。

特に、$\mathcal{F}$ は triangulated category$D(X)$ と $D(\hat{X})$ との間の圏同値を与える。

これで、普通の Fourier 変換の層アナロジーが出来ました。普通の Fourier 変換でいうところの isometry がここでいうところの圏同値に対応します。

参考文献

[1] S.Mukai, *Abelian Variety and Spin Representation*, Warwick Preprint : 1998 $\sharp$**13** (http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~mukai/index.html から手に入る)