修士論文

Affleck-Dine Baryogenesis And Q-Balls

平成 13 年 2 月 6 日

東京大学大学院理学系研究科物理学専攻

96108　藤井 優成

目 次

第 0 章　導入 **6**

第 I 部　有限温度系 **9**

第 1 章　平衡系熱力学の基礎 **10**
1.1 宇宙膨張と熱力学 10
1.2 (局所) 熱平衡、化学平衡 12
1.3 Inflation 終了後の温度変化 15

第 2 章　有限温度系の場の量子論 **17**
2.1 零温度系の復習 17
2.1.1 生成汎関数 17
2.1.2 One Loop 有効ポテンシャル (零温度) 19
2.2 有限温度系の場の量子論 26
2.2.1 Ensembles、期待値 26
2.2.2 生成汎関数 27
2.2.3 Green 関数 28
2.2.4 Imaginary time formalism 32
2.2.5 有限温度系の有効ポテンシャル 34
2.2.6 超対称性場の量子論における有限温度ポテンシャル 40

第 II 部　Affleck-Dine Baryogenesis **41**

第 3 章　Baryogenesis 一般に対する覚書 **44**
3.1 Baryon asymmetry 44
3.2 Baryogenesis に必要な一般条件 45
3.2.1 Baryon(Lepton) number violation 45
3.2.2 C and CP violation 45
3.2.3 熱平衡からの逸脱 45

第 4 章　有限温度効果を考えない場合の Affleck-Dine Baryogenesis **47**
4.1 平坦方向の持ち上がり 47
4.1.1 非繰り込み可能な項による持ち上がり 47
4.1.2 超対称性の破れの効果 48
4.2 Affleck-Dine 場 ϕ の時間発展 52

4.2.1 インフレーション中の発展 . . . 52
4.2.2 インフレーションが終了してから、AD 場が振動を開始するまでの発展 . . 53
4.2.3 その後の発展 . . . 54
4.3 Baryon/Lepton Asymmetry . . . 54
4.3.1 計算方法 . . . 54
4.3.2 C と CP の破れについてのコメント . . . 57
4.4 The Minimal Supersymmetric Leptogenesis . . . 57
4.4.1 平坦方向とポテンシャル . . . 58
4.4.2 Affleck-Dine 場 ϕ の時間発展 . . . 59
4.4.3 Lepton asymmetry . . . 60
4.4.4 Baryon asymmetry . . . 60
4.4.5 $(H^2/M_*)\tilde{b}W$ の項が存在した場合の影響 . . . 60
4.5 6 次のスーパーポテンシャルを用いた Affleck-Dine Baryogenesis . . . 61
4.5.1 $(H^2/M_*)\tilde{b}W$ が存在しなかった場合 . . . 61
4.5.2 $(H^2/M_*)\tilde{b}W$ が存在したときの影響 . . . 62

第 5 章 有限温度効果を考えない場合の Affleck-Dine Baryogenesis (Gauge Mediation Model) 63
5.1 平坦方向の持ち上がり方 . . . 64
5.2 6 次のスーパーポテンシャルを用いた Affleck-Dine Baryogenesis . . . 65
5.2.1 GM< 重力 < スーパーポテンシャル . . . 66
5.2.2 GM< スーパーポテンシャル . . . 67

第 6 章 $W = 0$ の場合の Afflek-Dine Baryogenesis 70
6.1 Gravity Mediation Model における W=0 Affleck-Dine Baryogenesis . . . 70
6.1.1 Gravity Mediation Model における Moduli Problem . . . 71
6.1.2 W=0 Affleck-Dine Baryogenesis . . . 72
6.2 Gauge Mediation Model における W = 0 Afflec-Dine Baryogenesis . . . 75
6.2.1 Gauge Mediation Model における Moduli Problem . . . 75
6.2.2 Gauge Mediation Model における $W = 0$ Affleck-Dine Baryogenesis . . . 75

第 7 章 Affleck-Dine Baryogenesis における有限温度効果 79
7.1 有限温度効果を考慮した、Minimal Supersymmetric Leptogenesis . . . 80
7.1.1 One Loop からくる有限温度効果 . . . 80
7.1.2 Two Loop から来る有限温度効果 . . . 82
7.1.3 Affleck-Dine 場の振動開始時期と Baryon asymmetry . . . 86
7.1.4 Neutrinoless Double Beta Decay に対する予言 . . . 89
7.2 他の平坦方向を用いた Affleck-Dine Baryogenesis に対する有限温度効果 . . . 90
7.2.1 6 次のスーパーポテンシャルを用いた Affleck-Dine Baryogenesis に対する有限温度効果 (Gravity Mediation Model) . . . 91
7.2.2 6 次のスーパーポテンシャルを用いた Affleck-Dine Baryogenesis に対する有限温度効果 (Gauge Mediation Model) . . . 92
7.3 低カットオフスケールの $W = 0$ Affleck-Dine Baryogenesis における有限温度効果 93

第 III 部　Q-Ball とその熱力学、Affleck-Dine Baryogenesis に及ぼす影響　113

第 8 章　Q-Ball 解　116
8.1 Q-Ball の解析的性質 . . . 116
8.1.1 Q-Ball 解と存在条件 . . . 116
8.1.2 thin wall 近似 . . . 118
8.1.3 thick wall 近似 . . . 119
8.2 超対称標準理論における Q-Ball 解 . . . 121
8.2.1 Gravity Mediation Model における Q-Ball 解 . . . 121
8.2.2 Gauge Mediation Model における Q-Ball 解 . . . 123
8.2.3 New Type Q-Ball . . . 126
8.3 Q-Ball formation . . . 126
8.3.1 instability の成長とその条件 . . . 126
8.3.2 Gravity Mediation Model における Q-Ball の形成 . . . 128
8.3.3 Gauge Mediation Model における Q-Ball の形成 . . . 130

第 9 章　Q-Ball の熱力学　132
9.1 有限温度系における Q-Ball の定式化 . . . 132
9.1.1 種々の熱力学的物理量の定義と関係 . . . 132
9.1.2 有限温度系の場の量子論の経路積分形式による記述 . . . 133
9.1.3 有限温度系における Q-Ball . . . 135
9.2 Gauge Mediation Model を例にした Q-Ball 熱力学 . . . 136
9.2.1 平衡系の Q-Ball 熱力学 . . . 136
9.2.2 Q-Ball の Thermalization . . . 140
9.2.3 Q-Ball の Evaporation と Diffusion Rate . . . 141
9.3 Gravity Mediation Type の Q-Ball の蒸発量 . . . 144

第 10 章 Q-Ball の Affleck-Dine Baryogenesis に及ぼす影響　146
10.1 Baryon asymmetry と Dark Matter の量の間に関係がつくためにつく制限 . . . 146
10.1.1 Gravity Mediation Type Q-Ball の場合 . . . 146
10.1.2 New Type と Gauge Mediation Type Q-Ball の場合 . . . 149
10.1.3 $aT^4\ln(|\phi|^2)$ において、a が負であった場合の影響についてのコメント . . . 151
10.1.4 W=0 の Affleck-Dine Baryogenesis に対する Q-Ball の影響 . . . 151
10.2 B-L を保存する平坦方向を用いた Affleck-Dine Baryogenesis . . . 152

第 11 章 結論ー (有効な Affleck-Dine Baryogenesis ?) ー　156
11.1 4 次のスーパーポテンシャルで持ち上がる平坦方向を用いた場合 . . . 156
11.1.1 $(LH_U)^2$ 以外のスーパーポテンシャルを利用するもの . . . 156
11.1.2 $(LH_U)^2$ のスーパーポテンシャルを利用する Affleck-Dine Leptogenesis . . . 156
11.2 6 次のスーパーポテンシャルで持ち上げられる平坦方向を利用するもの . . . 156
11.3 平坦方向を持ち上げるスーパーポテンシャルが存在しない場合 . . . 157
11.4 まとめ . . . 157

付 録 A Sample Calculation **158**
A.1 The Model 158
A.2 高温展開 159
A.2.1 Bosonic な自由度の積分 159
A.2.2 Fermionic な自由度の積分 162
A.2.3 One Loop 有効ポテンシャルと繰り込み改良 165

付 録 B Affleck-Dine Baryogenesis に関するいくつかのコメント **168**
B.1 有限温度効果が効いた時の Affleck-Dine 場の蒸発時期についてのコメント 168
B.2 ４次のスーパーポテンシャルを用いた Gauge Mediation Model における Affleck-Dine Baryogenesis に対するコメント 169

付 録 C 超対称理論における平坦方向とその持ち上がり **170**

第0章　導入

宇宙初期には インフレーション と呼ばれる、指数関数的な大膨張の時期が存在したと広く信じられている。この時期は、inflaton と呼ばれるスカラー場のポテンシャルエネルギーが宇宙のエネルギー密度の支配的な成分となることによって実現され、その後このエネルギーは、inflaton の崩壊を通じて輻射に転換される (再加熱)。インフレーションは、存在すれば観測と矛盾することになる様々な relic を充分薄めてしまうと共に、地平線問題, 平坦性問題という標準ビッグバン宇宙論の難問を美しく解決する。しかし、インフレーションは危険な relic だけでなく、初期に存在可能な Baryon asymmetry をも洗い流し、一見すると、宇宙は完全に Baryon symmetric になってしまうように思える。

しかし、実際に観測される宇宙は、この予想とは全く異るものである。だれもが知っているように、我々の宇宙は物質ばかりで構成される Baryon asymmetric な宇宙であり、反物質で構成されるような天体は見つかっていない。標準元素合成理論によると、軽元素合成が成功するには、温度が $T \sim$ MeV のときに Baryon と Anti-Baryon の差の数密度とエントロピーの比が、$n_B/s \sim 10^{-10}$ であることが必要であることが分かっている。このような小さな Baryon asymmetry がいかにして生成されたかを説明しようとする試みが、Baryogenesis の研究である。

素粒子の標準理論 (Weinberg-Salam theory) は、様々な実験から電磁弱スケール以下の物理を非常に正確に記述することが確かめられている。しかし、残念なことに Higgs 粒子の質量に対する制限などから、標準理論の枠組内で Baryon asymmetry の生成を説明する試み (Electroweak Baryogenesis) は、実験的に排除されてしまっており、この宇宙を形作るのに必要な Baryon asymmetry を説明するには、何か標準理論を超えた物理が必要になる。

現在、階層問題などの標準理論における他の現象論的な問題や、量子重力理論の唯一の候補であると考えられている超弦理論などの示唆から、標準理論を超えた次のスケールの物理として、超対称性を持つ理論、特に、標準理論を minimal に超対称化した超対称標準理論 (MSSM) が盛んに研究されている。超対称性とは、Boson と Fermion を結び付ける対称性であるから、超対称標準理論は、クオークの超対称パートナーであるスカラークオーク、レプトンの超対称パートナーであるスカラーレプトンを含んでいる。超対称理論は、このように Baryon 数や Lepton 数をもつスカラー場を含んでいる事実の他に、平坦方向を持つと言う大きな特徴を持っている。平坦方向とは、スカラーポテンシャルが消えるような場の配位空間であり、繰り込み可能な範囲では、輻射補正すら受けない。実際の宇宙では、超対称性は破れている。さらに、高エネルギースケールでは非繰り込み可能な効果の存在が予想され、それらの効果ににによって平坦方向は持ち上げられ、ポテンシャルのスケールが決定されることになる。

このような平坦方向の存在は、宇宙論的に非常に興味深い帰結を持っている。Baryon 数あるいは Lepton 数を持つスカラー場が、インフレーション終了後に、平坦方向に沿って非常に大きな期待値を持つことが可能になるのである。このスカラー場は、ハッブルパラメータが有効質量程度になったときに、原点まわりの振動を開始する。この際、Baryon 数あるいは Lepton 数を破る効果が存在し、これらのスカラー場に位相方向のトルクを与えることが出来れば、Baryon(Lepton) asymmetry を励起することが可能である。このように、平坦方向に沿ってスカラー場に大きな

期待値を与え、そのスカラー場に Baryon (Lepton) 数を励起することによって、宇宙の Baryon asymmetry を説明する方法を Affleck-Dine Baryo(Lepto)genesis と呼ぶ [1]。対応するスカラー場を以降 Affleck-Dine 場 ϕ と呼ぶことにしよう。帰結する Baryon asymmetry は、宇宙の再加熱温度の他に、Affleck-Dine 場が原点まわりの振動を開始する時期と、そのときの $\langle\phi\rangle$ の大きさによって決定される。これらは平坦方向の持ち上がり方によって決定され、必然的に超対称性の破れ方によって大きく変わる。特に、Affleck-Dine 機構が働く時期には、インフレーション由来の巨大な零でないエネルギー密度によって、超対称性は大きく破られる。この効果が Affleck-Dine 機構に及ぼす影響は [2] によって詳しく調べられた。そこでは、$\mathcal{O}(H)$ の負の有効質量が、ある自然な仮定の下に生じること、さらに、Affleck-Dine 場の初期値と振動を開始するまでの時間発展は、この負の質量項と平坦方向を持ち上げる非繰り込み可能な項の釣合によって決定されることが指摘された。平坦方向が、非繰り込み可能なスーパーポテンシャルによって持ち上げられる場合には、もともとの [1] で想定されていたものと異り、Affleck-Dine 場の Amplitude がそのカットオフスケールより小さく抑えられるために、必要な丁度の量の Baryon asymmetry を生成可能なことが発見された。

Affleck-Dine Baryogenesis に関連する最近に発展に、有限温度効果の評価がある。再加熱前の、inflaton の振動による物質優勢期の時期にも、高温のプラズマが存在するわけであるが、最近になって、その効果によって Affleck-Dine 場の振動開始時期が早まり、生成される Baryon asymmetry が大きく抑制されることが指摘された [3]。有限温度効果が効いた時に、実際どれほど Baryon asymmetry が生成されるかなど、細かいパラメータ依存性などは、(LH_u) で表される平坦方向について初めて詳しい解析がなされた [4]。この研究によって、(LH_u) で表される平坦方向で Affleck-Dine 機構が働き、必要な Baryon asymmetry を供給するためには、一番軽いニュートリノの質量に、これまでよりはるかに厳しい制限が付けられ、しかも、得られる Baryon asymmetry の量が、再加熱温度にほとんど依らずにニュートリノの質量だけで決まるという、興味深い性質が発見された。

さて、大域的な U(1) 対称性を持つ理論で、その保存 Charge が零でない系においては、スカラーポテンシャル $V(\phi)$ が $V(\phi)/|\phi|^2$ が零でない点に最小値を持てば、Q-Ball という non-topological soliton がその系のエネルギーを最小化することが知られている [5]。実は、近年 Affleck-Dine 場のコヒーレントな振動の状態 (Q-Matter) は、空間的な摂動に対して不安定であり、Q-Ball を形成することが発見された。この場合、対応する U(1) Charge は Affleck-Dine 場の持つ Baryon 数あるいは Lepton 数である。生成される Q-Ball の性質は Affleck-Dine 場のポテンシャル、つまり、平坦方向の持ち上がり方に大きく依っており、超対称性を破る方法によって、全く異るものになる。Gauge Mediation Model においては、Messenger Sector の mass スケールより充分高いスケールでは log の持ち上がりを除いてスカラーポテンシャルは完全に平坦になり、上記の Q-Ball 解の存在条件を明らかに満たしている。ここで生成される Q-Ball の、単位 Charge 当たりの質量は、$M_Q \propto Q^{-1/4}$ であり [6]、充分大きな Charge Q を持つ場合には核子への崩壊に対しても安定となる。したがって、Gauge Mediation Type の Q-Ball が生成された場合には、それが直接 Cold Dark Matter に寄与することになる [7]。Gravity Mediation Model の場合にも輻射補正によって Q-Ball 解が一般に存在を許される。この場合には、$M_Q \simeq m_\phi Q$ であり、核子への崩壊に対して不安定である。しかし、大きな Q-Ball が生成された場合には、Q-Ball の寿命は長く、LSP の freeze-out 温度以下まで生き残り得る。この場合には、Affleck-Dine 機構から結果する Baryon asymmetry と LSP Dark Matter の量の間に関係がつくことになる [8, 9]。これらの性質は、Gauge Mediation Model の場合は勿論のこと、Gravity Mediation Model の場合にも、Baryon asymmetry と Dark Matter の量を同時に説明するという、非常に興味深い可能性を持つことを意味する。しかし、それは同時に、Q-Ball から由来する Dark Matter が宇宙を over close

してはならないという事実から、生成される Q-Ball の大きさに制限をつけ、結果的に、再加熱温度や Affleck-Dine 機構そのものに、強い制限を課すことになる。この修士論文では、このような有限温度効果や、Q-Ball の最近の進展を踏まえて、Affleck-Dine Baryogenesis を総合的に見直すことを目標とする。構成は以下のようになっている。

まず、第一部において、有限温度系における有効ポテンシャルを計算する道具立てを行う。最初に零温度系における有効ポテンシャルの計算方法を復習し、その後、Imaginary time formalism における Feynman 則、有効ポテンシャルの計算方法、その、高温展開についてまとめる。これに関連して、付録に化学ポテンシャルが存在する場合の有効ポテンシャルの計算方法について、Toy モデルをもちいて、explicit な計算を行う。

第二部においては、Affleck-Dine Baryogenesis を議論する。最初に、種々の SUSY Breaking Model について、Affleck-Dine 場の時間発展と、帰結する Baryon asymmetry について一般的な公式を導く。その後、有限温度効果を入れた場合の変更点について調べ、特に、(LH_u) を用いた、Affleck-Dine Leptogenesis について、その影響を詳しく議論する。

第三部においては、Q-Ball について調べる。最初に Q-Ball 解と、その存在条件を一般に議論した後、超対称標準理論における Q-Ball 解の具体的な形と、その性質、生成時期とその大きさについて詳しく議論する。その後、有限温度系における Q-Ball について調べ、特に Q-Plasma への蒸発率の計算を行う。そして最期に、Q-Ball が生成されることによって生じる制限をまとめ、どのような Affleck-Dine Baryogenesis が可能なのかを調べ上げる。

第I部

有限温度系

第1章　平衡系熱力学の基礎

1.1　宇宙膨張と熱力学

Baryon 生成などの議論の詳細に入る前に、膨張宇宙における熱力学的な種々の物理量の関係式をここにまとめておく [10][11]。これらは、今後の議論において欠かせないものであり、次節に述べる有限温度系の場の量子論の理解の助けにもなる。

一般相対論によれば、時空の発展は Einstein 方程式を通して記述される。それは、宇宙の Matter Content に依って、以下の 3 つの時期に大別される。

(1)$p = -\rho$ (真空エネルギー優勢期)
(2)$p = \frac{1}{3}\rho$ (輻射エネルギー優勢期)
(3)$p \ll \rho$ (物質エネルギー優勢期)

Einstein 方程式は、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G_N T_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

で与えられる。ここで、$R_{\mu\nu}$ は Ricci テンソル、R は Ricci スカラー、$g_{\mu\nu}$ は 計量 テンソル、G_N は Newton 定数、$T_{\mu\nu}$ は stress-energy テンソル である。空間が一様等方な場合は、Robertson-Walker 計量

$$ds^2 = dt^2 - R(t)^2 dx_i^2 \tag{1.2}$$

を用いて、ずっと簡単な形に書き直せる。ここで $R(t)$ は scale factor である。この場合、式 (1.1) の $(0,0)$ 成分は、以下で与えられる Friedman 方程式に書き直すことができる。

$$H^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G_N}{3}\rho \tag{1.3}$$

ここで 左辺第二項は、曲率からの寄与を表す。以下の議論では、平坦な宇宙 $(k = 0)$ を仮定する。H は Hubble parameter であり、

$$H = \frac{\dot{R}}{R} \tag{1.4}$$

で与えられる。さて、stress-energy テンソルにおける保存則 $(T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0)$ の $\mu = 0$ 部分は、熱力学の第一法則で有名な

$$d(\rho a^3) = -p\, d(a^3) \tag{1.5}$$

と等価である。簡単な状態方程式 $p = w\rho$ を考えよう。w が時間に依らない場合は、式 (1.5) より、エネルギー密度は $\rho \propto R^{-3(1+w)}$ の様に発展する。これと式 (1.3) を用いて、真空エネルギー優勢期 (VD)、輻射優勢期 (RD)、物質優勢期 (MD) それぞれにおいて、

$$\begin{aligned} \rho &\propto \text{constant},\ a \propto \mathrm{e}^{Ht} \ (\text{for } VD) \\ \rho &\propto a^4,\ a \propto t^{\frac{1}{2}} \qquad (\text{for } RD) \\ \rho &\propto a^3,\ a \propto t^{\frac{2}{3}} \qquad (\text{for } MD) \end{aligned} \tag{1.6}$$

という重要な関係式が得られる。

次に、平衡系における熱力学的物理量の温度依存性を見ておこう。弱く相互作用している系については、数密度 n、エネルギー密度 ρ、圧力 p はそれぞれ、分布関数 $f(\vec{p})$、エネルギー $E(\vec{p}) = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$ を用いて

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(\vec{p}) d^3p && (1.7)\\
\rho &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int E(\vec{p})\, f(\vec{p}) d^3p && (1.8)\\
p &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{|\vec{p}|^2}{3\, E(\vec{p})}\, f(\vec{p}) d^3p && (1.9)
\end{aligned}
$$

で与えられる。ここで g は、内部自度である。分布関数 f は統計性にしたがって、

$$
f(\vec{p}, \mu) = \begin{cases} 1/\exp((E-\mu)/T) - 1 & \text{for Bose} \\ 1/\exp((E-\mu)/T) + 1 & \text{for Fermi} \end{cases} \qquad (1.10)
$$

で与えられる。μ は化学ポテンシャルである。これらの物理量の振舞についてまとめておこう。まず相対論的極限 $T \gg m$ について考えよう。 $T \gg \mu$ においては、

$$
\begin{aligned}
\rho &= \begin{cases} (\pi^2/30) g T^4 & \text{for Bose} \\ (7/8)(\pi^2/30) g T^4 & \text{for Fermi} \end{cases} \\
n &= \begin{cases} (\zeta(3)/\pi^2) g T^3 & \text{for Bose} \\ (3/4)(\zeta(3)/\pi^2) g T^3 & \text{for Fermi} \end{cases} \qquad (1.11)\\
p &= \rho/3
\end{aligned}
$$

ここで、$\zeta(3) = 1.20206\ldots$ である。$\mu \gg T$ においては、

$$
\begin{aligned}
\rho &= (1/8\pi^2)\, g\mu^4 \\
n &= (1/6\pi^2)\, g\mu^3 \qquad (1.12)\\
p &= (1/24\pi^2)\, g\mu^4
\end{aligned}
$$

(勿論、この状況は Fermi 系に対してのみ存在し得る。Bose 系に対しては、数密度が正である条件から、化学ポテンシャルは有効質量を超えることが出来ない。) ここで $\mu > 0$ は、Bose 系に対しては、Bose 凝縮が存在することを意味し、別の取扱が必要である。$\mu < 0$ あるいは、$|\mu| < T$ においては、Bose 系も Fermi 系も

$$
\begin{aligned}
\rho &= \exp(\mu/T)\, (3g/\pi^2) T^4 \\
n &= \exp(\mu/T)\, (g/\pi^2) T^3 \qquad (1.13)\\
p &= \exp(\mu/T)\, (g/\pi^2) T^4
\end{aligned}
$$

今度は、$m \gg T$ の非相対論的極限を考えよう。この場合には、Bose 系、 Fermi 系共に以下のように表される。

$$
\begin{aligned}
\rho &= m\, n \\
n &= g(mT/2\pi)^{\frac{3}{2}} \exp(-(m-\mu)/T) \\
g_* &= \sum_{i=\text{bosons}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermions}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 \qquad (1.14)\\
p &= n\, T \ll \rho
\end{aligned}
$$

(粒子 $-$ 反粒子) 数密度も重要な量である。式 (1.13),(1.14) より、

$$
\begin{aligned}
n_X \ - n_{\overline{X}} \ &= \ \frac{g_X}{(2\pi)^3} \int f(\vec{p}, \mu_X) d^3p \ - \ (\mu_X \leftrightarrow -\mu_X) \\
&= \begin{cases} \dfrac{g_X}{T^3} \left[\pi^2 \left(\dfrac{\mu_X}{T} \right) + \left(\dfrac{\mu_X}{T} \right)^3 \right] & (T \gg m_X) \\ \\ 2 g_X \left(\dfrac{m_X T}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \sinh \left(\dfrac{\mu_X}{T} \right) \exp \left(-\dfrac{m_X}{T} \right) & (T \ll m_X). \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

非相対論的な物質からのエネルギー密度と圧力への寄与は、平衡系においては、上記で見たように指数関数的に抑制されている。また、エントロピーも

$$
s \ = \ \frac{S}{V} \ = \ \frac{\rho + p}{T} \tag{1.16}
$$

(ここで S, s はそれぞれエントロピー、エントロピー密度である。) により定義されているので、多くの場合、宇宙のエネルギー密度や圧力、エントロピー密度を次のように近似しておくのが非常に正確かつ便利である。

$$
\begin{aligned}
\rho \ &= \ \frac{\pi^2}{30} \, g_* T^4 \\
p \ &= \ \frac{\pi^2}{90} \, g_* T^4 \\
s \ &= \ \frac{2\pi^2}{45} \, g_{*s} T^3
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

ここで g_*, g_{*s} は、相対論的な粒子の有効自由度である。

$$
g_* \ = \ \sum_{i=\text{bosons}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermions}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 \tag{1.18}
$$

$$
g_{*s} \ = \ \sum_{i=\text{bosons}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermions}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 \tag{1.19}
$$

また $s \propto R^{-3}$ であるから、粒子数 N は n/s に比例することに注意しておこう。

1.2 (局所) 熱平衡、化学平衡

これまでの議論では、少なくとも局所的には平衡状態が実現されていることを前提に話を進めてきた。ところで、完全な平衡状態を実現するためには無限の時間が必要であり、言い換えるならば、平衡系を扱う限り固有の時間スケールは存在しない。しかし、実際には宇宙が膨張しているため、その時間スケールが入り込み完全な平衡状態は存在しないことになる。また、平衡状態からの逸脱そのものが宇宙論的に極めて重要な役割を果たしている。この後議論する、 Baryogenesis や Dark Matter の存在はこの良い例である。宇宙がずっと平衡系で近似出来るならば、現在の状態はその温度によって完全に決定され、前節の議論から容易に見て取れるように、温度が下がるに伴い我々の宇宙は全く空虚なものとなっていただろう。この節では、どのような場合に近似的に平衡が成り立ち、どのような場合にそうでないと言えるのかを簡単にまとめておこう [11]。

まず次のような相互作用を考えることにする。

$$X + A + \ldots \to C + D + \ldots$$

ここでアルファベットは、粒子の種を表す。この相互作用における粒子 X の特徴的な時間スケール $\tau_X = 1/\Gamma_X$ は、この相互作用による粒子 X の数密度の変化率、

$$\frac{1}{\tau_X} = \left| \frac{1}{n_X} \left(\frac{dn_X}{dt} \right) \right|_{X+A+\ldots \to C+D+\ldots} \tag{1.20}$$

で定義される。(Γ_X は、相互作用率である。) $\tau_X \gtrsim H^{-1}$ ならば熱平衡にあると言い、全ての相互作用において $\tau_X \lesssim H^{-1}$ ならば、熱浴から decouple していると言う。要するに、相互作用に必要な特徴的な時間スケールと宇宙膨張の時間スケールを比べるわけである。

宇宙膨張がある系での粒子数密度の変化は、次のような Boltzmann 方程式によって記述される。

$$\begin{aligned} dn_X/dt + 3Hn_X = & \sum_{j,l,m\ldots} \int d\Pi\, (2\pi)^4 \delta^4(\textstyle\sum P_i) \\ & \times (|M|^2(l + m + \ldots \to X + j + \ldots) f_l f_m (1 \pm f_X)(1 \pm f_j) \ldots \\ & - |M|^2(X + j + \ldots \to l + m + \ldots) f_X f_j (1 \pm f_l)(1 \pm f_m) \ldots) \\ & (+ \text{ for Bose}, \; - \text{ for Fermi}) \end{aligned} \tag{1.21}$$

ここで Π は配位空間での体積要素であり、

$$\begin{aligned} \Pi &\equiv \Pi_X \Pi_j \ldots \Pi_l \Pi_m \ldots \\ \Pi_j &\equiv g_j \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{2E} \end{aligned}$$

と定義されている。M は、不変散乱振幅であり、g は、内部自由度である。式 (1.21) の右辺は、X を含む相互作用全てについての和であり、初期状態と終状態のスピンについての和も取るものとする。他の粒子数密度も同様に表され、文字通り扱うことは複雑な無限の連立微分方程式を追うことになり実質的に不可能である。

しかし、次のような妥当な近似によりとても簡単な形にもっていくことができ、物理的な意味も理解しやすくなる。まず最初に、充分良い近似で T (CP) 不変性が成り立っていると思って良いだろう。さらに $1 \pm f \simeq 1$ と近似する。以上のような近似を行うと、式 (1.21) は次のように書き直せる。

$$\begin{aligned} \dot{n_X} \quad + \quad 3Hn_X = & \sum_{j,l,m\ldots} \int d\Pi (2\pi)^4 |M|^2 \delta^4(\textstyle\sum P_i) \\ & \times [f_l f_m \ldots - f_X f_j \ldots] \end{aligned} \tag{1.22}$$

更に、例として次のような相互作用が支配的な状況を考えてみよう。

$$X + l \to X' + l$$

ここで l 粒子は軽く ($m_l \ll T$) 熱平衡状態にあるものとし、分布関数は、Bose 系も Fermi 系も共に Maxwell-Boltzmann 分布のもので近似する。以上の近似を行うと、

$$\dot{n_X} + 3Hn_X = -\int d\Pi\, |M|^2 (X + l \leftrightarrow X' + l)(f_X f_l - f_{X'} f_l) \tag{1.23}$$

が得られる。ここで、エネルギー保存則、

$$E_X + E_l = E_{X'} + E_l$$

を用いると、

$$f_{X'}\ f_l = \exp(-(E_X + El)) = f_X^{EQ}\ f_l^{EQ}$$

が得られる。$A + B \to \ldots$ の散乱断面積は、

$$d\sigma = \frac{1}{2E_A 2E_B|v|}\left(\Pi_{final}|M|^2(A + B \to \ldots)(2\pi)^4\delta^4(\sum P_i)\right) \tag{1.24}$$

で与えられたことを用いれば、式 (1.23) は、次のように変形することが出来る。

$$\begin{aligned}
\frac{n_X}{dt} + 3Hn_X &= \int \frac{d^3p_X}{(2\pi)^3}\frac{d^3p_l}{(2\pi)^3}|v|(f_X^{EQ} - f_X)f_l^{EQ}\sigma(X + l \leftrightarrow X' + l) \\
&\simeq (n_X^{EQ} - n_X)\int \frac{d^3p_l}{(2\pi)^3}f_l^{EQ}\sigma(X + l \leftrightarrow X' + l)|v| \\
&\simeq -[n_X - n_X^{EQ}]\ n_l^{EQ}\left\langle\sigma(X + l \leftrightarrow X' + l)|v|\right\rangle
\end{aligned} \tag{1.25}$$

ここで、$\langle\sigma\ |v|\rangle$ は、断面積と相対速度の積の熱力学的期待値である。以上より、

$$\Gamma_X = \tau_X^{-1}\ \simeq\ n_l^{EQ}\left\langle\sigma(X + l \leftrightarrow X' + l)|v|\right\rangle \tag{1.26}$$

が得られ、X 粒子は、

$$\Gamma_X \simeq n_l^{EQ}\left\langle\sigma(X + l \leftrightarrow X' + l)|v|\right\rangle \gtrsim H \tag{1.27}$$

ならば熱平衡にあり、

$$\Gamma_X \simeq n_l^{EQ}\left\langle\sigma(X + l \leftrightarrow X' + l)|v|\right\rangle \lesssim H \tag{1.28}$$

ならば、その相互作用に関しては、熱浴から decouple している。

特に、非弾性相互作用の相互作用率 Γ_{inel} が宇宙膨張率より大きい場合に、その相互作用は化学平衡にあると言い、例えば

$$X + j \to l + m$$

のような相互作用に対して、

$$\mu_X + \mu_j = \mu_l + \mu_m \tag{1.29}$$

が成立する。

1.3 Inflation 終了後の温度変化

Inflation が終ると、Inflaton ϕ は coherent な振動を開始する。さて、Inflaton の decay ratio Γ_ϕ が $\simeq H$ の時にそのエネルギーの大部分が輻射のエネルギーに転換されるわけであるが、Inflaton は $\Gamma_\phi \lesssim H$ の時にも徐々に崩壊し、そのエネルギーを輻射のそれに転換していっている [10]。したがって、再加熱 (Reheating) 終了前の、Inflaton の coherent oscillation の時期にも高温のプラズマが存在する可能性がある。以下に見るように、実はこの時期に宇宙は最高温度に達することが分かる。後に議論する Afflec-Dine Baryogenesis においてこのプラズマが、決定的に重要な役割を果たすことになる。

この時期の宇宙のエネルギー密度は、以下のような微分方程式に従う。

$$\begin{aligned} \dot{\rho_\phi} + 3H\rho_\phi + \Gamma_\phi\rho_\phi &= 0 & (1.30)\\ \dot{\rho_R} + 4H\rho_R &= \Gamma_\phi\rho_\phi & (1.31)\\ H^2 &= \frac{1}{3{M_*}^2}(\rho_\phi + \rho_R) \end{aligned}$$

ここで ρ_ϕ は、inflaton の coherent な振動からの寄与によるエネルギー密度であり、ρ_R は その崩壊によって生じた輻射からの寄与によるエネルギー密度である。M_* は reduced Planck 質量であり、Planck 質量と $M_* = M_P/\sqrt{8}\pi$ の関係がある。

さて、Inflation が時刻 $t = t_0$ に終了したとし、そのときの物理量を下付き添字 0 で表すことにする。Inflation 中のエネルギー密度を V_I とすれば、

$$\begin{aligned} \rho_\phi(t_0) &= V_I\\ \rho_R(t_0) &\simeq 0 \end{aligned}$$

である。さて、

$$H(t_0) > H(t) > \Gamma_\phi \qquad (1.32)$$

の時期は Inflaton の振動のエネルギーが宇宙のエネルギーの支配的な成分となる。この時期に注目していこう。式 (1.30) は、

$$\frac{d}{dt}(R^3\rho_\phi) = -\Gamma_\phi(R^3\rho_\phi)$$

と変形出来るので、容易に

$$\rho_\phi = V_I\left(\frac{R_0}{R}\right)^3\exp(-\Gamma_\phi(t-t_0))$$

と解くことが出来る。従って、式 (1.31) から、

$$\frac{d}{dt}(R^4\rho_R) = R^4\ V_I\ \Gamma_\phi\left(\frac{R_0}{R}\right)^3(1-\Gamma_\phi(t-t_0)+\ldots)$$

と展開出来る。式 (1.32) の時期には、$R \propto t^{2/3}$ と近似でき、更に先の展開式の右辺で第二項目以降を無視する。すると、輻射のエネルギー密度はこの近似が有効な範囲で、次のように積分出来る。

$$\begin{aligned} \rho_R(t) &\simeq \frac{3}{5}\Gamma_\phi V_I t_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3/2}\left(1-\left(\frac{R_0}{R}\right)^{5/2}\right)\\ &= \frac{2\sqrt{3}}{5}\Gamma_\phi {V_I}^{1/2} M_*\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3/2}\left(1-\left(\frac{R_0}{R}\right)^{5/2}\right). \qquad (1.33) \end{aligned}$$

ここで、$H = \Gamma_\phi$ の時点での輻射の温度を再加熱温度 T_R で定義する。

$$T_R = \left(\frac{90}{\pi^2 g_*(T_R)}\right)^{1/4} \sqrt{\Gamma_\phi M_*} \tag{1.34}$$

これを使って前式を書き直せば、

$$\rho_R(t) \simeq \frac{6}{5}\left(\frac{\pi^2 g_*(T_R)}{90}\right)^{1/2} T_R^2 M_* H(t) \left(1 - \left(\frac{R_0}{R(t)}\right)^{5/2}\right) \tag{1.35}$$

従って、$H(t_0) < H \ll \Gamma_\phi$ ならば良い近似で、

$$\begin{aligned} T(t) &\simeq \left(\frac{2}{5}\right)^{1/4} \left(\frac{90}{\pi^2 g_*(T)}\right)^{1/8} (T_R^2 M_* H(t))^{1/4} \\ &\sim (T_R^2 M_* H(t))^{1/4} \end{aligned} \tag{1.36}$$

と書くことが出来る。但し、ここで $g_*(T) \simeq g_*(T_R)$ を用いた。ちなみに、

$$T_{\max} \simeq 0.9 \left(\frac{90}{\pi^2 g_*(T_R)}\right)^{1/8} T_R \left(\frac{V_I^{1/4}}{T_R}\right)^{1/2} \tag{1.37}$$

である。この結果より、仮に再加熱温度を低く抑えても、$(T_R \ll H(t_0))$, それよりかなり高い温度が生じることが分かるであろう。これが後の議論で重要な役割を果たすことになる。

第2章　有限温度系の場の量子論

通常の、すなわち零温度の場の量子論の枠組は、加速器の中でみられるような、真空下での相互作用における物理量の計算に対しては、非常に強力である。しかし、初期宇宙の興味深い現象は、高温高密度のプラズマの中で起こることが少なくない。ここでは、通常の場の量子論の枠組は用いることが出来ず、熱浴に存在する粒子達からの、統計的な相互作用を取り込める枠組で置き換えられなければならない。このような枠組を『有限温度系の場の量子論』、あるいは『熱場の量子論』と呼ぶ。

有限温度系の場の量子論の体系は、大きく分けて "Imaginary time formalism" と "Real time formalism" の 2 つが存在する。これらは、相関関数を計算する際の時間 (複素空間上に拡張される) に関する path の取り方に違いがあることに依っている。簡単に言うと前者は単に虚軸と平行な path をとるもので、後者は実軸も含んだ path をとるものである。それぞれに長所と短所があるが、一言で言うと次のようになるだろう。

Imaginary time formalism は、実時間成分が消えてしまうため、基本的に平衡系、あるいは近似的に平衡系として扱って良い場合にしか適用できない。しかし、計算は後者に比べるとずっと単純になる。

一方、Real time formalism は、計算はずっと複雑になるが、陽に実時間成分を残せるため、有限の時間間隔中での物理量の変化が計算可能で、平衡系にも非平衡系にも応用可能である [16]。

この節では、Imaginary time formalism を用いて、有効ポテンシャルが計算出来るようになることが目標である。時間と能力上の制限により、この修論では Real time formalism には触れない。有限温度系の詳細については、[12, 13, 14] を参照のこと。

2.1　零温度系の復習

有限温度の場の量子論の有効ポテンシャルの計算に移る前に、零温度の場合の有効作用と有効ポテンシャルの定義や、One Loop Order における具体的な計算方法を見ておこう。これによって、有限温度における計算がずっと容易になる [13][15]。有効作用の重要性は、特に対称性の破れなどにおいて際だつが、有限温度系では、特に高温において、非常に重要になり、その計算方法を学ぶことが、初期宇宙の理解に欠かせないものとなる。

2.1.1　生成汎関数

種々の生成汎関数と有効作用の定義をここで思い出しておこう。Dirac 場等を含む場合にも使えるように、式 (2.7) までは、微分の方向を陽に書いておいた。特に指定がない場合は左微分と思っておくことにする。

作用は

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}\{\phi(x)\} \tag{2.1}$$

で与えられ、Green 関数の生成汎関数は、

$$Z[J] = \langle 0_{out}|0_{in}\rangle_J \equiv \int d\phi \, \exp\{i(S[\phi] + J\phi)\} \tag{2.2}$$

で定義される。但しここで、

$$J \, \phi \equiv \int d^4x \, J(x) \, \phi(x)$$

である。添字を省略しているが、ϕ は多成分で良い。この $Z[J]$ と連結 Green 関数の生成汎関数 $W[J]$ は、以下の関係にある。

$$Z[J] = \exp\{i \, W[J]\}. \tag{2.3}$$

有効作用は、式 (2.3) を Legendre 変換したものであり、

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - \int d^4x J(x) \, \varphi(x) \tag{2.4}$$

と表される。ここで、

$$\varphi(x) = \frac{\vec{\delta} W[J]}{\delta J(x)} \tag{2.5}$$

である。$W[J]$ や $\Gamma[\varphi]$ が、それぞれ連結 Green 関数、一粒子既約 (1PI) な Green 関数の生成汎関数である証明は [15] が詳しい。式 (2.4, 2.5) より、

$$\frac{\overleftarrow{\delta} \, \Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = -J(x) \tag{2.6}$$

が得られ、よって、

$$\left.\frac{\overleftarrow{\delta} \, \Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)}\right|_{J=0} = 0 \tag{2.7}$$

である。これは、量子論的な情報をすべて含んでおり、かつ、形は Γ を S に置き換えれば古典的な運動方程式と同じである。これが有効作用と呼ばれる結縁である。

さて、scalar 場の場合にもうすこし詳しく見ていこう。有効作用 $\Gamma[\varphi]$ を φ で展開しよう。

$$\Gamma[\varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!} \int d^4x_1 \ldots d^4x_n \, \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n) \Gamma^{(n)}(x_1 \ldots x_n) \tag{2.8}$$

となり、$\Gamma^{(n)}$ は、一粒子既約な n 点 Green 関数である。更に Fourier 変換した形でも表しておこう。

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n)}(x_1 \ldots x_n) &= \int \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{d^4p_i}{(2\pi)^4} \exp(i \, p_i x_i) \right] (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \ldots + p_n) \Gamma^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) \\ \tilde{\varphi}(p) &= \int d^4x \, \exp(-i \, p \, x) \varphi(x) \end{aligned} \tag{2.9}$$

これらを式 (2.8) に代入すると、

$$\Gamma[\varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} \int \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{d^4p_i}{(2\pi)^4} \, \tilde{\varphi}(-p_i) \right] (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \ldots + p_n) \Gamma^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) \tag{2.10}$$

と表せることが分かる。
　特に、並進対称性のある理論については

$$\varphi(x) = \varphi_c \propto \text{const} \tag{2.11}$$

と表して良いので、

$$\Gamma[\varphi_c] = -\int d^4x V_{eff}(\varphi_c) \tag{2.12}$$

によって、φ の関数である有効ポテンシャルが定義される。

$$\delta^4(p) = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \exp(-i\ p\ x)$$

であるから、式 (2.11, 2.12) より、

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_c(p) &= (2\pi)^4 \varphi_c\ \delta^4(p) \\ \Gamma(\varphi_c) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \varphi_c^n (2\pi)^4 \delta^4(0) \Gamma^{(n)}(all\ p_i = 0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Gamma^{(n)}(p_i = 0) \int d^4x \end{aligned} \tag{2.13}$$

したがって、式 (2.12, 2.13) を比較することによって

$$V_{eff}(\varphi_c) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\ \Gamma^{(n)}(p_i = 0) \tag{2.14}$$

を得ることが出来る。これを見ると、$V_{eff}(\varphi_c)$ は、$-\Gamma(\{p_i\} = 0)$ の生成汎関数とも呼べることが分かる。また、空間の依存性を残しておくと、例えば以下のように、モーメンタムで展開できる。

$$\Gamma(\varphi) = \int d^4x \left[-V_{eff}(\varphi) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi(x))^2 Z(\varphi) + \ldots \right] \tag{2.15}$$

2.1.2　One Loop 有効ポテンシャル (零温度)

　ここでは、まず系統的に、 One Loop Order での、零温度における有効ポテンシャルの計算方法を見た後で、一度 ファインマン図形を使って explicit に計算しておく。これによって、次節で有限温度におけるファインマンルールや経路積分形式を学べば、すぐに有限温度における有効ポテンシャルの計算に一般化出来る。

(1){ 系統的アプローチ }
　まず、φ がソース J の存在下での古典的な運動方程式の解であるとする。

$$\left. \frac{\delta S_J[\phi]}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi=\varphi} = 0 \tag{2.16}$$

$$\text{where}\ \ S_J[\phi] = \int d^4x\ \mathcal{L}\{\phi(x)\} + J \tag{2.17}$$

そして、この古典解まわりに場 ϕ を展開する。

$$\phi(x) = \varphi(x) + \chi(x) \tag{2.18}$$

これに対応して、古典作用も展開する。

$$\begin{aligned} S_J[\phi] &= S_J[\varphi + \chi] \\ &= S_J[\varphi] + \int d^4x\ \chi_i(x)\ \frac{\vec{\delta} S_J}{\delta\phi_i(x)}\bigg|_{\phi=\varphi} \\ &+ \int d^4x\ d^4y\ \chi_i(x)\ \frac{\vec{\delta}}{\delta\phi_i(x)} S_J \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi_j(y)}\bigg|_{\phi=\varphi} \chi_j(y) + \ldots \end{aligned} \tag{2.19}$$

ここで二項目は、運動方程式 (2.16) によって落ちる。したがって、この次数までの近似においては、生成汎関数 Z が以下のように計算される。

$$\begin{aligned} Z[J] &= \exp(iW[J]) \\ &= \int d\chi\ \exp\{i\ S_J[\varphi + \chi]\} \\ &= e^{i\ S_J[\varphi]} \int d\chi\ \exp\{i \int d^4x\ d^4y\ \chi_i(x) S_{i,j} \chi_j(y) + \ldots\} \\ &= \mathrm{e}^{i\ S_J[\varphi]}\ [\mathrm{Det}\ S_{i,j}]^{\eta} \end{aligned} \tag{2.20}$$

where

$$\begin{aligned} \eta &= \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{for Boson} \\ 1 & \text{for Fermion} \end{cases} \\ S_{i,j} &= \frac{\vec{\delta}}{\delta\phi_i(x)} S \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi_j(y)}\bigg|_{\phi=\varphi} \end{aligned} \tag{2.21}$$

但し、式 (2.21) において、S_J が、J に対して一次であることを使った。したがって、

$$W[J] = S_J[\varphi] - i\ \eta\ \mathrm{Tr}\ \ln(S_{i,j}) \tag{2.22}$$

である。有効作用を求めるにはもう少し変形が必要である。求めるべき真空の場の配位 φ_c を古典的な解のまわりで展開する。

$$\varphi_c = \varphi + \varphi_1 + \ldots$$

この式と式 (2.16)、式 (2.17) より、

$$\begin{aligned} S[\varphi_c] &= S[\varphi + \varphi_1 + \ldots] \\ &= S[\varphi] + \int d^4x\ \frac{\overleftarrow{\delta}\ S[\phi]}{\delta\phi}\bigg|_{\phi=\varphi} \varphi_1 + \ldots \\ &= S[\varphi] - \int d^4x\ J(x)\varphi_1(x) + \ldots \end{aligned} \tag{2.23}$$

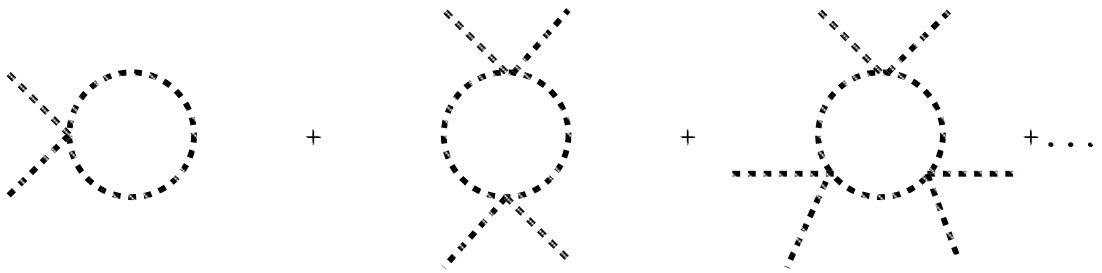


図 2.1: scalar 場の One Loop 有効ポテンシャルへの寄与

である。これと式 (2.4), 式 (2.22) より、One Loop Order までは

$$\begin{aligned}
\Gamma[\varphi_c] &= W[J] - \int d^4x\ J(x)\varphi_c(x) \\
&= S_J[\varphi] - i\,\eta\ \mathrm{Tr}\ \ln(S_{i,j}) - \int d^4x\ J(x)(\varphi+\varphi_1) \\
&= S[\varphi] - \int J\ \varphi_1 - i\,\eta\ \mathrm{Tr}\ \ln(S_{i,j}) \\
&= S[\varphi_c] - i\,\eta\ \mathrm{Tr}\ \ln(S_{i,j}) \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

したがって、並進不変な場合は、

$$V_{eff} = V_0(\varphi_c) + \frac{i\,\eta}{\Omega}\ \mathrm{Tr}\ \ln(S_{i,j}) \qquad (2.25)$$

と、有効ポテンシャルが求められる。但し、ここで Ω は 4 次元体積である。

(2){explicit な計算 }
1),(scalar 場)
簡単化のため、次のようなラグランジアンを考えよう。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - V(\phi) \qquad (2.26)$$

ここで、ポテンシャルは

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{4!}\phi^4 \qquad (2.27)$$

One Loop で計算しないと行けないグラフは、図 (2.1) で与えられる。
第 n 番目のグラフは次の様な成分をもつ。

$$\begin{aligned}
&\text{propagator} \to \frac{(i)^n}{(p^2-m^2)^n} \\
&\text{external lines} \to \varphi_c^{2n} \\
&\text{vertices} \to (\frac{-i\,\lambda}{2})^n \\
&\text{symmetric factor} \to \frac{1}{2n} \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

したがって、有効ポテンシャルを

$$V_{eff}(\varphi_c) = V_0(\varphi_c) + V_1(\varphi_c)$$

と展開するならば、

$$\begin{aligned} -i\,V_1(\varphi_c) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{2n}\,\frac{(\lambda\varphi_c^2/2)}{[p^2-m^2+i\,\epsilon]^n} \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ln\left[1-\frac{\lambda\varphi_c^2/2}{p^2-m^2+i\,\epsilon}\right] \\ &= -\frac{i}{2}\int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4}\ln\left[1+\frac{\lambda\varphi_c^2/2}{p_E^2+m^2+i\,\epsilon}\right] \\ &= -\frac{i}{2}\int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4}\,\ln[p_E^2+M^2(\varphi_c)]+\ldots \qquad (2.29) \\ &\quad \text{where } M^2(\varphi_c) = m^2+\lambda\varphi_c^2/2 \end{aligned}$$

但し、三段目で Wick 回転を行った。また、... は場によらない項である。従って、

$$V_1(\varphi_c) = \frac{1}{2}\int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4}\ln\,[p_E^2+M^2(\varphi_c)] \qquad (2.30)$$

と有効ポテンシャルが求まる。正則化については次節でふれる。

場が複数の場合にも容易に一般化できる。同様の計算により、次のように有効ポテンシャルを求めることが出来る。

$$V_1(\varphi_c) = \frac{1}{2}\,Tr\int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4}\ln\,[p_E^2+M^2_{S\,(a,b)}(\varphi_c)] \qquad (2.31)$$

$$\text{where} \qquad M^2_{S\,(a,b)}(\phi) = \begin{cases} \frac{\partial^2 V_0}{\partial\phi_a\partial\phi_b} & \text{for real scalars} \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V_0}{\partial\phi_a^\dagger\partial\phi_b} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial\phi_a^\dagger\partial\phi_b^\dagger} \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial\phi_a\partial\phi_b} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial\phi_a\partial\phi_b^\dagger} \end{bmatrix} & \text{for complex scalars .} \end{cases} \qquad (2.32)$$

これは (1) の結果と明らかに同じである。

2),(Fermion 場) 次のラグランジアンを考える。

$$\mathcal{L} = i\,\bar\Psi_a\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_a - \bar\Psi_a M_{F\,(a,b)}(\varphi_c)\Psi_b \qquad (2.33)$$

計算するべき One Loop Order のグラフは図 (2.2) で与えられる。

γ 行列を奇数個含むようなトレースは消えるので、外線の数は常に偶数である。第 n 番目のグラフは次の要素を含む。

$$\begin{aligned} &\text{propagator} \to \left(\frac{i}{\not p+i\,\epsilon}\right)^{2n} = \frac{(i\not p)^{2n}}{[p^2+i\,\epsilon]^{2n}} \\ &\text{vertices} \to (-i)^{2n}\ \text{Tr}\ [(M_F^\dagger M_F)^n] \\ &\text{symmetric factor} \to -\frac{1}{2n} \qquad (2.34) \end{aligned}$$

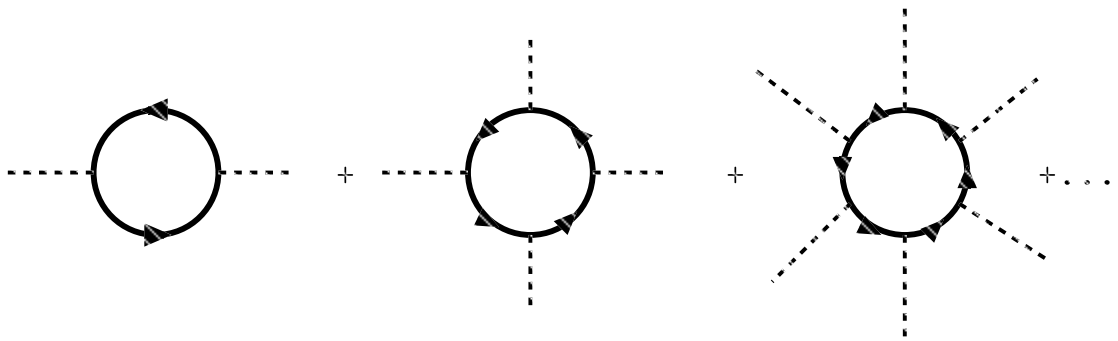


図 2.2: Fermion 場からの One Loop 有効ポテンシャルへの寄与

したがって、

$$\begin{aligned} -i\,V_1(\varphi_c) &= -\sum_{n=1}^{\infty}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{2n}\,\frac{\mathrm{tr}(p^{2n}\,\mathbf{1})}{[p^2+i\,\epsilon]^{2n}}\mathrm{Tr}\,((M_F^\dagger M_F)^n) \\ &= \mathrm{Tr}(\mathbf{1})\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ln\left[1-\frac{M_F^\dagger M_F}{p^2}\right] \\ &= \mathrm{tr}(\mathbf{1})\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ln\left[p^2-M_F^\dagger M_F\right]+\ldots \\ &= \mathrm{tr}(\mathbf{1})\frac{i}{2}\,\mathrm{Tr}\int\frac{d^4p_E}{(2\pi)^4}\ln\left[p_E^2+M_F^\dagger M_F\right]+\ldots \end{aligned} \tag{2.35}$$

ここで三段目で Wick 回転を行った。また、Weyl Fermion の場合には、γ 行列をσ 行列で置き換えれば全く同じ計算である。したがって、

$$\mathrm{tr}(\mathbf{1}) = \begin{cases} 4 & \text{for Dirac} \\ 2 & \text{for Weyl} \end{cases} \tag{2.36}$$

以上より、Fermion からの有効ポテンシャルへの寄与は、

$$\begin{aligned} V_1(\varphi) &= -\frac{1}{2}g_f\,\mathrm{Tr}\int\frac{d^4p_E}{(2\pi)^4}\ln[p_E^2+M_F^\dagger M_F] \\ \text{where}\qquad g_f &= \begin{cases} 4 & \text{for Dirac} \\ 2 & \text{for Weyl} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.37}$$

と求められる。これも (1) と当然同じ結果になっている。但し、後ほど、Dimensional Reduction を行って正則化することを念頭におきγ 行列のトレースは 4 次元で先に計算を実行しておいた。

3),(Gauge 場)

次の様なラグランジアンを考えよう。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\{(D_\mu\varphi_{c\,a})(D^\mu\varphi_{c\,b})\}+\ldots \\ &= -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})+\frac{1}{2}M^2_{GB\ (a,b)}(\varphi_c)A^a_\mu A^{\mu\,b}+\ldots \end{aligned}$$

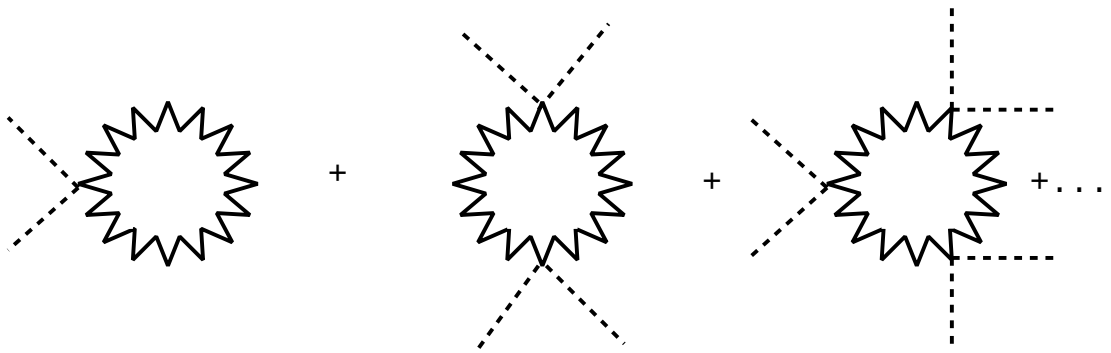


図 2.3: Gauge 場の One Loop 有効ポテンシャルへの寄与

$$\text{where} \qquad M^2_{GB\,(a,b)} = \frac{\partial^2 V_0}{\partial A^a_\mu \partial A^{b\,\mu}} \tag{2.38}$$

計算を簡単にするため、Landau ゲージで考える。そこでは、propagator は以下で与えれる。

$$\begin{aligned} \Pi^\mu_\nu &= -\frac{i}{p^2 + i\,\epsilon}\,\triangle^\mu_\nu \\ \triangle^\mu_\nu &= g^\mu_\nu - \frac{p^\mu p_\nu}{p^2} \end{aligned} \tag{2.39}$$

但し、$\triangle^n = \triangle$ である。計算するべきグラフは (2.3) で与えられる。
　第 n 番目のグラフは次の成分よりなる。

$$\begin{aligned} &\text{propagator} \to \frac{(-i)^n}{[p^2 + i\,\epsilon]^n}\,\mathrm{Tr}(\triangle) \\ &\text{vertices} \to (i)^n Tr[(M^2_{GB})^n(\varphi_c)] \\ &\text{symmetric factor} \to \frac{1}{2n} \end{aligned} \tag{2.40}$$

従って、有効ポテンシャルへの寄与は、

$$\begin{aligned} -i\,V_1(\varphi_c) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{2n}\,\frac{\mathrm{Tr}[(M^2_{GB})^n(\varphi_c)]}{[p^2 + i\,\epsilon]^n}\,\mathrm{tr}(\triangle) \\ &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln\left[1 - \frac{M^2_{GB}}{p^2 + i\,\epsilon}\right]\,\mathrm{tr}(\triangle) \\ &= -\frac{i}{2}\mathrm{tr}(\triangle)\,\mathrm{Tr}\int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \ln[p^2_E + M^2_{GB}] + \ldots \end{aligned} \tag{2.41}$$

また ... は以前同様、場に依らない項である。したがって、有効ポテンシャルへの Gauge 場の寄与は、

$$V_1(\varphi_c) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\triangle)\,\mathrm{Tr}\int \frac{d^4p_E}{(2\pi_E)^4} \ln[p^2_E + M^2_{GB}] \ldots \tag{2.42}$$

と求められる。ここでも、Dimensional Reduction によって正則化を行うものとすれば、$\mathrm{tr}(\triangle) = 3$ としておいて良い。

{One Loop 有効ポテンシャルのまとめ }

以上の結果をまとめておこう。有効ポテンシャルへの Scalar 場 、Fermion 場、Gauge 場の寄与を合わせると、正則化をおこなう前の形として以下が得られる。

$$
\begin{aligned}
V(\varphi_c) = V_0(\varphi_c) \quad + \quad \mathrm{Tr} & \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}\int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4}\ln[p_E^2 + M_S^2] \\ \\ -\frac{1}{2}\, g_f \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4}\ln[p_E^2 + M_F^\dagger M_F] \\ \\ +\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\triangle) \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4}\ln[p_E^2 + M_{GB}^2] \end{array} \right] \\
\text{where} \quad M^2_{S\,(a,b)} \quad = & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 V_0}{\partial\phi_a \partial\phi_b} & \text{for real scalars} \\ \\ \left[\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 V_0}{\partial\phi_a^\dagger \partial\phi_b} & \dfrac{\partial^2 V_0}{\partial\phi_a^\dagger \partial\phi_b^\dagger} \\ \dfrac{\partial^2 V_0}{\partial\phi_a \partial\phi_b} & \dfrac{\partial^2 V_0}{\partial\phi_a \partial\phi_b^\dagger} \end{array} \right] & \text{for complex scalars} \end{array} \right. \\
\text{where} \quad M_{F\,(a,b)} \quad = & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 V_0}{\partial\bar{\Psi}_a \partial\Psi_b} & \text{for Dirac Fermions} \\ \\ \dfrac{\partial^2 V_0}{\partial\psi_a \partial\psi_b} & \text{for Weyl Fermions} \end{array} \right. \\
\text{where} \quad M^2_{GB\,(a,b)} \quad = & \quad \frac{\partial^2 V_0}{\partial A^a_\mu \partial A^{b\,\mu}} \quad .
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

(3),{ 正則化 }

ここでは、Dimensional Reduction によるものを考えることにする。これは、次元正則化の $\overline{MS}$ をスカラーの成分に対してのみ行い、γ 行列やベクターの次元をかえないものだ。今必要なのは、以下の積分の計算である。

$$
V_1(\varphi_c) = \frac{1}{2}(\mu^2)^{2-n/2}\int \frac{d^np}{(2\pi)^n}\ln[p^2 + m^2(\varphi_c)] \tag{2.44}
$$

である。但し、p はユークリッド化してあり、場に依存しない項は省略してあるため、見た目、ln の中身の次元があってないが、以下の議論に影響しないのでそのままにしておく。このような積分の公式は、種々のテキストに載っているので、ここでは、結果をあげるにとどめる。$\epsilon \equiv 2 - n/2$ としたとき、式 (2.44) は、

$$
\begin{aligned}
V_1(\varphi_c) \quad &= \quad \frac{1}{64\pi^2}\, m^4(\varphi_c)\left[-C_{UV} + \ln\left[\frac{m^2(\varphi_c)}{\mu^2}\right] - \frac{3}{2} + O(\epsilon)\right] \\
\text{where} \qquad C_{UV} \quad &= \quad \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi)\right)
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

ここで γ_E は、オイラー定数である。

したがって、$\overline{DR}$ で正則化された有効ポテンシャルは、One Loop Order で最終的に以下の形にまとめることが出来る。

$$\begin{aligned} V(\varphi_c) = V_0(\varphi_c) \quad &+ \quad \mathrm{Tr}\,[\ \frac{1}{64\pi^2} M_S^4 \left(\ln \frac{M_S^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) \\ &- \quad \frac{1}{64\pi^2}\ g_f\ (M_F^\dagger M_F)^2 \left(\ln \frac{M_F^\dagger M_F}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) \\ &+ \quad \frac{1}{64\pi^2}\ 3\ M_{GB}^4 \left(\ln \frac{M_{GB}^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right)\ ] \end{aligned} \tag{2.46}$$

ここで、μ は繰り込み点であり、種々の 相互作用定数 をどこでどの値に定義するかで決める。例えば GUT スケール にしたりするわけである。勿論 One Loop の展開を良くするには考えているエネルギースケール付近に取り、展開の中心となる相互作用定数は定義点からそこまで繰り込み群で走らせてきておく。繰り込み点を決めると、有効相互作用定数はそのエネルギースケールにともなって変化する。今は、真空に対するつまり、場 ϕ の零モードに対する有効ポテンシャルを求めているわけである。よって、外線が運動量を運んでいないためエネルギースケールは Loop まわる粒子の有効質量になり、これは ϕ の期待値に依るわけである。さて、こう考えてくると温度が有効質量を充分超える場合は、エネルギースケールは φ_c ではなく、温度 T で与えられることになりそうであることが分かる。これについては、次の節で具体的に確かめることになるだろう。

2.2 有限温度系の場の量子論

いよいよ、有限温度の場の量子論の議論にはいる。ここでは、Imaginary time formalism について, 特に、有効ポテンシャルの計算の仕方について詳しく見ていく。[12],[13],[16] 等が詳しい。

2.2.1 Ensembles、期待値

熱統計力学では、物理量はそれが属する熱浴中での期待値であらわされる。この熱浴、つまり期待値をとるべき母集合は、その性質によって、次の 3 つの集合に分かれる。

1),{micro canonical ensemble (小正準集合)}
エネルギー E、体積 V、粒子数 N が固定された系。

2),{canonical ensemble (正準集合)}
粒子数 N、体積 V、温度 T は固定されているが、エネルギー E を熱浴との間で交換できる系。

3),{grand canonical ensemble (大正準集合)}
体積 V、温度 T、化学ポテンシャル μ は固定されているが、エネルギー、粒子数は熱浴との間で交換出来る系。

宇宙初期の様な高温の状態では、粒子は絶えず対生成、対消滅を繰り返している。したがって、大

正準集合で扱うのが適当である。この集合下では、以下のような密度演算子によって、熱統計力学的な期待値が定義される。

$$\hat{\rho} = \exp[-\beta(\hat{H} - \mu_i \hat{Q}_i)] \tag{2.47}$$

ここで β, μ, Q はそれぞれ、$1/T$, 化学ポテンシャル、Charge である。この演算子を用いて、演算子 $\hat{A}$ の熱統計力学的期待値は、

$$\langle A \rangle \equiv \frac{\mathrm{Tr}\ \hat{A}\,\hat{\rho}}{\mathrm{Tr}\ \hat{\rho}} \tag{2.48}$$

と定義される。したがって分配関数 (相関関数の生成汎関数) は、

$$Z = \mathrm{Tr}\ \hat{\rho} \tag{2.49}$$

で表される。これから、圧力など種々の物理量が計算できる。このようにして定式化されている熱力学を場の量子論上で定式化することが、この節のテーマである。

2.2.2 生成汎関数

簡単のため化学ポテンシャルを含まない、scalar 場のシステムを例にとって議論しよう。化学ポテンシャルが零でない場合については Q-Ball の有限温度系での振舞を調べるときに詳しく議論する。

さて、Heisenberg 形式では、

$$\phi(x) = e^{i\,t\,H} \phi(0, \vec{x}) e^{-i\,t\,H} \tag{2.50}$$

である。ここで、『時間』t は、複素空間上に解析接続しておく。

有限温度系の n 点相関関数は以下のように定義される。

$$G^C(x_1, \ldots, x_n) \equiv \langle T_C \phi(x_1), \ldots, \phi(x_n) \rangle \tag{2.51}$$

ここで T_C は、複素 t-平面上の経路 C に沿った、順序演算子である。例えば、

$$T_C \phi(x)\phi(y) = \theta_C(x^0 - y^0)\phi(x)\phi(y) + \theta_C(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x) \tag{2.52}$$

である。もし、C を実変数 τ を用いて、$t = z(\tau)$ と parametrize した場合には、T_C は通常の τ に沿った順序付けと同じであり、$\theta_C(t) = \theta(\tau)$, $\delta_C(t) = (\partial z/\partial\tau)^{-1}\delta(\tau)$ となる。生成汎関数は零温度の時と同様に、

$$\begin{aligned} Z[j] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_C d^4x_1 \ldots d^4x_n\ j(x_1)\ldots j(x_n)\ G^C(x_1 \ldots x_n) \\ &= \left\langle T_C \exp\{i \int_C d^4x\ j(x)\phi(x)\} \right\rangle \end{aligned} \tag{2.53}$$

と表され、有効作用等の定義はこれを用いて、全く同じ形で表される。しかし、物理的意味は非自明な点を含む。これについても、Q-Ball の時に具体的に見ることになるだろう。

2.2.3 Green 関数

(1),{scalar 場 }
式 (2.89) より、scalar 場の二点相関関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} G^C(x,y) &= \theta_C(x^0-y^0)G_+(x,y)+\theta_C(y^0-x^0)G_-(x,y) \\ \text{where} & \\ G_+(x,y) &= \langle\phi(x)\phi(y)\rangle\,, \qquad\qquad G_-(x,y)=G_+(y,x) \end{aligned} \tag{2.54}$$

今、一般的な経路 C を考えているが、相関関数が解析的であることを要求すると、任意の経路が許されるわけではない。その制限について見てみよう。$\vec{x}=\vec{y}=0$ において

$$\begin{aligned} G_+(x^0,y^0) &= \left\langle\phi(x^0)\phi(y^0)\right\rangle \\ &= \frac{1}{Z}\mathrm{Tr}\left[\phi(x^0)\phi(y^0)e^{-\beta\,\hat{H}}\right] \\ &= \frac{1}{Z}\sum_{m,n}\exp(i\,E_m(x^0-y^0+i\,\beta))\exp(-i\,E_n(x^0-y^0))\;|\langle m|\phi(0)|n\rangle|^2 \end{aligned} \tag{2.55}$$

と展開できるが、これが発散しないためには、m に対する和と n に対する和に関する条件から、

$$-\beta \le \mathrm{Im}(x^0-y^0) \le 0 \tag{2.56}$$

が得られる。また、式 (2.54) より $\mathrm{Im}(x^0-y^0)>0$ では、$\theta_C(x^0-y^0)=0$ が要求される。全く同様にして、$G_-(x^0,y^0)$ の項より、

$$\begin{aligned} 0 \le \mathrm{Im}(x^0-y0) \le \beta & \\ \theta_C(y^0-x^0)=0 \qquad \text{if} \qquad \mathrm{Im}(x^0-y^0)<0 & \end{aligned} \tag{2.57}$$

が得られる。よって最終的に完全な二点相関関数の収束性には、

$$\begin{aligned} -\beta \le \mathrm{Im}(x^0-y^0) \le \beta & \\ \theta_C(t)=0 \qquad \text{for} \qquad \mathrm{Im}(t)>0 & \end{aligned} \tag{2.58}$$

が必要であることが分かった。

さて、ここで非常に重要な周期境界条件 (Kubo-Martin-Schwinger relation) を導いておこう。Tr のサイクリック条件より容易に

$$G_+(t-i\,\beta,\vec{x}) = G_-(t,\vec{x}) \tag{2.59}$$

が得られる。θ_C の条件より、salar 場の相関関数には、周期 β の周期境界条件がついていることがわかる。それは、$\phi(-i\beta,\vec{x})=\phi(0,\vec{x})$ を意味する。

さて、自由 scalar 場に対して実際に二点相関関数を計算してみよう。良く知られているように、自由 scalar 場は次のように展開される。

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}(2\omega_p)^{1/2}}\left[a(p)e^{-ipx}+a^\dagger(p)e^{ipx}\right] \\ \text{where} \qquad \omega_p &= \sqrt{\vec{p}^2+m^2} \end{aligned} \tag{2.60}$$

また、場と生成消滅演算子の交換関係は以下で与えられる。

$$\begin{aligned}\left[\phi(t,\vec{x}),\dot{\phi}(t,\vec{y})\right] &= i\,\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\ \left[a(p),a^\dagger(k)\right] &= \delta^3(\vec{p}-\vec{k}).\end{aligned} \tag{2.61}$$

さて、ここで

$$\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta\hat{H}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\beta\omega n}=\frac{1}{1-e^{-\beta\omega}}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\left\langle a^\dagger a\right\rangle &= \frac{\mathrm{Tr}\left(a^\dagger a\,e^{-\beta\hat{H}}\right)}{\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta\hat{H}}\right)} \\ &= \frac{e^{-\beta\omega}}{1-e^{-\beta\omega}} \\ &= \frac{1}{e^{\beta\omega}-1}\equiv n_B(\omega)\end{aligned} \tag{2.62}$$

よって、

$$\begin{aligned}\left\langle a^\dagger(p)a(k)\right\rangle &= n_B(\omega_p)\delta^3(\vec{p}-\vec{k}) \\ \left\langle a(p)a^\dagger(k)\right\rangle &= \left[1+n_B(\omega_p)\right]\delta^3(\vec{p}-\vec{k})\end{aligned} \tag{2.63}$$

である。勿論この式は、直接式 (2.61) を利用しても導ける。これから、相関関数を計算出来る。

$$\begin{aligned}G_+(x,y) &= \langle\phi(x)\phi(y)\rangle \\ &= \int\frac{d^3p\,d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2(\omega_p\omega_k)^{1/2}}\left(\left\langle a(p)a^\dagger(k)\right\rangle\,\mathrm{e}^{-i(px-ky)}+\left\langle a^\dagger(p)a(k)\right\rangle\,\mathrm{e}^{i(px-ky)}\right)\delta^3(\vec{p}-\vec{k}) \\ \text{where}\qquad & p^0=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}\qquad\text{then} \\ &= \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\delta((p^0)^2-\omega_p^2)\theta(p^0)\left[(1+n_B(\omega_p))\mathrm{e}^{-i\,p\,(x-y)}+n_B(\omega_p)\mathrm{e}^{i\,p\,(x-y)}\right] \\ &= \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\delta(p^2-m^2)\left[\theta(p^0)(1+n_B(p^0))+\theta(-p^0)n_B(-p^0)\right]\mathrm{e}^{-i\,p(x-y)}\end{aligned} \tag{2.64}$$

これと、式 (2.54) を用いれば、

$$\begin{aligned}G^C(x,y) &= \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\delta(p^2-m^2) \\ &\times\left\{\begin{array}{cc}\theta_C(x^0-y^0)\left[\theta(p^0)(1+n_B(p^0))+\theta(-p^0)n_B(-p^0)\right] \\ +\quad(1-\theta_C(x^0-y^0))\left[\theta(-p^0)(1+n_B(-p^0))+\theta(p^0)n_B(p^0)\right]\end{array}\right\}\mathrm{e}^{-i\,p\,(x-y)}\end{aligned} \tag{2.65}$$

この式と、$1+n_B(-p^0)=-n_B(p^0)$ を用いると、以下のように自由 scalar 場の二点相関関数が求められる。

$$G^C(x,y) = \int\frac{d^4p}{(2\pi^4)}\rho(p)\mathrm{e}^{-i\,p(x-y)}\left[\theta_C(x^0-y^0)+n_B(p^0)\right].$$

$$\text{where} \quad \rho(p) \;=\; 2\pi\left(\theta(p^0)-\theta(-p^0)\right)\delta(p^2-m^2) \tag{2.66}$$

(2),{Dirac 場 }

同様にして、Dirac 場の二点相関関数を求める。まず、二点相関関数は以下のように定義される。

$$\begin{aligned} S^C_{\alpha,\beta}(x,y) &\equiv \left\langle T_C\psi_\alpha(x)\overline{\psi}_\beta(x)\right\rangle \\ &= \theta_C(x^0-y^0)\left\langle\psi_\alpha(x)\overline{\psi}_\beta(y)\right\rangle - \theta_C(y^0-x^0)\left\langle\overline{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x)\right\rangle \\ &\equiv \theta_C(x^0-y^0)S^+_{\alpha,\beta}(x,y) - \theta_C(y^0-x^0)S^-_{\alpha,\beta}(x,y) \end{aligned} \tag{2.67}$$

収束性等の議論は以前と同様である。

ここでも非常に重要な KMS relation を導いておこう。Tr の性質と Dirac 場の反交換性を使って、

$$\begin{aligned} S^+_{\alpha,\beta}(t-i\beta,\vec{x}) &= \mathrm{Tr}\left[\psi_\alpha(t-i\beta)\overline{\psi}_\beta(\vec{x})e^{-\beta\hat{H}}\right] \\ &= \mathrm{Tr}\left[\psi_\alpha(t)e^{-\beta\hat{H}}\,\overline{\psi}_\beta(\vec{x})\right] \\ &= -S^-_{\alpha,\beta}(t,\vec{x}) \end{aligned} \tag{2.68}$$

が得られる。これと、式 (2.67)、θ_C の性質を用いれば、

$$S^C_{\alpha,\beta}(t-i\beta,\vec{x}) = -S^C_{\alpha,\beta}(t,\vec{x}) \tag{2.69}$$

が導かれ、したがって $\psi_\alpha(t-i\beta,\vec{x}) = -\psi_\alpha(t,\vec{x})$ と言う重要な関係が得られる。前節の議論と合わせれば、Bosonic,Fermionic 場それぞれに、β を周期として、周期境界、反周期境界条件がついていることが分かる。

さて、自由 Dirac 場は以下の様に展開される。

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}(2\omega_p)^{1/2}}\sum_s\left[a^s_p u^s(p)e^{-ipx} + b^{s\dagger}_p v^s(p)e^{ipx}\right] \\ \overline{\psi}(x) &= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}(2\omega_p)^{1/2}}\sum_s\left[b^s_p \overline{v}^s(p)e^{-ipx} + a^{s\dagger}_p \overline{u}^s(p)e^{ipx}\right] \end{aligned} \tag{2.70}$$

ここで、展開係数は以下の性質をもつ。

$$\begin{aligned} \sum_s u^s(p)\overline{u}^s(p) &= \not{p}+m \\ \sum_s v^s(p)\overline{v}^s(p) &= \not{p}-m \\ \left\langle a^{s\dagger}_p a^r_q\right\rangle &= \delta^3(\vec{p}-\vec{q})\delta_{s,r}n_F(\omega_P) \end{aligned} \tag{2.71}$$

正準交換関係は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} \left\{\psi(t,\vec{x}),\overline{\psi}(t,\vec{y})\right\} &= \gamma^0\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\ \left\{a^s_p, a^{r\dagger}_q\right\} &= \left\{b^s_p, b^{r\dagger}_q\right\} = \delta^3(\vec{p}-\vec{q})\delta_{s,r} \end{aligned} \tag{2.72}$$

これらより、相関関数を計算するわけだが、scalar 場の時と同様に以下の関係式を使うと便利である。

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(e^{-\beta\hat{H}}) &= \sum_{n=0}^{1} = 1 + e^{-\beta\omega}, \qquad \mathrm{Tr}(a^\dagger a e^{-\beta\hat{H}}) = e^{-\beta\omega} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \left\langle a^\dagger a \right\rangle &= \frac{1}{e^{\beta\omega}+1} = n_F(\omega), \qquad \left\langle a a^\dagger \right\rangle = 1 - n_F(\omega) \end{aligned} \tag{2.73}$$

以上より、直接交換関係を使うよりずっと楽に

$$\begin{aligned} \left\langle a_p^{s\dagger} a_q^r \right\rangle &= \delta^3(\vec{p}-\vec{q})\delta_{s,r} n_F(\omega_P) \\ \left\langle a_p^{s} a_q^{r\dagger} \right\rangle &= \delta^3(\vec{p}-\vec{q})\delta_{s,r} \left(1 - n_F(\omega_P)\right) \end{aligned} \tag{2.74}$$

が求められる。ここで $\omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ である。

以上で準備が出来たので、Dirac 場の二点相関関数を求めよう。

$$\begin{aligned} S^+_{\alpha,\beta}(x,y) &= \left\langle \psi_\alpha(x)\overline{\psi}_\beta(y) \right\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p} \left\{ \begin{array}{c} (1-n_F(\omega_p))(\not{p}+m)_{\alpha,\beta}\, e^{-ip(x-y)} \\ +n_F(\omega_p)(\not{p}-m)_{\alpha,\beta}\, e^{ip(x-y)} \end{array} \right\} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(p^2-m^2) \left\{ \begin{array}{c} \theta(p^0)\,(1-n_F(p^0))\,(\not{p}+m)_{\alpha,\beta} \\ -\theta(-p^0)\,n_F(-p^0)\,(\not{p}+m)_{\alpha,\beta} \end{array} \right\} e^{-ip(x-y)} \\ &= (i\not{\partial}+m)_{\alpha,\beta} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(p^2-m^2) \left\{ \theta(p^0)(1-n_F(p^0)) - \theta(-p^0) n_F(-p^0) \right\} e^{-ip(x-y)}. \end{aligned} \tag{2.75}$$

同様にして、

$$\begin{aligned} S^-_{\alpha,\beta}(x,y) &= \left\langle \overline{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x) \right\rangle \\ &= (i\not{\partial}+m)_{\alpha,\beta} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(p^2-m^2) \left\{ \theta(p^0) n_F(p^0) - \theta(-p^0)(1-n_F(-p^0)) \right\} e^{-ip(x-y)} \end{aligned} \tag{2.76}$$

したがって、式 (2.67),(2.75),(2.76) より、Dirac 場の二点相関関数は、以下のようになることが分かる。

$$\begin{aligned} S^C_{\alpha,\beta}(x,y) &= (i\not{\partial}+m)_{\alpha,\beta} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \rho(p) e^{-ip(x-y)} \left[\theta_C(x-y) - n_F(p^0) \right] \end{aligned} \tag{2.77}$$

$$\text{where} \qquad \rho(p) = 2\pi\delta(p^2-m^2) \left[\theta(p^0) - \theta(-p^0) \right]$$

但し、$1 - n_F(-p^0) = n_F(p^0)$ を用いた。

以上の表式は、複素時間 t に対する経路 C を特別に指定していないので、Real time formalism にも Imaginary time formalism にも適用できるものである。

2.2.4 Imaginary time formalism

前節で二点相関関数を計算したが、それは t から $t-i\beta$ までの経路 C によっていた。積分範囲は、以前に求めた二点相関関数の収束性と、KMS 周期条件から示唆される。この経路には種々の取り方があるが、ここではその最も単純なものに対応する、Imaginary time formalism においてその具体的な形を計算し、ファインマン則を導く。これによって有限温度における有効ポテンシャルの導出が出来るようになる。

Imaginary time formalism では、t から $t-i\beta$ まで虚軸に平行な経路、

$$t = -i\tau$$

をとる。したがって、この場合には単純に $\theta_C(-it) = \theta(\tau)$ となる。さて、前節の結果より二点相関関数は、一般に次の形に書ける。

$$\begin{aligned} G(\tau,\vec{x}) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\rho(p)e^{i\vec{p}.\vec{x}-\tau p^0}\left[\theta(\tau)+\eta\, n(p^0)\right] \qquad (2.78)\\ \text{where}\qquad \rho(p) &= 2\pi\delta(p^2-m^2)\left[\theta(p^0)-\theta(-p^0)\right]\\ n(\omega) &= \frac{1}{e^{\beta\omega}-\eta}\\ \eta &= \begin{cases} 1 & \text{for Boson}\\ -1 & \text{for Fermion}\end{cases}\end{aligned}$$

Boson, Fermion それぞれに対応する KMS 周期境界条件より、$G(\tau\pm\beta,\vec{x}) = \eta\, G(\tau,\vec{x})$ であるから、次のようなフーリエ成分で表せる。

$$\tilde{G}(\omega_n,\vec{p}) = \int_0^\beta d\tau \int d^3x\; e^{i\omega_n\tau - i\vec{x}.\vec{p}}\, G(\tau,\vec{x}) \qquad (2.79)$$

ここで、

$$\omega_n = \begin{cases} 2n\pi/\beta \\ (2n+1)\pi/\beta\end{cases} \qquad (2.80)$$

である。それぞれ相関関数の周期、反周期性の結果である。

具体的に形を求めてみる。

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\omega_n,\vec{p}) &= \int_0^\beta d\tau\int d^3x\; e^{i\omega_n\tau-i\vec{p}.\vec{x}}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\rho(k)e^{i\vec{k}.\vec{x}-\tau k^0}\left[\theta(\tau)+\eta n(k^0)\right]\\ &= \int_0^\beta d\tau\;\frac{1}{2\omega_p}\left\{e^{(i\omega_n-\omega_p)\tau}\;\eta\; n(\omega_p) - e^{(i\omega_n+\omega_p)\tau}\;\eta\; n(-\omega_p)\right\}\\ &\quad + \int_0^\beta d\tau\frac{1}{2\omega_p}\left[e^{(i\omega_n-\omega_P)\tau} - e^{(i\omega_n+\omega_p)\tau}\right]\theta(\tau)\\ &= \frac{1}{2\omega_p}\left(\frac{1}{\omega_p - i\omega_n}+\frac{1}{\omega_p+i\omega_n}\right)\\ &= \frac{1}{\omega_n^2+\vec{p}^2+m^2} \qquad (2.81)\end{aligned}$$

したがって、

$$G(\tau,\vec{x}) = i\;\Delta(-i\tau,\vec{x})$$

と propagator を定義すると、

$$\begin{aligned}
\Delta(x) &= \frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,e^{-i\omega_n\tau+i\vec{p}.\vec{x}}\,\frac{-i}{\vec{p}^2+m^2+\omega_n^2} \\
&= \frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,e^{-i\omega_n\tau+i\vec{p}.\vec{x}}\,\frac{i}{p^2-m^2} \qquad (2.82)\\
\text{where}\qquad p^0 &= i\omega_n
\end{aligned}$$

と求められる。

したがって、ファインマン則をまとめておくと、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\text{Boson propagator} \quad &; \quad \frac{i}{p^2-m^2} \qquad ;p^\mu=\{i2n\pi\beta^{-1},\vec{p}\}\\
\text{Fermion propagator} \quad &; \quad \frac{i}{\not{p}-m} \qquad ;p^\mu=\{i(2n+1)\pi\beta^{-1},\vec{p}\}\\
\text{Gauge boson propagator} \quad &; \quad \frac{-i}{p^2}\left(g^\mu_\nu-\frac{p^\mu p_\nu}{p^2}\right) \qquad ;p^\mu=\{i2n\pi\beta^{-1},\vec{p}\}\\
\text{Loop integral} \quad &; \quad \frac{i}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\\
\text{Vertex function} \quad &; \quad -i\beta(2\pi)^3\delta_{\sum\omega_i}\delta^3(\sum_i\vec{p_i})\\
\text{Vertex} \quad &; \quad \text{零温度の場の量子論のものと同じ}
\end{aligned} \qquad (2.83)$$

(但し、Gauge Boson の propagator は Landau gauge に対応するものである。) 結局エネルギーの積分が級数和に変更されるだけである。

ここで、上記の級数和を取るときに非常に便利な方法があるでここにあげておく。まず最初に Boson の場合を考えよう。求めたい級数和は、次の形をしている。

$$\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(p^0=i\omega_n)\qquad\text{where }\ \omega_n=2\pi n\beta^{-1} \qquad (2.84)$$

これを積分形に直すには、ω_n に極をもち、そこでの留数が 1 のものを見つけて、それを重みにして積分すれば良い。したがって、今の場合次のように級数和を書き直せる。

$$\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(p^0=i\omega_n)=\frac{1}{\beta}\int_\gamma\frac{dz}{2\pi i}\,f(z)\frac{\beta}{2}\coth\left(\frac{1}{2}\beta z\right) \qquad (2.85)$$

ここで経路 γ は、図 (2.4) に示すようなものである。この積分経路は次のように変形することができる。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(p^0=i\omega_n) &= \frac{1}{2\pi i\beta}\left(\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon}dz+\int_{i\infty-\epsilon}^{-i\infty-\epsilon}dz\right)\,f(z)\frac{\beta}{2}\coth\left(\frac{\beta}{2}z\right)\\
&= \frac{1}{4\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}dz\,[f(z)+f(-z)]+\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon}dz\,[f(z)+f(-z)]\,n_B(z)
\end{aligned} \qquad (2.86)$$

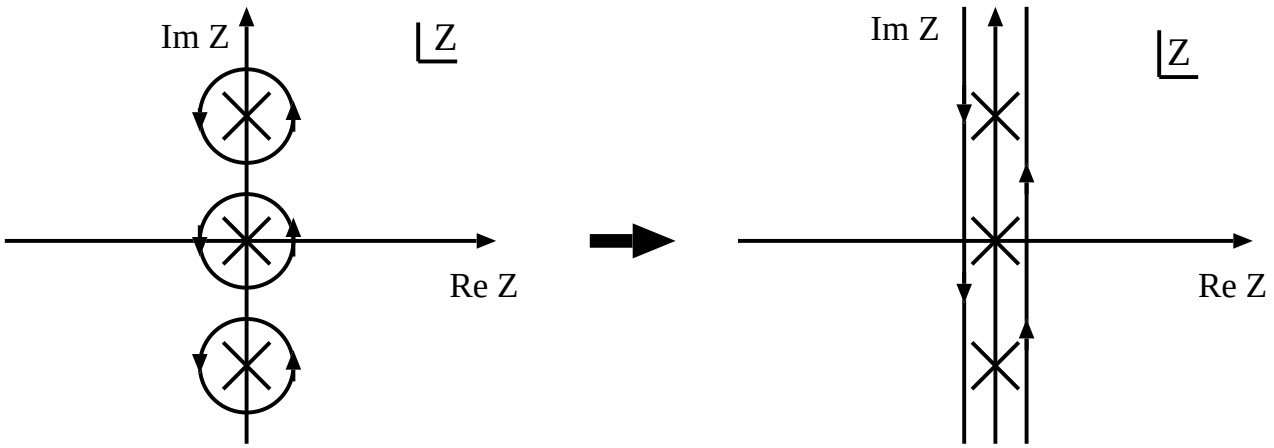


図 2.4: 積分経路 γ とその変形

一項目は温度に依存せず、零温度の場の量子論の計算に対応する部分であり、二項目が温度に依存した統計的効果からの寄与である。

Fermion の場合も極の位置がずれるだけで、同様の計算によって求めることが出来る。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(p^0 = i\omega_n) &= \frac{1}{2\pi i\beta}\int_\gamma dz\, f(z)\frac{\beta}{2}\tanh\left(\frac{\beta}{2}z\right) \\
&= \frac{1}{2\pi i\beta}\left(\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dz + \int_{i\infty-\epsilon}^{-i\infty-\epsilon} dz\right)\, f(z)\frac{\beta}{2}\tanh\left(\frac{\beta}{2}z\right) \\
&= \frac{1}{4\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} dz\,[f(z)+f(-z)] - \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dz\,[f(z)+f(-z)]\, n_F(z) \\
\text{where} \qquad \omega_n &= (2n+1)\beta^{-1}
\end{aligned} \tag{2.87}$$

ここで経路 γ は、先のものと同様で、図 (2.5) に示すようなものだ。以上の公式は、化学ポテンシャルが零のものに使える。化学ポテンシャルが零でないときは、$p^0 \to p^0 - \mu$ の置換をして、積分経路を実軸方向に μ だけずらしてやれば良い [12][14]。この置き換えの意味については、Q-Ball の熱力学のところで詳しく述べる。

2.2.5 有限温度系の有効ポテンシャル

以上の節で有限温度系での有効ポテンシャルを計算するのに必要なすべての道具立てが終了した。以下で具体的に One Loop Order での有効ポテンシャルを計算し、特に高温で支配的な項を求める。3 次元の有効理論を構成した後の高次の補正については、Q-Ball の熱力学を議論する際に、具体的なポテンシャルを用いて議論する (Appendix 参照)。なお、赤外での発散に伴う Resummation 等の微妙な問題については、ここで詳しくは議論しない。文献、[17],[18] 等を参照されたい。

(2),{scalar 場 }

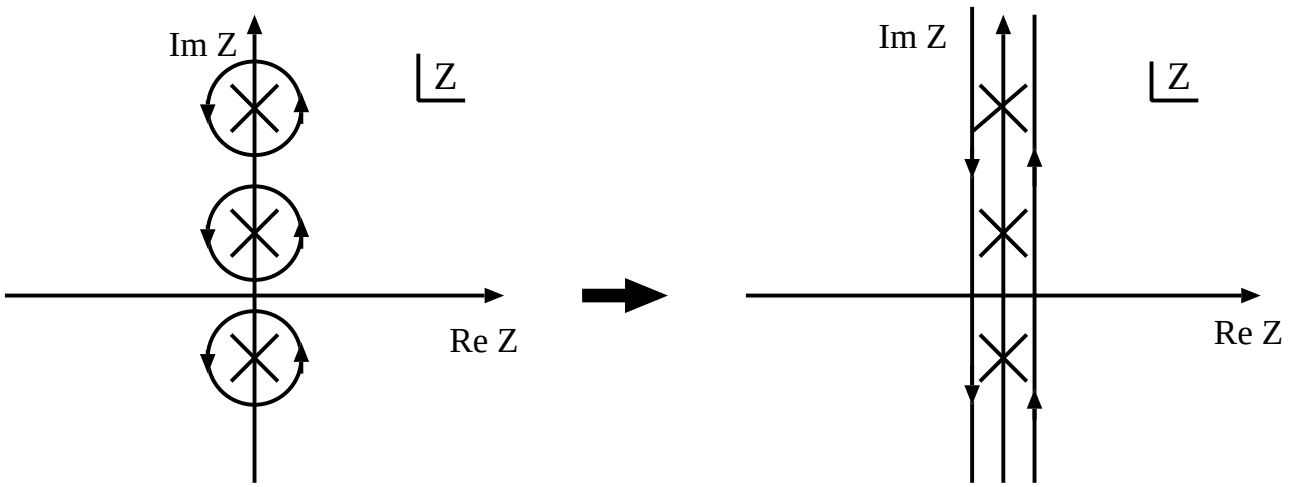


図 2.5: 積分経路 γ とその変形

有限温度における有効ポテンシャルを計算したいわけであるが、計算するべきファインマングラフは全く同じであり、ファインマン則もエネルギー積分を級数和で置き換えるだけであった。したがって、次の計算を行えば良い。

$$\begin{aligned} V_1(\varphi_c) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\frac{1}{\beta}\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\ln\left(\omega_n^2+\vec{p}^2+M_S^2(\varphi_c)\right) \\ \text{where} \qquad \omega_n &= 2\pi n\beta^{-1} \end{aligned} \tag{2.88}$$

ここで級数和 $\sum_n$ は発散しているが、その発散項は場に依存しないので今は興味がない。場に依存した有限項を取り出すには、以下のように計算すればいい。次の量を定義しよう。

$$\begin{aligned} v(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\ln\left(\omega_n^2+\omega^2\right)\ . \\ \text{where} \qquad \omega^2 &= \vec{p}^2+M_S^2 \end{aligned} \tag{2.89}$$

ここで、次の恒等式を用いる。

$$\begin{aligned} f(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y}{y^2+n^2} &= -\frac{1}{2y}+\frac{1}{2}\pi\,\coth(\pi y) \\ &= -\frac{1}{2y}+\frac{\pi}{2}+\pi\frac{e^{-2\pi y}}{1-e^{-2\pi y}} \end{aligned} \tag{2.90}$$

式 (2.89) の場に依存する項を取り出したいので、いちど ω で微分してからもう一度積分する。

$$\frac{\partial v}{\partial\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2\omega}{(2\pi n\beta^{-1})^2+\omega^2} = \pi^{-1}\beta\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{y}{n^2+y^2}$$

$$\begin{aligned} \text{where} \qquad y &= \frac{\beta\omega}{2\pi} \qquad \text{then} \\ &= 2\pi^{-1}\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y}{n^2+y^2}+\frac{\pi^{-1}\beta}{y} \quad = 2\beta\left[\frac{1}{2}+\frac{e^{-\beta\omega}}{1-e^{-\beta\omega}}\right] \end{aligned} \tag{2.91}$$

したがって、式 (2.91) を積分することで、次式をを得る。

$$v(\omega) = 2\beta\left[\frac{\omega}{2}+\frac{1}{\beta}\ln\left(1-e^{-\beta\omega}\right)\right]+\ldots \tag{2.92}$$

ここで、... は場に依らない項である。したがって、式 (2.88) において、興味ある場に依存した項は次の積分形に書ける。

$$V_1(\varphi_c) = \mathrm{Tr}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{\beta}\ln\left(1-e^{-\beta\omega}\right)\right) \tag{2.93}$$

上式 (2.93) において、一項目は、実は零温度のときの有効ポテンシャルに相当する。それを見るために以下の積分を考えてみよう。

$$h(\omega) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2\pi i}\ln\left(-x^2+\omega^2-i\epsilon\right) \tag{2.94}$$

前の計算と同じく ω に依存した項を抜き出したいので、一度 ω で微分する。

$$\frac{\partial h}{\partial\omega} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2\pi i}\frac{2\omega}{-x^2+\omega^2-i\epsilon} = \frac{1}{2} \tag{2.95}$$

最後の等式は、積分経路を上半平面で閉じて留数積分をすれば良い。したがって、

$$h(\omega) = \frac{\omega}{2}+\ldots \tag{2.96}$$

である。ここでも、... は ω に依存しない項である。よって、式 (2.93) の一項目は、次のように書き直せる。

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{-i}{2\pi}dp^0\ln\left(-(p^0)^2+\omega^2-i\epsilon\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\int\frac{d^4p_E}{(2\pi)^4}\ln\left(p_E^2+M_S^2\right). \end{aligned} \tag{2.97}$$

但し、場に依存しない項は無視した。これは、零温度のときの One Loop Order の有効ポテンシャルに他ならない。式 (2.93) の二項目には、以下の等式を使う。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\ln\left(1-e^{-\beta\omega}\right) &= \frac{1}{2\pi^2\beta^4}J_B\left[M_S^2\,\beta^2\right] \\ \text{where} \qquad J_B[m^2\beta^2] &= \int_0^{\infty}dx\,x^2\ln\left[1-e^{-\sqrt{x^2+\beta^2m^2}}\right] \end{aligned} \tag{2.98}$$

積分 J_B は、$T > m$ においては、次のような高温展開の公式が使用できる。

$$\begin{aligned} J_B(m^2/T^2) &= -\frac{\pi^4}{45} + \frac{\pi^2}{12}\frac{m^2}{T^2} - \frac{\pi}{6}\left(\frac{m^2}{T^2}\right)^{3/2} - \frac{1}{32}\frac{m^4}{T^4}\ln\left(\frac{m^2}{a_b T^2}\right) \\ &- 2\pi^{7/2}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{\zeta(2l+1)}{(l+1)!}\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{m^2}{4\pi^2T^2}\right)^{l+2} \end{aligned} \tag{2.99}$$

ここで $a_b = 16\pi^2\exp(3/2 - 2\gamma_E)$ であり、ζ はリーマンの ζ 関数である。結局、有効ポテンシャルへの scalar 場の寄与は以下のようにまとめることが出来る。

$$V_1(\varphi_c) = \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{64\pi^2}M_S^4(\varphi_c)\left(\ln\frac{M_S^2}{\mu^2} - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2\pi^2\beta^4}\,J_B\left[M_S^2\beta^2\right]\right]. \tag{2.100}$$

ここで、(2,1,2 節) の最後の議論について見ておこう。式 (2.99) の第 4 項目は、式 (2.100) とまとめることで、

$$\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{64\pi^2}M_S^4\ln\left(\frac{a_bT^2}{\mu^2}\right)\right] \tag{2.101}$$

となることが分かる。質量など次元をもった量は温度の巾乗の補正を露わに受けるが、無次元量は、エネルギースケールを $\sqrt{a_b}\,T$ としたときの、零温度における繰り込み補正を受けた有効ポテンシャルと、同じ形になるわけである。したがって、One Loop 展開を良くするには、繰り込み点を温度程度に取って、そこまで繰り込み群で走らせた相互作用定数を使うのが良い。これは、Fermion 場にも同様に当てはまる。なお、Bosonic な場からの寄与については、実は上の展開が高温では正しくなくなり、Resummation を行わなくてはならない。詳しい説明はできないが、Dasy グラフという、一粒子既約な 2-Loop daiagram を内部に含まない Ring 状のグラフの寄与を、足しあげないとならない。このとき、式 (2.99) の 3 項目の m^2 を変更しないとならないことが分かっている。この変更の仕方については、この節の最後に簡単な例を用いてまとめておく。この効果は相転移の議論に非常に重要であり、Electroweak Baryogenesis 等の研究において詳しく議論されている。

(2),{Fermion 場 }

同様にして、ファインマン則より、有効ポテンシャルへの寄与は次のようになる。

$$\begin{aligned} V_1(\varphi_c) &= -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\; g_f\frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\ln\left(\omega_n^2+\omega^2\right) \\ \text{where}\quad \omega^2 &= \vec{p}^2 + M_F^\dagger M_F \\ \omega_n &= (2n+1)\pi\beta^{-1} \end{aligned} \tag{2.102}$$

ここでは、次の級数和の公式を使う。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y}{y^2+(2n-1)^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\frac{1}{e^{\pi y}+1} \tag{2.103}$$

さて、今求めたい量は次のように表せる。

$$v(\omega) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{\pi^2(2n-1)^2}{\beta^2} + \omega^2\right). \tag{2.104}$$

前節と全く同じ方法により式 (2.103) から、

$$v(\omega) = 2\beta\left(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{\beta}\ln\left(1 + e^{-\beta\omega}\right)\right) + \dots \tag{2.105}$$

と変形できる。ここでも、... の項は、ω に依らない項である。したがって、有効ポテンシャルへの寄与は次のように表すことが出来る。

$$V_1(\varphi_c) = -\mathrm{Tr}\ g_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[\frac{\omega}{2} + \frac{1}{\beta}\ln\left(1 + e^{-\beta\omega}\right)\right] + \dots \tag{2.106}$$

ここでも、一項目は前節と同じ議論より、零温度の有効ポテンシャルに対応することが分かる。結局、Fermion の有効ポテンシャルへの寄与は次のようにまとめることが出来る。

$$V_1(\varphi_c) = -\mathrm{Tr}\ g_f\left[\frac{1}{64\pi^2}(M_F^\dagger M_F)^2\left(\ln\frac{M_F^\dagger M_F}{\mu^2} - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2\pi^2\beta^4}J_F(M_F^\dagger M_F\beta^2)\right] \tag{2.107}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\beta}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\ln\left(1 + e^{-\beta\omega}\right) &= \frac{1}{2\pi^2\beta^4}J_F(M_F^\dagger M_F\beta^2)\\ &= \frac{1}{2\pi^2\beta^4}\int_0^\infty dx\ x^2\ln\left[1 + e^{-\sqrt{x^2+\beta^2 M_F^\dagger M_F}}\right]\end{aligned} \tag{2.108}$$

また、高温 $T > m$ においては、次の展開公式が使える。

$$\begin{aligned}J_F(m^2/T^2) &= \frac{7\pi^4}{360} - \frac{\pi^2}{24}\frac{m^2}{T^2} - \frac{1}{32}\frac{m^4}{T^4}\ln\left(\frac{m^2}{a_f T^2}\right)\\ &- \frac{\pi^{7/2}}{4}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{\zeta(2l+1)}{(l+1)!}(1 - 2^{-2l-1})\Gamma\left(l + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{m^2}{\pi^2T^2}\right)^{l+2}\\ \text{where}\qquad a_f &= \pi^2\exp(3/2 - 2\gamma_E)\end{aligned} \tag{2.109}$$

ここでも、3 項目は、エネルギースケールを $\sqrt{a_f}\,T$ にしたときの、零温度における One Loop 補正と同じ形である。

(3), {Gauge 場 }

基本的に計算しないといけない項は、scalar 場と同じである。Dimensional Reduction を行った場合は、有効ポテンシャルへの寄与は以下のようにまとめられる。

$$V_1(\varphi_c) = \mathrm{Tr}\ \left[\frac{3}{64\pi^2}\left(\ln\frac{M_{GB}^2}{\mu^2} - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2\pi^2\beta^4}J_B\left[M_{GB}^2\beta^2\right]\right] \tag{2.110}$$

(4),{ 有効ポテンシャルのまとめ }

後々の便宜のために以上の結果をまとめておく。

$$
\begin{aligned}
V(\varphi_c) &= V_0(\varphi_c) \\
&+ \mathrm{Tr}\left[\begin{array}{l}
+\dfrac{1}{64\pi^2}M_S^4(\varphi_c)\left(\ln\dfrac{M_S^2}{\mu^2}-\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{1}{2\pi^2\beta^4}J_B\left[M_S^2\beta^2\right] \\
-\dfrac{1}{64\pi^2}g_f(M_F^\dagger M_F)^2\left(\ln\dfrac{M_F^\dagger M_F}{\mu^2}-\dfrac{3}{2}\right)-\dfrac{1}{2\pi^2\beta^4}g_f J_F\left[M_F^\dagger M_F\beta^2\right] \\
+\dfrac{3}{64\pi^2}M_{GB}^4\left(\ln\dfrac{M_{GB}^2}{\mu^2}-\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{3}{2\pi^2\beta^4}J_B\left[M_{GB}^2\beta^2\right]
\end{array}\right] \\
\text{where} \qquad & J_B(m^2/T^2) = -\frac{\pi^4}{45}+\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{m^2}{T^2}\right)-\frac{\pi}{6}\left(\frac{m^2}{T^2}\right)^{3/2}-\frac{1}{32}\frac{m^4}{T^4}\ln\left(\frac{m^2}{a_bT^2}\right)+\ldots \\
\text{where} \qquad & J_F(m^2/T^2) = \frac{7\pi^4}{360}-\frac{\pi^2}{24}\left(\frac{m^2}{T^2}\right)-\frac{1}{32}\frac{m^4}{T^4}\ln\left(\frac{m^2}{a_fT^2}\right)+\ldots
\end{aligned}
\tag{2.111}
$$

(4),{Resummation}

ここで、Resummation について少しだけ言及しておく。Bosonic な粒子からの有効ポテンシャルへの寄与のうち、温度に関して一次の項に入っている質量行列 M^2 を、変更しないといけないことは先に述べた。Resummation の補正では、この項を、自己エネルギー項の温度に関する leading term を加えたもので、置き換えれば良いことが分かっている。(つまり、 2 項目に出て来る温度質量項を加える。) 簡単な例として、次の ϕ^4 理論について考えてみよう。

$$
\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2-\frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{2.112}
$$

このとき、式 (2.99) の質量行列 m^2 に入っているのは、今の例の場合、単に

$$
m^2+\frac{\lambda}{2}\phi^2 \tag{2.113}
$$

である。また、式 (2.99) の 2 項目より、以下の項が出る。

$$
\frac{T^2}{24}\left(m^2+\frac{\lambda}{2}\phi^2\right) \tag{2.114}
$$

したがって、置き換えるべき有効質量は式 (2.113) に対し、

$$
m^2+\frac{\lambda}{2}\phi^2+\frac{T^2}{24}\lambda \tag{2.115}
$$

である。したがって、Resummation 補正を行った有効ポテンシャルは、以下のようになる。

$$
V_1(\varphi_c) = V_0(\varphi_c)-\frac{\pi^2}{90}T^4+\frac{T^2}{24}\left(m^2+\frac{\lambda}{2}\phi^2\right)-\frac{T}{12\pi}\left(m^2+\frac{\lambda}{2}\phi^2+\frac{T^2}{24}\lambda\right)^{3/2}+\ldots \tag{2.116}
$$

一般に複数の場が存在するときも同じであり、質量行列に自己エネルギー行列の温度に対する leading term を加えて、これを新たな質量行列として用いれば良い。

$$M^2 \longrightarrow M^2 + \Pi \text{ (T に対する leading term)} \tag{2.117}$$

但しこの置き換えを行うのは、式 (2.99) の 3 項目のみであることに注意。

有限温度効果による One Loop Order のポテンシャルの補正は、$f|\phi| > T$ (f は Gauge あるいは 湯川結合定数) においては指数関数的に抑制され、場の期待値が大きいところでは効いてこない。しかしそのよう場合にも Two Loop Order で初めて現れる、無視できない補正が存在することがあり、重要な効果を持ち得る [26]。これについては、第二部で具体的に議論する。(これは、直接相互作用する重い粒子を積分することで、軽い、熱平衡にある粒子の結合定数に対する補正として現れ、$f|\phi| > T$ の時も指数関数的に抑制されることはない。)

2.2.6 超対称性場の量子論における有限温度ポテンシャル

ここで、超対称性が存在する場合に、有限温度系の有効ポテンシャルがどのようにまとまるか見ておこう [19]。勿論、前節の結果は一般の場合に使えるが、超対称性が存在すると種々の質量行列間に関係がつくために、有効ポテンシャルの主要項がきれいな形にまとまり後々便利である。前節の結果より温度と場に依存する有効ポテンシャルの主要項は、高温展開が使える場合には、

$$V_1(\varphi_c)_\beta = \frac{T^2}{24}\mathrm{Tr}\ M_S^2 + \frac{T^2}{48}\ \mathrm{Tr}\ g_f\ M_F^\dagger M_F + \frac{T^2}{24}\ 3\ \mathrm{Tr}\ M_{GB}^2 \tag{2.118}$$

と書くことが出来る。さて、一般に soft に破れた超対称性をもつ場の量子論において、その質量行列の間には次のトレース公式が成り立つ。

$$\mathrm{Str}\ M^2(\varphi_c) = 3\mathrm{Tr}\ M_{GB}^2 + \mathrm{Tr}\ M_S^2 - 2\mathrm{Tr}\ M_F^\dagger M_F = K - 2g_a D^a \mathrm{Tr}\ T^a \tag{2.119}$$

ここで K は、場に依存しない定数である。また、すべての $U(1)$ Gauge 群に対し $\mathrm{Tr}Y = 0$ を仮定すると、この式と式 (2.118) より

$$V_1(\varphi_c)_\beta = \frac{T^2}{8}\mathrm{Tr}\ M_F^\dagger M_F \tag{2.120}$$

とまとめられる。また Fermion の質量行列は、(ψ_i, λ) のベース (λ は gaugino) でみた場合には、

$$M_F(\phi) = \begin{bmatrix} W_{i,j} & \sqrt{2}g_a(\phi^* T^a)_i \\ \sqrt{2}g_a(\phi^* T^a)_j & 0 \end{bmatrix} \tag{2.121}$$

であるから、式 (2.120) は、具体的には次式のようにまとめることが出来る。

$$\begin{aligned} V_1(\varphi_c)_\beta &= \frac{T^2}{8}\left[\sum_{i,j}|W_{i,j}|^2 + 4\sum_a g_a^2 \sum_{i,j} \varphi_{c\,i}^*(T^a T^a)_{i,j}\varphi_{c\,j}\right]. \\ \text{for} \quad T &> \text{mass} \end{aligned} \tag{2.122}$$

超対称理論では、零温度系においては、汎関数行列式において Bosonic な成分と Fermionic な成分がキャンセルし、ポテンシャルへの補正を生むことはない。しかし、上で見たように、有限温度系においては、Boson と Fermion の統計性が異なる為、このようなキャンセルは起こらず、有効ポテンシャルへの寄与が存在する。

第II部

Affleck-Dine Baryogenesis

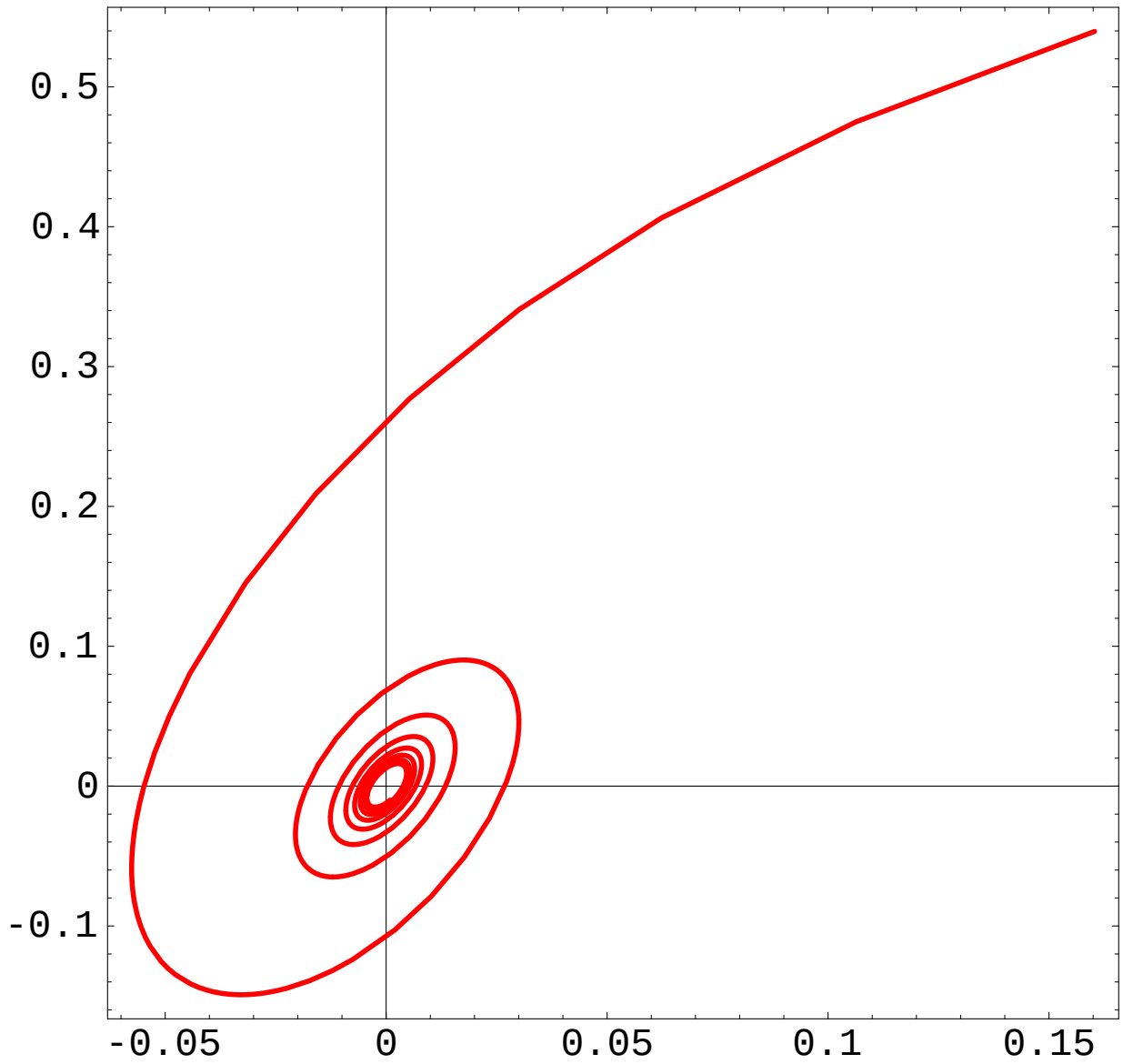


図 2.6: Affleck-Dine 場の振動の例；横軸、縦軸はそれぞれ $\mathrm{Re}(\phi)$, $\mathrm{Im}(\phi)$ を表す。共に適当にスケールを変換してある。

現在、スケールの繰り込み群に対する安定性などの現象論的な要請や、重力を無矛盾に取り込んだ唯一の候補と信じられているストリング理論の示唆などから、標準理論を超える次ぎのエネルギースケールの有効理論として、超対称標準理論が大きな関心をもって研究されている。

超対称理論の大きな特徴は、平坦方向 (Flat directions) を持つことである。平坦方向とは、場の配位空間の中で、スカラーポテンシャルが『零』になる方向であり、繰り込み可能な範囲では、大域的な超対称性が存在する極限において、輻射補正も受けない。勿論、実際にはより高いスケールにおいて非繰り込み可能な項によって持ち上げられたり、超対称性の破れの効果によって “soft” に持ち上げられる。

宇宙論的に見て非常に興味深い現象は、インフレーション後、この平坦方向に、スカラー場が非常に大きな期待値を持って凝縮していることが可能な点である。超対称理論においては、Baryon 数や Lepton 数を持つスカラー場が存在するので、もし、Baryon 数や Lepton 数を破る項が存在するならば、この平坦方向に Baryon 、Lepton asymmetry を励起することが可能である [1],[2]。これを Afflec-Dine Baryo/Lepto genesis と呼ぶ。以下、これに付随する平坦方向のスカラー場を Affleck-Dine 場と呼ぶことにする。後の節で見ることになるが、Affleck-Dine Baryogenesis は、比較的低い再加熱温度で実現されることが特徴であり、超対称理論に付随する gravitino 問題などを避けて Baryon asymmetry を生成できる。また Q-Ball の研究から、Affleck-Dine Baryogenesis と Q-Ball を通して、宇宙の Baryon asymmetry と Dark Matter の比が説明できる可能性もあり、盛んに研究されている。これは、次の第三部のテーマである。

この方法による Baryogenesis では AD field が振動を開始する時期によって Baryon asymmetry が大きく変わる。それには、AD field に対応する平坦方向がどのように持ち上がっているかが重要であり、必然的に超対称性の破れ方が決定的な役割を担う。注意しないといけないのは、Affleck-Dine 機構が働いている時に支配的な超対称性の破れの原因は、現在の宇宙のそれとは異なっている可能性がある点である。とりわけ、inflaton の振動によるエネルギーやその崩壊によって生じた輻射等が、超対称性を大きく破る。このうち、後者にあたる有限温度効果は、これまで詳しく調べられて来なかったが、非常に重要な役割を果たすことが最近指摘され [3]、(LH_u) 方向について、初めて詳しい解析がなされた [4]。

この第二部では、有限温度効果を無視したときの Affleck-Dine Baryogenesis を議論した後、[4] にそって有限温度効果を入れた時の変更点を詳しく議論する。また、[4] では見落とされていた項 [26] の影響についても議論する。まず、次の章で、Baryogenesis 一般に関する重要な事柄をまとめておこう。

第3章　Baryogenesis 一般に対する覚書

3.1 Baryon asymmetry

CPT 定理によって、我々はすべての粒子に Charge が逆で質量、崩壊率の全く等しい反粒子が存在することを知っている。単純に考えると、我々の住む宇宙には粒子、反粒子が同数存在しそうに思える。しかし、実際の宇宙はそれとは全く違うことを誰もが知っている。粒子が反粒子より圧倒的に多い。勿論我々の観測から逃れているはるか遠方で反粒子ばかりで構成されてる領域がないとはいえないが、非常に広い領域、スケールにしてすくなくとも約 $10Mpc$ 以上にわたって、粒子ばかりが宇宙を構成していなければならず、そのような分離を行う、自然な方法は知られていない。

以下の議論で頻繁に出て来る物理量をここで定義しておこう。

$$\begin{aligned} \eta &\equiv \frac{n_B}{n_\gamma} \\ \text{where} \quad n_B &= n_b - n_{\bar{b}} \\ \text{where} \quad n_\gamma &= 2\frac{\zeta(3)}{\pi^2}T^3 \end{aligned} \tag{3.1}$$

n_γ は光子の数密度、n_B は、Baryon asymmetry の数密度である。元素合成の起こる時刻 $T \sim \mathrm{MeV}$ において、必要になる η は [11]、

$$4(3) \times 10^{-10} \lesssim \eta \lesssim 7(10) \times 10^{-10} \tag{3.2}$$

であることが、元素合成の理論より要請されている。これは、次のようにも書き直せる。

$$0.015(0.011) \lesssim \Omega_B h^2 \lesssim 0.026(0.038) \tag{3.3}$$

ここで、$\Omega_B = \rho_B/\rho_c$,$h = H_0/100\mathrm{KmMpc}^{-1}\mathrm{sec}^{-1}$ であり、臨界密度 ρ_c、h は以下の値をもつ。

$$\begin{aligned} \rho_c &= 3H_0^2 M_*^2 \\ &= 1.88h^2 \times 10^{-29}\mathrm{g\ cm}^{-3} \\ &= 8.10h^2 \times 10^{-47}\mathrm{GeV}^{-4} \\ 0.5 \lesssim\ & h \lesssim 0.9 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Baryon とエントロピーの比もよく出て来る。

$$B \equiv \frac{n_B}{s}\ . \tag{3.5}$$

前の式 (3.2) から必要な値は、

$$5.7(4.3) \times 10^{-11} \lesssim B \lesssim 9.9(14) \times 10^{-11} \tag{3.6}$$

である。この量はどのような条件が満たされれば、作ることが出来る可能性があるのだろうか。その必要条件について次の節で見てみよう。

3.2 Baryogenesis に必要な一般条件

Affleck-Dine Baryogenesis の詳細に入る前に、Baryogenesis に必要な一般条件をあげておく [34]。これは、他の Baryogenesis 機構にも同様に当てはまり、議論の出発点でもある。これを理解することで、Affleck-Dine mechanism がいかに自然にその条件を満たしているかが後で分かるだろう。

3.2.1 Baryon(Lepton) number violation

$B = 0$ の宇宙から出発するならこれは極めて当り前な条件である。仮に、Baryon 数を破る相互作用がないとすると、

$$\dot{B} \propto [B, H] = 0 \tag{3.7}$$

であるから、B が生じることはない。Lepton 数の破れでも良いことについては、ここでは詳しく述べることが出来ないが、Electroweak スケールより充分高温においては、B+L を破る "sphaleron" による相互作用が熱平衡にあり [33]、L の一部は B に転換されることによる。したがって、初期に Lepton (正確には、B-L) の非対称性を生み出せれば、"sphaleron" によって必要な Baryon の非対称性に転換できる (Leptogenesis [32])

3.2.2 C and CP violation

これらも理解しやすい条件である。C が保存する場合を考えてみよう。この場合は粒子、反粒子が同数出来てしまい、Baryon asymmetry を生むことは出来ない。CP が保存する場合も同様だ。CPT が保存するため、これは Time reversal T が保存していると見ても良い。この場合、逆課程が同じ率でおこるので、結局 Baryon asymmetry を生めないのである。

3.2.3 熱平衡からの逸脱

これは、非常に重要な条件である。基本的に平衡状態になると、特定の時間スケールが入って来ないので、CP の破れの効果が見えなくなるわけである。もう少し、具体的に見てみることにする。ある粒子 X が $T << m_X$ で熱平衡にあるとする。その数密度は、1 章の結果を使うと

$$n_X \simeq g_X (m_X T/2\pi)^{3/2} e^{-m_X/T + \mu_X/T} \tag{3.8}$$

となる。いっぽう、反粒子は

$$n_{\bar{X}} \simeq g_X (m_X T/2\pi)^{3/2} e^{-m_X/T - \mu_X/T} \tag{3.9}$$

である。この差が、欲しい asymmetry になる。

$$X_{asymmetry} = n_X - n_{\bar{X}} \simeq 2g_X(m_X T/2\pi)^{3/2}\sinh(\mu_X/T)\exp(-m_X/T) \tag{3.10}$$

ここで重要なのは、Baryon 数 (今は X) を破る相互作用が完全な平衡にあると、化学平衡の条件式 (1.29) より、$\mu_X = 0$ となってしまうが、それは、$X_{asymmetry} = 0$ を意味する。したがって、Baryon asymmetry を生むには、Baryon 数を破る相互作用が必要だが、それは、熱平衡になってはならない。

第4章　有限温度効果を考えない場合の Affleck-Dine Baryogenesis

平坦方向に対する有限温度効果をいれた議論にはいる前に、今まで、通常考えられて来た Affleck-Dine Baryogenesis についてまとめておく。この章では、Gravity Mediation SUSY Breaking Model を念頭に議論を進める。これは、他のモデルにも一般的に通用する事柄が多く、以下の議論の基礎となる。次の第 5 章と第 6 章でそれぞれ、Gauge Mediation SUSY Breaking Model の場合と、平坦方向を持ち上げる非繰り込み可能なスーパーポテンシャルが存在しない場合について考察し、さらにその次の章で有限温度効果についてまとめる。

4.1　平坦方向の持ち上がり

Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM) の平坦方向については、文献 [27] が非常に詳しい (Appendix 参照)。なお、以下の議論では複数の平坦方向が同時に存在しているときの可能性については考えない。AD 場は、基本的に一つの平坦方向を parametrize するものと仮定する。

4.1.1　非繰り込み可能な項による持ち上がり

平坦方向の平坦性は、繰り込み可能な範囲では大域的な超対称性が存在する極限においては、非繰り込み定理によって保証されている。したがって平坦方向は、超対称性を破る効果と、非繰り込み可能な項によって持ち上げられるが、ここでは、平坦方向に沿うスカラー場の値が大きいときに支配的になる、非繰り込み可能な項について考えておく。以下、Superfield を表す記号とそのスカラー成分を表すのに別の記号を用いたり、用いなかったりするが、文脈中で明らかに判断できるはずである。

平坦方向は、一般に Chiral Superfield の Gauge 不変な単項式で表すことが出来る。例えば、次の例を考えよう。

$$Q_1^\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad L_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix} \qquad \bar{d}_2^\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}\, \phi \tag{4.1}$$

ここでギリシャ文字の添字はカラー、数字は、世代を表している。この方向は繰り込み可能な範囲で F-flat かつ D-flat である。この場合、平坦方向は、単項式

$$X = Q_1 L_1 \bar{d}_2 \tag{4.2}$$

で parametrize 出来る。カラーと $SU(2)_w$ の足は勿論、自明な組合せにより潰されている。

このような平坦方向 ϕ を持ち上げる非繰り込み可能なスーパーポテンシャルは、一般に次の二通りがある。

$$W = \frac{\lambda}{n\ M^{n-3}} X^k = \frac{\lambda}{n\ M^{n-3}} \phi^n \tag{4.3}$$

$$W = \frac{\lambda}{M^{n-3}} \psi \phi^{n-1} \tag{4.4}$$

ここで、$X = \phi^m,\ m\ k = n$ である。k は単項式 X が R-Parity $(-1)^{3(B-L)+2S}$ に対して、遇か奇により、それぞれ、1 ,2 である。M は、非繰り込み可能な相互作用が効き出す、ある大きなスケールであり、GUT スケール M_G やプランクスケール M_P 等が考えられる。勿論、このような項は対称性により禁止されていることもあり得る。以下では、Gauge 対称性と R-Parity を保存するような項は一般に存在するものとしよう。そのようなスーパーポテンシャルが存在しないときの Affleck-Dine Baryogenesis も興味深く後で議論する。さて、式 (4.3) は自明だが、式 (4.4) では、F_ψ によって、平坦方向が持ち上がる。このとき、ψ の期待値は零になることが重要である。後に見るが、これからは、Baryon 数を破る A-term は普通出て来ない。どちらにしても、平坦方向に対する『最低次』のポテンシャルは、以下の形になる。

$$V(\phi) = \frac{|\lambda|^2}{M^{2n-6}} (\phi^* \phi)^{n-1} \ . \tag{4.5}$$

形を見れば自明であるが、このような項は Baryon 数を保存する。

4.1.2 超対称性の破れの効果

ここでは、超対称性の破れの効果が平坦方向のポテンシャルに及ぼす影響を考える。一般に平坦方向の持ち上がりの大きさは、超対称性の破れの大きさに比例する。現在の宇宙においても超対称性は破れているわけであるが、今興味のある初期宇宙においては、より大きな超対称性の破れが存在することが重要である [2]。インフレーション中は正の真空エネルギーが支配的であるし、その再加熱が終了する前は inflaton の振動エネルギーが、再加熱終了後も輻射のエネルギーが、宇宙のエネルギー密度の支配的な成分である。これらは、F あるいは D-term が零でない期待値を持つことを意味し、超対称性が破れていることを示している。また、有限温度効果も超対称性の破れを引き起こす。Boson と Fermion の統計性の違いが、それを端的に表している。この統計性の違いは、超対称理論の有効ポテンシャルを考える上で重要な意味を持っている。超対称理論では、有効ポテンシャルを求める際の汎関数行列式は Bosonic な寄与と Fermionic な寄与が全次数でキャンセルしてしまうが、有限温度においては、Boson と Fermion の統計性の違いから、繰り込み可能な次数からポテンシャルへの補正が存在する。(第一部の有限温度の場の量子論の節を参照。) 有限温度効果によるポテンシャルについては、既に議論した。具体的な影響については、第 7 章で詳しく考察する。

ここでは、非繰り込み可能な項を通じて平坦方向の場 (ϕ) と相互作用している場からの影響を考えよう。今の場合、inflaton からの寄与が支配的である。繰り込み可能な相互作用をしている場は、ϕ の期待値が充分大きいときには decouple してしまって、大きな寄与を返すことはない。

超重力理論のスカラーポテンシャルを考えよう。

$$V = e^{K/M_*^2} \left((D_i W) K^{i\,\bar{j}} (D_{\bar{j}} W^*) - \frac{3}{M_*^2} |W|^2 \right) + \frac{1}{2} \mathrm{Re}\ f_{a\ b}^{-1} D^a D^b$$

$$
\begin{aligned}
\text{where} \qquad D_i W &= W_i + \frac{K_i W}{M_*^2} \\
W_i &= \frac{\partial W}{\partial \phi_i}\,, \qquad K_i = \frac{\partial K}{\partial \phi_i} \\
K^{i\,\bar{j}} &= \left(K_{i\,\bar{j}} = \frac{\partial^2 K}{\partial \phi_i \partial \phi_j^*} \right)^{-1} \\
D^a &= -K_i (T^a)_{i\,j} \phi_j \qquad f_{a\,b} = (\text{gauge kinetic function matrix})
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

興味のある、インフレーションが終了し再加熱完了までの時期は、 inflaton の振動によるエネルギー密度が支配的である。いま、inflaton のポテンシャルのうち、D-term の寄与は重要でない場合を考えよう。

$$
\begin{aligned}
V(I) &\simeq e^{K(I^\dagger\, I)/M_*^2} \left(F_I^* F^I - \frac{3}{M_*^2} |W(I)|^2 \right) \\
\text{where} \qquad F_I^* F^I &= D_I W(I) K^{I\,\bar{I}} D_{\bar{I}} W^*(I^*)
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

ここで I は、inflaton の Superfield か、そのスカラー成分を表す。今、ポテンシャルエネルギーは正でないといけないので

$$
\frac{\sqrt{3}}{M_*} \, |W(I)| \lesssim D_I W(I) \tag{4.8}
$$

でなければならない。エネルギー密度は、$\rho = 3H^2 M_*^2$ であるから、$|I| \sim M_*$ の場合には

$$
\begin{aligned}
D_I W(I) &\sim H M_* \\
W(I) &\lesssim H M_*^2
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

である。多くの場合インフレーション終了後は $|I| \ll M_*$ でありその場合にはポテンシャルは以下のように簡単に表すことが出来る。

$$
\begin{aligned}
K_I &\ll M_* \\
\frac{|W|}{M_*} &\ll W_I \\
D_I W(I) &\simeq W_I \\
V(I) &\simeq W_I^* W^I
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

平坦方向に引き起こされるポテンシャルの形は、平坦方向がスーパーポテンシャルの非繰り込み可能な項によって持ち上げられるかどうかによっている。まず最初に平坦方向を持ち上げるスーパーポテンシャルに依存しない項を考える。

(1),(e^{K/M_*^2} ファクター)

$$
\mathrm{e}^{K(\phi, \phi^\dagger)}\, V(I) \tag{4.11}
$$

(2),(inflaton のスーパーポテンシャルと平坦方向のケーラーポテンシャルからのクロスターム)

$$
K^{\phi\,\bar{\phi}} (D_\phi W)(D_{\phi^*} W^*) \ni K_\phi K^{\phi\,\bar{\phi}} K_{\bar{\phi}} \, \frac{|W(I)|^2}{M_*^4} \tag{4.12}
$$

(3),(ケーラーポテンシャルを通しての inflaton と平坦方向の結合)

$$K^{\phi\,\bar{I}}(D_\phi W)(D_{I^*}W^*) + \text{h.c} \ni K_\phi K^{\phi\,\bar{I}}(D_{I^*}W^*)\,\frac{W(I)}{M_*^2} + \text{h.c} \tag{4.13}$$

(1)∼(3) は全て、平坦方向に次の形のポテンシャルを返す。

$$V(\phi) = H^2 M_*^2 f(\phi/M_*) \tag{4.14}$$

ここで、f は適当な関数である。但し、$|I| \ll M_*$ の時は、(1) が他の効果に比べて充分支配的である。また、

$$F(I) \sim H\ M_* \to F_{Hidden} \sim m_{\rm soft}\ M_* \tag{4.15}$$

の様に、inflaton のセクターの F-term を現在の宇宙で超対称性を破る役割を果たしている Hidden セクターの F-term で置き換えることで soft breaking term

$$V(\phi) = m_\phi^2 M_*^2 f(\phi/M_*) \tag{4.16}$$

を得ることが出来る。ここで m_ϕ は、平坦方向の soft breaking mass である。

特に、平坦方向の場 ϕ に対するケーラーポテンシャルがミニマルであった場合には、次の式を利用して

$$3\frac{|W(I)|^2}{M_*^2} \simeq F_I^* F^I - V(I) \tag{4.17}$$

(1)∼(3) より、平坦方向に次のポテンシャルが立つ。

$$|\phi|^2\ \left(2 + \frac{F_I^* F^I}{V(I)}\right) H^2 \tag{4.18}$$

正の $\mathcal{O}(H)$ の有効質量が生成されインフレーション中に平坦方向の場 ϕ の期待値は零になる。したがって、このような平坦方向では、Affleck-Dine mechanism を働かせることは出来ない (次節参照)。しかし、次のような、inflaton と平坦方向が 4 点の相互作用を持つような一般のケーラーポテンシャルを考えてみよう。

$$K = \phi^\dagger\phi + I^\dagger I + \frac{a}{M_*^2}\,\phi^\dagger\phi I^\dagger I + \ldots \tag{4.19}$$

$|I| < M_*$ の時に ϕ に依存するスカラーポテンシャルの支配的な項は、次のようになる。

$$\begin{aligned} V(\phi) &\sim \mathrm{e}^{K/M_*^2}\left[F_I(F_I)^*\left(1 + \frac{a}{M_*^2}(|\phi|^2 + |I|^2)\right)^{-1}\left(1 + \frac{a}{M_*}|I|^2\right) - \frac{3}{M_*^2}|W(I)|^2\right] \\ &\sim |\phi|^2\left(1 + \frac{a}{M_*^2}|I|^2\right)\left(\frac{|F_I|^2}{M_*^2}(1-a) - \frac{3}{M_*^2}|W(I)|^2\right) \end{aligned} \tag{4.20}$$

したがって、$a \gtrsim 1$ で負の $\mathcal{O}(H)$ 有効質量が出て来る。また、inflaton の振動が宇宙のエネルギー密度を支配しているときには、その微分項と平坦方向の結合からも同等の寄与がある。

以上の寄与は全て Baryon (Lepton) 数を保存するものばかりであった。しかし、平坦方向がスーパーポテンシャル中の非繰り込み可能な項によって持ち上がっている場合には、上記とは別の重要な効果が存在する。以下で、その効果をみていくことにする。

(1),(平坦方向のスーパーポテンシャルの微分と inflaton スーパーポテンシャルの結合)

$$K^{\phi\,\bar{\phi}}(D_\phi W)(D_{\bar{\phi}}W^*) \ni W_\phi K^{\phi\,\bar{\phi}} K_{\bar{\phi}} \frac{W^*(I)}{M_*^2} + \text{h.c} \tag{4.21}$$

(2),(inflaton のスーパーポテンシャルと平坦方向のスーパーポテンシャルの結合)

$$K^{I\,\bar{I}}(D_I W)(D_{\bar{I}}W^*) - \frac{3}{M_*^2}|W|^2 \ni \left(\frac{K_I K^{I\,\bar{I}} K_{\bar{I}}}{M_*^2}\right)\left(\frac{W(I)W^*(\phi)}{M_*^2} + \text{h.c}\right) \tag{4.22}$$

(3),(ケーラーポテンシャルを通しての inflaton と平坦方向の結合)

$$W_\phi K^{\phi\,\bar{I}} D_{\bar{I}} W^*(I) + \text{h.c} \tag{4.23}$$

これら、(1) $\sim$ (3) は、$|I| \sim M_*$ の時は、全て

$$V(\phi) \sim H M_*^3 g(\phi/M_*) + \text{h.c} \tag{4.24}$$

のポテンシャルを返す。ここでも、g は適当な関数である。しかし、これらの効果は全て、$|I| \ll M_*$ では大きく surppress される。しかし、一般には、ケーラーポテンシャルに次のような項が存在すると考えられる。

$$\delta K = -\left(\frac{a}{2}\frac{I^\dagger}{M_*} + \frac{b}{4}\frac{I^\dagger I^\dagger}{M_*^2}\right)\,\phi\phi + \text{h.c} \quad \ldots \tag{4.25}$$

ここで、特別な対称性などの仮定がないならば、一般には $|a|\ ,\ |b| = \mathcal{O}(1)$ であると考えられる。勿論、更に高次の項も存在するが、さらに M_* の surppression がかかるので無視する。実際、上式の二項目も特殊な場合をのぞいて、今興味ある物理にほとんど影響を及ぼさないことが後で分かる。このような場合は、inflaton の振動が宇宙のエネルギー密度の支配的な成分ならば $|I| \ll M_*$ となったときも平坦方向に以下の様な寄与が存在する。

$$\begin{aligned} V(\phi) &\ni W_\phi K^{\phi\,\bar{I}}(D_I W^*) + \text{h.c} \\ &\simeq W_\phi K^{\phi\,\bar{I}} F_I^* + \text{h.c} \\ &\simeq W_\phi \phi \left(\frac{a}{M_*} + b\frac{I^\dagger}{M_*^2}\right) F_I^* + \text{h.c} \end{aligned} \tag{4.26}$$

適当な係数の再定義により、

$$V(\phi) \ni \left(a\ H + b\frac{H^2}{M_*}\left(\frac{|I|_{inf}}{H_{inf}}\right)\right) W + \text{h.c} \tag{4.27}$$

ここで、二項目は、inflaton の振動がエネルギー密度を支配している物質優勢期であることを仮定した。また、下つき添字 inf は、インフレーション終了時期を表す。ここで、 inflaton をその

F-term が期待値を持って現在の超対称性を破る原因となっている Superfield で置き換えれば、一項目より通常の A-term が出る。

$$V(\phi) \ni a m_{3/2} W(\phi) + \text{h.c} \tag{4.28}$$

ここで、$m_{3/2}$ は gravitino の質量であり、$|\, a \,| = \mathcal{O}(1)$ である。

これらの項が Baryon (Lepton) 数を破ると共に C、CP の破れを供給することになり、Affleck-Dine mechanism が働く上で、極めて重要な役割を果たすことになる。

4.2 Affleck-Dine 場 ϕ の時間発展

ここでは、Affleck-Dine 場に相当する平坦方向の場 ϕ の時間発展を詳しく追っていく。これは、Afflec-Dine mechanism から、どれだけの Baryon asymmetry が生成されるかを決定するのに、もっとも重要な要素である。調べねばならないのは、Affleck-Dine 場 ϕ のコヒーレントな零モードの運動方程式である。

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{\phi^*}(\phi) = 0 \tag{4.29}$$

ここで V_{ϕ^*} は、V の ϕ^* による微分を表す。これは、減衰振動の運動方程式そのものであり、$H^2 \gg V''(\phi)$ なら、摩擦項が支配的で、場 ϕ は凍り付いている。$H^2 \sim V''(\phi)$ で転がり初め、$H^2 \ll V''(\phi)$ なら、自由な振動をする。

前節での結果から、ケーラーポテンシャル $K(\phi, \phi^\dagger)$ が、ミニマルであった場合にはインフレーション中に場 ϕ は原点にたどり着き、ϕ のコヒーレントな condensate は生じない。この場合にも deSitter fluctuation により、$< \delta\phi^2 > \sim H^2$ が生じるが、相関距離は $l \sim \mathcal{O}(H^{-1})$ であり、現在の宇宙のハッブル半径よりはるかに小さく、そこでは Baryon asymmetry は平均すると零になってしまう。また、ケーラーポテンシャルに特殊な対称性を課せば、$m^2 > 0$ かつ $m^2 \ll H^2$ も可能であるが [28]、これはある種 Fine tuning とみなせるので、ここでは追求しない。しかし、一般のケーラーポテンシャルを考えるのであれば、先にみたように、$-m^2 \sim \mathcal{O}(H^2)$ の有効質量が自然に出て来る。以下では、そのような場合を仮定して議論を進める。

4.2.1 インフレーション中の発展

スーパーポテンシャルが、最低次数において

$$W = \frac{\phi^n}{n M^{n-3}} \tag{4.30}$$

で与えられる場合を考えよう。インフレーション中の平坦方向に対するポテンシャルは次のように書ける (4.1 節)。

$$\begin{aligned} V(\phi) = (m_\phi^2 - c H_I^2)|\phi|^2 \quad &+ \quad \left(\frac{a_m m_{3/2} \phi^n}{n M^{n-3}} + \text{h.c} \right) + \left(\frac{a_H H_I \phi^n}{n M^{n-3}} + \text{h.c} \right) \\ &+ \quad \left(b \frac{H_I^2}{M_*} \left(\frac{|I|}{H_I} \right) \frac{\phi^n}{n M^{n-3}} + \text{h.c} \right) + \frac{|\phi|^{2(n-1)}}{M^{2n-6}} \end{aligned} \tag{4.31}$$

ここで、c , $|a_m|$, $|a_H|$, $|b| = \mathcal{O}(1)$、I は inflaton 、H_I はインフレーション中のハッブルパラメータである。インフレーション中やその後 $H \sim \mathrm{m}_{3/2}$ までは、$\mathcal{O}(m_{3/2})$ の soft term は無視し

て良い。まず、位相方向のポテンシャルは無視して、ポテンシャルの最小点の動径方向成分を見てみよう。これは、

$$|\phi| \sim (H_I M^{n-3})^{1/n-2} \tag{4.32}$$

で与えられる。ϕ の初期値がこの値から大きく離れていた場合には、ϕ はインフレーション中に振動しながらこの値に収束すると考えられる。ビリアル定理が使えると近似して、その振幅の発展を確かめておこう。運動方定式 (4.29) より、

$$\frac{d}{dt}\left(\phi^*\dot{\phi} + \dot{\phi}^*\phi\right) = 2(\dot{\phi}^*\dot{\phi}) - 3H_I(\dot{\phi}\phi^* + \dot{\phi}^*\phi) - (\phi V_\phi + \phi^* V_{\phi^*}) \tag{4.33}$$

これを充分長い時間 T_{total} で平均をとる。左辺は零で近似でき、また右辺で、ビリアル定理が使えるとして 2 項目の平均を零で近似する。

$$0 = 2\langle T\rangle - 2(n-1)\langle V\rangle \tag{4.34}$$

ここでポテンシャルは式 (4.31) の最終項によって、支配されているとして近似した。運動方程式より、

$$(\ddot{\phi}\dot{\phi}^* + \text{h.c}) + 6H_I(\dot{\phi}\dot{\phi}^*) + (\dot{\phi}^* V_{\phi^*} + \text{h.c}) = 0$$

then

$$\frac{d}{dt}(E) = -6H_I T \simeq -6H_I(1-1/n)E \tag{4.35}$$

よって、

$$|\phi - \phi_{min}| \simeq \mathrm{e}^{-3H_I t/n} \tag{4.36}$$

となり、充分速く最小地点に近付く。位相成分も同様だ。動径方向が最小地点に充分近付けば、位相方向の曲率も $\mathcal{O}(\mathrm{H}^2)$ になり、位相もその最小地点に落ち着く。これによって、Affleck-Dine 場の初期値が決定されることになる。

4.2.2 インフレーションが終了してから、AD 場が振動を開始するまでの発展

インフレーションが終了してから再加熱が終了するまでは、ハッブルパラメータは $\mathrm{H} = 2/3\mathrm{t}$ にしたがって時間発展する。このとき、Affleck-Dine 場は時間発展するポテンシャルの最小地点を振動しながら追いかけていく。これを [2] にしたがって、確かめておこう。

運動方程式は、

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{t}\,\dot{\phi} + V_{\phi^*} = 0 \tag{4.37}$$

で与えられる。スーパーポテンシャルとしては、$W = \frac{\lambda}{nM^{n-3}}\phi^n$ を考える。簡単の為に、位相方向の運動は無視することにして、A-term は零とおいてポテンシャルを計算することにしよう。式 (4.37) は、今の場合、

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{t}\dot{\phi} + \phi\left(-cH^2 + (n-1)\lambda^2\frac{\phi^{2n-4}}{M^{2n-6}}\right) = 0 \tag{4.38}$$

である。ここで、次のように変数変換する。

$$\begin{aligned} \mathrm{z} &= \ln(t) \\ \phi = \chi\phi_0(t) &= \chi\left(\frac{\beta}{\lambda}M^{n-3}\mathrm{e}^{-z}\right)^{\frac{1}{n-2}} \\ \text{where} \qquad \beta &= \sqrt{c'/(n-1)} \qquad c' = \frac{4}{9}c \end{aligned} \tag{4.39}$$

以上を使って式 (4.37) を書き直すと、以下のように表すことが出来る。

$$\ddot{\chi} + \left(\frac{n-4}{n-2}\right)\dot{\chi} - \left[c' + \frac{n-3}{(n-2)^2}\right]\chi + c'\chi^{2n-3} = 0 \tag{4.40}$$

この方程式には、

$$\bar{\chi} = \left(1 + \frac{n-3}{c'(n-2)^2}\right)^{\frac{1}{2n-4}} \tag{4.41}$$

という固定点が存在する。これは、ϕ が振動することなく、

$$\bar{\phi} = \bar{\chi}\left(\frac{\beta}{\lambda}M^{n-3}\frac{3}{2}H\right)^{\frac{1}{n-2}} \tag{4.42}$$

という、ポテンシャルの最小地点より少しだけ大きい地点を trace して来る解に相当している。ϕ が $\bar{\phi}$ よりずれた場合は、$\bar{\phi}$ まわりに減衰振動 $(n > 4)$、振動 $(n = 4)$ を行いながら trace して来る。どちらにしても、時間発展するポテンシャルの最小地点にひきずられながら、

$$\phi \simeq (HM^{n-3})^{\frac{1}{n-2}} \tag{4.43}$$

と変化していくことが重要である。

4.2.3 その後の発展

時間発展するポテンシャルの最小地点にひきずられて、前節のように発展した後、$H^2 \simeq V''(\phi)$ で、ϕ は、原点まわりに二次のポテンシャルによる振動を開始する。有限温度効果を考えない場合は、$H \simeq m_\phi \sim m_{3/2}$ で振動を開始し、この時点で Baryon(Lepton) 数密度が固定されることになる。振動開始時期は、次の節でみるように、最終的な Baryon と Entropy の比を決定するのにもっとも重要であるが、温度効果を考えた場合は、この、振動開始時期が大きく変化し得る。

なお、原点まわりの振動を開始した後の平坦方向の時間発展を正しく理解するためには、次部のテーマである Q-Ball についての議論を待たねばならない。

4.3 Baryon/Lepton Asymmetry

4.3.1 計算方法

この節では、一般の平坦方向から帰結する Baryon (Lepton) asymmetry を計算する。有限温度効果をいれた場合等にも応用出来るように、ここでは、 Affleck-Dine 場が振動を開始する時間を陽に決定せずに H_O として、一般的な結果を導いておく [29],[4]。

平坦方向の Baryon あるいは Lepton カレントが

$$n = \beta i(\dot{\phi}^*\phi - \phi^*\dot{\phi}) \tag{4.44}$$

で与えられたとしよう。運動方程式より、

$$\dot{n} + 3Hn = 2\beta \,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial V}{\partial \phi}\phi\right) \tag{4.45}$$

が得られる。さてポテンシャルの Baryon (Lepton) 数を破る項が、以下のように与えられる場合を考えよう。

$$V \ni \frac{m_{3/2}}{nM^{n-3}}(a_m\ \phi^n + \mathrm{h.c}) + \frac{H}{nM^{n-3}}(a_H\ \phi^n + \mathrm{h.c}) + \frac{H^2}{M_*}\left(\frac{|I|_{inf}}{H_{inf}}\right)\frac{1}{nM^{n-3}}(b\ \phi^n + \mathrm{h.c}) \tag{4.46}$$

ここで、$m_{3/2}$ は gravitino の質量、$|a_m| \sim |a_H| \sim |b| \sim 1$ の定数である。下つきの添字 inf は、その量がインフレーション終了時のものであることを示す。想定しているスーパーポテンシャルは、$W = \frac{1}{nM^{n-3}}\phi^n$ である。まず、三項目は効かないと仮定して計算しよう。式 (4.45)、(4.46) より、

$$\begin{aligned}
\left[R^3 n\right](t) &= 2\beta \int^t R^3 \mathrm{Im}\left(\frac{a_m m_{3/2}}{M^{n-3}}\phi^n + \frac{a_H H}{M^{n-3}}\phi^n\right) \\
&= 2\beta \int^t R^3 \left(\frac{|a_m| m_{3/2}}{M^{n-3}}|\phi|^n \sin\left(\arg(a_m) + n\ \theta\right) + \frac{|a_H| H}{M^{n-3}}|\phi|^n \sin\left(\arg(a_H) + n\ \theta\right)\right) \\
\text{where} \qquad \theta &= \arg(\phi)
\end{aligned} \tag{4.47}$$

が得られる。ここで、一般に Affleck-Dine 場が原点まわりに振動を開始する前は、上式において二項目の係数が圧倒的に大きい。しかし、ポテンシャルの位相方向の最小地点は、二項目の sin をほとんど零にしてしまう。

$$\sin\left(\arg(a_H) + n\ \theta\right) \sim \sin\left(\arg(a_m) + n\ \theta\right) \times \frac{m_{3/2}}{H}$$

であるから、結局一項目と二項目の寄与はほとんど同じである。これは、数値計算によっても確かめられ、実際、二項目の寄与は一項目よりすこし小さい位であった。以下の計算では、簡単のために、二項目を無視する [4]。

$$\begin{aligned}
\left[R^3 n\right](t) &\simeq 2\beta \int^t R^3 \left(\frac{|a_m| m_{3/2}}{M^{n-3}}|\phi|^n \sin\left(\arg(a_m) + n\ \theta\right)\right) \\
&= 2\beta \int^{t_{osci}} R^3 \left(\frac{|a_m| m_{3/2}}{M^{n-3}}|\phi|^n \delta_{eff}\right) + 2\beta \int_{t_{osci}}^t R^3 \left(\frac{|a_m| m_{3/2}}{M^{n-3}}|\phi|^n \delta_{eff}\right) \\
\text{where} \qquad \delta_{eff} &= \sin\left(\arg(a_m) + n\ \theta\right)
\end{aligned} \tag{4.48}$$

ここで、t_{osci} は Affleck- Dine 場が二次の振動を開始する時期である。この時期が inflaton の振動による物質優勢期であると仮定すると、上式の一項目は位相の変化を無視して、$\propto \mathrm{t}^{\frac{n-4}{n-2}}$ であり、二項目は $\propto \mathrm{t}^{-(n-2)}$ である。二項目の寄与はすぐに小さくなる上に、実際には位相の符号が激しく

変わるために、大部分がキャンセルしてしまい、積分にほとんど寄与しない [4]。したがって、以前から言っている通り Baryon(Lepton) 数密度は、Affleck-Dine 場が振動を開始した時点 t_{osci} で固定される。この時期を下つき添字 O で区別しよう。すると、

$$n(t_{osci}) \simeq \frac{4\beta}{3\left(1+\frac{n-4}{n-2}\right)} m_{3/2}\delta_{eff}(H_O M^{n-3})^{\frac{2}{n-2}} \ . \tag{4.49}$$

ただし、$|a_m| \sim 1$, $|\phi| \sim (HM^{n-3})^{1/n-2}$ を用いた。有限温度の効果を考慮しないならば、$H_O \sim m_\phi$ である。この後、Baryon(Lepton) 数密度は、$\propto R^{-3} \propto \rho$ にしたがって変化するので、最終的な Baryon(Lepton) と Entropy の比は

$$\begin{aligned}
\frac{n}{s} &= \frac{1}{s(t_{RH})}\left(\frac{R^3(t_{osci})}{R^3(t_{RH})}\right) n(t_{osci}) \\
&= \frac{1}{s(t_{RH})}\left(\frac{\rho(t_{RH})}{\rho(t_{osci})}\right) n(t_{osci}) \\
&\simeq \frac{\beta\delta_{eff}}{3\left(1+\frac{n-4}{n-2}\right)} \frac{T_{RH} m_{3/2}}{M_*^2 H_O^2} (H_O M^{n-3})^{2/n-2}
\end{aligned} \tag{4.50}$$

ここで T_{RH} は、inflaton の崩壊による再加熱温度である。また、これまで、Affleck-Dine 場が二次の振動を開始した時期は、宇宙のエネルギー密度は inflaton の振動により支配される物質優勢期にあると仮定してきた。これは以下の条件が満たされれば良い。

$$\begin{aligned}
T_{RH} &< \left(\frac{90}{\pi^2 g_*}\right)^{1/4} \sqrt{m_\phi M_*} \\
&\sim 2.2\times 10^{10}\left(\frac{m_\phi}{1\mathrm{TeV}}\right)^{1/2} \mathrm{GeV}
\end{aligned} \tag{4.51}$$

宇宙論的な gravitino 問題を避けるためには、$T_{RH} \lesssim 10^8 \mathrm{GeV}$ (gravity mediation model) が必要と考えられているので [30],[31]、これが満たされると仮定するのは、非常に自然である。この値は、更なるエントロピー生成がない限り一定である。また、式 (4.50) は、有限温度効果をいれた場合にも適用でき、極めて一般的で重要である。

次に式 (4.46) の寄与を考えてみよう。この場合、上記と同じ議論によって、式 (4.48) に以下の効果が加わる。

$$\begin{aligned}
&2\beta\int^t dt\ R^3\ |\tilde{b}|\frac{H^2}{M_*}\frac{|\phi|^n}{M^{n-3}}\sin\left(\arg(\tilde{b})+n\theta\right) \\
&\text{where}\quad \tilde{b} = b\left(\frac{|I|_{inf}}{H_{inf}}\right)
\end{aligned} \tag{4.52}$$

計算上重要な点は非積分関数の時間に対する振舞である。インフレーション終了後の物質優勢期において、$R^3 \propto t^2$、$|\phi|^n \propto t^{-n/(n-2)}$ なので、左辺はインフレーション終了直後から減少関数である。したがって、今までの議論と異り、積分値は Affleck-Dine 場が振動を開始した時点で決まるのではなく、インフレーション終了時点 t_{inf} で決まることになる。(4.52) の積分を実行すると、この部分からの寄与は以下の様になることが分かる。

$$\begin{aligned}
\left[R^3 n\right](t_{osci}) &\simeq 2\beta\frac{n-2}{2} t_{inf}\left[R^3|\tilde{b}|\frac{H^2}{M_*}\frac{|\phi|^n}{M^{n-3}}\delta\right]\Bigg|_{t_{inf}} \ . \\
\text{where}\quad \delta &= \sin(\arg(\tilde{b})+n\theta)
\end{aligned} \tag{4.53}$$

よって、ここからの数密度 n は以下のようにまとめることができる。

$$
\begin{aligned}
n(t_{osci}) &\simeq \left(\frac{R_{inf}^3}{R_O^3}\right)\beta(n-2)t_{inf}\frac{H_{inf}^2}{M_*}\frac{|\phi|_{inf}^n}{M^{n-3}}\delta \\
&\simeq H_O^2\beta(n-2)\frac{2\,|\tilde{b}|\,\delta}{3M_*}\left(H_{inf}M^{n-3}\right)^{2/n-2} \qquad (4.54)
\end{aligned}
$$

ただし、$|\phi|_{inf} \simeq (H_{inf}M^{n-3})^{1/n-2}$ を使った。式 (4.50) と同じ導出方法より、

$$
\begin{aligned}
\frac{n}{s} &\simeq \beta(n-2)\frac{T_{RH}}{6M_*^3}\,|\tilde{b}|\,\delta\,(H_{inf}M^{n-3})^{2/n-2} \\
&\simeq \beta(n-2)\frac{T_{RH}}{6M_*^3}\,|b|\left(\frac{|I|_{inf}}{H_{inf}}\right)\delta\,(H_{inf}M^{n-3})^{2/n-2} \qquad (4.55)
\end{aligned}
$$

がえられる。この値は、$|I|_{inf} >> H_{inf}$ の時以外は、式 (4.50) の値よりはるかに小さく、最終的な Baryon (Lepton) asymmery に寄与しない。具体的な値については以下の節で見ていくことにする。

4.3.2 C と CP の破れについてのコメント

第三章の議論から、Baryon (Lepton) asymmetry を生み出すには、Baryon (Lepton) 数を破る相互作用と共に、C と CP の破れが必要であった。今の場合これは、Affleck-Dine 場を位相方向に回転させるトルクの役割を果たす。前者は A-term によって供給される。C、CP の破れについてはどうであろう。勿論、A-term には複素成分が入り得るが、インフレーション中に Affleck-Dine 場は位相方向についてもポテンシャルミニマムに落ち着くので、インフレーション終了時には実成分しか含んでいない。重要なのは、通常の A-term と inflaton のエネルギーに由来する $\mathcal{O}(H)$ の A-term の位相がずれていることである。インフレーション終了後、ハッブルパラメータは時間に伴って減少するため、Affleck-Dine 場 ϕ の位相方向のポテンシャルミニマムは時間に伴い変化する。これが、ϕ を位相方向に回転させるトルクを生み出すのである。かりに、$\mathcal{O}(H)$ の A-term しか存在しないとすると、Affleck-Dine 場の位相方向の回転は生まれず、Baryon(Lepton) asymmetry は生まれない。このように、通常の A-term と $\mathcal{O}(H)$ A-term の位相のずれが C と CP の破れを生んでいる。

しかし、$\mathcal{O}(H)$ の A-term が存在せず、通常の A-term のみが存在している場合には事情が異る。この A-term からくる位相方向の曲率は H_{inf} よりはるかに小さいので、インフレーション中は位相方向については ϕ は凍りついており、インフレーション終了時にポテンシャルミニマムにいる保証は全くない。したがって、ϕ の初期値と位相方向のポテンシャルミニマムのずれが、必要な C、CP の破れを供給してくれる。この初期値のずれから、 $H \sim m_\phi$ の時に ϕ は位相方向に大きく回転を始める。計算自体は、式 (4.48) 以降は全く同じであり、最終的な Baryon asymmetry も変わらない。

4.4 The Minimal Supersymmetric Leptogenesis

Baryon asymmetry を生み出すためには、以前述べたように Baryon 数あるいは Lepton 数を破る相互作用が必要であった。これらは R-Parity を保存する理論においては非繰り込み可能な相互

作用として登場し、必然的に我々の直接観測出来る Electroweak スケールより、高いスケールの物理の知識を必要としてしまう。これは、実験とのつながりを希薄にし、ほとんど任意に調節可能なパラメータを理論に持ち込むことになる。しかし、非常に興味深い例外が存在している。我々は観測からニュートリノに質量が存在していることを知っている。例えば、スーパーカミオカンデの大気ニュートリノの観測では、τ ニュートリノとμ ニュートリノの大きな混合と、$\delta \mathrm{m}^2 \simeq 10^{-(2\sim3)}\mathrm{eV}^2$ が示唆されているし、太陽ニュートリノの観測からは、$\delta m^2 \sim 10^{-(5\sim6)}\mathrm{eV}^2$ (MSW solution) あるいは $\delta m^2 \sim 10^{-10}\mathrm{eV}^2$ (vacuum oscillation solution) が示唆されている [34]。これは、紛れもなく Lepton 数の破れが存在することを意味する。この Lepton 数の破れを利用した Leptogenesis が実現できるならば、超対称標準理論の枠組内での、最小限の仮定による Baryon asymmetry の生成が可能になる。これには、超対称性以外の一切の高エネルギースケールにおける仮定を必要としない。実際、この Lepton 数の破れを利用した Affleck-Dine mechanism で、必要な Baryon asymmetry が自然に説明できることが提唱された [29]。最近になって、我々の有限温度効果を含めた研究により、仮にこの機構が有効に働いたとすると、一番軽いニュートリノの質量に非常に強い制限がつけられることが分かった [4]。しかもそれは、観測的にも非常に興味深い帰結を持っている。これら有限温度効果をいれた議論は、第 7 章のテーマである。ここではその準備として、これまで考えられてきた、有限温度効果を考慮にいれなかったモデル [29] について詳しく見ておく。

4.4.1 平坦方向とポテンシャル

ミニマルな超対称標準理論の枠組内で考える。繰り込み可能なスーパーポテンシャルは以下で与えられる。

$$W_{MSSM} = \bar{u}\boldsymbol{y_u} Q H_u - \bar{d}\ \boldsymbol{y_d} Q H_d - \bar{e}\boldsymbol{y_e} L H_d + \mu H_u H_d \tag{4.56}$$

超対称標準理論についての詳しい議論については、[35] 参照。ここでの notation についてもこの文献に従う。Gauge 不変な単項式 (LH_u) で parametrize されるような平坦方向について考える。Gauge 変換によって次ぎの形まで持っていける。

$$L_i = \begin{pmatrix} \varphi_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad H_u = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \tag{4.57}$$

H_u の質量項は超対称性の soft breaking term と同程度の寄与しかしないので、スーパーポテンシャルからの F-term の constraint としては考えない。調べないといけないのは、weak SU(2) と $\mathrm{U}(1)_Y$ の D-flat 条件である。式 (4.57) の形まで持っていったあとは非対角項が消えるので、SU(2) の第三成分と $U(1)_Y$ の D-flat 条件だけである。結局、

$$\sum_i |\varphi_i|^2 - |\varphi|^2 = 0 \tag{4.58}$$

が、最終的な条件となる。この条件を満たせば、soft breaking 項を除いて繰り込み可能な範囲ではこの平坦方向は持ち上がらない。この平坦方向を持ち上げ、さらに Lepton 数を破る重要な項は ニュートリノの質量項である。

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2M_i}(L_i H_u)(L_i H_u) \\ \text{where} \quad m_{\nu_i} &= \frac{v_u^2}{M_i}\ ,\ v_u = \langle H_u \rangle = (174\mathrm{GeV})\sin\beta\ , \end{aligned}$$

$$\tan\beta \equiv \frac{\langle H_u \rangle}{\langle H_d \rangle} \tag{4.59}$$

添字はニュートリノの質量行列を対角化するベースにとっておいた。(4.2.1 節) で議論した通り、インフレーション中に平坦方向はこのスーパーポテンシャルからの F-term と負の $\mathcal{O}(H)$ の質量項が釣り合う所まで転がっていく。ニュートリノの質量が縮退していない限り各世代のスカラーニュートリノ成分の期待値 φ_i には大きな階層が生まれ、$|\varphi_1| \gg |\varphi_{(i\neq 1)}|$ である。したがって、

$$L_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad H_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix} \tag{4.60}$$

とまとめてしまって良い。ここで、添字 "1" はニュートリノの一番小さな質量固有状態に対応する。$\frac{1}{\sqrt{2}}$ は、場 ϕ をカノニカルに規格化する為のものである。式 (4.48) で見た通り、最終的な Lepton asymmetry を求めるにはもっとも平坦な方向を考えれば良いので、これからは一番小さな質量固有状態のみに注目する。この時平坦方向のポテンシャルは、温度効果を含めない場合は、次のように簡単に書くことが出来る。

$$V = (m_\phi^2 - cH^2)|\phi|^2 + \frac{m_{3/2}}{8M}(a_m \phi^4 + \text{h.c}) + \frac{H}{8M}(a_H \phi^4 + \text{h.c}) + \frac{1}{4M^2}|\phi|^6 \tag{4.61}$$

ここで、$c \sim |a_m| \sim |a_H| \sim 1 \quad M = M_1$ である。m_ϕ は通常の soft breaking 質量と、Higgs の μ term から来ており、ϕ の零温度における有効質量を表す。今は、議論を明確にするため通常の A-term に加え、$\mathcal{O}(H)$ の A-term も加えることにする。この項がない場合も (4.3.2 節) の議論から最終的な結果は変わらない。また、最初は (4.3.1 節) の (4.46) の最後の項は無視しておく。この項がある場合の変更点については後で議論する。c が正であるためには、(4.2.1 節) で見たように inflaton との 4 点結合が必要であった。今はこれを仮定して議論を進める。$-c > \mathcal{O}(H)$ であった場合にはこのメカニズムは働かない。

4.4.2 Affleck-Dine 場 ϕ の時間発展

Affleck-Dine 場は次の運動方程式に従う。

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{\phi^*} = 0 \tag{4.62}$$

今の場合インフレーション中の ϕ のポテンシャルミニマムは以下の 4 つである。

$$\begin{aligned} |\phi| &\simeq (MH_{inf})^{1/2} \quad ; \\ \arg(\phi) &\simeq \frac{-\arg(a_H) + (2n-1)\pi}{4} \ , \ n = 1 \sim 4 \end{aligned} \tag{4.63}$$

ここで H_{inf} はインフレーション中のハッブルパラメータである。ϕ はインフレーション中に上記の 4 つの点のどれか一つに落ち着く。後の発展は、(4.2 節) で見たようにポテンシャルミニマムに沿って、

$$\begin{aligned} |\phi(t)| &\simeq (MH(t))^{1/2} \quad ; \\ \arg(\phi(t)) &\simeq \frac{-\arg(a_H) + (2n-1)\pi}{4} \ , \ n = 1 \sim 4 \end{aligned} \tag{4.64}$$

のように $H \sim m_\phi$ まで運動する。ここで、ϕ の位相はほぼ $\mathcal{O}(H)$ の A-term によって決まるが、ハッブルパラメータが時間変化するために、位相方向のポテンシャルミニマムは時間変化する。そのために ϕ は位相方向にキックされ、Lepton asymmetry を生み出す。$H \sim m_\phi$ の時点でポテンシャルの二次の項による振動を開始し、その時点で Lepton 数が固定される。

4.4.3 Lepton asymmetry

(4.3 節) の議論からインフレーションの再加熱終了後には Lepton asymmtery は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{n_L}{s} &\simeq \frac{MT_{RH}}{12M_*^2}\left(\frac{m_{3/2}}{m_\phi}\right)\delta_{eff} \\ \text{where} \quad \delta_{eff} &= \sin(4\arg(\phi(t_{osci})) + \arg(a_m)) = \mathcal{O}(1) \end{aligned} \tag{4.65}$$

ここで、t_{osci} は Affleck-Dine 場が二次振動を開始した時間であり、有限温度効果を考えていない今の場合は、$H(t_{osci}) \simeq m_\phi$ である。ここで、$c \sim |a_m| \sim 1$ を使用している。また、この時期は、inflaton の振動によって宇宙は物質優勢期にあるとした。式 (4.51) を満たせばこの仮定は正しい。

4.4.4 Baryon asymmetry

$T \gtrsim 10^2$GeV では、非節動的な効果である "sphaleron" の効果によって、この Lepton asymmetry は部分的に Baryon asymmtery に変換される [33]。ミニマルな超対称標準理論においては、[36] により、

$$\frac{n_B}{s} = \frac{8}{23}\left|\frac{n_L}{s}\right| \tag{4.66}$$

である。したがって、得られる Baryon asymmtery は、

$$\frac{n_B}{s} \simeq 5 \times 10^{-11}\left(\frac{10^{-6}\text{eV}}{m_{\nu_1}}\right)\left(\frac{\text{T}_{RH}}{10^{8.5}\text{GeV}}\right)\left(\frac{m_{3/2}}{1\text{TeV}}\right)\left(\frac{1\text{TeV}}{m_\phi}\right) \tag{4.67}$$

のように計算される。このように、宇宙論的な gravitino 問題を回避可能な再加熱温度 [30] において、必要な Baryon asymmetry を説明可能である。さて、一番軽いニュートリノの質量はニュートリノの質量行列のモデルに大きく依存するが、MSW Small Mixing Angle Solution や、Vacuum Solution 等では、上記のような値が自然に出て来る [29]。

もっとも、有限温度効果をいれると、はるかに厳しい、ニュートリノ質量に関する制限が存在する。そのときのパラメータ依存性や、観測的帰結については、第 7 章で詳しく議論することになる。

ここではその前に、今まで無視して来た式 (4.46) の最後の項の影響について考えておく。この項からの影響は、(4.3.1 節) で見たようにインフレーション直後に固定されたので、実は有限温度効果を考慮しても変化しない。

4.4.5 $(H^2/M_*)\tilde{b}W$ の項が存在した場合の影響

A-term として、

$$\frac{H^2}{M_*}\tilde{b}W + \text{h.c}$$

$$\text{where} \quad \tilde{b} = b\left(\frac{|I|_{inf}}{H_{inf}}\right) \quad |b| \sim 1 \tag{4.68}$$

の項が存在した場合についてその影響を考える。計算方法については (4.3.1 節) で詳しく調べたので、そこでの結果を単に読み換えれば良い。結果として得られる Baryon asymmetry は、以下のようになる。

$$\frac{n_B}{s} \simeq \frac{8}{23}\frac{T_{RH}}{12M_*^3}|b|\left(\frac{|I|_{inf}}{H_{inf}}\right)\delta\ (H_{inf}M)$$
$$\text{where} \quad \delta \sim |b| \sim 1 \tag{4.69}$$

したがって、

$$\frac{n_B}{s} \simeq 1.5\times 10^{-11}\ |b|\delta\ \left(\frac{10^{-6}\text{eV}}{m_{\nu_1}}\right)\left(\frac{T_{RH}}{10^8\text{GeV}}\right)\left(\frac{|I|_{inf}}{M_*}\right) \tag{4.70}$$

となる。chaotic インフレーションなど、特殊なインフレーションモデルを除いて、$|I|_{inf} \ll M_*$ なので、この項で必要な Baryon asymmetry を生み出すことは不可能である。

4.5 6 次のスーパーポテンシャルを用いた Affleck-Dine Baryogenesis

我々の宇宙を作るのに必要な Baryon asymmetry を加不足なく、現実的なパラメータ内で説明できる Affleck-Dine mechanism を利用した Baryogenesis として、平坦方向が、場の 6 次に比例する非繰り込み可能なスーパーポテンシャルによって持ち上げられているものがある。超対称標準理論における具体的な平坦方向としては、$\bar{u}\bar{d}\bar{d}$ で parametrize されるような方向がある。この単項式で表されるような平坦方向の多くは、

$$W = \frac{1}{6M^3}\left(\bar{u}\bar{d}\bar{d}\right)^2 \tag{4.71}$$

という、6 次のスーパーポテンシャルによって持ち上げられる。5 次、7 次、9 次の スーパーポテンシャルで初めて持ち上げられる平坦方向も存在するが、実は、ケーラーポテンシャル中で inflaton との特殊な coupling が存在しない限り CP を破る項が供給されない。これは、スーパーポテンシャルに比例する形の A-term が零になることによる ([27]、Appendix 参照)。M の大きさに階層性があるならば、インフレーション中にもっとも平坦な方向が選ばれると考えられる。その方向をスーパーフィールド ϕ で parametrize しよう。一つの平坦方向が選ばれなかった場合には複数の平坦方向が同時に存在し、一つのスーパーフィールドで parametrize することは不可能である。そのような場合に Affleck-Dine mechanism が有効に働くかどうかは今のところ詳しく研究されていない。ここでは、もっとも平坦な一つの方向が選ばれたとして計算する。

4.5.1 $(H^2/M_*)\tilde{b}W$ が存在しなかった場合

この場合、有限温度の効果を考慮しないときには以下のポテンシャルを考えればよい。(実は 6 次のスーパーポテンシャルで平坦方向が持ち上げられる場合には有限温度の効果は極めて高温の再加熱温度でない限り存在しないことが後の章で分かる。)

$$V(\phi) = (m_\phi^2 - cH^2)|\phi|^2 + \frac{m_{3/2}}{6M^3}(a_m\phi^6 + \text{h.c}) + \frac{H}{6M^3}(a_H\phi^6 + \text{h.c}) + \frac{1}{M^6}|\phi|^{10} \tag{4.72}$$

式 (4.50) より、最終的な Baryon と Entropy の比は以下のように求められる。

$$\frac{n_B}{s} \simeq \frac{2}{9}\beta\delta_{eff}\frac{T_{RH}m_{3/2}}{M_*^2}\left(\frac{M}{H_O}\right)^{3/2} \tag{4.73}$$

ここで β は Affleck-Dine 場の Baryon 数であり、$\bar{u}\bar{d}\bar{d}$ の場合には 1/3 である。また、$c \sim |a_m| \sim |a_H| \sim 1$ と近似されている。$H_O \simeq m_\phi$ なので、

$$\begin{aligned}
\frac{n_B}{s} &\simeq 4.6\times10^{-11}\beta\delta_{eff}\left(\frac{T_{RH}}{10\mathrm{GeV}}\right)\left(\frac{m_{3/2}}{1\mathrm{TeV}}\right)\left(\frac{1\mathrm{TeV}}{m_\phi}\right)^{3/2}\left(\frac{M}{M_*}\right)^{3/2} &(4.74)\\
&\simeq 3.5\times10^{-10}\beta\delta_{eff}\left(\frac{T_{RH}}{10^5\mathrm{GeV}}\right)\left(\frac{m_{3/2}}{1\mathrm{TeV}}\right)\left(\frac{1\mathrm{TeV}}{m_\phi}\right)^{3/2}\left(\frac{M}{M_G}\right)^{3/2} &(4.75)\\
M_G &\simeq 2\times10^{16}\mathrm{GeV}
\end{aligned}$$

である。これから、n=6 のスーパーポテンシャルによって初めて持ち上げられるような平坦方向を利用した Affleck-Dine mechanism では、一般にかなり低い再加熱温度が必要なことが分かる。勿論、カットオフスケール M を下げれば、ある程度高い再加熱温度も可能である。第三部で見ることになるが、Q-Ball の影響で、$M \sim M_*$ であるモデルは、ほとんど実験的に排除されている。

4.5.2 $(H^2/M_*)\tilde{b}W$ が存在したときの影響

式 (4.55) より、この項からの Baryon asymmetry への寄与は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{n_B}{s} &\simeq \frac{2}{3}\beta|b|\delta\frac{T_{RH}}{M_*^3}\left(\frac{|I|_{inf}}{H_{inf}}\right)(H_{inf}M^3)^{1/2}\\
&\simeq 1.4\times10^{-15}\beta|b|\delta\left(\frac{T_{RH}}{10\mathrm{GeV}}\right)\left(\frac{|I|_{inf}}{M_*}\right)\left(\frac{10^{13}\mathrm{GeV}}{H_{inf}}\right)^{1/2}\left(\frac{M}{M_*}\right)^{3/2} &(4.76)
\end{aligned}$$

一般に $|I|_{inf} \ll M_*$ であるから、この項からの影響は非常に小さい。勿論、再加熱温度を上げれば大きくなるが、そのときは、式 (4.74) の寄与もずっと大きくなる。再加熱温度と M を固定したとき常に式 (4.74) からの寄与がはるかに大きく、この項からの寄与は考えなくても良い。

第5章　有限温度効果を考えない場合の Affleck-Dine Baryogenesis (Gauge Mediation Model)

超対称性は我々の宇宙では自発的に破れていなければならない。その超対称性を破るメカニズムとして、Gravity Mediation Model と並んで、盛んに研究されているものとして、Gauge Mediation Model がある [37, 38, 39]。超対称性を破るにあたっては、現象論から種々の制限が存在するが、その一つに Flavor Changing Neutral Current (FCNC) をいかに抑制するかという問題がある。FCNC を実験と無矛盾になるよう小さく保つには、1、2 世代のスカラークオークの soft breaking mass に高い縮退が要求される。soft breaking mass に高い縮退を生むには、Gravity Mediation Model の場合には高エネルギースケールで非自明な調整が必要になる。Gauge Mediation Model の場合には、超対称性の破れの効果が flavor blind な Gauge 相互作用によって 伝わって来るため、このような問題が自然に解決されることになる。

このモデルの仕組みは非常に大雑把に言って次のようになる。まず、Breking Sector において非摂動効果によって dynamical に超対称性が破られる。その破れは、Messenger Sector に超対称性の破れの効果を引き起こす。Messnger Sector の場は Visible Sector と同じ Gauge 相互作用を持っており、それによって Visible Sector に超対称性の破れが伝えられる。

このモデルの特徴は、超対称性を破るエネルギースケールが Gravity Mediation Model の場合よりも小さく、その結果 gravitino の質量も小さくなっていることと、高いエネルギースケールで超対称性の破れの効果が見えなくなることである。前者は単に超対称性を破るエネルギースケールが低いからであるが、後者も次元勘定によって定性的に理解できる。soft mass は超対称性の破れを拾うためにそのオーダーパラメータに比例する。

$$m_{soft}^2 \propto \langle F_S \rangle^\dagger \langle F_S \rangle \, .$$

次元をあわせると、スケール μ では、

$$m_{soft}^2(\mu^2) \sim \frac{\langle F_S \rangle^\dagger \langle F_S \rangle}{\mu^2}$$

と振る舞う。したがって、高エネルギースケールで soft breakin mass が “shut off” する。その結果、平坦方向のポテンシャルの持ち上がり方が、今までの章で調べて来たものと全く異って来る。当然この場合の Affleck-Dine メカニズムの働き方も以前と違うものになる。

Gauge Mediation Model (GM) における宇宙論的考察は文献 [40] に詳しく議論されている。ここでは、GM における Affleck-Dine Baryogenesis に対する考察もされているが、限定されたモデルについてのものであった。特に、有限温度の影響と近年盛んに研究されている Q-Ball についての考察が新たに必要だ。これらは、後々の章のテーマである。この章では、有限温度効果を無視したときの GM における種々の Affleck-Dine メカニズムについてまとめておこう。

なお、平坦方向を持ち上げるスーパーポテンシャルの存在しない $W = 0$ の場合の Affleck-Dine Baryogenesis についての考察は、Gravity Mediation の場合や [40] で議論されているものも含めて、次の章でまとめて扱う。

5.1 平坦方向の持ち上がり方

ここで [40] にしたがって、平坦方向にたつ有効ポテンシャルについてまとめとく。まず、Breaking Sector において、エネルギースケールが Λ_{DSB} の時に Gauge 相互作用が強くなり、Chiral Superfield の F-term が真空期待値 $\langle F_O \rangle \sim \Lambda_{DSB}^2$ を持つ。宇宙定数が消えるという要請から、gravitino の質量は次のようになる。

$$m_{3/2} = \frac{\langle F_O \rangle}{\sqrt{3} M_*} \sim \frac{\Lambda_{DSB}^2}{M_*} \tag{5.1}$$

次に $\mathrm{U}(1)_{mess}$ 相互作用を積分することによって、Messenger Sector に超対称性の破れが伝わり、その中に A-,F-term が真空期待値を持つ場が現れる。S , F_S。

$$\langle F_S \rangle^{1/2} \sim \frac{g_{mess}^2}{16\pi^2} \Lambda_{DSB}. \tag{5.2}$$

Visible Sector の soft breaking mass は次のスケールによって決定される。

$$\Lambda_{mess} \equiv \frac{\langle F_S \rangle}{\langle S \rangle} = \kappa_{mess} \frac{g_{mess}^2}{16\pi^2} \sqrt{m_{3/2} M_*} \tag{5.3}$$

ここで、$\kappa_{mess} = \mathcal{O}(1)$、$g_{mess}$ は $\mathrm{U}(1)_{mess}$ の Gauge 結合定数である。低エネルギースケール $\mu \ll \langle S \rangle$ においては、soft breaking mass は以下のように与えられる。

$$m_{soft}^2 = C \left(\frac{g^2}{(4\pi)^2} \right)^2 \Lambda_{mess}^2 \tag{5.4}$$

ここで $C = \mathcal{O}(1)$ の定数、g は Visible Sector の Gauge 結合定数である。$m_{soft} \sim 10^2 \mathrm{GeV}$ となるには、

$$\Lambda_{mess} = \frac{\langle F_S \rangle}{\langle S \rangle} \sim 10^5 \mathrm{GeV} \tag{5.5}$$

が必要となる。ここで、$\sqrt{\langle F_S \rangle} \sim \langle S \rangle$ である必要はないことに注意しておこう。必要なのは式 (5.5) で与えられる比だけである。実際、

$$\Lambda_{mess} \ll \sqrt{\langle F_S \rangle} \ll \langle S \rangle \tag{5.6}$$

が可能である [41, 42]。許されるパラメータの範囲としては、

$$\begin{aligned} 10^4 \mathrm{GeV} &\lesssim \sqrt{\langle F_S \rangle} \lesssim 10^{10\sim11} \mathrm{GeV} \\ 10^4 \mathrm{GeV} &\lesssim \langle S \rangle \lesssim 10^{15\sim17} \mathrm{GeV} \end{aligned} \tag{5.7}$$

である。上限は重力の寄与が支配的になるところである。g_{mess} にもそれほど強い条件はついておらず [40]、上の議論と式 (5.1)、(5.2) から、gravitino の質量も大きく変化し得る。$\sqrt{\langle F_S \rangle} \sim \langle S \rangle$ である場合には、$m_{3/2} \sim 100 \mathrm{keV}$ である。

注意すべきことは、GM の場合 gravitino が軽いので宇宙を over close $\Omega_{3/2} > 1$ しないために、再加熱温度に強い制限がついている [40] ことである。これは、gravitino の生成率が温度に比例するためである。

$$T_{RH} \lesssim \begin{cases} 100\mathrm{GeV} \sim 1\mathrm{TeV} & : 2h^2\mathrm{keV} \lesssim m_{3/2} \lesssim 100\mathrm{keV} \\ 10\mathrm{TeV} \times h^2 \left(\frac{m_{3/2}}{100\mathrm{keV}}\right) \left(\frac{1\mathrm{TeV}}{m_{G3}}\right)^2 & : m_{3/2} \gtrsim 100\mathrm{keV} \end{cases} \tag{5.8}$$

ここで、m_{G3} は $SU(3)_C$ の gaugino の質量である。この制限を超えた場合には、後で gravitino を薄めてやる必要がある。

このように、Gravity Mediation の場合よりはるかに厳しい再加熱温度に対する制限がついており、Affleck-Dine mechanism で生成される Baryon asymmetry にも大きな影響を及ぼす。他の Baryon 生成方法ではこのような低い再加熱温度で充分な非対称性を生み出すことはかなり難しい。その意味でも、Affleck-Dine mechanism で必要な Baryon asymmetry が供給されるかどうかを確かめておく必要がある。[40] では $W = 0$ の Affleck-Dine mechanism の場合についての考察があり、最初に大量につくって、後で薄める方法についての議論がある。(この方法は、Q-Ball を考えるとほぼ完全に死んでいる。) しかし、この章では、スーパーポテンシャルを利用して、丁度必要な量を作ることを考えてみる。

次に、平坦方向の、GM からの影響による持ち上がり方について見ておく。平坦方向のポテンシャルはエネルギースケールにしたがって以下のように振る舞う [40]。

$$\begin{aligned} V(\phi) &\sim \left(\frac{g^2}{(4\pi)^2}\right)^2 \Lambda_{mess}^2 |\phi|^2 \qquad \text{for} \quad |\phi| \ll \langle S \rangle \\ V(\phi) &\sim V_0 \left(\ln \frac{|\phi|^2}{\langle S \rangle^2}\right)^2 \qquad \text{for} \quad |\phi| \gg \langle S \rangle \\ \text{where} \quad V_0 &= \frac{g^2}{(4\pi)^4} \langle F_S \rangle^2 \end{aligned} \tag{5.9}$$

ここで、二式目が Gauge 結合定数の二次にしか依っていないのは、場の期待値が大きいときは Gauge 場の質量 $|g\phi|^2$ による surppression が存在するからである。また、式 (5.7) より、

$$10^{11}\mathrm{GeV}^4 \lesssim V_0 \lesssim 10^{39}\mathrm{GeV}^4 \tag{5.10}$$

が得られる。

5.2 6 次のスーパーポテンシャルを用いた Affleck-Dine Baryogenesis

ここでは、非繰り込み可能な 6 次のスーパーポテンシャルによって平坦方向が持ち上がっている場合を考えよう。4 次のスーパーポテンシャルの場合には、必要な Baryon asymmtery を生成することは出来ない (Appendix 参照)。再加熱温度を非常に高くすれば可能であるが、それは、式 (5.8) の制限を満たせず、後で dilution を必要とし、Baryon asymmtery に対する予言能力を失っ

てしまう。6 次のスーパーポテンシャルを用いた場合は、式 (5.8) の制限を満たす非常に低い再加熱温度でも必要な Baryon asymmtery を説明できる可能性がある。これは、後の有限温度効果をいれた議論においても、有効なパラメータ範囲が存在する。また、後の章のテーマになるが、Q-Ball を考慮に入れると Baryon asymmetry と Dark Matter の量に関係がつくことになる。これにより、両者の量の比が説明出来る可能性が生じると共に、宇宙を over close しない必要性から、Affleck-Dine mechanism にこれまで考慮されて来なかった強い制限を課すことになる。

5.2.1 GM< 重力 < スーパーポテンシャル

超対称性が Gauge 相互作用で伝わることによって soft breaking mass を生成する Gauge Mediation Model の場合も、重力相互作用は常に存在しており、高エネルギースケールにおいては重力相互作用による超対称性の破れの効果である $m_{3/2}^2|\phi|^2$ のポテンシャルが支配的になる。さらに非繰り込み可能なスーパーポテンシャルの F-term からの寄与もある。それぞれの寄与が支配的な領域が、タイトルのようになっている場合を考えよう。スーパーポテンシャルは

$$W = \frac{1}{6M^3}\phi^6 \tag{5.11}$$

で与えられ、高エネルギースケールにおける平坦方向の有効ポテンシャルは有限温度効果を無視したとき以下のようになる。

$$\begin{aligned} V(\phi) &= (m_{3/2}^2 - cH^2)|\phi|^2 + V_0\left(\frac{|\phi|^2}{\langle S\rangle^2}\right)^2 \\ &\quad + \frac{m_{3/2}}{6M^3}(a_m\phi^6 + \text{h.c}) + \frac{H}{6M^3}(a_H\phi^6 + \text{h.c}) + \frac{1}{M^6}|\phi|^{10} \end{aligned} \tag{5.12}$$

係数の定義はこれまでと同様である。また、$(H^2/M_*)\tilde{b}W + \text{h.c}$ の項は以前の議論から最終的な Baryon asymmetry に寄与しないことが分かっているのでここには含めていない。この場合の平坦方向のポテンシャルの模式図は (図 5.1) のように与えられる。ここで、$\phi 1$ までが、GM 由来のポテンシャルが支配的な領域であり、$\phi 1 \sim \phi 2$ が $m_{3/2}^2|\phi|^2$ のポテンシャルが支配的な領域であり、それ以上がスーパーポテンシャルからの寄与である。それぞれの値は、ln のファクターを除いて以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \phi 1 &\simeq \frac{V_0^{1/2}}{m_{3/2}} \\ \phi 2 &\simeq (m_{3/2}M^3)^{1/4} \end{aligned} \tag{5.13}$$

$\phi 1 < \phi 2$ が必要であるから、上記の様なポテンシャルが実現するためには以下のような条件がつく。

$$\begin{aligned} m_{3/2} &\gtrsim \left(\frac{V_0^2}{M^3}\right)^{1/5} \\ &\sim 10\text{keV}\left(\frac{M_*}{M}\right)^{3/5}\left(\frac{V_0}{10^{15}\text{GeV}^4}\right)^{2/5} \\ &\sim 1\text{MeV}\left(\frac{M_*}{M}\right)^{3/5}\left(\frac{V_0}{10^{20}\text{GeV}^4}\right)^{2/5} \end{aligned} \tag{5.14}$$

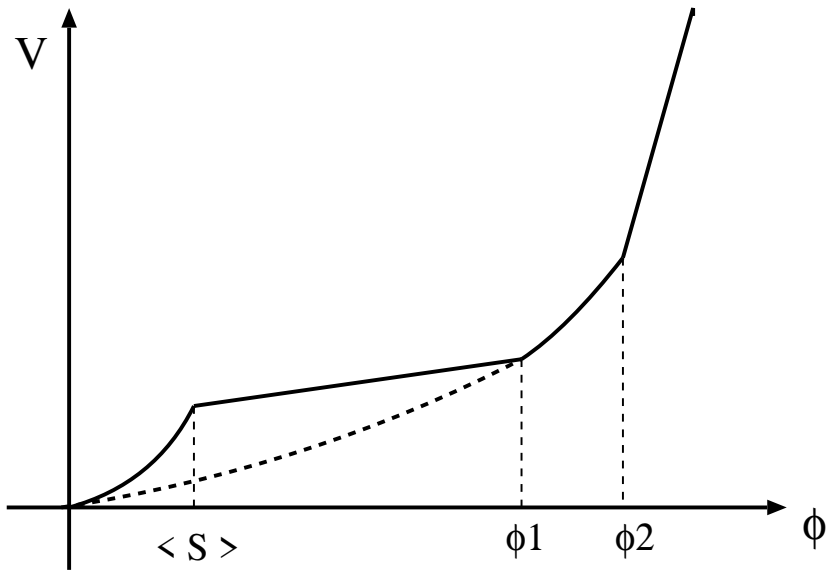


図 5.1: 平坦方向のポテンシャルの模式図

この条件が満たされた場合には、Affleck-Dine 場は $H \sim m_{3/2}$ に振動を開始し、その時点で Baryon 数が固定される。その時点までの Affleck-Dine 場の時間発展は、Gravity Mediation Model で考察したものと全く同じである。

したがって、得られる Baryon asymmetry は式 (4.73) より、以下のように求めることができる。

$$\frac{n_B}{s} \simeq \frac{2}{9}\beta\delta_{eff}\frac{T_{RH}m_{3/2}}{M_*^2}\left(\frac{M}{m_{3/2}}\right)^{3/2} . \tag{5.15}$$

これより、以下のような値が得られる。

$$\frac{n_B}{s} \simeq 4.5\times 10^{-9}\beta\delta_{eff}\left(\frac{T_{RH}}{1\mathrm{GeV}}\right)\left(\frac{M}{M_*}\right)^{3/2}\left(\frac{1\mathrm{MeV}}{m_{3/2}}\right)^{1/2} \tag{5.16}$$

後々の章の、Q-Ball についての議論によって明らかになるが、この式 (5.16) が、BBN に必要な Baryon asymmetry を与えるのではないことに、ここでコメントしておこう。実際には、Q-Ball に Baryon 数のほとんどが閉じ込められてしまい、BBN に必要な Baryon asymmetry は Q-Ball からの蒸発で供給される必要がある。そのようなシナリオが有効に働く条件は、後の章で詳しく議論することになる。

5.2.2 GM< スーパーポテンシャル

さて、式 (5.14) が満たされない場合には $m_{3/2}^2|\phi|^2$ のポテンシャルが支配的になることはなく、GM 由来のポテンシャルが支配的な領域から、直接スーパーポテンシャルからの F-term が支配的な領域につながる。この場合の平坦方向の有効ポテンシャルの模式図は (図 5.2) に示される様なものになる。

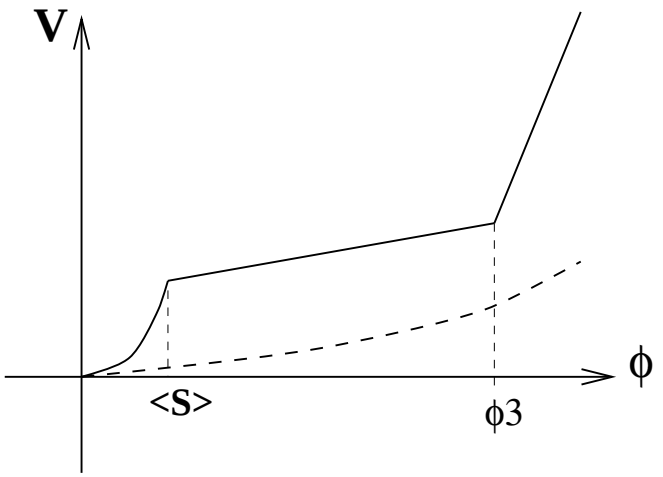


図 5.2: 平坦方向のポテンシャルの模式図

ここで、$\phi 3$ は次の式で与えられる。

$$\phi 3 \simeq (V_0 M^6)^{1/10} \ . \tag{5.17}$$

この場合は Affleck-Dine 場は

$$H \sim \left(\frac{V_0^2}{M^3} \right)^{1/5} \tag{5.18}$$

で振動を開始する。この後、振動の振幅はスケールファクター R の 3 剰に比例して減少する [40]。これを確かめておこう。式 (4.33),(4.34) と同様の議論から、ビリアル定理が適用可能な範囲で、

$$0 = \langle T \rangle - \frac{2}{\ln(|\phi|^2 / \langle s \rangle^2)} \langle V(\phi) \rangle \tag{5.19}$$

が得られる。したがって、$|\phi| \gg \langle s \rangle$ においては、ポテンシャルエネルギーがエネルギーの支配的な成分である。したがって、式 (4.35) は式 (5.19) を用いて以下のように近似できる。

$$\frac{d}{dt} \langle V(\phi) \rangle \simeq -6H \left(\frac{2}{\ln(|\phi|^2 / \langle s \rangle^2)} \right) \langle V(\phi) \rangle \ . \tag{5.20}$$

したがって、上式をもちいて、

$$\frac{d}{dt} |\phi| \simeq -3H|\phi| \tag{5.21}$$

が得られ、ここから $|\phi| \propto R^{-3}$ であることが分かる。このようにポテンシャルが ln で与えられるときにも、Afleck-Dine 場の振幅は振動を開始した後、それまでよりずっと速く小さくなる。式 (5.21) より、式 (4.48) の二項目は $\propto t^{-10}$ で小さくなり (物質優勢期)、これまで同様、Affleck-Dine 場が振動を開始した時点で Baryon 数は固定される。したがって、式 (4.50) は今の場合にも有効である。振動の開始時期は、

$$H^2 |\phi| \sim \left| \frac{\partial}{\partial |\phi|} V \right| \tag{5.22}$$

であたえられ、ln のファクターを無視する近似で、

$$H_O \simeq \left(\frac{V_0^2}{M^3}\right)^{1/5} \tag{5.23}$$

となる。したがって、得られる Baryon asymmetry は式 (4.50) より、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}\frac{n_B}{s} &\simeq \frac{2}{9}\beta\delta_{eff}\frac{T_{RH}m_{3/2}}{M_*^2}M^{3/2}\left(\frac{M^3}{V_0^2}\right)^{3/10} \\ &\simeq 5\times10^{-9}\beta\delta_{eff}\left(\frac{T_{RH}}{10\mathrm{GeV}}\right)\left(\frac{m_{3/2}}{100\mathrm{keV}}\right)\left(\frac{M}{M_*}\right)^{12/5}\left(\frac{10^{20}\mathrm{GeV}^4}{V_0}\right)^{3/5} .\end{aligned} \tag{5.24}$$

ここでも実際には、後の章で分かるとおり Q-Ball が生成され、Baryon asymmetry はそれからの蒸発で供給されねばならない。Q-Ball からの蒸発によって必要な Baryon asymmetry を説明しつつ、Q-Ball の質量密度が宇宙を over close しない為には、Q-Ball の大きさに強い制限がつき、自然に実現するのは非常に難しいことが後に明らかになる。

第6章　$W = 0$ の場合の Afflek-Dine Baryogenesis

これまでの章の議論により、有限温度効果を含めない場合の Affleck-Dine mechanism に対する考察はほぼ終了した。ここまでは、非繰り込み可能なスーパーポテンシャルによって平坦方向が持ち上げられている場合を考えて来た。ここでは、平坦方向を持ち上げるような、非繰り込み可能なスーパーポテンシャルが存在しない場合を考える [1]。この章の議論は有限温度の効果を考慮にいれてもそのまま有効である。これは、今の場合、以下で見るように Affleck-Dine 場の期待値が非常に大きいので直接相互作用している場は熱浴に入らず、それによって、Affleck-Dine 場は熱浴から完全に decouple しているからである。さて、今の場合、Baryon あるいは Lepton 数を破るような相互作用はケーラーポテンシャルから供給されることになる。また、重力の効果が無視できなくなると考えられる M_* ぐらいのスケールまで、平坦方向は soft breaking mass の項以外では持ち上げられず、非繰り込み可能なスーパーポテンシャルが存在した場合に比べてはるかに平坦となる。この場合、後の議論で分かる通り、一般にこれまで議論されて来たよりもはるかに多量の Baryon asymmetry を生み出してしまう。しかし、超対称理論においては、しばしば非常に大きな dilution が必要になる場合があり、その場合に dilution に耐え得る Baryon asymmetry を生み出せるメカニズムは、知られている限り、Affleck-Dine タイプのものだけである [43]。その意味で、場合によってはこの様な Affleck-Dine mechanism が重大な意味を持ち得るのでここで詳しく見ておこう。ただし、ここでも、Q-Ball から非常に大きな困難が生じることを後の章で見ることになる。実際、Q-Ball が生成される場合には、このような機構は、実験的にほとんど排除されている。この章では、Q-Ball を考慮にいれなかった場合に、どのようなことが議論されてきたかを見ておこう。もし、Q-Ball が生成されないような特殊な事情が存在した場合には、以下のようなシナリオが有効になる可能性も存在する。

6.1　Gravity Mediation Model における W=0 Affleck-Dine Baryogenesis

我々の宇宙を記述する理論には弦理論から示唆される “Moduli” や、ある種の超重力理論における、超対称性を破る為に導入された “Polonyi 場” と呼ばれる非常に軽いスカラー場が存在し得る。一般的な解析により、これらの場は、超対称性の破れの影響から gravitino と同程度の質量を持つことが知られている。これらはスカラー場であり、Affleck-Dine mechanism と同様の方法により、インフレーション終了時に場の期待値が $\sim M_*$ になることが予想される。この場合、大量の “Moduli ” あるいは “Polonyi” がコヒーレントに生成され、それらが宇宙のエネルギー密度の支配的な成分となる。このような場合には、“Moduli 問題”、“Polonyi 問題” と呼ばれる宇宙論的な非常に大きな問題が存在する。以下では、これらをまとめて “Moduli”、“Moduli 問題” と呼ぶことする。

勿論、インフレーション中に正の $\mathcal{O}(H)$ の質量をもらい、現在の宇宙における真空と同じ点に場の期待値が回復していれば、以下のような議論は必要ない。しかし、一般にそのようなことが言えるわけではない。ここでは、"Moduli" が大量に作られた場合の宇宙論的問題と、その場合の $W = 0$ の Affleck-Dine mechanism の意味するところについてまとめておく。

6.1.1 Gravity Mediation Model における Moduli Problem

典型的な Moduli や Polonyi 場 (以下簡便のためにまとめて Z で表す) の寿命は以下のように与えられる。

$$\tau_z \sim \left(\frac{N_{ch}}{4\pi}\frac{m_{3/2}^3}{M_*^2}\right)^{-1} \sim 10^3 \text{ sec} \times \left(\frac{m_{3/2}}{1\text{TeV}}\right)^{-3} \tag{6.1}$$

ここで、$N_{ch} \sim \mathcal{O}(10)$ であり、崩壊チャンネルの数を表す。式 (6.1) で分かる通り、Z 場は現在の宇宙の質量密度には寄与せず、宇宙を over close してはならないということからの制限はつかない。しかし、これは、ビッグバン標準元素合成理論 (BBN) を台無しにする可能性を含んでいる。

Z 場の質量密度は、中性子が熱浴から decouple するとき (T$\sim$1MeV) の、宇宙の膨張率を速めることによって、$^4\text{H}_e$ の over production を引き起こす。また、Z 場の崩壊によって生じるフォトンのカスケードは軽元素を破壊してしまう。以上のような問題を避けて BBN が有効に働くために、Z のエネルギー密度に厳しい制限がついている。Z の寿命によって、以下のような制限が存在する [44, 45]。

$$\begin{aligned}
\tau_z &\lesssim 10^4 \text{ sec} & \frac{\rho_z}{s} &\lesssim 10^{-5}\text{GeV} \\
\tau_z &\lesssim 10^{(4\sim5)}\text{sec} & \frac{\rho_z}{s} &\lesssim 10^{-7}\text{GeV} \\
\tau_z &\gtrsim 10^7\text{sec} & \frac{\rho_z}{s} &\lesssim 10^{-13}\text{GeV}
\end{aligned} \tag{6.2}$$

最後の制限は $m_{3/2} \lesssim 100\text{GeV}$ に対応していている。これらの強い制限を満たすには、例えば、Thermal inflation 等による ρ_z の dilution が必要になる [48]。

必要な dilution の大きさを見積もっておこう。Z 場は $H \simeq m_{3/2}$ の時に $\simeq M_*$ の振幅を持っていたことを思い出すと、inflaton による再加熱終了後に、

$$\frac{\rho_z}{s} \simeq \frac{3}{4}T_{RH}\frac{\rho_z(t = 2/3m_{3/2})}{3m_{3/2}^2M_*^2} \simeq \frac{1}{4}T_{RH} \tag{6.3}$$

である。したがって、BBN からの条件を満たすためには 10 桁を超えるような dilution が必要になることが分かる。但し、

$$T_{RH} \lesssim \left(\frac{90}{\pi^2 g_*}\right)^{1/4}\sqrt{m_{3/2}M_*} \simeq 2.3 \times 10^{10}\text{GeV}\left(\frac{m_{3/2}}{1\text{TeV}}\right)^{1/2} \tag{6.4}$$

を仮定した。この仮定が満たされない場合は、

$$\frac{\rho_z}{s} \simeq \frac{1}{4}\left(\frac{90}{\pi^2 g_*}\right)^{1/4}\sqrt{m_{3/2}M_*} \simeq 5.7 \times 10^{9}\text{GeV}\left(\frac{m_{3/2}}{1\text{TeV}}\right)^{1/2} \tag{6.5}$$

となる。実際、このような dilution を行うことが出来たとしよう。問題は、このときに、存在する Baryon asymmetry も同じように薄められてしまうことである。このために、必要な Baryon

asymmetry を供給するには、dilution 後に Baryion asymmetry を生み出すか、初期に大量に作っておくかのどちらかである。ここでは、$W = 0$ の Affleck-Dine mechanism を用いた、後者の可能性について議論する。

6.1.2 W=0 Affleck-Dine Baryogenesis

今の場合は、平坦方向を持ち上げる様な、非繰り込み可能なスーパーポテンシャルが存在しない。勿論以前の章に出て来たような A-term は存在しない。したがって、Baryon 数、あるいは Lepton 数を破るような項は、ケーラーポテンシャルから供給されねばならない。元々の Affleck と Dine の論文 [1] では、次のような項がケーラーポテンシャルに含まれていると考えていた。

$$\delta K \ni \frac{a_1}{M_*^2} Q \bar{u}^* L \bar{d}^* + \frac{a_2}{M_*^2} Q^* \bar{u} Q^* \bar{e} + \text{h.c} + \dots \tag{6.6}$$

これらは、$B - L$ を保存してる。この場合、"sphaleron" により、Baryon asymmetry は消されてしまう。勿論これ以外にも沢山候補があり、$B - L$ を破るようなものも構成できる。これには、適当に Gauge 不変な単項式をくみあわせて、他の対称性に矛盾しない項をつくれば良い。ここで、最終的な Baryon asymmetry はケーラーポテンシャルの次数によらないことに注意しておこう。これは、平坦方向の場の期待値が $\sim M_*$ になることによる。

具体的な例で考えていこう。いま、ケーラーポテンシャルから $B - L$ を破る項が供給される場合を考える。また、簡単のために平坦方向を一つのスーパーフィールドで表せるものと仮定する。これは、一般的には正しくないが、得られる Baryon asymmetry の結果は大きく変わることはないと思われる。平坦方向のポテンシャルとして以下の様なものを考える。(4.1.2 節)

$$\begin{aligned} V(\phi) = (m_\phi^2 - cH^2)|\phi|^2 \quad &+ \quad \left(a_m \frac{m_{3/2}^2}{M_*^{n+2}} \phi^{n+4} + \text{h.c} \right) \\ &+ \quad \left(a_H \frac{H^2}{M_*^{n+2}} \phi^{n+4} + \text{h.c} \right) + \dots \end{aligned} \tag{6.7}$$

ここで、$c \sim |a_m| \sim |a_H| \sim \mathcal{O}(1)$, $m_\phi \simeq m_{3/2}$ である。... は超重力理論 (SUGRA) のスカラーポテンシャルから供給される高次の項である。平坦方向がケーラーポテンシャルのみで持ち上げられている今の場合には、Affleck-Dine 場 ϕ の初期値は $\simeq M_*$ であり、$H \simeq m_\phi \simeq m_{3/2}$ で二次のポテンシャルによる原点まわりの振動を開始するまで、凍りついている。したがって、$H \simeq m_{3/2}$ で振動を開始したときに、Baryon 数が作られ初め、すぐに固定される。

$$\begin{aligned} n_B(t_{osci}) \quad &\simeq \quad \frac{1}{3H_O} \frac{m_{3/2}^2}{M_*^{n+2}} |\phi(t_{osci})|^{n+4} \delta_{eff}\ \beta \\ \text{where} \quad H_0 \quad &= \quad \frac{2}{3t_{osci}} \simeq m_{3/2}\ ,\ \delta_{eff} = \sin(\arg(a_m) + (n+4)\theta) \end{aligned} \tag{6.8}$$

ここで、β は対応する平坦方向の Baryon 数 (荷数) である。Affleck-Dine 場は崩壊先の粒子の有効質量が m_ϕ 以下になるまで崩壊出来ない。熱浴中の粒子は、Thermal mass を受け取るため、宇宙の温度が (TeV $\sim 10^2$GeV) 位までは、Affelck-Dine 場は崩壊出来ないことになる [46]。(特にフェルミオンの有効質量については、[14, 47] を見よ。) これは、[1] では見落とされていた。さて、インフレーション後の再加熱温度が条件式 (6.4) を満たす場合を考えよう。再加熱後の Baryon

asymmetry は次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{n_B}{s} &\simeq \frac{3}{4}T_{RH}\frac{1}{3H_O^2M_*^2}n_B(t_{osci}) \\ &\simeq \frac{T_{RH}}{12m_{3/2}}\,\beta\delta_{eff} \gg 1 \end{aligned} \tag{6.9}$$

次に、再加熱温度が高く式 (6.4) を満たさない場合を考えよう。この場合には、$t = t_{osci}$ における温度が、

$$T = \left(\frac{90}{\pi^2 g_*}\right)^{1/4}\sqrt{m_{3/2}M_*} \tag{6.10}$$

で与えられる。したがって、Baryon asymmetry は式 (6.9) のかわりに以下で与えられる。

$$\frac{n_B}{s} = \frac{1}{12}\left(\frac{90}{\pi^2 g_*}\right)^{1/4}\left(\frac{M_*}{m_{3/2}}\right)^{1/2}\beta\delta_{eff} \gg 1\,. \tag{6.11}$$

但し、$H_O \simeq m_{3/2}$, $|\phi|(t_{osci}) \simeq M_*$ を使った。さて、Affleck-Dine 場は、$H \simeq m_\phi \simeq m_{3/2}$ の時に

$$\rho_\phi \simeq m_{3/2}^2 M_*^2 = \frac{1}{3}\rho_{tot} \tag{6.12}$$

のように、ほとんど宇宙全体のエネルギー密度と等しいエネルギー密度を持っている。スケールファクターを R と書くと、inflaton からのエネルギー密度は、再加熱終了後、$\propto R^{-4}$ で減少するのに比べて、Affleck-Dine 場のエネルギー密度は $\propto R^{-3}$ でしか落ちない。したがって、インフレーションの再加熱終了後、間もなく、Affleck-Dine 場のエネルギー密度が宇宙のエネルギー密度の支配的な成分となる。したがって、以前の章と違い、今の場合は最終的な Baryon asymmetry を計算するのに、Affleck-Dine 場の崩壊による再加熱からの dilution を考慮にいれてやらねばならない。Affleck-Dine 場による dilution factor は以下の様に計算される。

$$\Delta_\phi^{-1} \equiv \frac{s_{before}}{s_{after}} = \frac{3}{4}T_\phi\frac{s_{before}}{\rho_\phi}. \tag{6.13}$$

ここで、T_ϕ は ϕ の崩壊による再加熱温度である。s_{after} , s_{before} はそれぞれ、ϕ の崩壊後、崩壊前のエントロピー密度を表している。したがって、最終的な Baryon asymmetry は

$$\begin{aligned}\frac{n_B}{s} &\simeq \frac{1}{\Delta_\phi}\frac{n_{B\,before}}{s_{before}} \\ &\simeq \frac{3}{4}\frac{T_\phi}{m_\phi} \lesssim \mathrm{O}(1) \end{aligned} \tag{6.14}$$

となる。ここで、Affleck-Dine 場のエネルギー密度が宇宙のエネルギー密度の支配的な成分となる場合には、インフレーション後の再加熱温度に依らずに、つまり、n_B/s が式 (6.9) で与えられる場合にも式 (6.11) で与えられる場合にも、$n_B/s \sim \mathcal{O}(1)$ となることに注意しておこう。

仮にカットオフスケールがプランクスケールより充分小さく、丁度必要な Baryon asymmetry を作る可能性についても調べておこう。今、カットオフスケールが M であり、$\phi_0 \sim M$ から Affleck-Dine 場が振動を開始すると思うことにする。ここで、カットオフスケール M とは、ケーラーポテンシャル中に M で surppression された、非繰り込み可能な項が現れるという、単純な意味で

考えている。つまり、式 (6.7) で、$M_* \to M$ となるような場合を念頭においている。式 (6.8) と (6.9) を導いたのと同様にして、

$$\frac{n_B}{s} \simeq \frac{1}{12}\left(\frac{T_{RH}}{m_{3/2}}\right)\left(\frac{M}{M_*}\right)^2 \beta\delta_{eff} \tag{6.15}$$

が得られる。但し、式 (6.8) においては $M_* \to M$ を行い、式 (6.9) はそのままである。この場合の n_B/s の等高線プロットを (図 6.1) にあげておく。但し、カットオフスケールが小さい場合には、今のように、スーパーポテンシャルによる平坦方向の持ち上げが存在しない場合にも、有限温度効果が存在し得る。有限温度効果についての議論は次章に回すことにする。(図 7.21) と (図 7.22) 参照。

さて、カットオフスケールが M_* の場合に議論を戻そう。後に大きな dilution が存在しないならば、この様なモデルは宇宙論的に興味のないものである。しかし、(6.1.1 節) で見たような "Moduli" 問題が存在した場合には、式 (6.2) を満たすように大量の late time entropy production (あるいは インフレーション) が必要となる。その場合に、必要な Baryon asymmetry を説明するには、この W=0 の Affleck-Dine mechanism が必要となってくると思われる。以下で、それを具体的に見ていこう。Affleck-Dine 場 ϕ と Z が、二次ポテンシャルによる原点まわりの振動を開始した後、Baryon 数密度と、Moduli あるいは Polonyi 場 Z のエネルギー密度の比は、以下のように与えられる。但し、"Moduli" が一つの場合について考える。

$$\frac{n_B}{\rho_z} \simeq \frac{1}{m_{3/2}^2 M_*^2} n_B(t_{osci}) \tag{6.16}$$

この比は、inflaton や Affleck-Dine 場が崩壊して、エントロピーが生成されたときも一定である。この式と、式 (6.8) より、最終的な Baryon asymmetry は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{n_B}{s} &\simeq \left(\frac{\rho_z}{s}\right)\frac{1}{m_{3/2}^2 M_*^2} n_B(t_{osci}) \\ &\simeq \left(\frac{\rho_z}{s}\right) \times \frac{1}{3m_{3/2}}\delta_{eff} \ . \end{aligned} \tag{6.17}$$

ここで、式 (6.2) から、ρ_z/s には、強い制限がついている。例えば、$m_{3/2} \sim (200 \sim 400)$GeV ならば、二つ目の制限を使って、

$$\frac{n_B}{s} \lesssim 10^{-10} \times \left(\frac{300\text{GeV}}{m_{3/2}}\right) \tag{6.18}$$

である。したがって、このような場合には、必要な dilution を行った後に、BBN に必要になる Baryon asymmetry を残しておくことが可能である。また、Z の質量 $\sim m_{3/2}$ が小さく、特に、100GeV 以下であった場合には、式 (6.2) の制限を見れば分かる通り、$W = 0$ の Affleck-Dine mechanism を利用しても必要な Baryon asymmetry を説明することは出来ず、"Moduli" 問題は非常に困難な問題となる。但し、Thermal inflation 後に、Affelck-Dine mechanism を引き起こす込み入ったモデルも存在している [49]。それ以外の場合についても、必要な Baryon asymmetry を丁度作るには、dilution の量に非常に強い tuning が必要であり現実的とは思えない。後の章で Q-Ball についての議論をするが、以前述べた通り、Q-Ball が生成される場合には、このようなシナリオは、ほとんど実験的に排除されていることが明らかになる。

6.2 Gauge Mediation Model における $W = 0$ Afflec-Dine Baryogenesis

前節で、Gravity Mediation Model における "Moduli 問題" と、その場合の $W = 0$ Affleck-Dine Baryogenesis の可能性について議論した。以上の議論を Gauge Mediation Model についても行ってみよう。

6.2.1 Gauge Mediation Model における Moduli Problem

Moduli 場は、gravitino と同程度の質量を持つわけであるが [50]、超対称性を破るスケールが低い Gauge Mediation Model の場合には、その寿命が非常に長くなり、宇宙論的な問題点も Gravity Mediation Model の場合と全く異るものになる。寿命は、

$$\tau_z = 1/\Gamma_z \ \sim \ \left(\frac{m_{3/2}^3}{8\pi M_*^2}\right)^{-1} \ \sim \ 3\times 10^{18}\text{years}\ \left(\frac{100\text{keV}}{m_{3/2}}\right)^3 \tag{6.19}$$

のように非常に長くなる。したがって、新たなエントロピーの生成による dilution が存在しない場合には、そのエネルギー密度は容易に宇宙を over close してしまう。これからついて来る制限は、

$$\frac{\rho_z}{s} \ \leq \ \frac{\rho_c}{s} = 3.6\times 10^{-9} h^2 \text{GeV} \tag{6.20}$$

である。インフレーションの再加熱終了後には、

$$\frac{\rho_z}{s} \ \simeq \ \begin{cases} \frac{1}{4}T_{RH} & \text{for} \quad T_{RH} < T_* \\ \\ \frac{1}{4}\left(\frac{90}{\pi^2 g_*}\right)^{1/4}\sqrt{m_{3/2}M_*} & \text{for} \quad T_{RH} > T_* \end{cases}$$

$$\text{where} \quad T_* \ = \ \left(\frac{90}{\pi^2 g_*}\right)^{1/4}\sqrt{m_{3/2}M_*}$$

となる。したがって、宇宙を over close してはならないという制限、式 (6.20) を満足する為には、15 桁近い dilution が必要になる。勿論であるが、このとき gravitino は充分 dilute されている。このような dilution には、前節において述べた様に、Thermal inflation 等が必要になる。さて、そのような Moduli の dilution が実行出来た場合に、$W = 0$ の Affleck-Dine mechanism が必要な Baryon asymmetry を供給出来るか、前節と同様にして議論してみよう。

6.2.2 Gauge Mediation Model における $W = 0$ Affleck-Dine Baryogenesis

計算方法は、$m_{3/2}$ が小さくなるだけで、式 (6.16) 以降の解析は同じである。Moduli 場と Affleck-Dine 場は共に、$H \simeq m_{3/2}$ の時に振幅 $\simeq M_*$ を持って振動を開始すると考えられる。前節と同様にして、最終的な Baryon asymmetry は、

$$\begin{aligned} \frac{n_B}{s} \ &\simeq \ \left(\frac{\rho_z}{s}\right)\times\frac{1}{3m_{3/2}}\delta_{eff} \\ &\lesssim \ 6.0\ \times 10^{-6}\left(\frac{100\text{keV}}{m_{3/2}}\right) \qquad \text{for} \quad h = 0.7 \end{aligned} \tag{6.21}$$

となり、Affleck-Dine mechanism で必要な Baryon asymmetry を供給できる可能性はある。ただし、前節同様、丁度必要な量の Baryon asymmetry を生成するには、dilution の量に非常に強い tuning が必要となる。また、Gravity Mediation Model の場合と同様に、Q-Ball を考慮にいれると、以上のようなシナリオは、ほとんど排除されてしまう。

ここでも、Gravity Mediation のものと同じくカットオフスケールが小さい場合に ($M \ll M_*$)、丁度必要な Baryon asymmetry を説明する可能性について調べておく。簡単の為に Gauge Mediation の効果による log ポテンシャルより重力効果からのポテンシャルの方が支配的であるとする。この場合、Affleck-Dine 場の振動開始時期は gravitino mass $m_{3/2}$ で決まる。この仮定は、

$$m_{3/2}^2 \gtrsim \frac{V_0}{|\phi_0|^2} \simeq \frac{V_0}{M^2} \tag{6.22}$$

であれば正しい。計算事態は、Gravity Mediation Model におけるものと同じである。Baryon asymmetry の等高線プロットを (図 6.2) にあげておく。なお、高温においては、有限温度効果による Affleck-Dine 場の Early Oscillation が起こり得る。有限温度効果による変更点については次章の議論を参照。

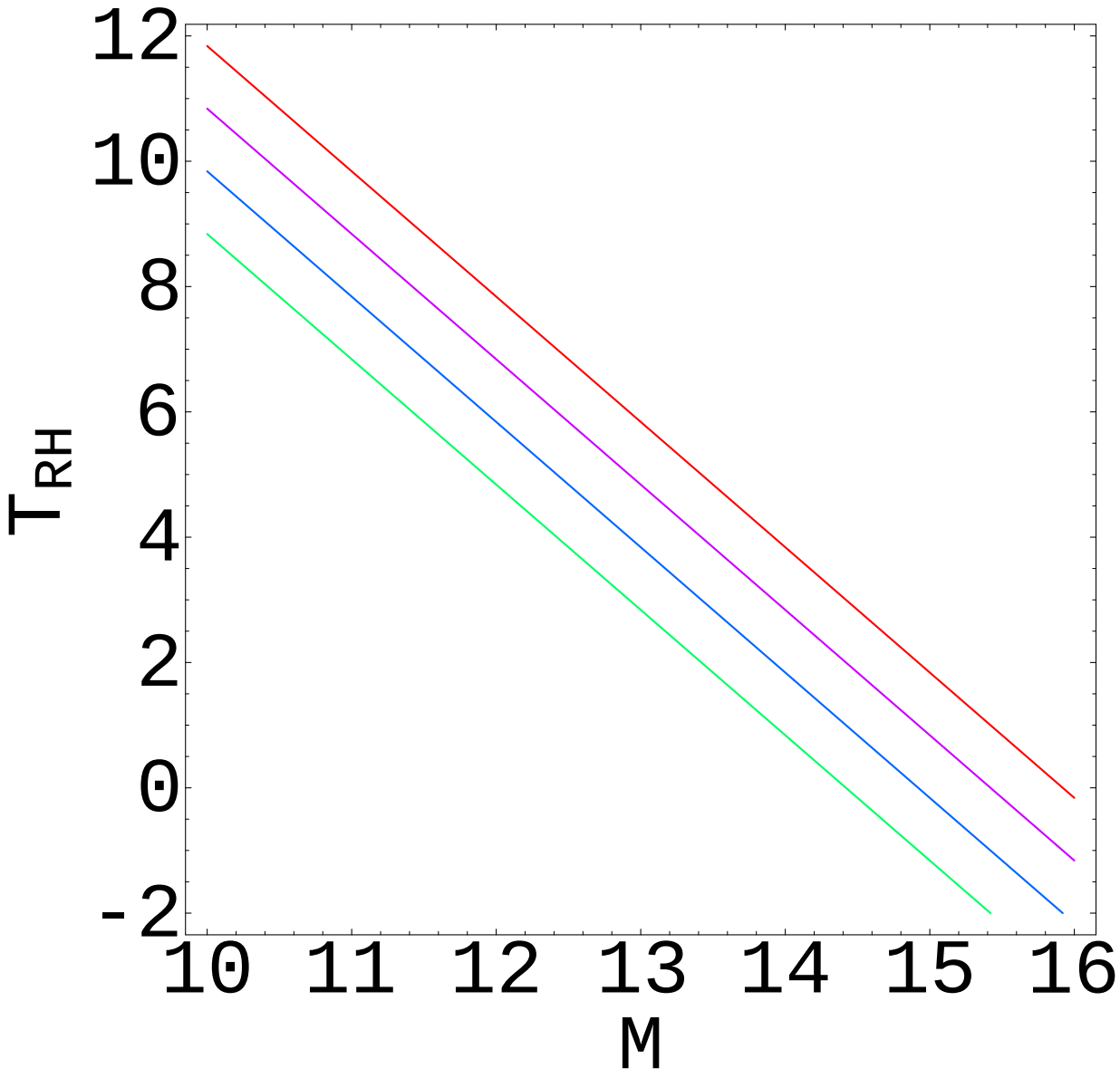


図 6.1: $m_{3/2} \simeq 1\mathrm{TeV}$ の場合の n_B/s の等高線プロット; 左から順に、10^{-12} , 10^{-11} , 10^{-10} , 10^{-9} を表している。また、横軸、縦軸ともに $10^x\mathrm{GeV}$ を単位に書かれている。これから分かるように、必要な量を丁度作るには $M \sim 10^{13}\mathrm{GeV} \ll M_{GUT}$ が必要である。ここには有限温度効果は入れてない。低いカットオフスケールにおいては有限温度効果が効き得る。この場合については次章の議論と (図 7.21)、(図 7.22) を参照せよ。

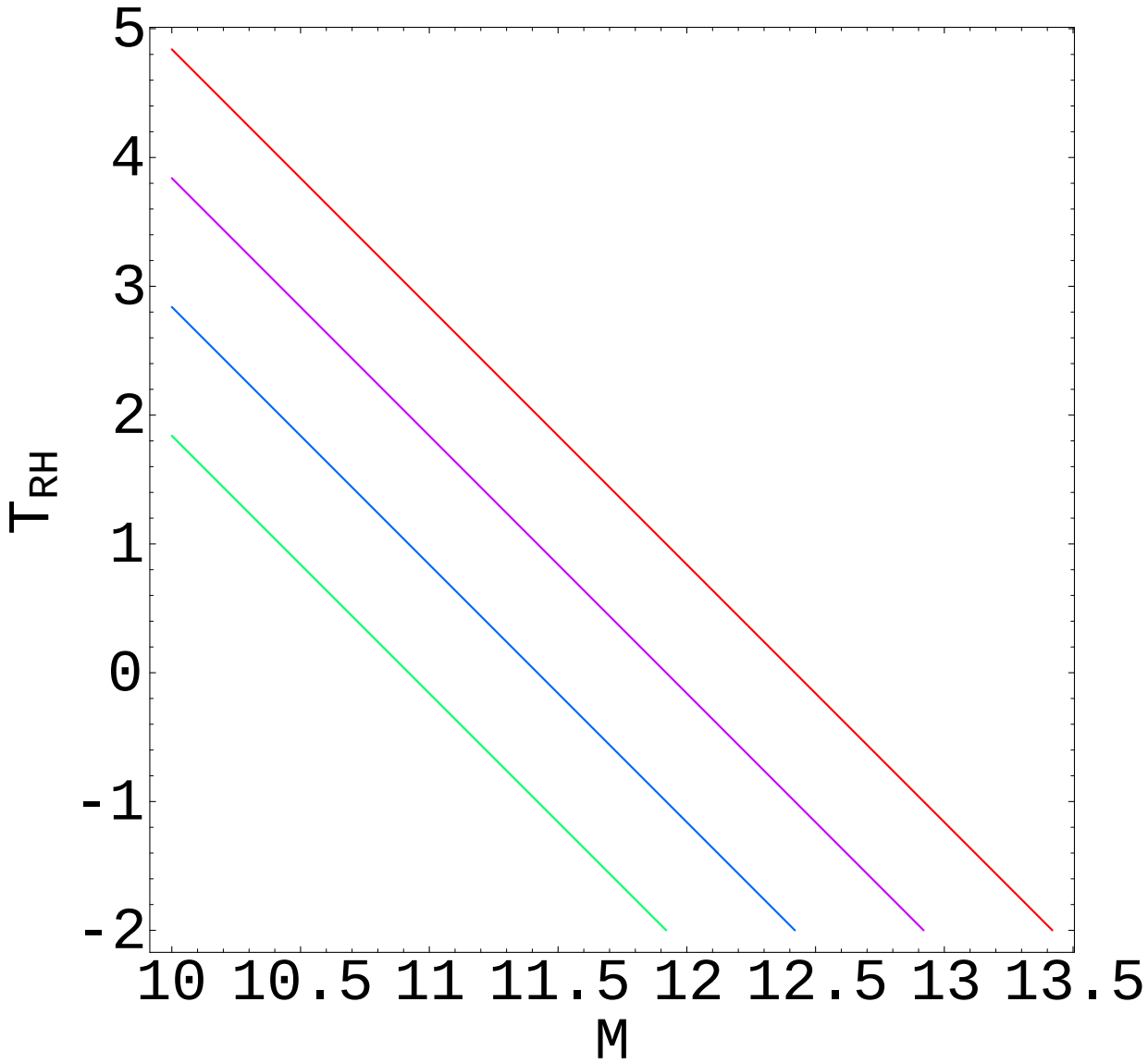


図 6.2: $m_{3/2} \simeq 10^2$keV の場合の n_B/s の等高線プロット;左から順に、10^{-12} , 10^{-11} , 10^{-10} , 10^{-9} を表している。また、横軸、縦軸ともに 10^xGeV を単位に書かれている。これから分かるように、必要な量を丁度作るには $M \sim 10^{11}\mathrm{GeV} \ll M_{GUT}$ が必要である。ここには有限温度効果は入れてない。また、簡単のために、Gauge Mediation によるポテンシャルより、重力効果からくるポテンシャルが支配的であるとした。低いカットオフスケールにおいては有限温度効果が効き得る。この場合については次章の議論を参照せよ。

第7章　Affleck-Dine Baryogenesis における有限温度効果

これまで、Affleck-Dine mechanism を詳しく議論して来たが、非常に重要になり得る、有限温度効果をずっと考慮に入れて来なかった。特に、インフレーションの再加熱終了前にも、つまり、inflaton のコヒーレントな振動が宇宙のエネルギー密度を支配しているときにも高温のプラズマが存在している (1.3 節)。この章では、有限温度効果を考慮に入れたときの変更点について議論する。有限温度効果を入れた場合には、後の議論で分かる通り、Affleck-Dine 場の原点まわりの振動を開始する時期が大きく変化し得る。これは、これまでの章における議論から分かる通り、帰結する Baryon asymmetry を大きく変えることになる [3, 4]。また、Baryon asymmetry が固定された後の、Affleck-Dine 場の崩壊の仕方についても、新しい知識を与えてくれる (Appendix 参照)。これらは、後の Q-Ball の生成についても大きな意味を持つことになる。

第二章で見たように、有限温度では式 (2.111) に現れているような温度に依存するポテンシャルが存在した。簡単な例を使って具体的に見てみよう。次の、簡単なスーパーポテンシャルを用いて考える。

$$W = \frac{1}{2} y\, \phi\, q\, q \tag{7.1}$$

ここで、y は湯川結合定数、ϕ , q はそれぞれスーパーフィールドである。ϕ には、soft breaking mass term があるとしよう。したがって、以下のようなポテンシャルを考えることになる。

$$V = m^2|\phi|^2 + |y|^2|\phi|^2|q|^2 + \left(\frac{1}{2} y\phi\psi_q\psi_q + \text{h.c}\right) . \tag{7.2}$$

この系を有限温度にしたときの ϕ に対する有効ポテンシャルの変化を見てみよう (図 7.1)。(図 7.1) で、温度は 1 に規格化してあり、soft mass はこれよりずっと小さい。いま、湯川結合定数 y は 0.1 にとってある。ここで、上側の線は $T = 0$ のときに対応するもので、下側の線は $T = 1$ に対応する。図を見て分かるように $\phi \lesssim 10 \leftrightarrow |y\phi| \lesssim T$ では、式 (2.111) の J_B , J_F の低次の展開が良い近似となっており、特に、T^2 に比例する Thermal mass をもっている。逆に、$|y\phi| \gg T$ つまり、$\phi \gg 10$ では、有限温度効果は指数関数的に surppress されて、零温度のポテンシャルに等しくなる。さて、有限温度系における有効ポテンシャルは、熱力学の言葉で言うと、自由エネルギー密度に対応する。正確には、Grand ポテンシャル密度だが、化学ポテンシャルが存在しない場合は両者は等しい。(数値計算における、化学ポテンシャルの扱いについては、注意が必要なので後で議論する。)
(図 7.1) から分かる通り、一般に有限温度効果を入れた有効ポテンシャルは、$T = 0$ の有効ポテンシャルより低い値を持っているが、それは $F = E - TS$ の二項目の効果である。

以下で、Minimal Supersymmetric Leptogenesis を例にとって有限温度効果を詳しく議論していくことにする [4]。その後、これを基にして、他の Affleck-Dine mechanism に対する有限温度効果についても見ていく。

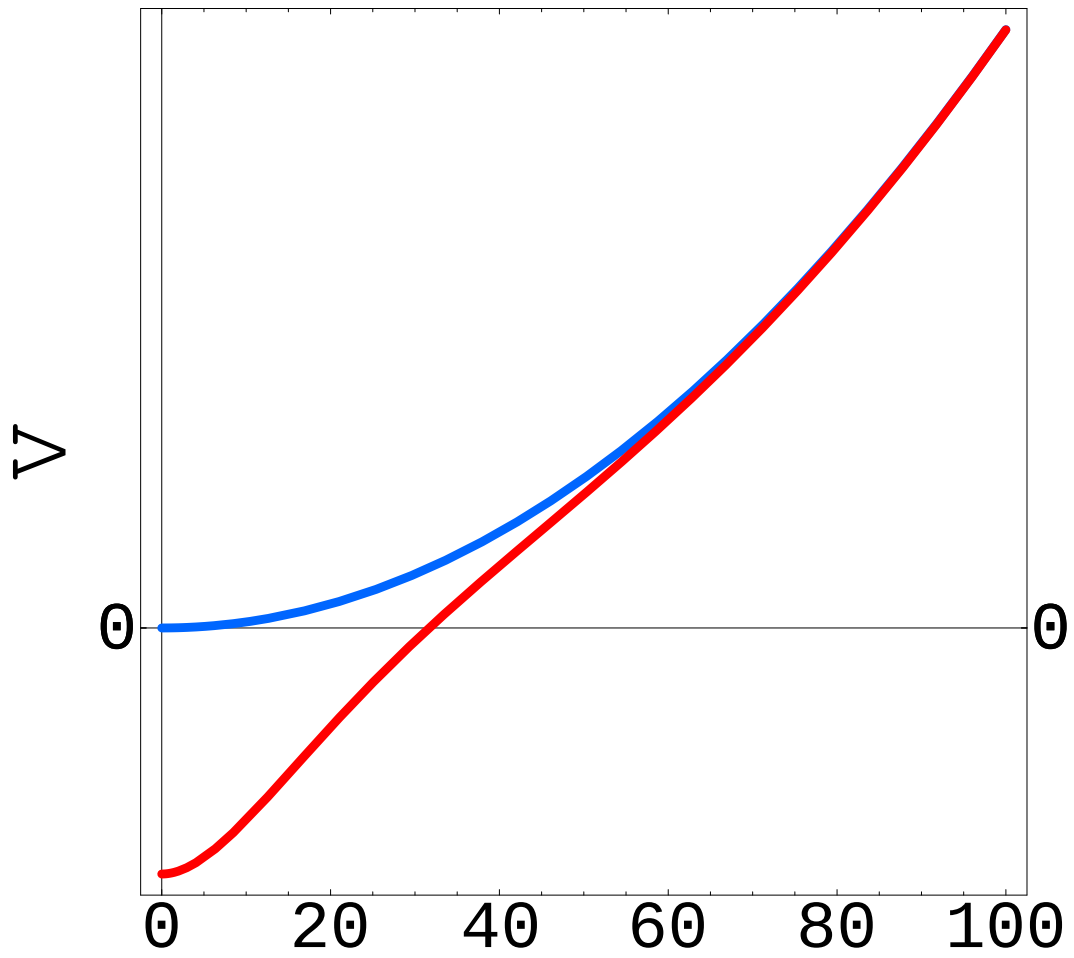


図 7.1: 温度効果による有効ポテンシャルへの補正；横軸は $|\phi|$、下側の実線が有限温度効果を入れたもので、上側の実線は零温度におけるポテンシャルを表す。

7.1 有限温度効果を考慮した、Minimal Supersymmetric Leptogenesis

7.1.1 One Loop からくる有限温度効果

One Loop Order で効いて来る有限温度効果については、第 2 章で詳しく議論した。(実は、[4] でも見落とされていた Two Loop Order で効いて来る効果があり [26]、それについては、次の節で考察する。)

今興味のある平坦方向のポテンシャルに、One Loop Order で効いて来るのは、平坦方向 ϕ に直接カップルしている場 (ψ と書こう) が熱浴に入ることに依るものである。この効果は、ψ の有効質量が温度を超える領域では、指数関数的に suppress される。これは、式 (2.98)、(2.108) に与えられている J_B, J_F の定義を見れば容易に分かる。

そこで、[4] にしたがって、有限温度効果を次のように近似していこう。ψ_k の有効質量は $f_k|\phi|$

と書ける。ここで、f_k は湯川、あるいは Gauge 結合定数である。$f_k|\phi| \lesssim T$ ならば、ψ_k が熱浴に入った効果をいれる。さらに、J_B, J_F の展開において、二項目までで近似する。ここで、一項目は場に依存しないので無視してよい。三項目以降は、$f_k|\phi| \sim T$ の時に重要だが、元々、そのような領域では、有限温度効果は大きく surppress され始めているので、ϕ の振動開始時期を見積もる今後の議論には不要であろう。つまり、$f_k|\phi| < T$ では、零温度の有効ポテンシャルに、$c_k f_k^2 T^2 |\phi|^2$ のポテンシャルを立てる。ここで、c_k は場の自由度で決まる定数であり、式 (2.122) を利用すれば容易に求めることが出来る。

ここで、ϕ の『時間発展』を追う際には、Baryon Charge に伴う化学ポテンシャルを有効ポテンシャルに加えないことに注意しよう。第 9 章での議論で分かるが、化学ポテンシャルを含む項は、ϕ に対して、Charge が存在することによる effective な遠心力を与えることになる。熱力学は平衡にある静的な系を扱うので、この項を加えないと、ϕ が複素平面上を回転している Charge の存在効果が出せないのである。ここでのように ϕ の時間発展、つまり、複素平面上の ϕ の回転をあらわに追う場合は、これは、自動的に供給される。勿論、熱力学的なポテンシャルを使用しつつ、時間発展を追うようなこれからの議論が正当化される為には、ϕ の時間発展より、Thermal mass term をたてるような相互作用の時間スケールが短くなければならないが、以下の議論において、これは定義から満足される。なぜなら Affleck-Dine 場が Thermal mass term で振動する場合には、その振動の時間スケールは、

$$\tau \sim \frac{1}{f_k T}$$

であり、これは定義から、$f_k T$ を生じさせる相互作用が熱平衡に入る時間スケールより長いからである。したがって、平坦方向 LH_u に対して、次のようなポテンシャルを考えることになる。式 (4.61) 参照。

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \left(m_\phi^2 - cH^2 + \sum_{f_k|\phi|<T} c_k f_k^2 T^2 \right) |\phi|^2 \\ &+ \frac{m_{3/2}}{8M}(a_m \phi^4 + \text{h.c}) + \frac{H}{8M}(a_H \phi^4 + \text{h.c}) + \frac{1}{4M^2}|\phi|^6 \end{aligned} \tag{7.3}$$

以下で、c_k , f_k について、具体的に見ていこう。まず、湯川結合定数に比例する成分からみていく。スーパーポテンシャルから、平坦方向 ϕ に結合している部分を抜きだしてくればいい。

$$W(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\bar{u}_i y_u^{ij} u_j \right) \phi - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(H_d \bar{e}_i y_e^{i1} \right) \phi \tag{7.4}$$

ここで、y_e は、ニュートリノの質量行列を対角化するベースで見ている。一項目は、単にクオークの質量行列を対角化するベースで見てやれば、以下の議論が簡単である。また、レプトンとの結合部分に関しては、以下のように、場を再定義して考える。

$$\begin{aligned} \bar{e} &\equiv \frac{1}{\sqrt{\sum_i |y_e^{i1}|^2}} \sum_i y_e^{i1} \bar{e}_i \\ y_l &\equiv \sqrt{\sum_i |y_e^{i1}|^2} \end{aligned} \tag{7.5}$$

大気ニュートリノに関しても、太陽ニュートリノに関しても Large Mixing を仮定すれば、$y_l \sim y_\tau$

となる。以上と、式 (2.122) を利用すれば、次の組合せが分かる。

$$\begin{pmatrix} f_k \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_l}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \frac{y_a}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \quad \text{where} \quad (a = t, c, u) \tag{7.6}$$

Gauge 結合定数についても同様だ。式 (2.122) の第二項目について、質量を得た Gauge 自由度分だけ勘定すればいい。LH_u は $SU(2)_W$, $U(1)_Y$ の Gauge 群に結合しているが、式 (4.57) を見れば分かる通り、$U(1)_{EM}$ が破れずに生き残っている。したがって、質量を得る Gauge 自由度は、W-like なもの 2 つと、Z-like なもの一つである。それらの質量については、L の Charge が H_d と同じことの注意すれば、超対称標準理論の、W,Z の質量の計算と全く同じであり、以下のようになる。

$$\begin{aligned} M_W^2 &= g_2^2 |\phi|^2 \\ M_Z^2 &= \frac{g_1^2 + g_2^2}{2} |\phi|^2 . \end{aligned} \tag{7.7}$$

ゆえに、

$$\begin{pmatrix} f_k \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{g_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{g_1^2 + g_2^2}{2}} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \tag{7.8}$$

が得られる。

7.1.2 Two Loop から来る有限温度効果

実は、[26] で指摘されているように、Two Loop Order でも平坦方向への重要な寄与が存在する。勿論、平坦方向に直接結合している場からの寄与は、前節議論した量より充分小さい。ここで重要なのは、Affleck-Dine 場と直接相互作用する重い場が、Affleck-Dine 場と直接相互作用していない軽い場の Gauge あるいは、湯川結合定数に及ぼす影響である。

Gauge 結合定数について見てみよう。今、$\phi \neq 0$ を考えるわけだが、ここでも、SU(3) × U(1) は破れておらず、これらの Gauge Multiplet は mass less である。したがって、これらの場からの有限温度効果は surppress されずに出て来る。ここでは、支配的な寄与をする、SU(3) についてのみ考えることにする。Gauge 群が $SU(N_c)$ の $N = 1$ SUSY QCD において、$\mathcal{O}(g^2)$ の自由エネルギーへの寄与は、以下のように計算されている [51]。

$$F_2 = (N_c^2 - 1)(N_c + 3N_f)\frac{g^2 T^4}{64} \tag{7.9}$$

ここで、N_f は Matter の世代数である。$y_u|\phi| \gg T$ の場合は up type の (ス) クオークが Loop をまわることによる $\propto T^4$ の寄与はなくなるので、N_f の数は半減するが、式 (7.9) の寄与は、前節のように、$f_k|\phi| \gg T$ においても指数関数的に surppress されることはないので注意しよう。

さて、Gauge 結合定数のスケール依存性は、One Loop Order で次のように表される。

$$g(\mu) = g(M_G)\left(1 - \frac{g(M_G)^2}{32\pi^2}[3C_2 - \sum_f T(R_f)]\ln\left(\frac{\mu^2}{M_G^2}\right)\right) \tag{7.10}$$

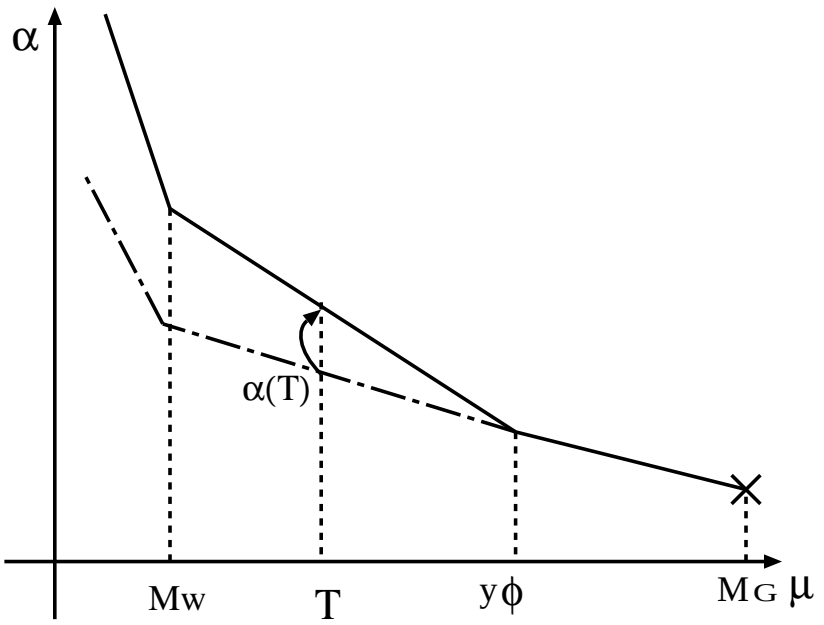


図 7.2: α_s のランニングのスキーマチックな描像

ここで、Gauge 群が $\mathrm{SU}(N)$ のときには、$C_2 = N$、Matter が、その基本表現に属する場合には、$T(N) = 1/2$ である。いま、スケールとしては、$\mu \simeq T$ が選びたい (2.2.5 節の議論参照)。勿論、$\mu \simeq T$ と置いた部分に ϕ 依存性は存在しない。しかし、今、$y_u|\phi| \gg T$ の質量を持つ、up type の (ス) クオークに関しては、スケールのランニングが、$y_u|\phi|$ で止まってしまう。これにより、α_s のランニングは、ϕ の期待値が零の場合と、$\mu \lesssim T$ では異って来る。α_s のランニングのスキーマチックな描像が、(図 7.2) に与えてある。破線は ϕ が期待値を持たなかった場合のランニングである。これは、式 (7.10) より、

$$g(T)|_{y_u|\phi| \gg T} = g(T)|_{\phi=0} + \frac{g(M_G)^3}{32\pi^2} \sum_{massive} T(R_f) \ln\left(\frac{y_u^2|\phi|^2}{T^2}\right) \tag{7.11}$$

のように変形することで見てとれる。ここで、$\sum$ は ϕ と直接相互作用して重くなっている up type の (ス) クオークに関してのみとる。結局二項目は、ϕ と結合して、非常に重くなっている場を最初に Integrate Out することによって得られる effective な Gauge 結合定数への寄与と等しい。つまり、ϕ は完全には decouple せずに、積分されてしまう重い場の質量を通して、軽い場の繰り込みにその片鱗を残しているのである。

したがって、式 (7.9) と、式 (7.11) より、平坦方向 ϕ に対して、今の次数の範囲で、

$$\begin{aligned} V_2(\phi) &= a_g \alpha_s(T)^2 T^4 \ln\left(\frac{y_u^2|\phi|^2}{T^2}\right) \\ \text{where} \quad a_g &= \frac{1}{128}\left(\sum_{massive} T(R_f)\right)(N_c^2-1)(N_c+3N_f/2) \sim 1 \end{aligned} \tag{7.12}$$

の寄与が存在する。また、自由エネルギーへの、Gauge 結合定数の更に高次の補正も当然存在しており、g_s の大きさと、その前にかかる係数が大きい為に、簡単に無視することは出来ない。但

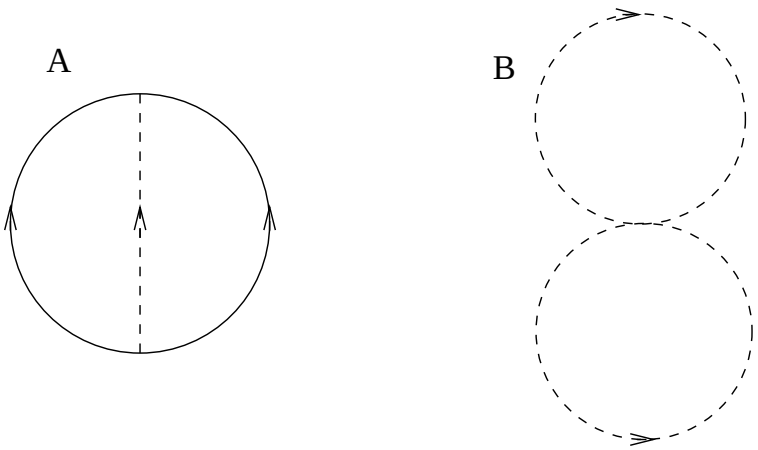


図 7.3: 湯川結合定数を持つ Two Loop グラフ; 破線はスカラー 、実線はワイルフェルミオンを表す。

し、non-SUSY の QCD については、$T \gtrsim 10^4$GeV では、$\mathcal{O}(g^2)$ の項が $\mathcal{O}(g^3)$ の項より、支配的なことが分かっている [12]。特に、温度が式 (1.36) で表されるような、inflaton のコヒーレントな振動が宇宙のエネルギー密度を支配しているときには、このような、条件は楽に満たしているので、平坦方向の場 ϕ の、振動を開始する時期の見積もりには、$\mathcal{O}(g^2)$ が支配的として計算して良いだろう。

同様の効果が $\mathcal{O}(y^2)$ の自由エネルギーの項からも生じる。今の場合支配的なのは、ボトム (ス) クオークの Two Loop から生じる、$\mathcal{O}(y_b^2)$ の $\propto T^4$ の項である。計算しないといけない Feynman グラフのタイプは、(図 7.3) にあげた二種類である。Feynman 則は (2.2.4 節) に与えてあるものを使えば良い。color 等の自由度は後でまとめて数えることにして、最初は無視しておく。また、充分高温を考えることにして、mass less と近似する。ここで、以下の公式が利用できる。

$$\begin{aligned} T\sum_n \int_B \frac{d^3p_E}{(2\pi)^3}\frac{1}{p_E^2} &= \frac{T^2}{12} \\ T\sum_n \int_F \frac{d^3p_E}{(2\pi)^3}\frac{1}{p_E^2} &= -\frac{T^2}{24} \end{aligned} \tag{7.13}$$

$\sum_n$ は松原級数の足し上げを意味する。また、

$$\begin{aligned} p_E^2 &= \omega_n^2 + \vec{p}^2 \\ \text{where}\quad \omega_n &= \begin{cases} 2n\pi T & \text{for Boson} \\ (2n+1)\pi T & \text{for Fermion} \end{cases} \end{aligned} \tag{7.14}$$

積分記号についている添字は、Loop をまわる場が Bosonic か Fermionic かを区別している。

まず、グラフ (B) からの寄与を計算しよう。ラグランジアンの相互作用部分が

$$i\mathcal{L}_{int} = -i|y_b|^2|\phi_1|^2|\phi_2|^2 \tag{7.15}$$

のようなタイプのものである。計算は簡単に実行できて、以下のようになる。

$$\Gamma = |y_b|^2\left(\frac{i}{\beta}\sum_n\int_B\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{i}{p^2}\right)^2 = |y_b|^2\left(T\sum_n\int_B\frac{d^3p_E}{(2\pi)^3}\frac{1}{p_E^2}\right)^2$$

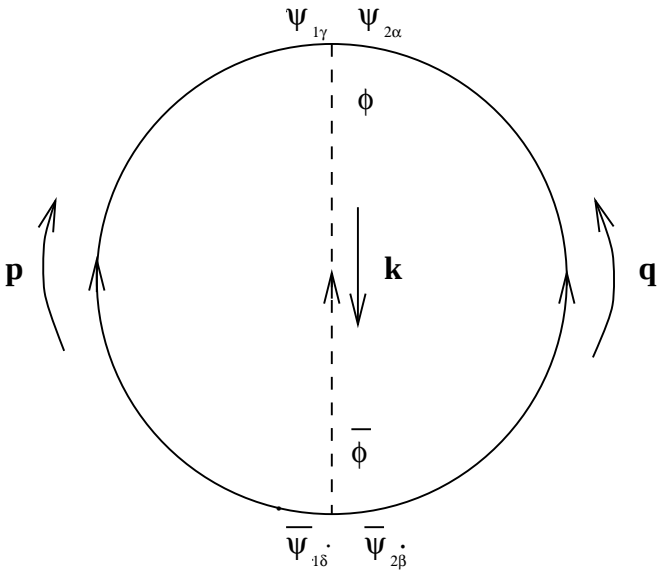


図 7.4: A の Feynman グラフ

$$= \quad |y_b|^2 \left(\frac{T^2}{12}\right)^2 \tag{7.16}$$

ここで、$p^0 = i\omega_n$ である。次に、グラフ (A) からの寄与を計算する。

$$i\mathcal{L}_{int} = -iy_b\phi\psi_1\psi_2 - iy_b^*\phi^*\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 \tag{7.17}$$

のタイプの相互作用項を考えれば良い。(図 7.4) のような配位を考える。Feynman 則より、以下のように計算される。

$$\begin{aligned} -i\Gamma &= -|y_b|^2\, i\sum\!\!\!\!\!\!\int_F^p i\sum\!\!\!\!\!\!\int_F^q i\sum\!\!\!\!\!\!\int_B^k \frac{i}{k^2}\,\frac{i\,p_\mu\,\sigma^\mu_{\dot\delta\gamma}}{p^2}\frac{i\,q_\nu\,\sigma^\nu_{\alpha\dot\beta}}{q^2}\,\epsilon^{\alpha\gamma}\,\epsilon^{\dot\beta\dot\delta}\left(-i\,\beta(2\pi)^3\delta_{\Sigma\omega_n}\delta^3(\vec{p}+\vec{q}-\vec{k})\right) \\ &= -i\,|y_b|^2\sum\!\!\!\!\!\!\int_F^p\sum\!\!\!\!\!\!\int_F^q\sum\!\!\!\!\!\!\int_B^k \frac{2\,p.q}{k^2p^2q^2}\left(\beta(2\pi)^3\delta_{\Sigma\omega_n}\delta^3(\vec{p}+\vec{q}-\vec{k})\right) \end{aligned} \tag{7.18}$$

ここで、運動量の保存から、次のような等式が利用できる。

$$p+q-k=0 \rightarrow 2p.q = k^2-p^2-q^2 \tag{7.19}$$

但し、場は全て零質量とした。これを、式 (7.18) に代入することで、以下のようにまとめられる。

$$\Gamma \quad = \quad |y_b|^2\left\{\sum\!\!\!\!\!\!\int_F^p\sum\!\!\!\!\!\!\int_F^q\frac{1}{p^2q^2} - \sum\!\!\!\!\!\!\int_B^k\sum\!\!\!\!\!\!\int_F^q\frac{1}{k^2q^2} - \sum\!\!\!\!\!\!\int_B^k\sum\!\!\!\!\!\!\int_F^p\frac{1}{k^2p^2}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= |y_b|^2 \left(\left(-\frac{T^2}{24} \right)^2 + 2 \left(\frac{T^2}{24} \right) \left(\frac{T^2}{12} \right) \right) \\
&= |y_b|^2 \frac{5}{4} \left(\frac{T^4}{144} \right) \qquad (7.20)
\end{aligned}
$$

後は、color 自由度を計算して、式 (7.16)、式 (7.20) の結果の和をとれば、$|y_b|^2$ に比例する自由エネルギーへの寄与は、以下のようになる。

$$
V_2 = \frac{9}{64} |y_b|^2 T^4 \ . \qquad (7.21)
$$

ここから、式 (7.12) を導いたのと同様に、湯川結合定数に関する繰り込み群方程式を使って、$(|y_b|^4 \ , \ |y_b|^2 |y_t|^2, \ldots) \ \times \ln(|\phi|^2/T^2)$ の形の、平坦方向に対するポテンシャルが出て来ることが分かる。

しかし、この効果が、式 (7.12) より大きく効く為には、

$$
y_b \sim 1 \rightarrow \tan\beta \gtrsim 50
$$

が必要である。このような領域では、y_b の繰り込み群によるランニングは、漸近的自由ではないので、自由エネルギーの評価として、式 (7.21) の Two Loop 計算は全く信頼できるものではない。

そこで、以下では、式 (7.21) からの効果は、式 (7.9) からでて来る、式 (7.12) の効果より小さいとして、

$$
\tan\beta \lesssim 50
$$

の領域についてのみ、議論を進めることにする。

7.1.3 Affleck-Dine 場の振動開始時期と Baryon asymmetry

前節と、前々節の議論から、平坦方向のポテンシャルとして考えるべきものは、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
V(\phi) &= \left(m_\phi^2 - cH^2 + \sum_{f_k |\phi| < T} c_k f_k^2 T^2 \right) |\phi|^2 + \frac{m_{3/2}}{8M} (a_m \phi^4 + \text{h.c}) \\
&+ \frac{H}{8M} (a_H \phi^4 + \text{h.c}) + a_g \alpha_s(T)^2 T^4 \ln \left(\frac{|\phi|^2}{T^2} \right) + \frac{1}{4M^2} |\phi|^6 \ . \\
\text{where} \qquad & c \ , \ a_g \ , \ |a_m| \ , \ |a_H| \sim 1 \qquad (7.22)
\end{aligned}
$$

Affleck-Dine 場 ϕ が振動を開始するのは、次のような条件が満たされた場合である。

$$
H^2 \simeq \left(m_\phi^2 + \sum_{f_k |\phi| < T} c_k f_k^2 T^2 \right) + \frac{1}{|\phi|^2} a_g \alpha_s^2 T^4 \ . \qquad (7.23)
$$

式 (7.23) のなかで、どの項が主に効いて振動を開始したかによって、最終的な、Baryon asymmetry の種々のパラメータに対する依存生が決まる。以下で、それぞれの場合について詳しく議論していこう。

(1),(m_ϕ^2 が効いた場合)

これは、有限温度効果が効かなかった場合であり、勿論、$H = H_O \simeq m_\phi$ で原点まわりの振動が始まる。その後の Affleck-Dine 場の時間発展は、良い近似で

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m_\phi^2\phi = 0 \tag{7.24}$$

に従い、振幅は、この式の解から、$|\phi| \propto R^{-3/2} \propto H$ で落ちていく。

(2),($\sum_{f_k|\phi|<T} c_k f_k^2 T^2$ の項が効いた場合)

最初に結合定数 f_k が一つだけ (f_1) ある場合を考えよう。ある結合定数、 f_1 を持つ項が効いて、原点まわりの振動を開始するには次の二つの条件を満たさなければならない。

$$f_1|\phi| < T \tag{7.25}$$
$$c_1 f_1^2 T^2 > H^2 \tag{7.26}$$

$|\phi| \simeq \sqrt{MH}$, $T \simeq (HT_{RH}^2 M_*)^{1/4}$ であったことを利用すると、それぞれ次のように書き直せる。

$$(7.25) \quad \rightarrow \quad H < \frac{1}{f_1^4}\frac{M_* T_{RH}^2}{M^2} \tag{7.27}$$
$$(7.26) \quad \rightarrow \quad H < (c_1^2 f_1^4 M_* T_{RH}^2)^{1/3} \tag{7.28}$$

振動が開始するのは、この両方の条件を満たした時なので、次のように書ける。

$$H_O \simeq \min\left[\frac{1}{f_1^4}\frac{M_* T_{RH}^2}{M^2}\ ,\ (c_1^2 f_1^4 M_* T_{RH}^2)^{1/3}\right] . \tag{7.29}$$

複数の結合定数が存在する場合は、そのうちどれかについて、式 (7.27)、式 (7.28) が満たされればいいので、

$$H_O \simeq \max_i\left[\min\left[\frac{1}{f_i^4}\frac{M_* T_{RH}^2}{M^2}\ ,\ (c_i^2 f_i^4 M_* T_{RH}^2)^{1/3}\right]\right] . \tag{7.30}$$

となる。但し、結合定数の間には階層性があるので、和をとる効果は効かないとした。その後の ϕ の時間発展は良い近似で、

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + c_k f_k^2 T^2 \phi = 0 \tag{7.31}$$

に従う。この微分方程式は解析的に解くこと出来、

$$\phi(t) = \phi_1\left[\frac{1}{z^{2/3}}J_{2/3}(z)\right] + \phi_2\left[\frac{1}{z^{2/3}}J_{-2/3}(z)\right]$$
$$\text{where} \quad z = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}c_k^2 f_k^4 M_* T_{RH}^2 t^3\right)^{1/4} \tag{7.32}$$

で与えられる。これより、$|\phi| \propto H^{7/8}$ で振幅が落ちていく。したがって、この場合も (4.3 節) の議論をそのまま使うことが出来て、Affleck-Dine 場が振動を開始する時期、H_O で Baryon 数は固定されることになる。

(3),($a_g\alpha_s^2 T^4/|\phi|^2$ の項が効く場合)

この場合も、$|\phi| \simeq \sqrt{MH}$, $T \simeq (HT_{RH}^2 M_*)^{1/4}$ を用いると、原点まわりの振動を開始するのは、

$$H_O \simeq \alpha_s T_{RH} \left(\frac{a_g M_*}{M}\right)^{1/2} \tag{7.33}$$

と求めることが出来る。この後の ϕ の振幅の変化を解析的に解くことは出来ないが、温度の変化は緩やかなので、(5.2.2 節) の議論が使えると考えられ、ほぼ、$|\phi| \propto R^{-3} \propto H^2$ である。

⟨***Baryon asymmetry***⟩

以上の (1)∼(3) の結果から、Affleck-Dine 場が振動を開始する本当の時期は以下のようになる。

$$H_O \simeq \max\left[m_\phi\ ,\ \max_i\left[\min\left[\frac{1}{f_i^4}\frac{M_* T_{RH}^2}{M_*^2}\ ,\ (c_i^2 f_i^4 M_* T_{RH}^2)^{1/3}\right]\right]\ ,\ \alpha_s T_{RH}\left(\frac{a_g M_*}{M}\right)^{1/2}\right]\ . \tag{7.34}$$

得られる Baryon asymmetry は、(4.4.3 節)、(4.4.4 節) の議論を使って求めることが出来て、上式の H_O を

$$\frac{n_B}{s} \simeq \frac{8}{23}\frac{MT_{RH}}{12M_*^2}\left(\frac{m_{3/2}}{m_\phi}\right) \times \left(\frac{m_\phi}{H_O}\right) \tag{7.35}$$

に代入することで得られる。式 (7.34) のどの項が H_O を与えるかは、再加熱温度や M に依っていて、簡単には求められない。(図 7.5) に、数値計算の結果をあげる。各領域でのパラメターに対する依存性は、式 (7.34)、式 (7.35) を見れば確かめられる。

(図 7.5) を見れば分かる通り、有限温度効果は非常に大きな影響を及ぼしていることが分かる。高い再加熱温度の領域では、有限温度効果によって、$H \simeq m_\phi$ よりかなり早く、Affleck-Dine 場の原点まわりの振動が開始する。したがって、今まで考えられてきたものより、

$$\times \left(\frac{m_\phi}{H_O}\right)$$

だけ、Baryon asymmetry が surppress される [4]。図より分かるように、宇宙論的な gravitino 問題を避けつつ ($T_{RH} \lesssim 10^8$GeV)、BBN に必要な Baryon asymmetry を得るには、

$$M \gtrsim 10^{22}\text{GeV} \leftrightarrow m_{\nu_1} \lesssim 3 \times 10^{-9}\text{eV} \tag{7.36}$$

が必要であることが分かる。また、再加熱温度の上限を緩くしても、ほとんどこれと同じ条件が必要であることも、図を見れば明らかであろう。ここで、m_{ν_1} は一番軽いニュートリノの質量である。この結果は、太陽、大気ニュートリノの観測から示唆される δm^2 から考えると、不自然に思えるかも知れないが、そのような小さなニュートリノの質量を予言することの出来るモデルも存在している。

ここで注意すべき特徴は、有限温度効果により、帰結する Baryon asymmetry が、inflaton の崩壊による宇宙の再加熱温度にほとんど依らなくなっている点である。したがって、この Affleck-Dine Type の Leptogenesis が実現した場合には、要求される Baryon asymmetry が一番軽いニュートリノの質量だけで決まっており、極めて generic に議論が可能である 。更に次節で見るように、高い精度で Double Beta Decay を予言し、しかも、この値は次世代の観測装置により充分達成可能

な範囲に入っている。したがって、近い将来、超対称性と Neutrinoless Double Beta Decay が見つかれば、このモデルの間接的な検証が可能である。勿論、これらが見つからなかった場合には、完全に排除することも可能だ。

ここで、この (LH_u) 方向を利用した場合の Q(L)-Ball についてコメントしておく。詳しくは次部で議論することになるが、この平坦方向を利用した場合には、L-Ball は非常に小さく、すぐに蒸発すると考えられ、なんら議論に変更を加えない。特に、有限温度効果が効く領域では、そもそも、平坦方向の場が、振動開始後間もなく蒸発して、通常のガス状態になると思われる (Appendix 参照)。

7.1.4 Neutrinoless Double Beta Decay に対する予言

ここでは、一番軽いニュートリノの質量が、 BBN を説明可能な程小さい場合に、Double Beta 崩壊にどのような予言が可能か議論する。Double Beta 崩壊に効くのは、ニュートリノの質量行列の (e,e) 成分である。この成分には、ニュートリノの混合を通じて、2 番目の大きさの質量をもつ $m_{\nu 2}$ が大きな割合で入って来る。そのために、$m_{\nu 1}$ が非常に小さいにも関わらず、将来的に観測可能な Double Beta 崩壊の大きさを予言する。また、質量の固有値が決まってしまうため、今後、ニュートリノ混合の角度の観測精度が上がった場合には、他のモデルに比べて非常に正確に Double Beta 崩壊の予言が可能である。この興味深い点について、以下で簡単にまとめておこう。

ニュートリノの質量項は世代ベースで見たときに、

$$\frac{1}{2} M_{f\,l}\, \nu_f \nu_l \tag{7.37}$$

となり、3×3 の対称行列 $M_{f\,l}$ を使って表される。ここで、f, l は世代の足で、e , μ , τ を走る。世代ベースで見たときと、質量固有状態で見た時とで、ニュートリノの波動関数は次のように、3×3 のユニタリー混合行列で関係付いている。

$$\nu_f = \sum_{i=1}^{3} U^*_{fi} \nu_i \ . \tag{7.38}$$

ここで、f は世代の足で i は質量固有状態の足である。このユニタリー行列の parametrization として、小林ー益川行列と同じものを用いる。

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}\mathrm{e}^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}\mathrm{e}^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}\mathrm{e}^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}\mathrm{e}^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}\mathrm{e}^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \ \mathrm{diag}\left\{\mathrm{e}^{i\alpha_1}, \mathrm{e}^{i\alpha_2}, 1\right\} \ . \tag{7.39}$$

ここで、$c_{ij} = \cos(\theta_{ij})$, $s_{ij} = \sin(\theta_{ij})$ であり、δ は Dirac CP phase、$\alpha_{1,2}$ は Majorana CP phase である。

さて、パラメータを以下のように定義しよう。

$$\begin{aligned} \delta m^2 &= m^2_{\nu 2} - m^2_{\nu 1} \ ; \\ m^2 &= m^2_{\nu 3} - m^2_{\nu 2} \ ; \\ \omega &= \theta_{12} \in [0\ ,\ \pi/2] \ ; \\ \phi &= \theta_{13} \in [0\ ,\ \pi/2] \ ; \\ \psi &= \theta_{23} \in [0\ ,\ \pi/2] \ ; \end{aligned} \tag{7.40}$$

これらのパラメータには、ニュートリノ振動の観測から種々の制限がついている。観測から許されるパラメータ範囲は [21, 22] に詳しくまとめられている。

Super-Kamiokande と CHOOZ の結果を組み合わせると、

$$|U_{e3}|^2 \ < \ 0.04 \qquad (90\% \text{ C.L.}) \tag{7.41}$$

が得られており、ここでは、この制限を取り入れる。ここで、計算に取り得れたパラメータの範囲は、(図 7.6)、(図 7.7) に示してある。次に、(図 7.7) に与えられた、太陽ニュートリノ振動の解 MSW-LMA、MSW-SMA、LOW のそれぞれに対応する allowed region の範囲内で、パラメータを Random にふり、得られる世代ベースの質量行列 M_{fl} の M_{ee} 成分の絶対値をヒストグラムで表示する。なお、式 (7.38) より、

$$|M_{ee}| = \left| \sum_i m_{\nu i} U_{ei}^2 \right| \tag{7.42}$$

である。それぞれの太陽ニュートリノ振動の解について、一番軽いニュートリノの質量 $m_{\nu 1}$ が、Affleck-Dine mechanism で Baryon asymmetry を説明するのに必要な $10^{-9} \sim 10^{-8}$ eV にある時のものと、比較のために $m_{\nu 1}/m_{\nu 2} \sim 0.1$ 程度にある時のものと、二種類を図に与える。

MSW-LMA 解においては、(図 7.8) から分かるように、Affleck-Dine mechanism で Baryon asymmetry を説明するのに必要なほど、$m_{\nu 1}$ が小さくても、将来的に観測可能 ($|M_{ee}| \gtrsim 10^{-(2\sim 3)}$eV) な Double Beta 崩壊の大きさを予言することが分かる [23]。また、次の (図 7.9) と比べれば分かる通り、この場合にはニュートリノの 質量スペクトルが分かっている分だけ、バンドの幅が小さい。これは、ϕ の制限が今後の観測で厳しくなれば、より顕著に現れる。他の解においては、Double Beta 崩壊が観測される可能性は小さいことがみてとれる。

特に、MSW-SMA、LOW 解においては、$|M_{ee}|$ の大きさが $|U_{e3}|$ に非常に強く依存する。その関係を (図 7.14)、(図 7.15) と、(図 7.16) にあげておく。これらから分かるように、このシナリオが実現されていた場合には $|U_{e3}| \lesssim 10^{-1}$ まで実験からの制限が強くなれば、MSW-SMA, LOW 解が実現されていた場合には、Double Beta Decay は見つからないはずである。それより大きなところに $|U_{e3}|$ が得られれば、全ての解において、$|M_{ee}| \gtrsim 10^{-3}$eV であり、将来的に Neutrinoless Double Beta Decay が観測可能である。今後の実験計画は、MINOS、IKANOE において、$\sin^2 2\theta_{13} > \mathcal{O}(10^{-}2)$ までの sensitivity が予想されている。JHF(Japan Hadron Facility) 計画 [24] は MINOS より強力であり、5 年間の運転の後に 、$\sin^2(2\theta_{13}) \sim 10^{-2}$ (@90CL) つまり、$|U_{e3}| \sim 0.05$ までの観測が可能である (2001$\sim$ 2006 建設予定)。提案されている Neutriono Factory 計画が実現した場合には、$\sin^2 2\theta_{13} > \mathcal{O}(10^{-4})$ 程度までの sensitivity が予想されている [25]。

7.2 他の平坦方向を用いた Affleck-Dine Baryogenesis に対する有限温度効果

前節では、有限温度効果をいれることによって、平坦方向として LH_u を利用した、 Affleck-Dine タイプの Leptogenesis は、非常に大きな変更を受けることをみた。この節では、他の平坦方向を利用した Affleck-Dine Baryogenesis が、有限温度効果をいれることによって、どのような変更を受けるか議論しよう。但し、Affleck-Dine 場が原点周りの振動を開始した後の発展については、次部のテーマである Q-Ball についての議論を待たねばならない。特に、他の 4 次のスーパーポテンシャルを利用するものについては、B-L が保存しており (Appendix 参照)、“sphaleron” の効果をさけて Baryon asymmmetry を生み出すには、Q-Ball の理解が欠かせない。これについては、次部に回す。

7.2.1 6 次のスーパーポテンシャルを用いた Affleck-Dine Baryogenesis に対する有限温度効果 (Gravity Mediation Model)

まず、 Gravity Mediation タイプの SUSY breaking モデルについて議論しよう。 6 次のスーパーポテンシャルを利用したときには、原点周りの振動を開始するまで、

$$|\phi| \simeq (HM^3)^{1/4} \tag{7.43}$$

にしたがって変化した。有限温度効果をいれない場合は、$H_O \simeq m_\phi$ で振動を開始したが、温度効果を入れることでこれが変化するか調べていこう。One Loop からでて来る有限温度効果によって振動を開始するには、前節で議論したように、以下の条件を満たす必要があった。

$$f_k|\phi| < T \tag{7.44}$$
$$c_k f_k^2 T^2 > H^2 \ . \tag{7.45}$$

式 (7.43) と、$T \simeq (HT_{RH}^2 M_*)^{1/4}$ と振る舞うことを利用すると、式 (7.44) は次のように書き直せる。

$$T_{RH} > f_k^2 \left(\frac{M^3}{M_*}\right)^{1/2} \ . \tag{7.46}$$

これは仮に、平坦方向が一番小さな結合定数 $y_u \ , \ y_e \simeq 10^{-5}$ を持っていたとしても、再加熱温度に対して以下のような強い条件をつける。

$$\begin{aligned} T_{RH} &> 2\times 10^8 \mathrm{GeV} \left(\frac{M}{M_*}\right)^{3/2} \\ &> 2\times 10^5 \mathrm{GeV} \left(\frac{M}{M_G}\right)^{3/2} \ . \end{aligned} \tag{7.47}$$

$M \simeq M_*$ に対応する場合の一つ目の条件式は、少なくとも宇宙論的な gravitino 問題を避けるためには満たされてはならない式であるし、式 (4.74),(4.75) を見て分かるように、そもそも、必要な Baryon asymmetry を説明するには、上記のような高温にしてはならなかった。したがって、式 (4.74),(4.75) の結果は、カットオフスケール M が小さく再加熱温度が高くない限りは、One Loop の有限温度効果によって変更されることはないことが分かる。次に、式 (7.12) のような効果について考えてみよう。一般の平坦方向について、この項を正確に求めるのは非常に困難であるが、一般に次のように書けることに変わりはない。

$$\begin{aligned} V_2(\phi) &= aT^4 \ln\left(\frac{|\phi|^2}{T^2}\right) \\ \text{where} \quad |a| &= \text{定数 c} \times (g^4, y^2 g^2, y^4) \end{aligned} \tag{7.48}$$

a の符号については両方あり得る。大きさについては、強結合定数の場合には、摂動論ではっきり言うことは難しいが、せいぜい、$\mathcal{O}(10^{-2})$ 程度であろう。仮に、a が正として、この項により振動が開始すると仮定した場合の時期を見積もると、

$$H_O \simeq a^{2/3} \left(\frac{T_{RH}}{M}\right) \left(T_{RH} M_*^2\right)^{1/3}$$

$$\simeq \begin{cases} 7\times 10^{-7}\mathrm{GeV}\left(\dfrac{a}{10^{-2}}\right)^{2/3}\left(\dfrac{T_{RH}}{10\mathrm{GeV}}\right)^{4/3}\left(\dfrac{M_*}{M}\right) \\ \\ 20\mathrm{GeV}\left(\dfrac{a}{10^{-2}}\right)^{2/3}\left(\dfrac{T_{RH}}{10^5\mathrm{GeV}}\right)^{4/3}\left(\dfrac{M_G}{M}\right) \end{cases} \tag{7.49}$$

したがって、$M \simeq M_*$ の場合は完全に無視して良いだろう。$M \simeq M_G$ の場合も a が非常に大きくて $a \sim 1$ のような特殊な事態が起きない限り、無視できる。それ以外の場合は、この項以外の効果によって振動が開始しているはずである。a が負の場合には少し問題が複雑になるが、後の章の Q-Ball を考慮に入れると、大きく物理を変更することはない (10.1.3 節のコメント参照) と考えられる。

以上の議論から、Gravity Mediation モデルの場合で、6 次のスーパーポテンシャルを用いた場合には、有限温度効果によって、最終的な Baryon asymmetry が変化することは、M が大きいところ $M \gtrsim M_{GUT}$ では存在しない。しかし、このような領域は、次部で Q-Ball の効果を考慮した場合には、LSP Dark Matter が宇宙を over close してはならないという要請から排除されてしまう。この条件を回避するには、小さめの M が必要であり、そのような領域では、式 (7.47) から分かるように、有限温度効果が効き得る。Affleck-Dine 場の原点まわりの振動開始時期は、

$$H_O = \max\left[m_\phi\ ,\ a^{2/3}\left(\frac{T_{RH}}{M}\right)\left(T_{RH}M_*^2\right)^{1/3}\ ,\ (c_k^2 f_k^4 M_* T_{RH}^2)^{1/3}\Big|_{T_{RH}>f_k^2(M^3/M_*)^{1/2}}\right] \tag{7.50}$$

で与えられる。得られる Baryon asymmetry は、この H_O を、

$$\frac{n_B}{s} \simeq \frac{2}{9}\beta\delta_{eff}\frac{T_{RH}m_{3/2}}{M_*^2}\left(\frac{M}{H_O}\right)^{3/2} \tag{7.51}$$

に代入することで得られる。これらの効果を含めて、n_B/s の等高線プロットをあげておく (図 7.17)。ここでは、$y_u \sim 10^{-5}$ が存在する場合を考えた。これは、平坦方向として $\bar{u}\bar{d}\bar{d}$ を選んだ場合には適当である。$M \lesssim M_G$ では、 有限温度効果が効くことが分かる。Q-Ball を考慮した場合については、第十章の議論と (図 10.1) を参照せよ。

7.2.2 6 次のスーパーポテンシャルを用いた Affleck-Dine Baryogenesis に対する有限温度効果 (Gauge Mediation Model)

議論すべきことは、前節とほとんど同じである。ただ、gravitino の質量が小さいために、温度効果を考慮しなかった場合の振動開始時期が、前節に比べてずっと遅い。したがって、有限温度効果による振動開始時期の早まりが、充分に起こり得る。

まず最初に分かることとして、前節の式 (7.46)、式 (7.47) の条件は全く変化しないので、One Loop から来る有限温度効果による Early Oscillation は起こらないと思って良い。(Gauge Mediation Model の場合には、gravitino 問題を避ける為に低い再加熱温度が必要なので、特にそうである。勿論、大きめの gravitino mass を考えて、再加熱温度を上げた場合には効く可能性が存在するが、その場合の変更も、今までの議論を使って容易に出来る。ここでは、簡単の為に無視しておこう。) したがって、考えるべきは、Two Loop から来る有限温度効果による、Early Oscillation である。

振動開始時期の決定方法は、(7.1.3 節) の議論と平行に進められる。ひとまず、式 (7.48) に現れる a は、正であるとして計算しよう。(5.2.1 節)、(5.2.2 節) の議論を復習すると、Affleck-Dine 場

の原点周りの振動開始時期は以下のように書ける。

$$H_O = \max\left[\left(\frac{V_0^2}{M^3}\right)^{1/5}\ ,\ m_{3/2}\ ,\ a^{2/3}\left(\frac{T_{RH}}{M}\right)\left(T_{RH}M_*^2\right)^{1/3}\right] \tag{7.52}$$

$m_{3/2}$ や、V_0 のパラメター範囲は非常に広いが、幾つかパラメターを決めてしまえば、後の計算は単純である。式 (7.53) の結果を、式 (4.73)、

$$\frac{n_B}{s} \simeq \frac{2}{9}\beta\delta_{eff}\frac{T_{RH}m_{3/2}}{M_*^2}\left(\frac{M}{H_O}\right)^{3/2} \tag{7.53}$$

に代入するだけである。パラメターが多いので、ひとまず、$m_{3/2} \simeq 100\mathrm{keV}$ に決めて、等高線を書こう。(図 7.18),(図 7.19),(図 7.20) に V_0 をそれぞれ変えたものを与えた。なお、これらの図の表示領域においては、One Loop からの有限温度効果が無視できることが、式 (7.47) から実際に確認できる。

7.3 低カットオフスケールの $W = 0$ Affleck-Dine Baryogenesis における有限温度効果

この節では、$W = 0$ の Affleck-Dine Baryogenesis で必要な Baryon asymmetry を説明するときの有限温度効果について調べておく。第 6 章で議論したようにカットオフスケールが $M \sim 10^{11\sim13}\mathrm{GeV} << M_G, M_*$ の場合には、必要な Baryon asymmetry が説明できそうであったわけであるが、Affleck-Dine 場の初期値が小さくなるので熱浴から decouple していない可能性が存在する。ここで、カットオフスケールが M であるとは、(6.1.2 節) でも書いた通り、式 (6.7) で $M_* \to M$ のような項が存在し、非繰り込み可能なケーラーポテンシャルによって、$|\phi| \sim M$ から平坦方向が指数関数的に持ち上がっていることを考えている。

これまでの有限温度の効果の議論と異る点は、原点周りの振動を開始するまでの、初期の Affleck-Dine 場の時間発展のみである。n 次のスーパーポテンシャルによって平坦方向が持ち上げられる場合には、

$$|\phi| \simeq (HM^{n-3})^{1/n-2} \tag{7.54}$$

と Affleck-Dine 場は時間発展した。今の場合は、$|\phi| \sim M$ から指数関数的にポテンシャルが持ち上げられていると考えているので、原点周りの振動を開始するまで Affleck-Dine 場は $|\phi| \sim M$ に凍り付いている。平坦方向のポテンシャルとして、次を考えよう。

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \left(m_\phi^2 - cH^2 + \sum_{f_k|\phi|<T} c_k f_k^2 T^2\right)|\phi|^2 + \left(a_m\frac{m_{3/2}^2}{M^{n+2}}\phi^{n+4} + \mathrm{h.c}\right) \\ &\quad + \left(a_H\frac{H^2}{M^{n+2}}\phi^{n+4} + \mathrm{h.c}\right) + aT^4\ln\left(\frac{|\phi|^2}{T^2}\right) + \ldots \end{aligned} \tag{7.55}$$

ここで、記号の意味はこれまでと同じである。a 正確な大きさと符号は不明であるが、ここでは正であるとする。

これまでの議論を繰り返せば、Affleck-Dine 場が原点周りの振動を開始する時期は、以下のように求められる。

$$H_O = \max\left[(c_k^2 f_k^4 M_* T_{RH}^2)^{1/3}\ ,\ m_{3/2}\ ,\ a\frac{T_{RH}^2 M_*}{M^2}\right] \tag{7.56}$$

但し、式 (7.56) において、一項目は

$$\frac{f_k^4 M^4}{T_{RH}^2 M_*} < (c_k^2 f_k^4 T_{RH}^2 M_*)^{1/3} \tag{7.57}$$

のもののみ含めることに注意する。式 (7.56) の一項目は、

$$c_k f_k^2 T^2 > H^2 \tag{7.58}$$

に対応し、条件式 (7.57) は、

$$f_k |\phi| < T \tag{7.59}$$

に対応している。得られる Baryon asymmetry は次の式に、上記の H_O を代入すれば良い。

$$\frac{n_B}{s} \simeq \frac{1}{12}\,\beta\,\delta_{eff}\frac{T_{RH}}{m_{3/2}}\left(\frac{m_{3/2}}{H_O}\right)^3\left(\frac{M}{M_*}\right)^2 \tag{7.60}$$

ここで、これまで同様、β は対応する平坦方向の Baryon 数、δ_{eff} は有効 CP phase である。

ここで、f_k の大きさによって、n_B/s の M , T_{RH} に対する振る舞いが異ることに注意しておこう。f_k が充分小さい場合には、式 (7.57) は楽に成立し、式 (7.58) が振動開始時期を決定する。逆に f_k が大きい場合には、式 (7.59) が振動開始時期を決定することになり、n_B/s は、M , T_{RH} の非常に高い巾に依存し、等高線がほとんど重なることになる。

図 (7.21)、図 (7.22) に Gravity Mediation Model における例をあげる。それぞれに、上記の性質が現れている。Gauge Mediation の場合も同様の方法で議論できるので、ここでは省略する。

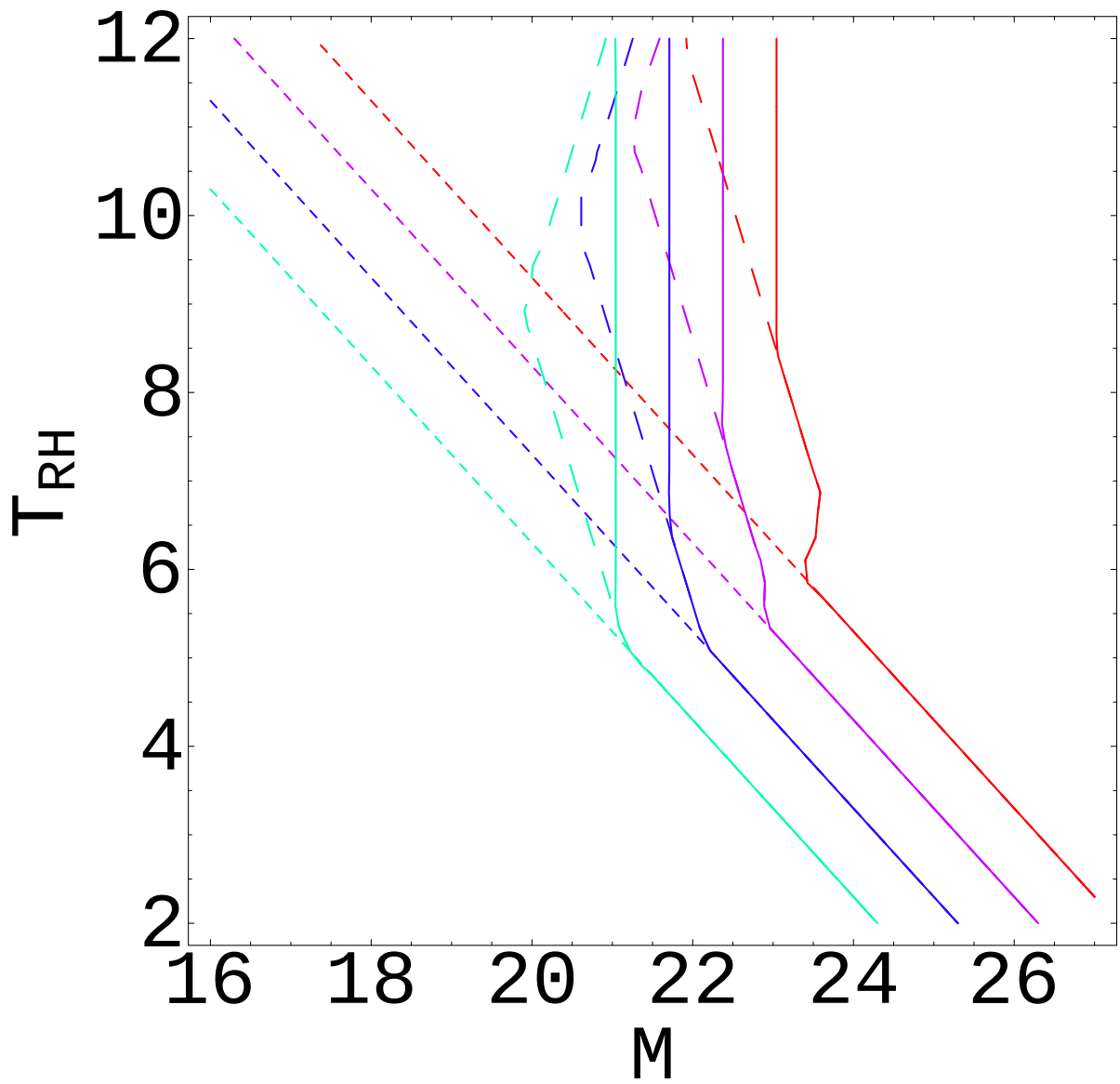


図 7.5: n_B/s の等高線プロット；縦軸、横軸共に、10^xGeV の単位で書かれている。等高線は左から順に、10^{-12} , 10^{-11} , 10^{-10} , 10^{-9} について書かれており、細かい破線は有限温度効果を入れなかったもの、粗い破線は、One Loop の有限温度効果を入れたもの、実線が One Loop, Two Loop の有限温度効果を入れたものである。ここでは、$m_{3/2} \sim m_\phi \sim 1\text{TeV}$, $\tan\beta = 3$ について計算されている。

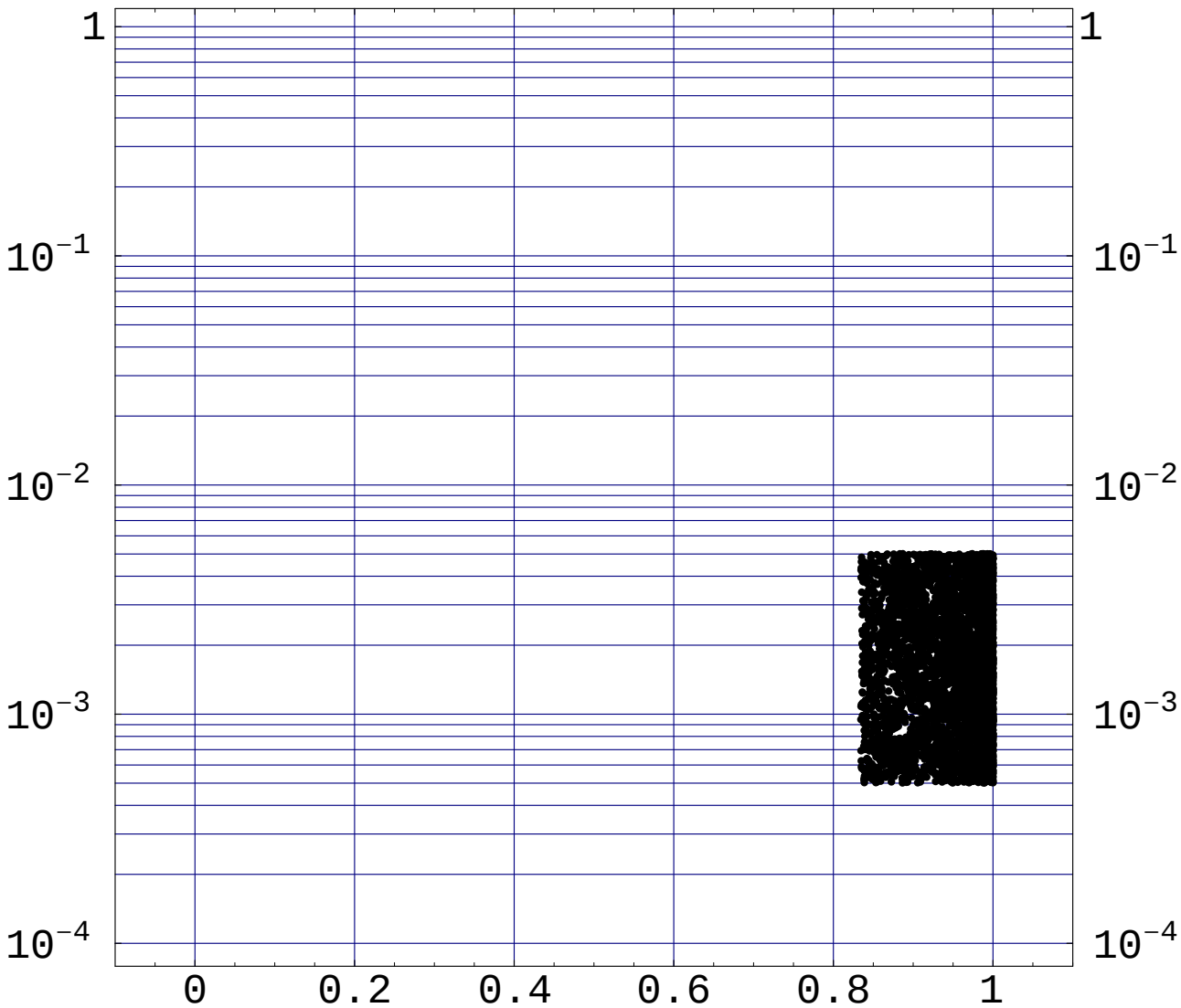


図 7.6: 大気ニュートリノ oscillation のパラメータとして許した範囲; ここで、縦軸は m^2 であり単位は (eV^2) である。また、横軸は $\sin^2(2\psi)$ である。

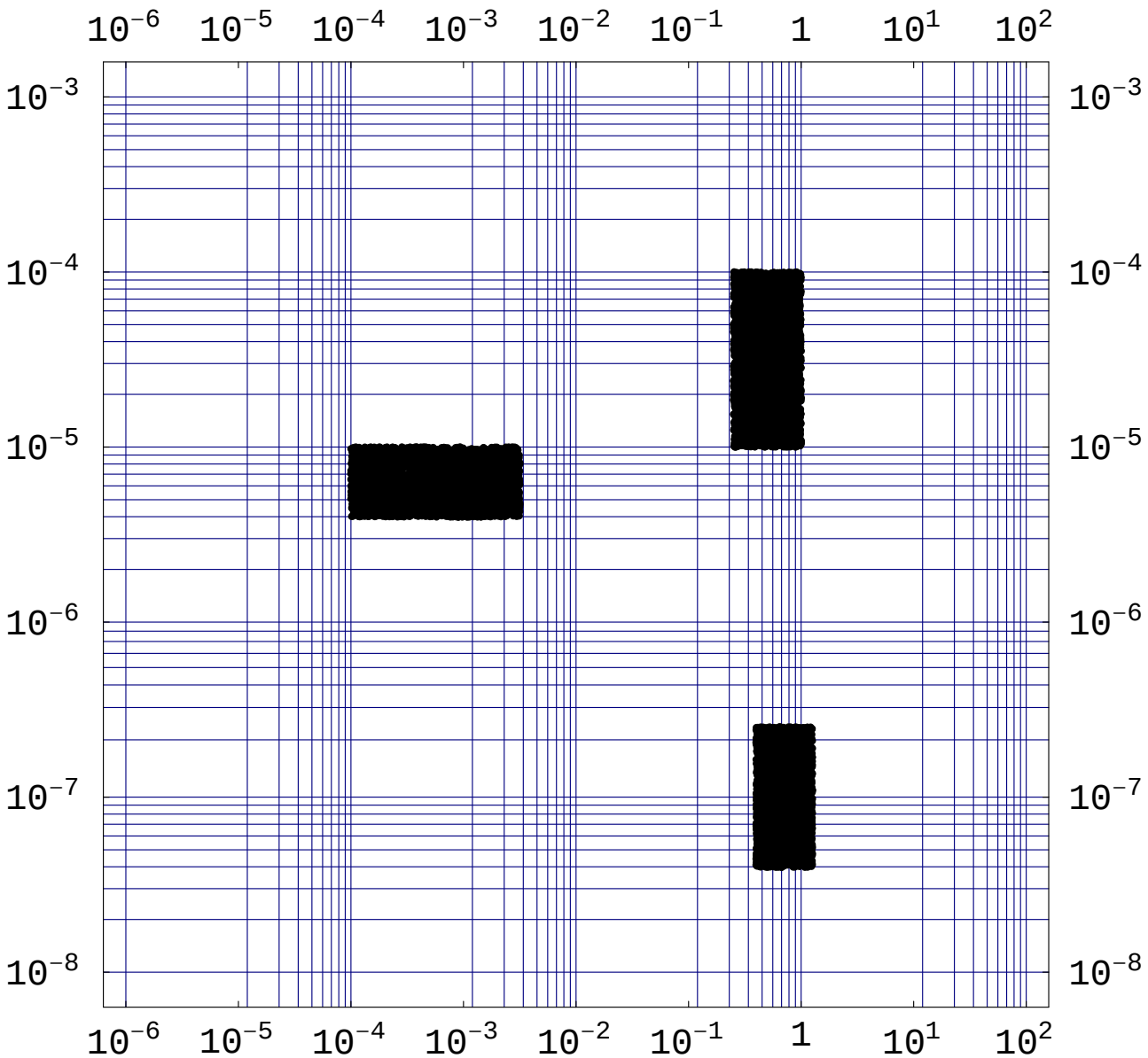


図 7.7: 太陽ニュートリノ oscillation のパラメータとして許した範囲; ここで、縦軸は δm^2 であり、単位は (eV^2) である。また、横軸は $\tan^2(\omega)$ である。上から順にそれぞれ、MSW の Large Mixing Angle、MSW の Small Mixing Angle、LOW の解にあたる。

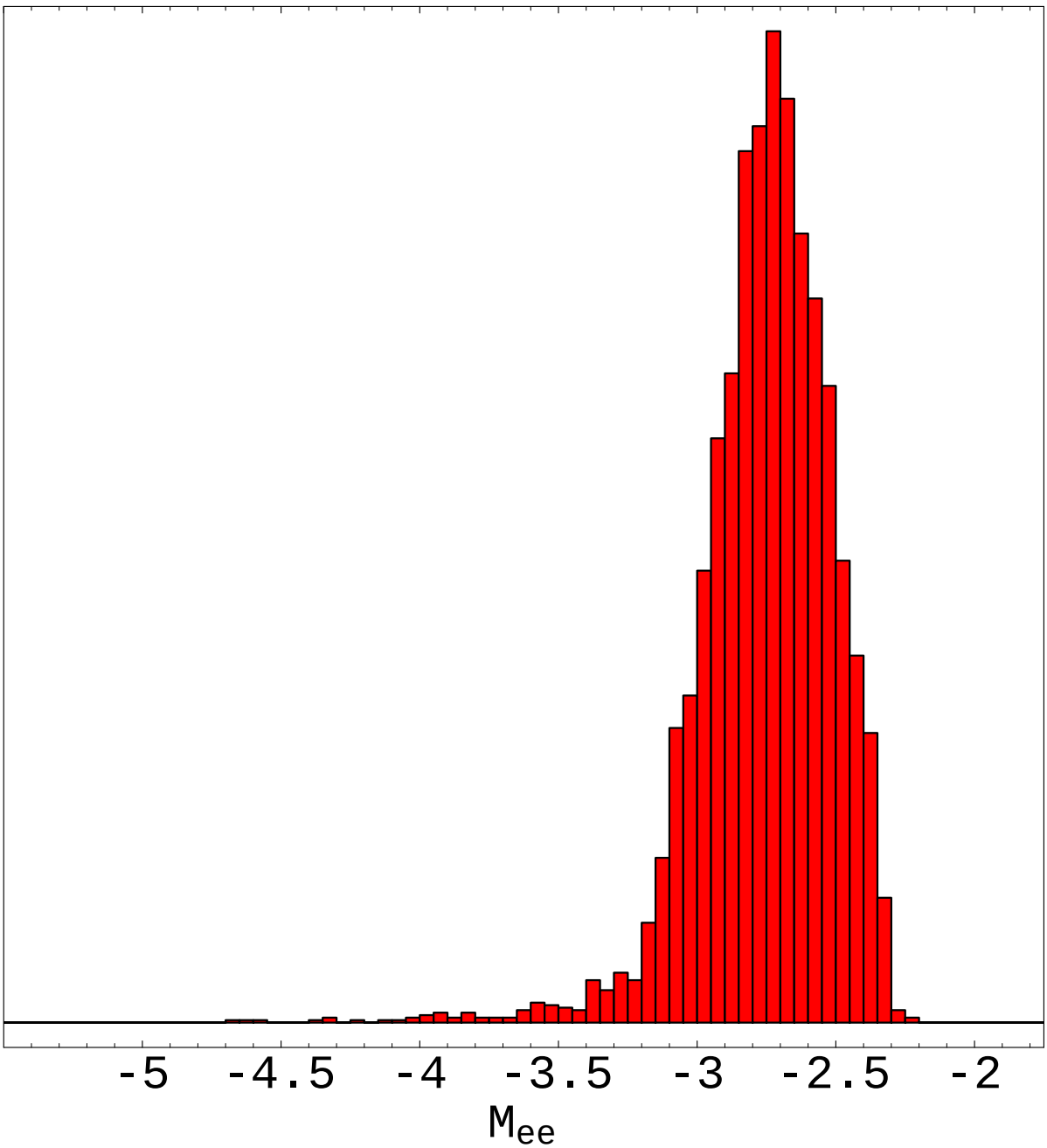


図 7.8: MSW-LMA 解にあるときに得られる M_{ee} 成分のヒストグラム; $(m_{\nu 1} = 10^{-9} \sim 10^{-8}\ \mathrm{eV})$
横軸は M_{ee} であり、単位は 10^{-x} eV である。縦軸はそのときの頻度を表す。

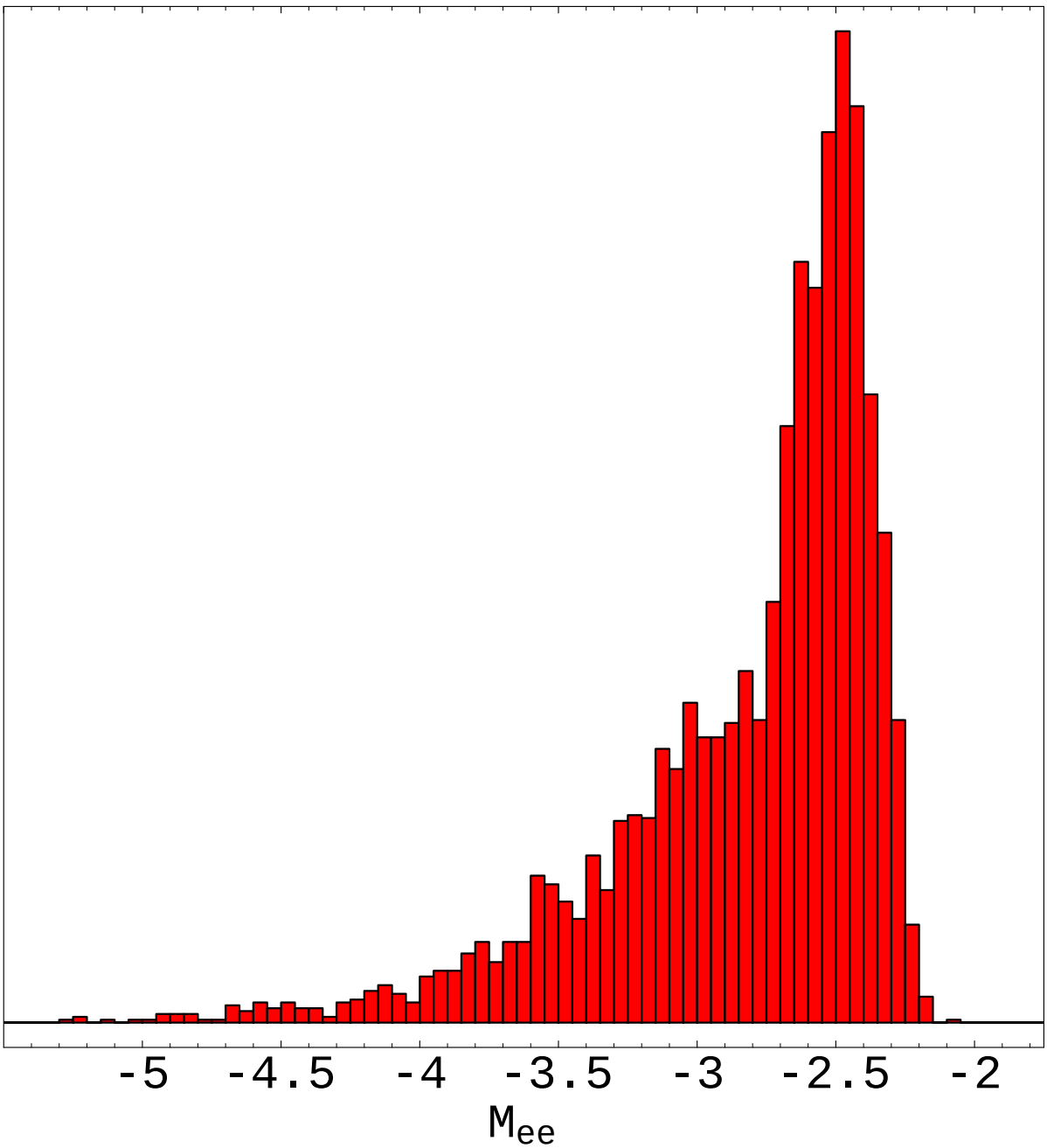


図 7.9: MSW-LMA 解にあるときに得られる M_{ee} 成分のヒストグラム; $(m_{\nu 1}/m_{\nu 2} \sim 0.1)$ 横軸は M_{ee} であり、単位は 10^{-x} eV である。縦軸はそのときの頻度を表す。

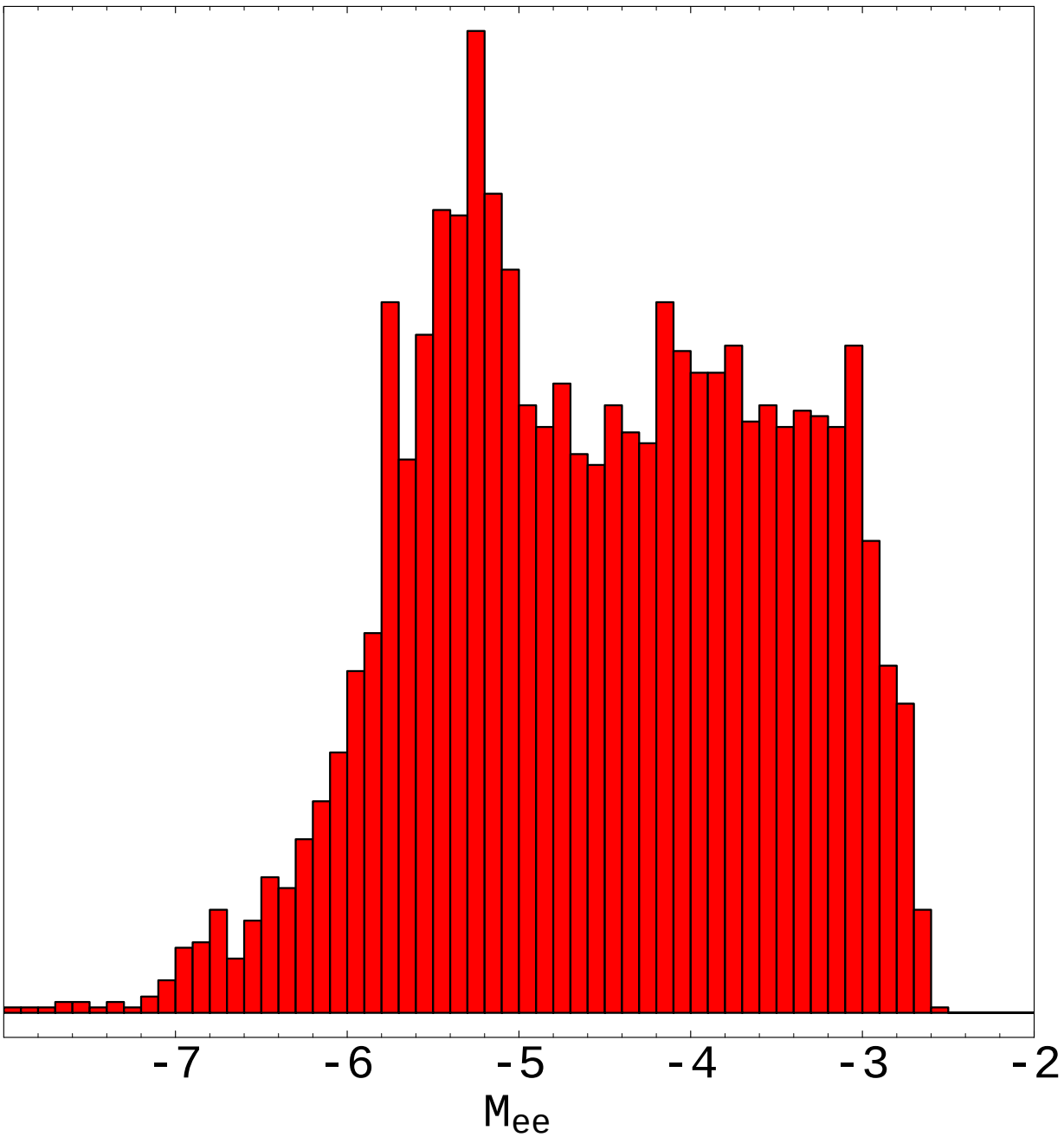


図 7.10: MSW-SMA 解にあるときに得られる M_{ee} 成分のヒストグラム; $(m_{\nu 1} = 10^{-9} \sim 10^{-8}\ \mathrm{eV})$
横軸は M_{ee} であり、単位は 10^{-x} eV である。縦軸はそのときの頻度を表す。

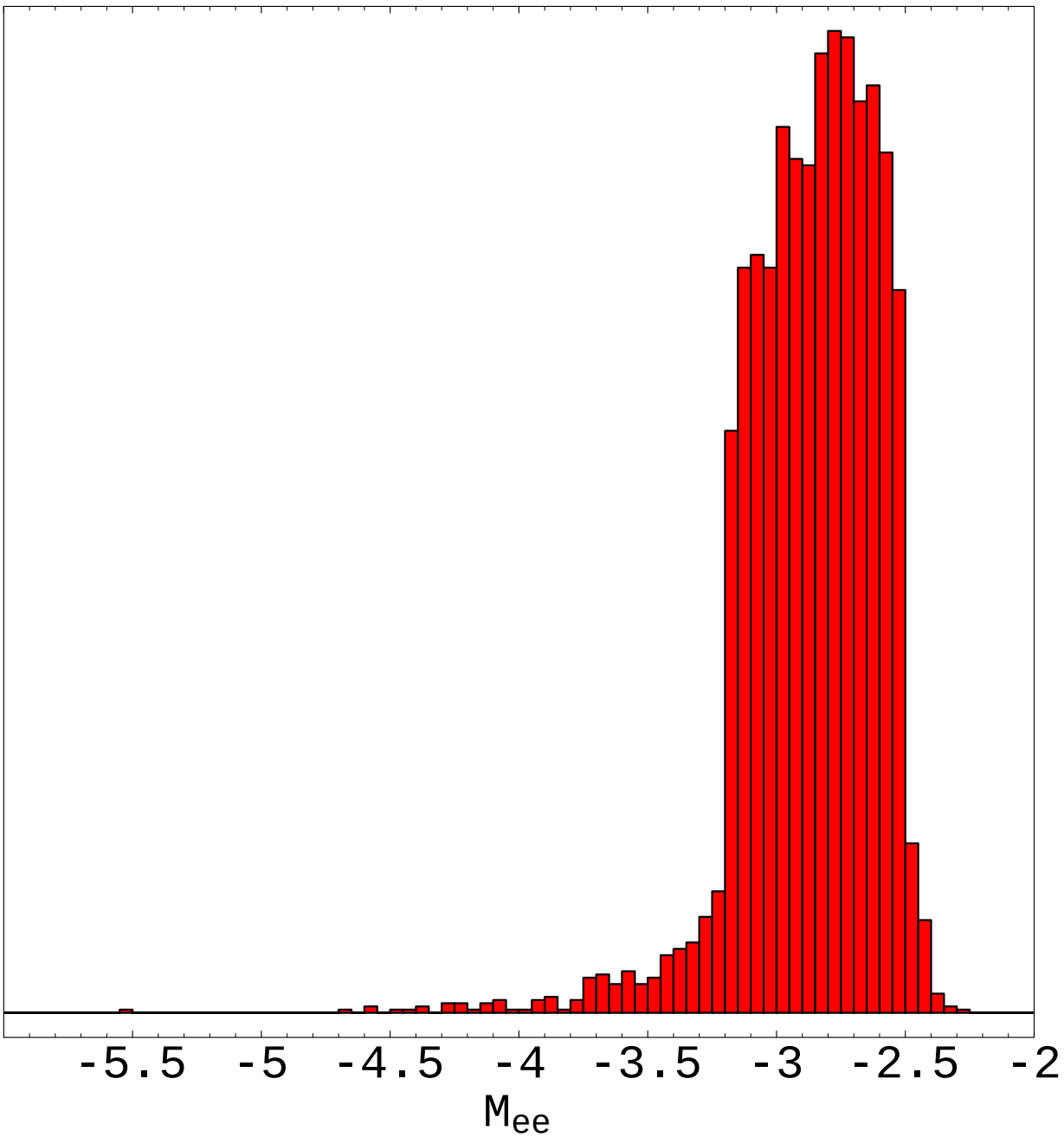


図 7.11: MSW-SMA 解にあるときに得られる M_{ee} 成分のヒストグラム; $(m_{\nu 1}/m_{\nu 2} \sim 0.1)$ 横軸は M_{ee} であり、単位は 10^{-x} eV である。縦軸はそのときの頻度を表す。

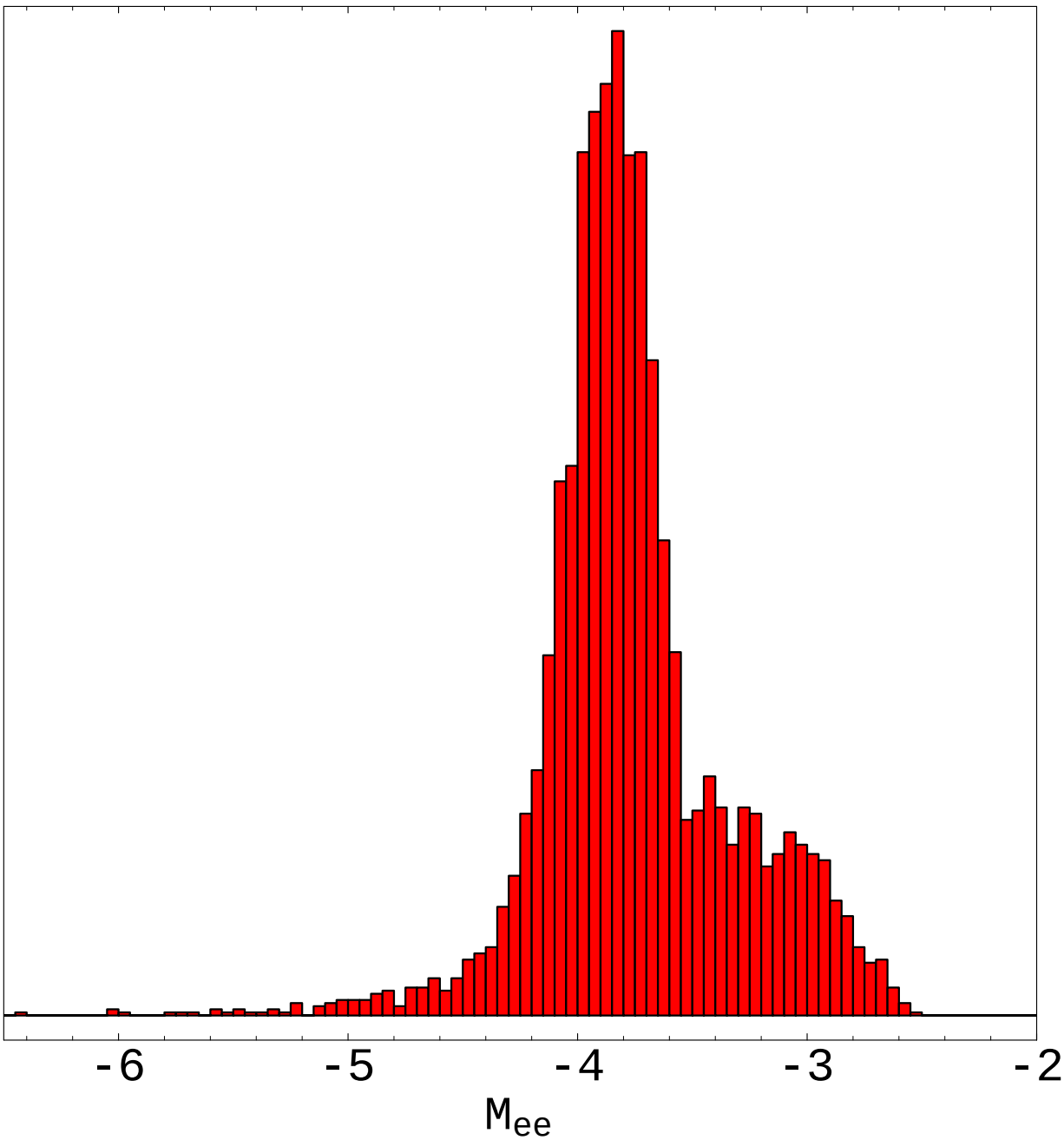


図 7.12: MSW-SMA 解にあるときに得られる M_{ee} 成分のヒストグラム; $(m_{\nu 1} = 10^{-9} \sim 10^{-8}\ \mathrm{eV})$
横軸は M_{ee} であり、単位は 10^{-x} eV である。縦軸はそのときの頻度を表す。

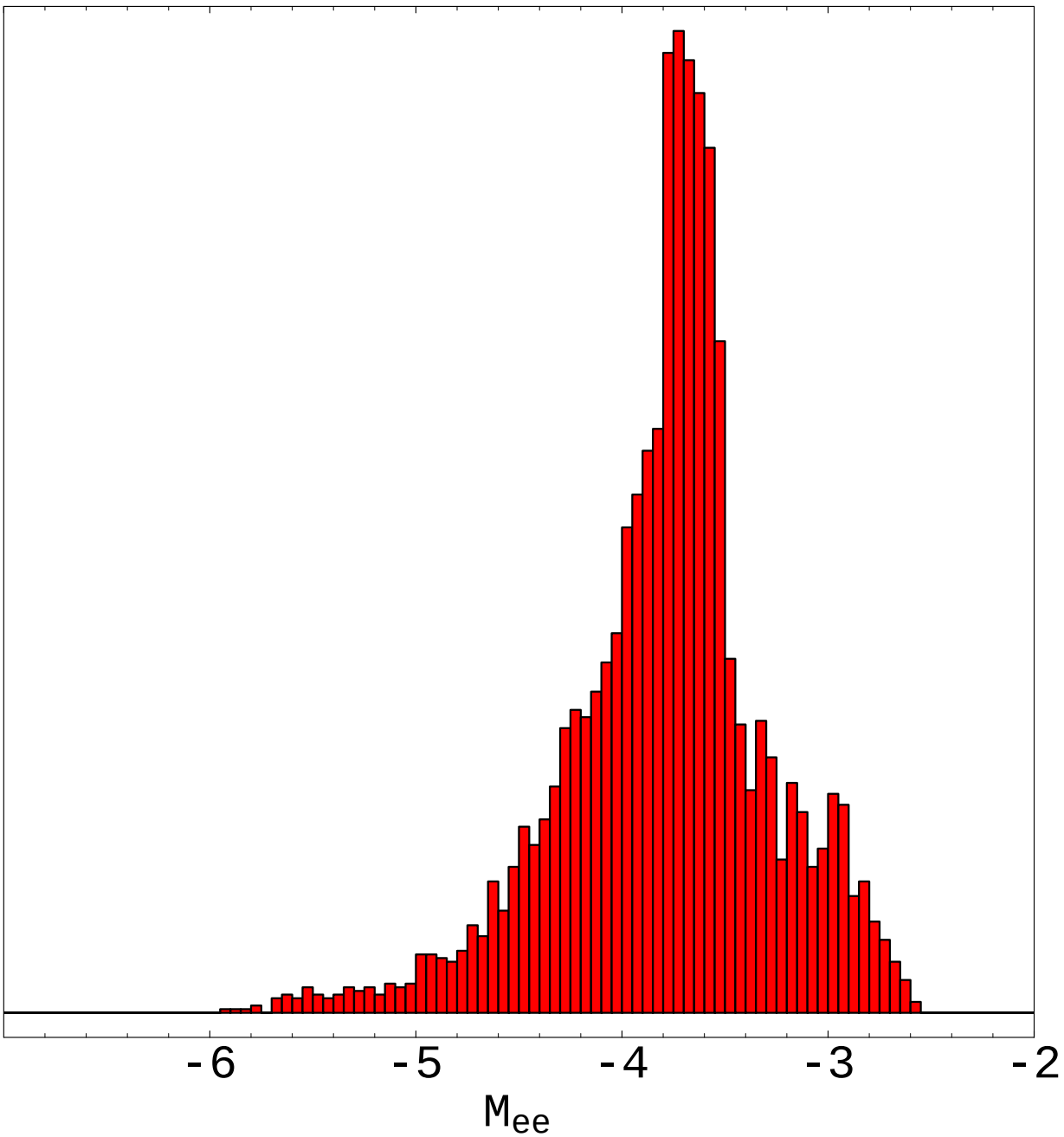


図 7.13: MSW-SMA 解にあるときに得られる M_{ee} 成分のヒストグラム; $(m_{\nu 1}/m_{\nu 2} \sim 0.1)$ 横軸は M_{ee} であり、単位は 10^{-x} eV である。縦軸はそのときの頻度を表す。

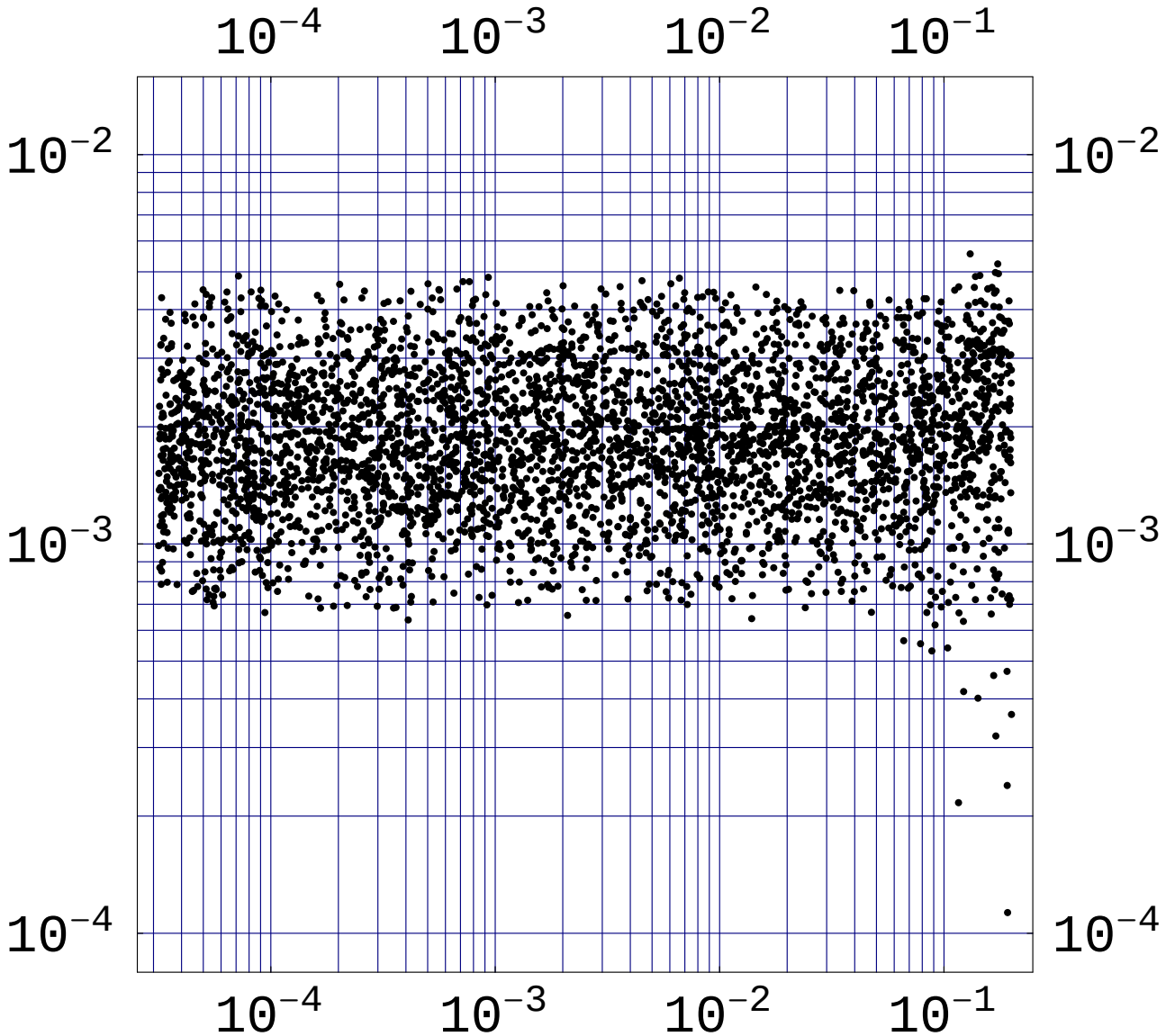


図 7.14: MSW-LMA 解にあるときに得られる M_{ee} 成分の U_{e3} 依存性; 横軸は $|U_{e3}|$ であり、縦軸はそのときに得られる $|M_{ee}|$ の大きさ (eV) を表す。

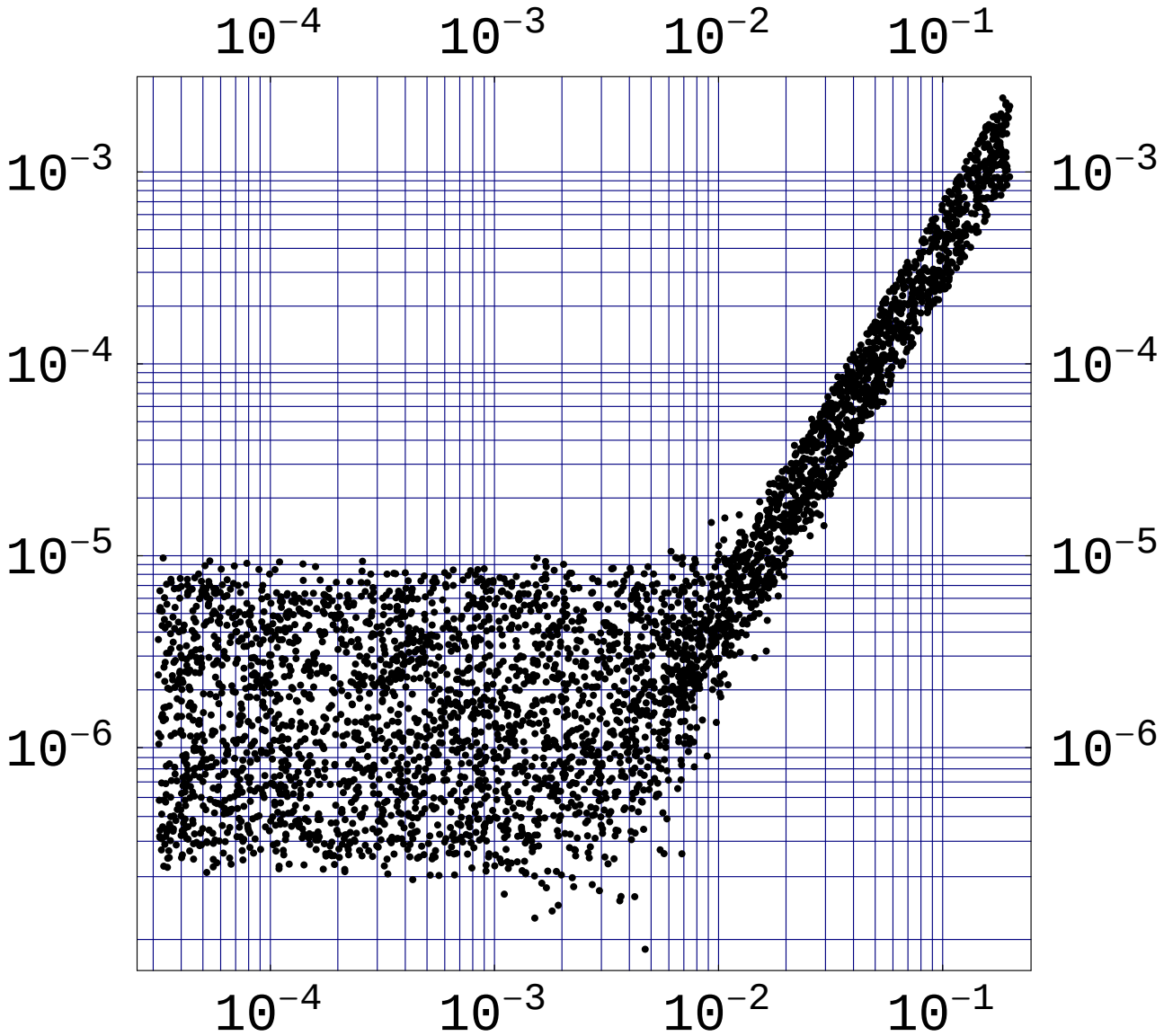


図 7.15: MSW-SMA 解にあるときに得られる M_{ee} 成分の U_{e3} 依存性; 横軸は $|U_{e3}|$ であり、縦軸はそのときに得られる $|M_{ee}|$ の大きさ (eV) を表す。

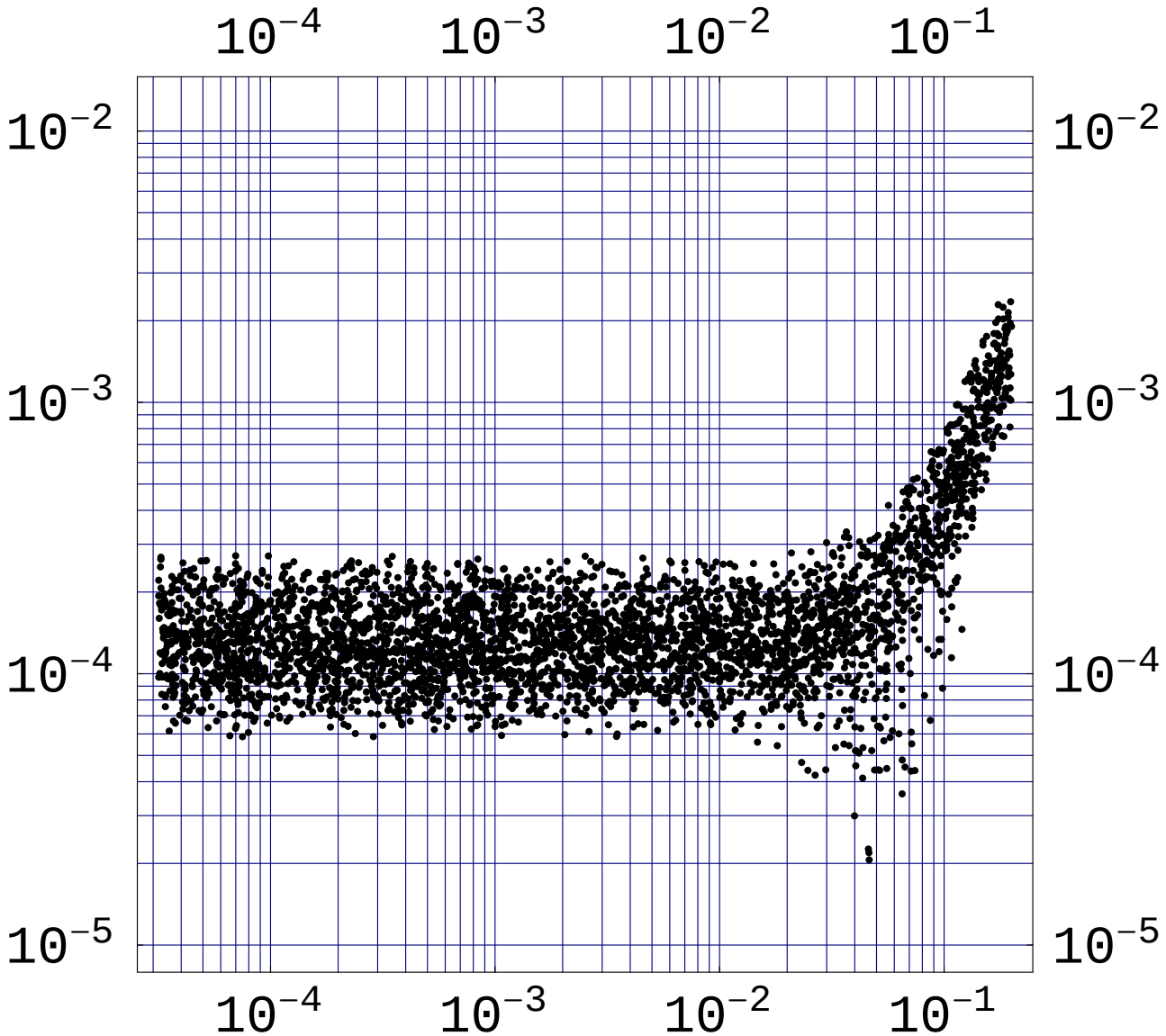


図 7.16: LOW 解にあるときに得られる M_{ee} 成分の U_{e3} 依存性; 横軸は $|U_{e3}|$ であり、縦軸はそのときに得られる $|M_{ee}|$ の大きさ (eV) を表す。

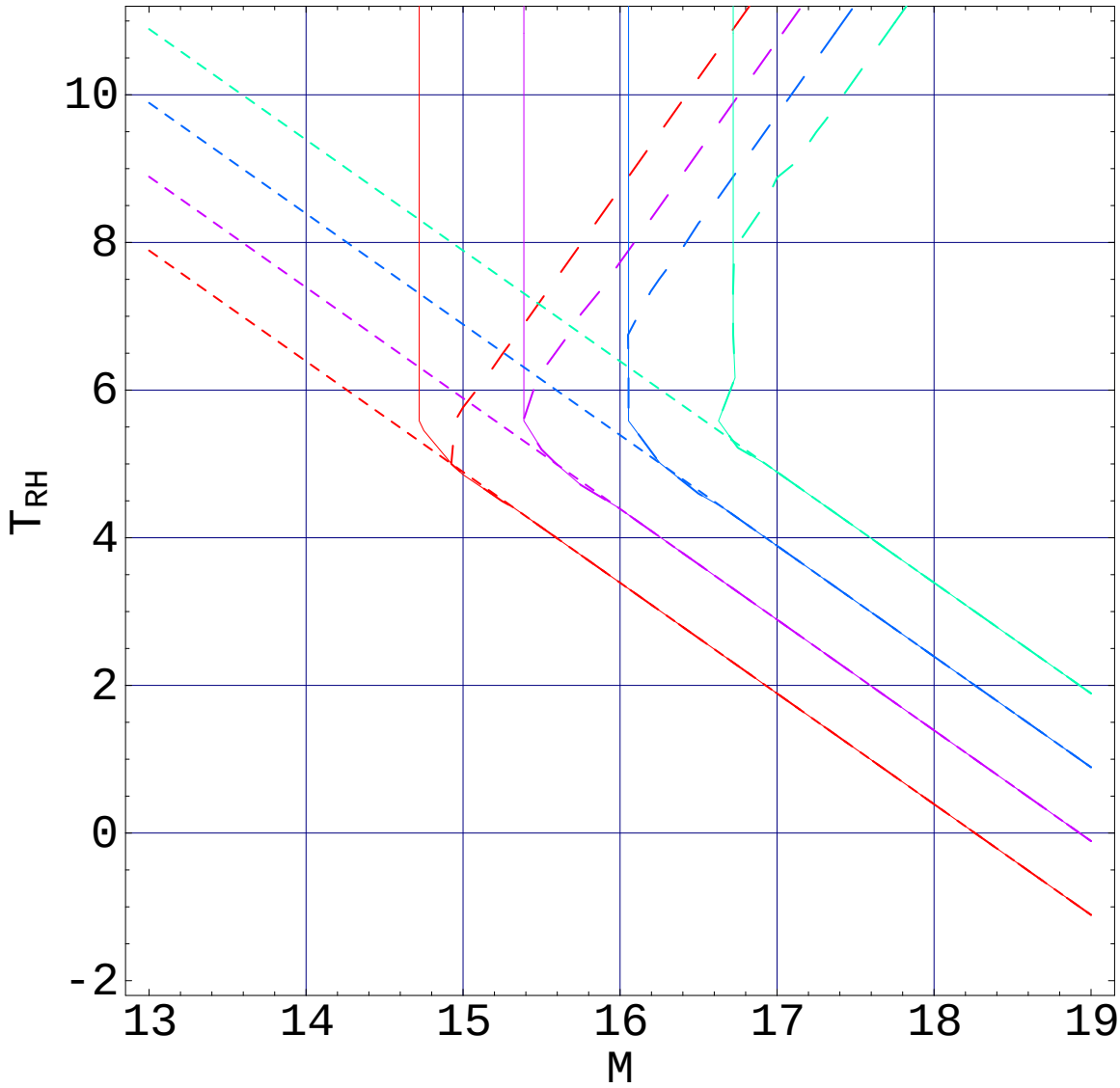


図 7.17: $m_{3/2} \simeq 10^3$GeV の Gravity Mediation タイプの時の、M と再加熱温度 T_{RH} に対する n_B/s の等高線プロット (6 次のスーパーポテンシャルで持ち上げられるもの)；左側から順に、10^{-12} , 10^{-11} , 10^{-10} , 10^{-9} に対応する。細かい破線は有限温度効果を入れなかった場合であり、粗い破線は $a \sim 10^{-2}$ の Two Loop 効果が存在した場合、実線は $f \sim 10^{-5}$ の相互作用が存在した場合の、One Loop の有限温度効果である (Two Loop からの効果は含めてない)。横軸、縦軸共に、10^xGeV を単位に表示してある。

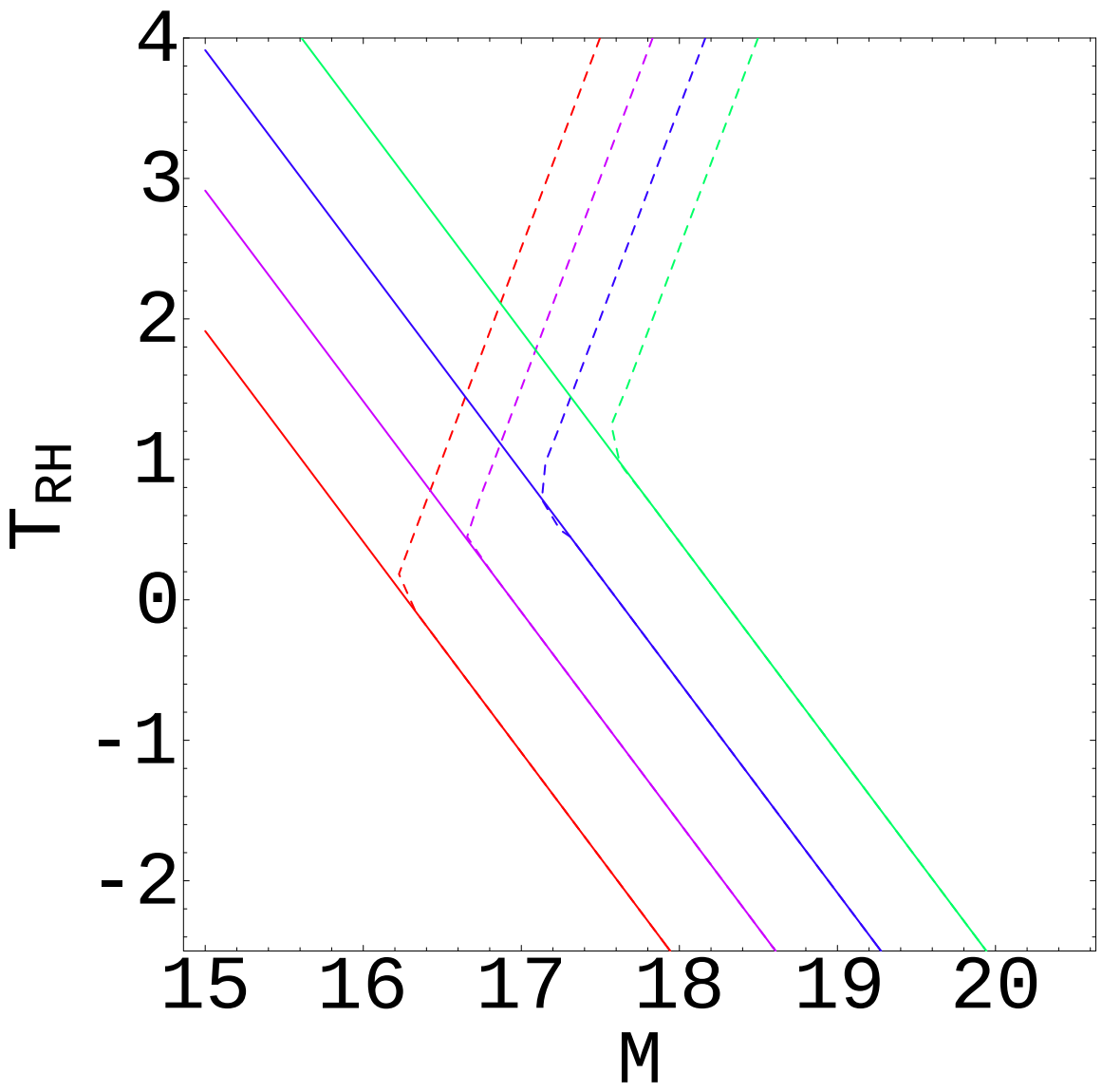


図 7.18: $m_{3/2} \simeq 100\mathrm{keV}$, $V_0 \simeq 10^{11}\mathrm{GeV}^4$ の時の、M と再加熱温度 T_{RH} に対する n_B/s の等高線プロット；左側から順に、10^{-11} , 10^{-10} , 10^{-9} , 10^{-8} に対応する。破線は仮に $a \sim 1$ の Two Loop の有限温度効果が存在した場合のもので、実線は Two Loop 効果をいれないものに対応する。横軸、縦軸共に、$10^x\mathrm{GeV}$ を単位に表示してある。

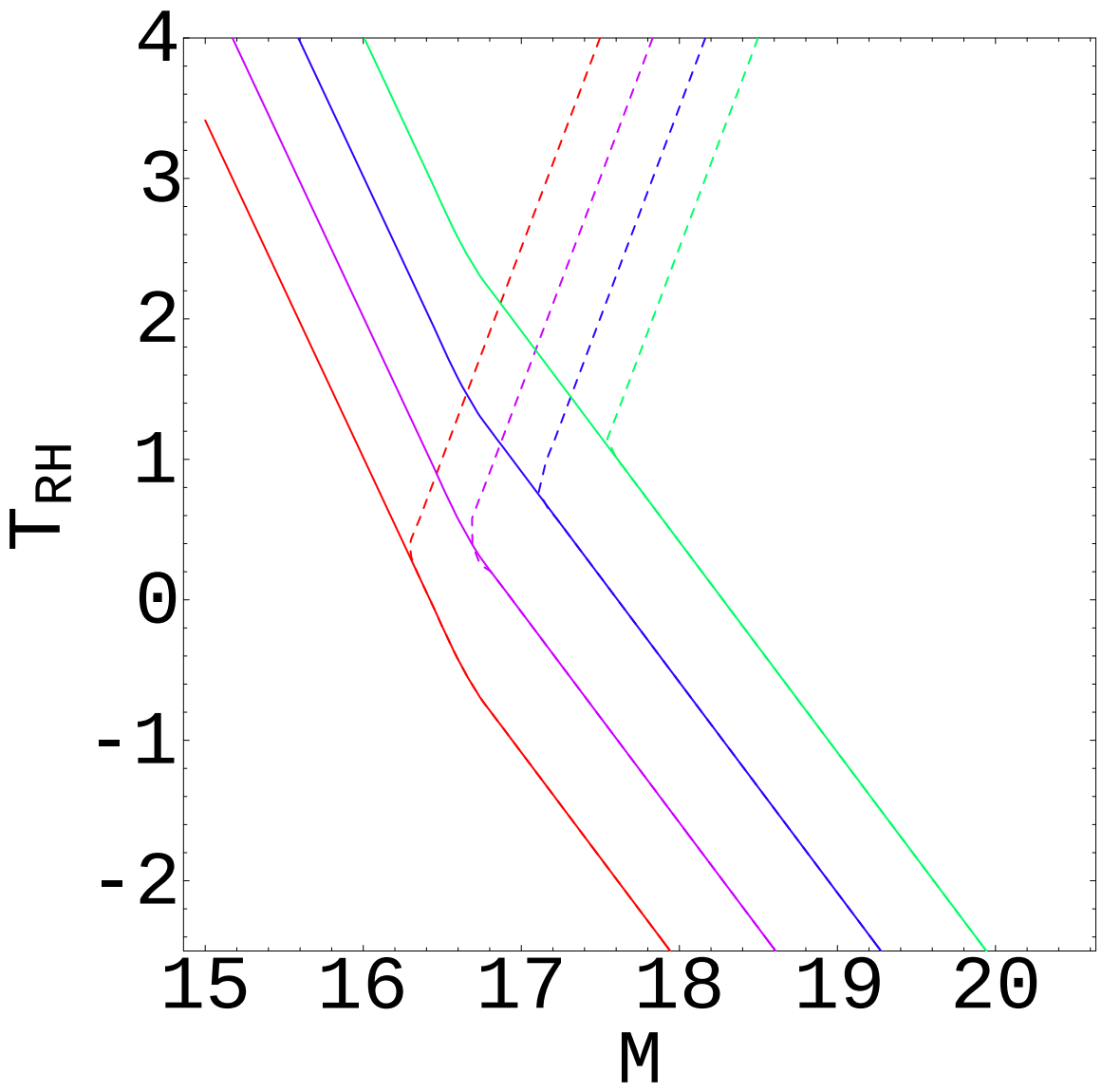


図 7.19: $m_{3/2} \simeq 100\mathrm{keV}$, $V_0 \simeq 10^{15}\mathrm{GeV}^4$ の時の、M と再加熱温度 T_{RH} に対する n_B/s の等高線プロット；左側から順に、10^{-11} , 10^{-10} , 10^{-9} , 10^{-8} に対応する。破線は仮に $a \sim 1$ の Two Loop の有限温度効果が存在した場合のもので、実線は Two Loop 効果をいれないものに対応する。横軸、縦軸共に、$10^x\mathrm{GeV}$ を単位に表示してある。

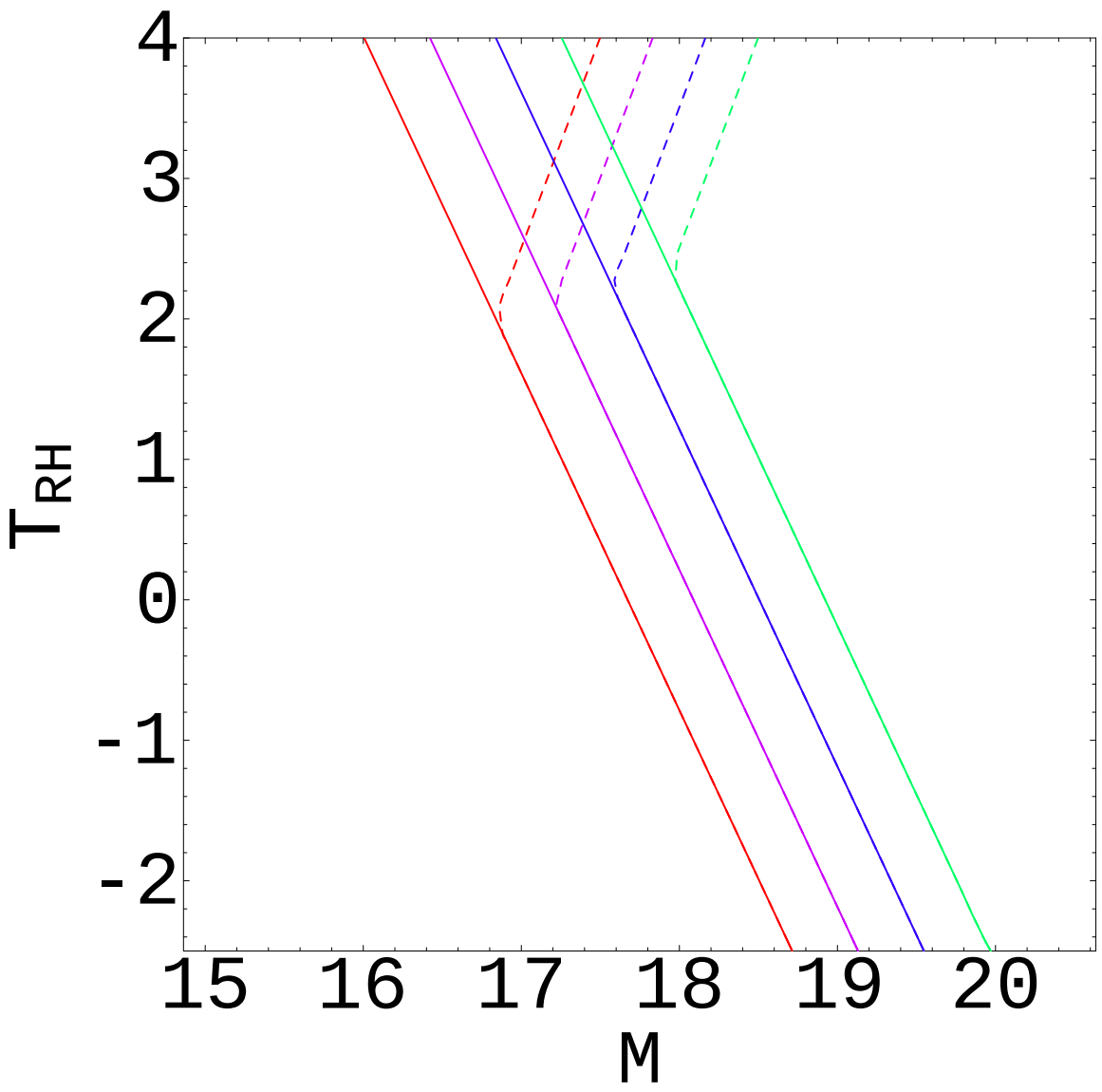


図 7.20: $m_{3/2} \simeq 100\mathrm{keV}$, $V_0 \simeq 10^{20}\mathrm{GeV}^4$ の時の、M と再加熱温度 T_{RH} に対する n_B/s の等高線プロット；左側から順に、10^{-11} , 10^{-10} , 10^{-9} , 10^{-8} に対応する。破線は仮に $a \sim 1$ の Two Loop の有限温度効果が存在した場合のもので、実線は Two Loop 効果をいれないものに対応する。横軸、縦軸共に、$10^x\mathrm{GeV}$ を単位に表示してある。

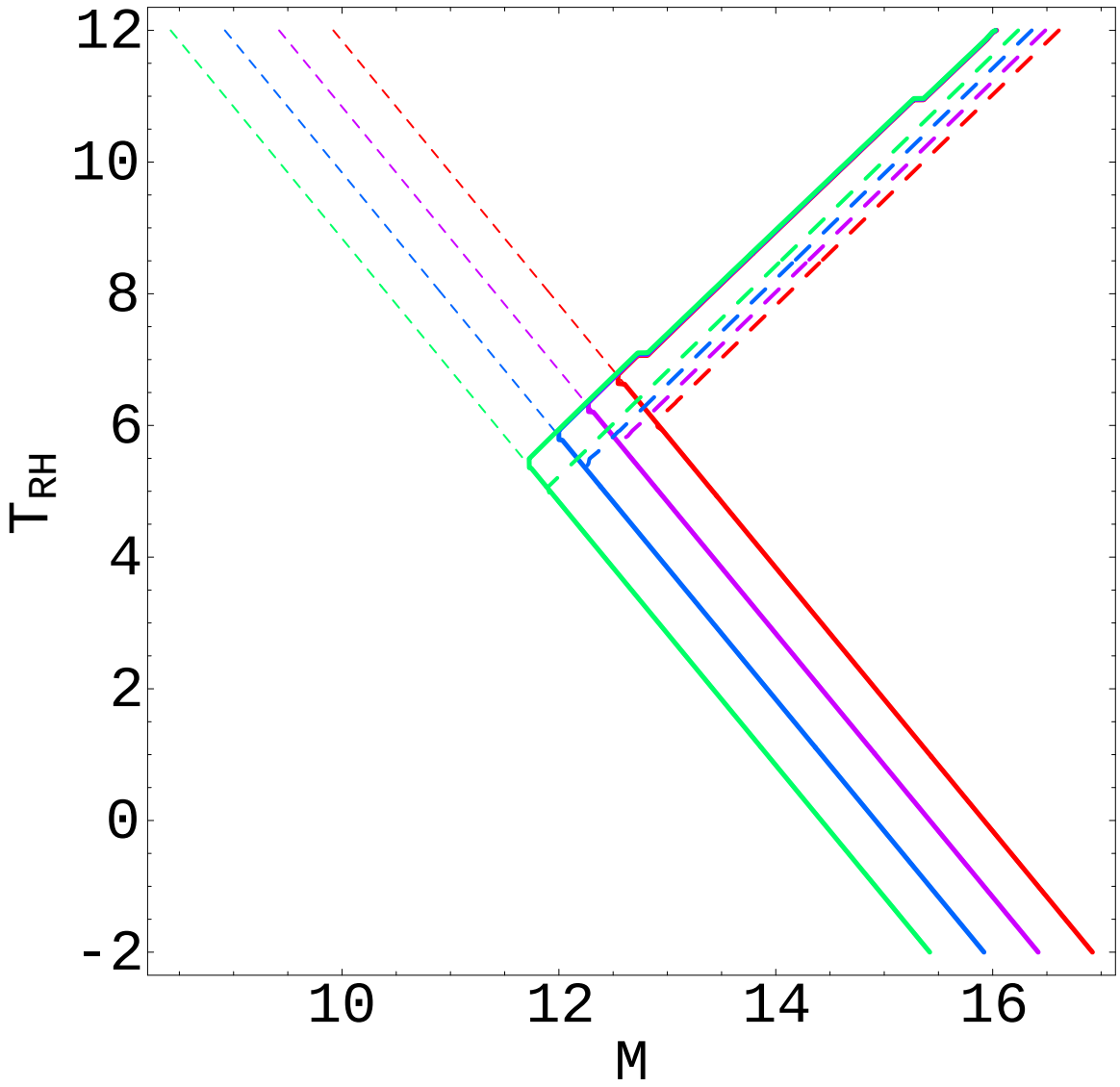


図 7.21: $m_{3/2} = 1\mathrm{TeV}$, $W = 0$ の場合の有限温度効果を入れた n_B/s の等高線プロット; ここで、実線は $f \sim 10^{-3}$ の One Loop の有限温度効果を入れたもの、粗い破線は $a \sim 10^{-2}$ の Two Loop 効果が存在した場合、細かい破線は有限温度効果を入れなかった場合に相当する。左から順に、$n_B/s = 10^{-12}$, 10^{-11} , 10^{-10} , 10^{-9} に対応している。単位は縦横共に、10^x GeV で書かれている。高温において実線が重なっているのは、式 (7.59) を満たすかどうかで、振動開始時期が決定されているからである。

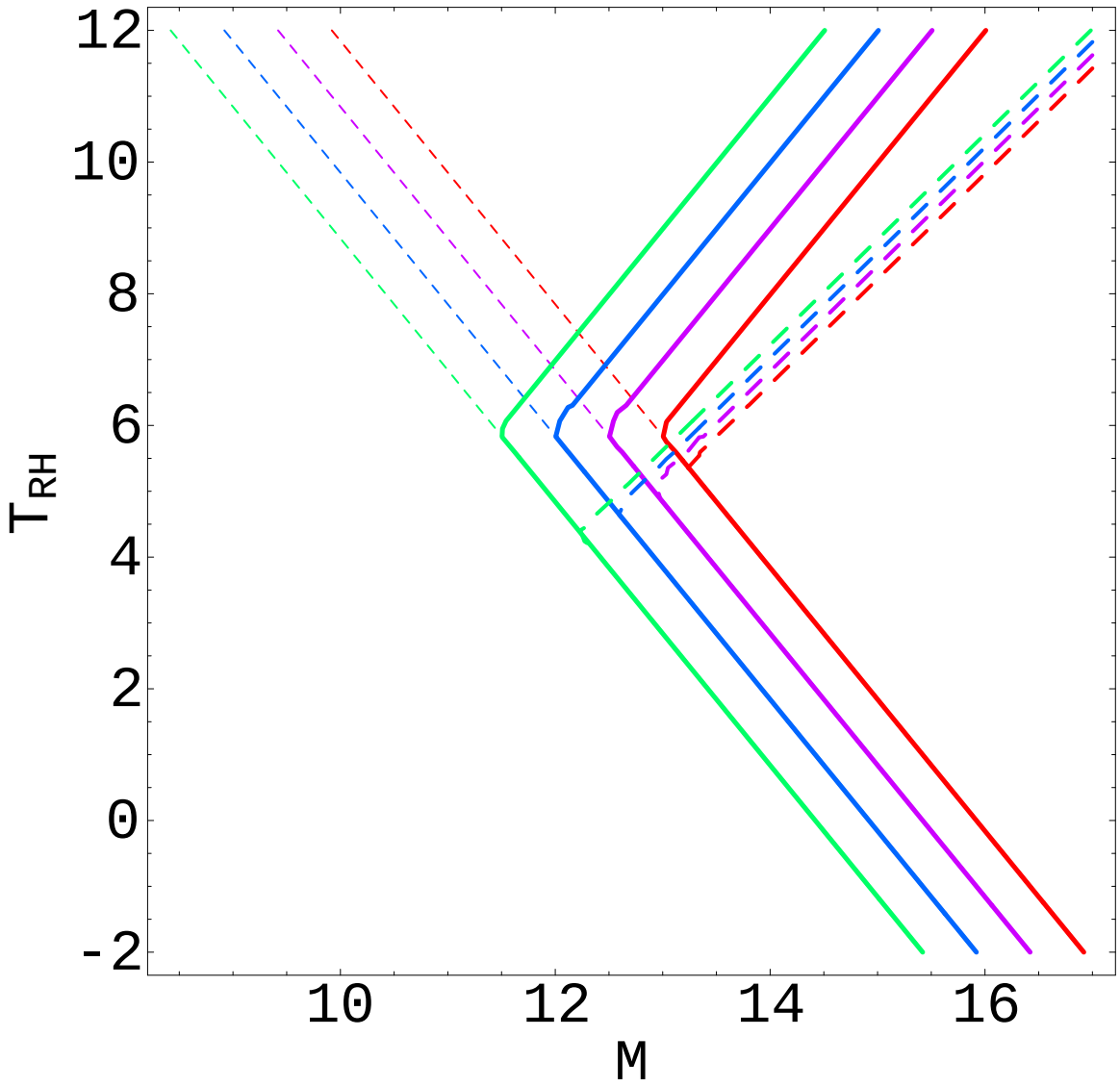
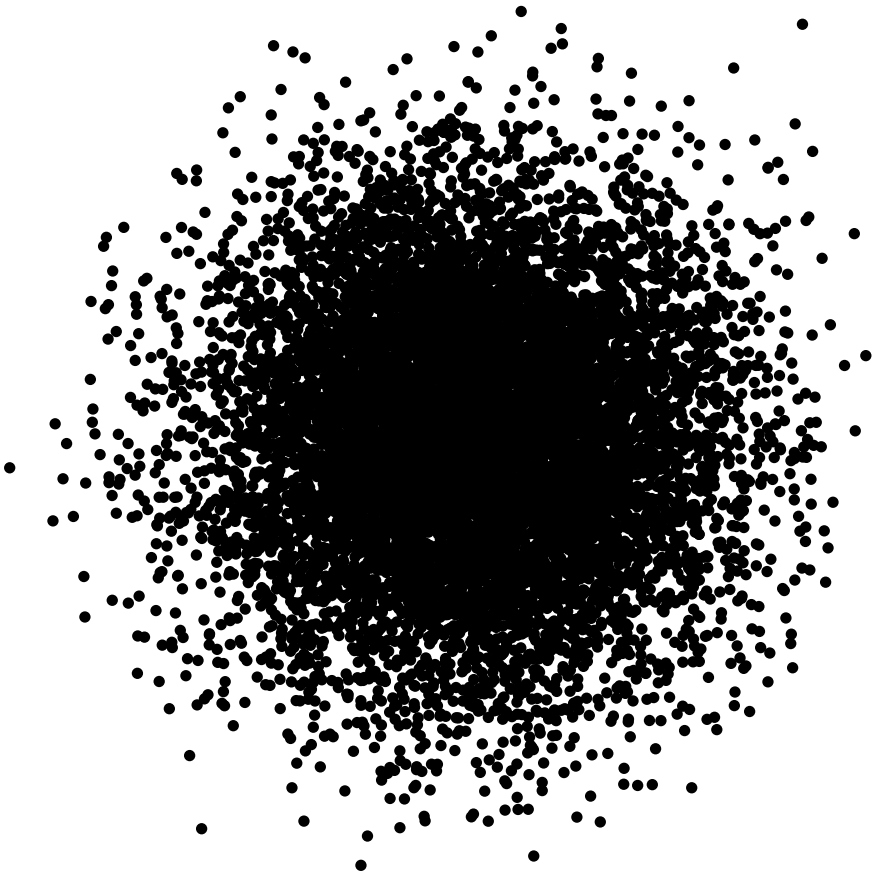


図 7.22: $m_{3/2} = 1\mathrm{TeV}$, $W = 0$ の場合の有限温度効果を入れた n_B/s の等高線プロット; ここで、実線は $f \sim 10^{-5}$ の One Loop の有限温度効果を入れたもの、粗い破線は $a \sim 1$ の Two Loop 効果が存在した場合、細かい破線は有限温度効果を入れなかった場合に相当する。左から順に、$n_B/s = 10^{-12}$, 10^{-11} , 10^{-10} , 10^{-9} に対応している。単位は縦横共に、10^x GeV で書かれている。高温において実線がスプリットしているのは、条件式 (7.58) が振動開始時期を決めているからである。

第III部

Q-Ball とその熱力学、Affleck-Dine Baryogenesis に及ぼす影響



これまで、平坦方向上のコヒーレントな スカラー場の運動を利用した、Affleck-Dine Baryogenesis と、それに対する有限温度効果を詳しく調べて来た。超対称性場の量子論においては、多くのスカラー場は Baryon 数、あるいは、Lepton 数を持っている。したがって、このスカラー場に位相方向の運動を引き起こせれば、Baryon 数、Lepton 数が生成できたわけである。しかし、元素合成理論を説明するには、これらのスカラークオークは元素合成が始まる前にクオークへ、スカラーレプトンは電磁弱スケールより充分高温でレプトンへ、崩壊していなければならない。したがって、Affleck-Dine Baryogenesis の有効性を説明するには、Affleck-Dine 場が原点周りの振動を開始した後、どのように崩壊して行くかを確かめる必要がある。

実は、破れていない U(１)Charge を持つスカラー場のシステムが存在して、そのポテンシャルが二次より平らな部分を持つと non-topological soliton である Q-Ball と呼ばれる状態がエネル

ギー的にもっとも安定な解となることが知られている [5]。今の場合、スフェルミオンがこのスカラー場に、Baryon(Lepton) 数が U(1)Charge に対応する。(Affleck-Dine 場が原点周りの振動を開始した後は、充分良い近似で Baryon(Lepton)Cahrge は保存している。)

また、今まで見て来たように、平坦方向の有効ポテンシャルの形は、超対称性を破るメカニズムに依存していた。第 5 章で議論した Gauge Mediation Model は上記の Q-Ball 解の存在条件を明らかに満たしている [6]。この場合、Q-Ball の質量は $M_Q \propto Q^{3/4}$ であり、単位 Charge 当たりの質量は Charge と共に小さくなり、充分大きな Cahrge では完全に安定な Q-Ball となる。さらに、この場合、空間的に一様な Affleck-Dine 場 (Q-Matter) の振動は摂動に対して不安定であり、最終的に Q-Ball に成長し、Cold Dark Matter の候補になることが指摘された [7]。Gravity Mediation Model においても、Affleck-Dine 場 ϕ と直接結合している場を積分することで、ϕ の有効質量が $\ln(|\phi|^2)$ に比例する依存性をもち (2.1.2 節参照)、非常に多くの場合、自然に Q-Ball 解が存在する。この場合も Affleck-Dine 場は不安定性の成長によって、Q-Ball につぶれる。Gravity Mediation Model の場合には Q-Ball の質量は Charge の一次に比例し、核子への崩壊に対して不安定であり、直接 Cold Dark Matter に寄与することはない。しかし、LSP が 熱浴から decouple する温度まで Q-Ball が生き残れば、Q-Ball が崩壊して生じる LSP Dark Matter の量と、Affleck-Dine 由来の Baryon 数の間に関係がつき得る [8, 9]。また、このことが、パラメータに強い制限をつける原因ともなる。また、Q-Ball が生成されると、内部の場は熱浴中の粒子との相互作用から守られることになるので、少なくとも、電磁弱スケールより低い温度領域まで Q-Ball が生き残っていれば、B-L を保存する平坦方向を利用した Affleck-Dine Baryogenesis も有効となる可能性がある。

以上のように Q-Ball は現象論的に非常に重要である。この第三部では、この Q-Ball 解について簡単に復習した後、背景に高温のプラズマの存在するときの Q-Ball の振る舞いについて詳しく調べ、Affleck-Dine Baryogenesis の帰結についてまとめる。

第8章　Q-Ball 解

8.1　Q-Ball の解析的性質

8.1.1　Q-Ball 解と存在条件

Global U(1) Charge $\{q_i\}$ をもったスカラー場 $\{\Phi_i\}$ を含む一般的な場の理論を考える。スカラー場に対する有効ラグランジアンを次のように定義しよう。

$$\mathcal{L}_{eff} = \partial_\mu \Phi_i^* \partial^\mu \Phi_i - V(\Phi_i) \ . \tag{8.1}$$

ここで、$V(\Phi_i)$ は有効スカラーポテンシャルであり、原点で零になるように規格化してある。後々面倒な係数を無くす為に、

$$\Phi_i \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_i \tag{8.2}$$

と再定義する。Total Charge は次のように表される。

$$Q = \frac{1}{2i} q_i \int d^3x \ (\phi_i^* \dot{\phi}_i - \phi_i \dot{\phi}_i^*) \ . \tag{8.3}$$

この系の、ある固定された Charge Q をもつ状態でのエネルギー最低の状態を求める。条件付きの系で極値を求めるには、良く知られているように、ラグランジュの未定乗数を使えばいい。このラグランジュの未定乗数を今 ω と定義しよう。このとき、ω と場の配位を独立変数として扱えばいい。求めるべきものは、次の量を最小化するような ω と ϕ_i である。

$$E_\omega \equiv E + \omega \left[Q - \frac{1}{2i} q_i \int d^3x \ (\phi_i^* \dot{\phi}_i - \phi_i \dot{\phi}_i^*) \right] \ . \tag{8.4}$$

E は系の全エネルギーである。式 (8.4) は次のように書き直すことが出来る。

$$\begin{aligned} E_\omega &= \int d^3x \ \frac{1}{2} \left| \partial_t \phi_i - i\omega q_i \phi_i \right|^2 + \int d^3x \left[\frac{1}{2} |\nabla \phi_i|^2 + V_\omega(\phi_i) \right] + \omega Q \ , \\ \text{where} \qquad & V_\omega(\phi_i) = V(\phi_i) - \frac{1}{2} \omega^2 q_i^2 |\phi_i|^2 \end{aligned} \tag{8.5}$$

式 (8.5) で、まず一項目を最小化する。

$$\phi_i(x,t) = \mathrm{e}^{i\omega q_i t} \phi_i(x) \ . \tag{8.6}$$

ここで、$\phi_i(x)$ は時間に依らない実関数である。このとき、Q と E_ω は次のように表される。

$$\begin{aligned} Q &= \omega q_i^2 \int d^3x \ \phi_i(x)^2 \\ E_\omega &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} |\nabla \phi_i|^2 + V_\omega(\phi_i(x)) \right] + \omega Q \end{aligned} \tag{8.7}$$

次に、ω と Q を固定したまま式 (8.7) を最小化する。これは、$D = 3$ の bounce 解を求めることと等価であり、そのような解が存在したときは、それは球対称であることが知られている [52]。したがって、$\phi_i(x) = \phi_i(r)$ であり、

$$\begin{aligned} Q &= 4\pi\omega q_i^2 \int_0^\infty dr\ r^2 \phi_i(r)^2 \\ E_\omega &= 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi_i}{dr}\right)^2 + \left(V(\phi_i(r)) - \frac{1}{2}\omega^2 q_i^2 \phi_i(r)^2 \right) \right] + \omega Q \end{aligned} \tag{8.8}$$

と、更に書き直すことが出来る。運動方程式は、

$$\frac{d^2\phi_i}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi_i}{dr} + \left[\omega^2 q_i^2 \phi_i(r) - \frac{\partial V(\phi_i)}{\partial \phi_i} \right] = 0 \tag{8.9}$$

と、与えられる。勿論ここでは、i の和は取っていない。これを、次の境界条件の下で解く。

$$\phi_i'(r) = 0\ ,\ \phi_i(\infty) = 0\ \ . \tag{8.10}$$

この方程式の解の存在条件は以下のように考えると分かりやすい。次の置き換えを行う。

$$\begin{aligned} r &\rightarrow t\ ,\ \omega_i^2 \equiv \omega^2 q_i^2 \\ U(\phi_i) &= \frac{1}{2}\omega_i^2 \phi_i^2 - V(\phi_i) \end{aligned} \tag{8.11}$$

ここで、i の和は取らない。以下特定の ϕ_i について考えることにして、以降添字を省略しよう。以上の量を使うと、式 (8.9) は次の見慣れた形に書き直せる。

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0 \\ H = \frac{2}{3t} \end{aligned} \tag{8.12}$$

これは、ポテンシャル $U(\phi)$ をもつスカラー場の、宇宙膨張の下での運動方程式と同じである。2 項目は宇宙膨張から生じる、時間と共に減衰する摩擦項である。したがって、境界条件 (8.10) を満たすような解が存在するには、ω は次の条件式を満たせば良い。

$$\begin{aligned} \omega_0^2 < \omega^2 < m_\phi^2 \\ \text{where} \quad \omega_o^2 = \min\left[\frac{2V(\phi)}{\phi^2} \right] \end{aligned} \tag{8.13}$$

ここで、m_ϕ は、ϕ の有効質量であり、$\frac{2V(\phi)}{\phi^2}$ の原点での値である。種々の ω の値に対する $U(\phi)$ の模式図を図 (8.1) にあげた。今の問題は、このポテンシャル上の質点の運動方程式を解くのと等価である。条件式 (8.13) を満たしているような場合が、丁度 (i) のグラフに相当する。$\omega^2 = \omega_0^2$ の時に、グラフの二つの頂点が一致する。$\omega^2 > m_\phi^2$ が上側のグラフ (ii) に相当する。$\omega^2 < \omega_0^2$ が (iii) のグラフである。条件 (8.13) が満たされたときに境界条件 (8.10) を満足する解が存在するのは次のように考えれば良い。まず、欲しい解は、時間無限大で原点に達するような質点の運動に対応するものである。グラフ (i) の山の頂点の充分近くから質点を転がすことを考えよう。この場合、任意に頂点付近で過ごす時間を増やすことが出来る。したがって、摩擦項は減衰して効かなくな

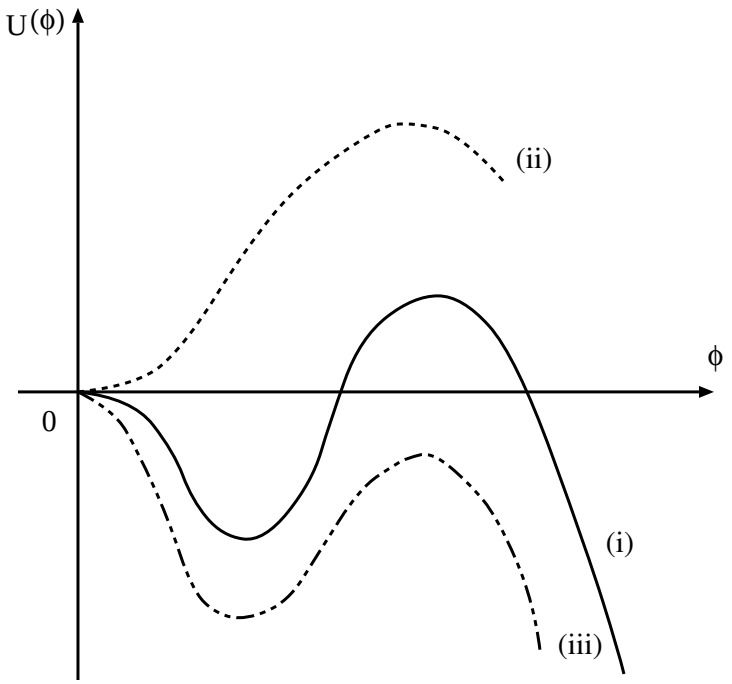


図 8.1: U(ϕ) と ω の関係の模式図

る。したがって、頂点に充分近く初期値を取れば、必ず原点を Over Shoot してしまう。逆に、ϕ 軸との交点に初期値を取って転がせば、摩擦によってエネルギーを失うので、現点に達することが出来ない。連属性を考えれば、その間に初期値を選ぶことで条件を満足するような解が存在することが分かる。このように考えてくれば、グラフ (ii),(iii) に対応するようなときには、欲しい解が存在しないことは明らかであろう。

結局、Q-Ball 解が存在するには、

$$\omega_0^2 = \min\left[\frac{2V(\phi)}{\phi^2}\right] < m_\phi^2 \tag{8.14}$$

であれば良い。つまり、

$$\frac{V(\phi)}{\phi^2}$$

が原点以外に最小値を持てば良いわけである。このときは、必ず、式 (8.13) を満たすような ω が選べるからである。

8.1.2 thin wall 近似

前節後半の議論より明らかであるが、ω^2 が ω_0^2 に充分近い場合には、山の上で充分長い間時間を潰して摩擦項が減衰するの待たねばならない。いま、時間を Q-Ball の同径方向の座標に取っていたので、これは、非常に大きな Q-Ball に相当する。このとき、半径 R が充分大きければ、表

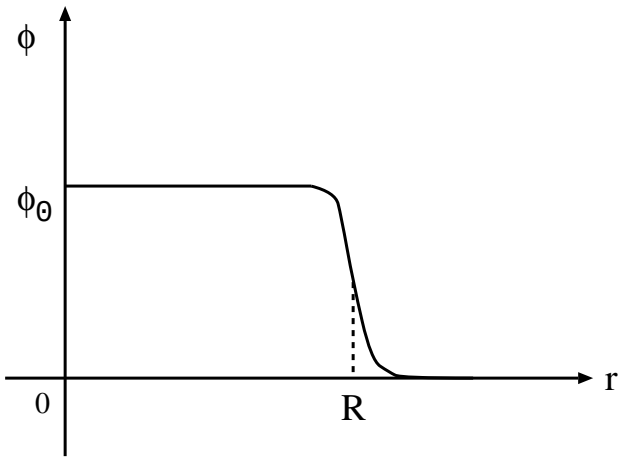


図 8.2: thin wall Q-Ball の模式図

面からの寄与は無視できる (thin wall 近似)。次のような仮定をおいて、解を求める。

$$\phi(r) = \begin{cases} \phi_0 & \text{for} \quad r < R \\ 0 & \text{for} \quad r > R \end{cases} \tag{8.15}$$

このとき、

$$\begin{aligned} Q &= \omega \phi_0^2 V_{ol} \\ E &= V_{ol} \left[\frac{1}{2} \omega^2 \phi_0^2 + V(\phi_0) \right] \end{aligned} \tag{8.16}$$

である。ここで、$V_{ol} = 4/3\ \pi R^3$ である。前式より ω を消去すると、

$$E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\phi_0^2 V_{ol}} + V(\phi_0) V_{ol} \tag{8.17}$$

がえられる。V_{ol} に対して最小化すると、

$$\begin{aligned} V_{ol} &= \frac{Q}{\sqrt{2\phi_0^2 V(\phi_0)}} \\ E &= Q \sqrt{\frac{2V(\phi_0)}{\phi_0^2}} \end{aligned} \tag{8.18}$$

あとは、単に、E を最小化するように ϕ_0 を選べば良い。

8.1.3 thick wall 近似

thin wall 近似は、式 (8.11) の $U(\phi)$ が二つの充分縮退した 極大値を持つとき、つまり、$\omega^2 \simeq \omega_0^2$ の時に、有効な近似であった。次に、そうでない極限、つまり、極大値が全く縮退していない時に (図 8.3 参照) 有効な近似方法を考えよう [52, 53]。次のようなポテンシャルを例に考える。

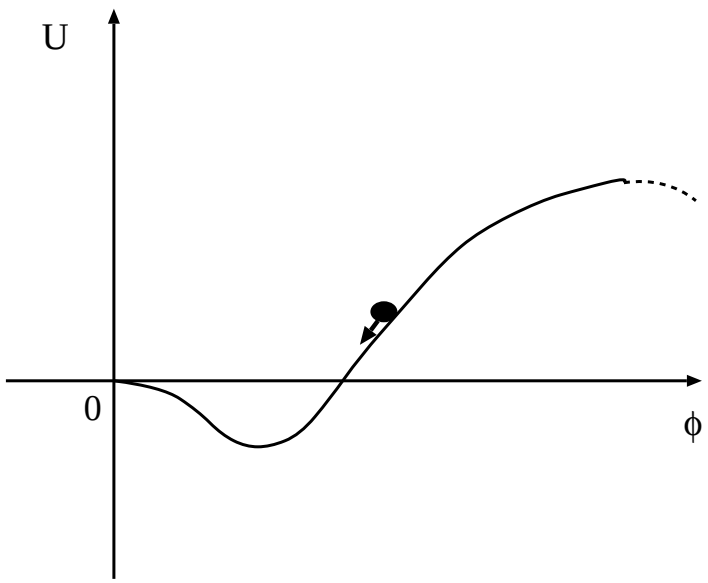


図 8.3: thick wall 近似が有効な $U(\phi)$ の模式図

$$V(\phi) = \frac{1}{2}M^2\phi^2 - A\phi^3 + \lambda\phi^4 \,. \tag{8.19}$$

ϕ の Charge は 1 とする。

$$V_\omega(\phi) = \frac{1}{2}(M^2 - \omega^2)\phi^2 - A\phi^3 + \lambda\phi^4 \tag{8.20}$$

であり、式 (8.7) より、最初に ω と Q を固定したとき最小化するべきものは、

$$\int d^3x \ \left[\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + V_\omega(\phi)\right] \tag{8.21}$$

で与えられる。今の場合、必要な境界条件を満たすには、$U(= -V_\omega)$ の頂点から充分離れたところに初期値 $\phi(r=0)$ を選ばねばならない。よって、$\propto \phi^4$ の項は Q-Ball 解の構造に影響しない。したがって、次の汎関数を最小化すれば良いことになる。

$$E_\omega = \int d^3x \ \left[\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2}(M^2 - \omega^2)\phi^2 - A\phi^3\right] + \omega Q \,. \tag{8.22}$$

ここで、次のような無次元量を導入して上式を書き直す。

$$\begin{aligned} \xi_i &= (M^2 - \omega^2)^{1/2} x_i \\ \psi &= \phi \frac{A}{M^2 - \omega^2} \end{aligned} \tag{8.23}$$

すると、式 (8.22) は以下のように変形される。

$$\begin{aligned} E_\omega &= \frac{(M^2 - \omega^2)^{3/2}}{A^2} \int d^3\xi \left[(\nabla_\xi \psi(\xi))^2 + \frac{1}{2}\psi^2(\xi) - \psi^3(\xi)\right] + \omega Q \\ &= S_\psi \frac{(M^2 - \omega^2)^{3/2}}{A^2} + \omega Q \end{aligned} \tag{8.24}$$

被積分関数は問題のパラメターとは無関係に最小化出来る。bounce 解に相当するものは数値計算されていて、$\overline{S}_\psi \simeq 4.85$ である。後は、これを ω に対して最小化すればいいだけである。式 (8.24) を最小化するような、$0 < \omega < M$ を満たす解は、

$$\epsilon \equiv \frac{QA^2}{3S_\psi M^2} < \frac{1}{2} \tag{8.25}$$

なら存在して、

$$\omega = \omega_{min} = M\left[\frac{1+\sqrt{1-4\epsilon^2}}{2}\right]^{1/2} \tag{8.26}$$

である。このとき、エネルギーを ϵ で展開すると以下のようになる。

$$E = QM\left[1 - \frac{1}{6}\epsilon^2 - \frac{1}{8}\epsilon^4 - \mathrm{O}(\epsilon^6)\right] . \tag{8.27}$$

したがって、単位 Charge 当たりのエネルギーは M より小さく $\phi -$ particle への崩壊に対して安定である。

Q-Ball の半径は無次元の ξ でみて ~ 1 である。したがって、

$$R^{-1} \sim (M^2 - \omega^2)^{1/2} \simeq \epsilon M\left(1 + \frac{1}{2}\epsilon^2 + \frac{7}{8}\epsilon^4 + \mathrm{O}(\epsilon^6)\right) \tag{8.28}$$

のように求めることが出来る。

このような近似方法は、他のポテンシャルの形にも一般的に使えるものである [54]。

8.2 超対称標準理論における Q-Ball 解

この節では、有限温度効果をいれないときの、超対称標準理論における Q-Ball 解についてまとめておく。これは、次章以降で Q-Ball の熱力学を考える時の出発点となる。

8.2.1 Gravity Mediation Model における Q-Ball 解

ここでは、Gravity Mediation Model における Q-Ball 解についてまとめておこう [8, 9]。Affleck-Dine 場が原点周りの振動を開始した後は、ハッブルパラメータに比例する部分は無視して良い。One Loop Order の補正をいれると、平坦方向のポテンシャルは、一般に次のように書ける (2.1.2 節参照)。

$$V(\Phi) = m_\Phi^2\left[1 + K\ln\left(\frac{|\Phi|^2}{M_G^2}\right)\right]|\Phi|^2 + \frac{m_{3/2}}{nM^{n-3}}(a_m\Phi^n + \mathrm{h.c}) + \frac{|\Phi|^{2(n-1)}}{M^{2(n-3)}} \tag{8.29}$$

ここで M_G は m_Φ を定義する繰り込みスケールである。また、

$$K \approx -\frac{1}{3}\sum_{\alpha\ gauginos}\frac{\alpha_{g_\alpha}}{8\pi}\frac{M_\alpha^2}{m_\Phi^2} \tag{8.30}$$

であり、スカラークオークを含むような一般的な平坦方向については、

$$-K \simeq 0.01 \sim 0.1 \tag{8.31}$$

である。各平坦方向における K の値については、[58] で詳しく調べられている。gaugino の質量が小さい場合や、平坦方向においてスカラートップの占める割合が大きい場合など、特殊な場合には式 (8.30) のようにはかけず、K は正になる可能性もある。K は soft breaking mass の繰り込み群方程式から求められるが、平坦方向 Φ と直接相互作用している場の積分のみから寄与があることに注意する。単に質量に対する繰り込み群方程式で、繰り込みスケールを $|\Phi|$ と置くと正しくない (2.1.2 節)。

前節でやったように、

$$\Phi(x) = \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2}}\phi(r) \tag{8.32}$$

とおいて、議論を進めよう。解くべき運動方程式 (8.9) は以下のようになる。

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} = -\left(\omega^2 - m_\phi^2(1+K)\right)\phi + m_\phi^2 K\phi \ln\left(\frac{\phi^2}{M_G^2}\right) + \frac{n-1}{M^{2(n-3)}}\left(\frac{\phi^2}{2}\right)^{n-2}\phi \tag{8.33}$$

但し、A-term に対応する部分は、簡単のために、今は無視しておこう。thin wall 近似が有効になるのは、(8.1.2 節) の議論から、Q-Ball の中心における ϕ の値 ϕ_0 が、

$$\frac{V(\phi)}{\phi^2}$$

を最小化するような $\phi = \phi_c$ に充分に近い場合である。今の場合、

$$\phi_c = \sqrt{2}M\left[\frac{m_\phi^2|K|}{(n-2)M^2}\right]^{1/2(n-2)} \tag{8.34}$$

で、与えられる。逆に、ϕ_0 が式 (8.34) の値より、充分小さければ式 (8.33) の最期の項は無視できるので、thick wall 近似が可能である。

このポテンシャルにおいては、thick wall の時には、$\phi(r)$ を Gaussian で近似するのが数値的に非常に良いことが分かっている [9]。ここで、その解の特徴を詳しくみておこう。次の仮定の下に、Q-Ball 解を求める。

$$\phi(r) = \phi(0)\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{R^2}} \ . \tag{8.35}$$

Q-Ball 方程式 (8.33) の左辺は次のようになる。

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} = \left(-\frac{6}{R^2} + \frac{4r^2}{R^4}\right)\phi \ . \tag{8.36}$$

繰り込み点 M_G を $\phi(0)$ に選べば右辺も同じ関数形になる。式 (8.33) の最期の項は無視して、

$$\left(-\frac{6}{R^2} + \frac{4r^2}{R^4}\right)\phi = -\tilde{\mu}^2\phi - \left(\frac{2Km_\phi^2}{R^2}\right)r^2\phi$$
$$\text{where} \quad \tilde{\mu}^2 \equiv \omega^2 - m_\phi^2(1+K) \tag{8.37}$$

で与えられる。この式の二項目同士を比べることによって、

$$R^2 = \frac{2}{m_\phi^2|K|} \tag{8.38}$$

を得ることが出来る。これと、一項目から、

$$\omega^2 = m_\phi^2 + 2m_\phi^2|K| \simeq m_\phi^2 \tag{8.39}$$

が得られる。ω が m_ϕ より大きいので、エネルギー的に損をしていて Q-Ball の存在条件に矛盾している気がするが、式 (8.29) を見てみると分かるように、場の値が小さいときは ϕ の有効質量は $m_\phi^2\left(1+|K|\ln\left(\frac{\phi(0)^2}{\phi^2}\right)\right)$ のように大きくなっているので、結局単位 Charge 当たり $\mathcal{O}(|K|m_\phi)$ だけエネルギー的に得している。このとき、

$$\begin{aligned} Q &= \int dr\ 4\pi r^2 \omega\phi(0)^2 \mathrm{e}^{-\frac{2r^2}{R^2}} \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \omega\phi(0)^2 R^3 \end{aligned} \tag{8.40}$$

であり、

$$\begin{aligned} E &= \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} R\ \phi(0)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}\left(m_\phi^2 + \frac{7}{4}m_\phi^2|K|\right)\phi(0)^2\ R^3 \\ &\simeq \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} R\ \phi(0)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} m_\phi^2\phi(0)^2 R^3 \end{aligned} \tag{8.41}$$

で与えられる。ここで、二項目はポテンシャルエネルギーと Charge 項からの寄与であり、$|K| << 1$ の時には、この二項目が Q-Ball のエネルギーの支配的な成分となる。

Gravity Mediation Model における Q-Ball の大きな特徴の一つは、単位 Charge 当たりの質量 $\sim 10^{2\sim3}$GeV がほとんど Q-Matter と同じ点である。したがって、零温度においても、核子への崩壊に対して不安定である。Q-Ball の軽いフェルミオンへの崩壊については、[66] と、(10.1.1 節) の議論を参照。

8.2.2 Gauge Mediation Model における Q-Ball 解

この節では、Gauge Mediation Model における Q-Ball 解のパラメータ依存性求める。第 5 章でみたように Gauge Mediation Model における平坦方向のポテンシャルは、場の値が Messenger Sector の mass スケール $\langle S\rangle$ を充分超えたところで、ln の依存性を除いて、平坦になっていた。当然これは Q-Ball 解の存在条件を満たしている。平坦方向の有効ポテンシャルの形状から、 Q-Ball の性質は Gravity Mediation Model とは全く違ったものとなる。

まず、thick wall 近似を使って、Q-Ball のエネルギーが $E \propto Q^{3/4}$ となることを導いておこう [6]。平坦方向のポテンシャルとしては、(図 5.2) を考える。次節で議論するが、Affleck-Dine 場が空間的な摂動に対する不安定性を感じて、Q-Ball に潰れてしまう時期は、Affleck-Dine 場が原点まわりの振動を始めてからである。したがって、以下で Q-Ball 解を求めるにおいては、スーパーポテンシャルの存在は無視して良い。さて、平坦方向のポテンシャルを定数項だけで近似しよう。

$$V(\phi) \simeq M^4 \tag{8.42}$$

ここで、ln の補正は無視した。最小化するべき汎関数 (8.4) は、

$$E_\omega = \int d^3x\ \left[\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \left(-\frac{1}{2}\omega^2\phi^2 + M^4\right)\right] + \omega Q \tag{8.43}$$

で与えられる。(8.1.3 節) と同様に次の無次元変数で書き直す。

$$\begin{aligned} \psi &= \phi/\omega \\ \xi_i &= \omega x_i \end{aligned} \tag{8.44}$$

すると、式 (8.43) は次のようになる。

$$\begin{aligned} E_\omega &= \omega \int d^3\xi \left[\frac{1}{2}|\nabla_\xi \psi|^2 - \frac{1}{2}\psi^2\right] + \frac{1}{\omega^3}\int d^3\xi\, M^4 + \omega Q \\ &\equiv \omega S_\psi + b/\omega^3 + \omega Q \end{aligned} \tag{8.45}$$

ここで、$S_\psi = \mathcal{O}(1)$ だから、Q が充分大きければ一項目は無視できる。E_ω を ω に対して最小化すれば、

$$\begin{aligned} \omega &\propto Q^{-1/4} \\ E &\propto Q^{3/4} \end{aligned} \tag{8.46}$$

が得られる。

したがって、単位 Charge 当たりの質量は $Q^{-1/4}$ に比例し、充分大きい Charge に関しては、陽子など、核子への崩壊に対しても安定となることに注意する。これは、Gravity Mediation Type のものと大きく異る点であり、Q-Ball そのものが現在の宇宙の Cold Dark Matter 成分に寄与し得る。

次に、[56] にしたがってもう少し細かくパラメター依存性を決めよう。

$$\begin{aligned} E_\omega &\equiv F_\omega + \omega Q \\ &= \int d^3x \left[\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 - \frac{1}{2}\omega^2\phi^2 + V(\phi)\right] + \omega Q \end{aligned} \tag{8.47}$$

ここで、

$$-\frac{\partial F_\omega}{\partial \omega} = \int d^3x\, \omega\phi^2 = Q \tag{8.48}$$

に注意しよう。次に、以下のように変数を定義し直して、˜をつけた無次元量で書き直す。

$$\begin{aligned} V(\phi) = a_v g(\tilde{\phi}) \quad &, \quad \phi = a_\phi \tilde{\phi} \\ \omega = a_\omega \tilde{\omega} \quad &, \quad r = a_R \tilde{r} \\ (E_\omega, F_\omega) = a_E(\tilde{E_\omega}, \tilde{F_\omega}) \quad &, \quad Q = a_Q \tilde{Q} \end{aligned} \tag{8.49}$$

ここで、各変数間には、次の関係がある。

$$\begin{aligned} a_\omega = \frac{\sqrt{a_v}}{a_\phi} \quad &, \quad a_R = \frac{a_\phi}{\sqrt{a_v}} \\ a_E = \frac{a_\phi^3}{\sqrt{a_v}} \quad &, \quad a_Q = \frac{a_\phi^4}{a_v} \end{aligned} \tag{8.50}$$

ここで、ポテンシャルの規格化は、

$$g(0) = 1 \quad , \quad g(\infty) = 1 \tag{8.51}$$

となるように取っておく。この無次元量を使うと、解くべき Q-Ball 方程式は以下のようになる。

$$\frac{d^2\tilde{\phi}}{d\tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}}\frac{d\tilde{\phi}}{d\tilde{r}} = -\tilde{\omega}^2\tilde{\phi} + \frac{\partial g(\tilde{\phi})}{\partial\tilde{\phi}} \, . \tag{8.52}$$

境界条件は、

$$\tilde{\phi}'(0) = 0 \quad , \quad \tilde{\phi}(\infty) = 0 \tag{8.53}$$

である。ここで解が、$\tilde{F}_\omega = C\tilde{\omega}^{-\alpha}$ とスケールしたと仮定する。すると、

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= -\frac{\partial\tilde{F}_\omega}{\partial\tilde{\omega}} = C\alpha\tilde{\omega}^{-\alpha-1} \\ \tilde{E}_\omega &= \tilde{F}_\omega + \tilde{\omega}\tilde{Q} = (1+\alpha^{-1})(\alpha C)^{\frac{1}{1+\alpha}}\tilde{Q}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \end{aligned} \tag{8.54}$$

求めたいものは、C , α である。まず、$\tilde{\phi}$ が大きいところ、つまり、Q-Ball の中心付近を考えよう。ここでは、Q-Ball 方程式 (8.52) は次のように簡単に書くことが出来、実際に解くことが出来る。

$$\frac{d^2\tilde{\phi}}{d\tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}}\frac{d\tilde{\phi}}{d\tilde{r}} + \tilde{\omega}^2\tilde{\phi} = 0 \, . \tag{8.55}$$

この式は次のように解ける。

$$\tilde{\phi}(\tilde{r}) = \tilde{\phi}_0\frac{\sin(\tilde{\omega}\tilde{r})}{\tilde{\omega}\tilde{r}} \, . \tag{8.56}$$

ここで、$\tilde{\phi}_0$ のスケールを見積もろう。摩擦項があるものの、エネルギー保存則から、

$$\tilde{\omega}^2\tilde{\phi}^2 \sim g(\tilde{\phi}_0) \simeq 1 \tag{8.57}$$

であるから、$\tilde{\phi} \sim \tilde{\omega}^{-1}$ とスケールする。また、Q-Ball の半径は、式 (8.56) より、$\tilde{R} \sim \pi\tilde{\omega}^{-1}$ と見積もることが出来る。したがって、

$$\tilde{Q} = \tilde{\omega}\int d^3\tilde{x}\tilde{\phi}^2 \sim \tilde{\omega}\tilde{R}^3\tilde{\phi}_0^2 \sim \tilde{\omega}^{-4} \tag{8.58}$$

がわかる。式 (8.54) より、$\alpha = 3$ であることが分かる。さて、

$$g(\kappa/\tilde{\omega}) \to \theta(\kappa) \quad \text{when} \quad \tilde{\omega} \to 0 \tag{8.59}$$

である。但し、$\theta(0) = 0$ である。Q-Ball 方程式を次のように書き直す。

$$\begin{aligned} \frac{d^2X}{d\tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}}\frac{dX}{d\tilde{r}} &= -\tilde{\omega}^2X + \tilde{\omega}^2\frac{\partial}{\partial X}g(X/\tilde{\omega}) \\ \text{where} \quad X &\equiv \tilde{\omega}\tilde{\phi} \end{aligned} \tag{8.60}$$

$\tilde{\omega} \to 0$ を考えると、次のようにまとめることが出来る。

$$\frac{d}{dX}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dX}{d\tilde{r}}\right)^2 - \tilde{\omega}^2\theta(X)\right] = 0 \, . \tag{8.61}$$

この式が、$\tilde{R}$ で成立するようにすると、式 (8.56) より、

$$\tilde{\phi}_0 = \sqrt{2}\pi/\tilde{\omega}$$

であることが分かる。これより、

$$C = \frac{4\pi^4}{3}$$

である。以上の結果をもとの次元を持った量に戻すと以下のようになる。

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{Q^{1/4}}{a_v^{1/4}} \quad , \quad \phi_0 = a_v^{1/4} Q^{1/4} \\ R\omega &= \pi \quad , \quad E = \frac{4\pi\sqrt{2}}{3} a_v^{1/4} Q^{3/4} \\ Q &= 4\pi^4 a_v \omega^{-4} \end{aligned} \tag{8.62}$$

これらは、数値解と約１０％の範囲で正しいことが分かっている [56]。

8.2.3 New Type Q-Ball

(5.2.1 節) でも議論したように、Gauge Mediation によって、sparticle の soft breaking mass が与えられる場合にも、常に重力相互作用は存在しており、平坦方向を持ち上げるのに寄与している。場の値が充分大きいところでは、重力相互作用による持ち上がりの方が支配的となる。ポテンシャルの形として、(図 5.1) を考えよう。(横軸は log スケールで書かれていることに注意しよう。) 条件式 (5.14) を満たす場合には、Q-Ball 解は Gravity Mediation タイプのものとほとんど同じになる。ただ、soft breaking mass が小さな gravitino mass で置き換わるだけである。この場合に重要なのは、

$$\omega \simeq m_{3/2} \ < \ 1 \text{ GeV} \tag{8.63}$$

の場合には、この Q-Ball が陽子への崩壊に対しても安定となり、Cold Dark Matter の成分に直接寄与する点である。したがって、この場合には Gauge Mediation タイプの Q-Ball と同様、Baryon asymmetry と Dark Matter の量との間に関係を付けられ得る [57]。これらの条件については、Q-Ball の熱力学について調べてから議論する。

8.3 Q-Ball formation

これまでの議論で、零温度においては、超対称標準理論は、Gravity Mediation Model においても、Gauge Mediation Model においても、Q-Ball 解がゆるされ、対応する U(1) Charge を固定したときにエネルギー最低の状態となった。ここでは、実際に、Affleck-Dine 場のコヒーレントな振動が、どのように Q-Ball に発展するかを調べる。いつ、どのような大きさの Q-Ball が生成するのか、その大きさと、平坦方向を持ち上げるスーパーポテンシャルの次元や、得られる Baryon asymmetry との間の関係は、今後の議論に欠かせないものである。詳しい数値計算については、[59, 60] 参照。

8.3.1 instability の成長とその条件

第二部で議論したように、Affleck-Dine 場は $H \sim m_{\phi\, eff}$ でコヒーレントな振動を開始し、その時点で Baryon(Lepton) 数が固定された。しかし、この空間的に一様なモードに、不安定性が成長して、Baryon(Lepton) asymmetry の高い領域と、低い領域が出来得る。このときには、Charge

密度の高い部分が、よりエネルギー的に安定な Q-Ball に発展するだろう。この節では、いつ、どのような波長の不安定性が成長するか調べることにしよう。

complex field Φ を

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} R \mathrm{e}^{i\Omega}$$

と parametrize しよう。空間的に球対称なメトリック $ds^2 = dt^2 - a(t)^2 dr^2$ における場の運動方程式は、一般に次のようになる [7]。

$$\begin{aligned} &\ddot{\Omega} + 3H\dot{\Omega} - \frac{1}{a^2(t)}\Delta\Omega + \frac{2\dot{R}}{R}\dot{\Omega} - \frac{2}{a^2(t)R}(\partial_i\Omega)(\partial^i R) = 0 \ , \\ &\ddot{R} + 3H\dot{R} - \frac{1}{a^2(t)}\Delta R - \dot{\Omega}^2 R + \frac{1}{a^2(t)}(\partial_i\Omega)^2 R + \frac{\partial U}{\partial R} = 0 \ . \end{aligned} \tag{8.64}$$

ここで、U はスカラーポテンシャルである。この R , Ω を空間的に一様なモードの周りに展開する。

$$\begin{aligned} R &= \phi(t) + \delta\phi(x,t) \ , \\ \Omega &= \theta(t) + \delta\theta(x,t) \ . \end{aligned} \tag{8.65}$$

$\delta\phi$, $\delta\theta$ に関して、一次まで展開すると、式 (8.64) は次のように変形される。

$$\begin{aligned} &\ddot{\delta\phi} + 3H\dot{\delta\phi} - \left(2\dot{\theta}(t)\phi(t)\dot{\delta\theta} + \delta\phi\dot{\theta}(t)^2\right) - \frac{1}{a(t)^2}\Delta\delta\phi + U''(\phi(t))\delta\phi = 0 \ , \\ &\phi(t)\ddot{\delta\theta} + 3H\left(\dot{\theta}(t)\delta\phi + \dot{\delta\theta}\phi(t)\right) + 2\left(\dot{\phi}(t)\dot{\delta\theta} + \dot{\delta\phi}\dot{\theta}(t)\right) - \frac{1}{a(t)^2}\phi(t)\Delta\delta\theta = 0 \ . \end{aligned} \tag{8.66}$$

ここで、以下のような仮定をおくと、問題を簡単化出来る。この仮定は、Affleck-Dine 場が振動を開始したあとには、充分自然である。添字 0 は Affleck-Dine 場が振動を開始した時刻の量であることを示す。

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \left(\frac{a_0}{a(t)}\right)^{3/2} \phi_0 \ , \\ \delta\phi &= \left(\frac{a_0}{a(t)}\right)^{3/2} \delta\phi_0 \mathrm{e}^{i\left(S(t) + \vec{k}.\vec{x}\right)} \ , \\ \delta\theta &= \delta\theta_0 \mathrm{e}^{i\left(S(t) + \vec{k}.\vec{x}\right)} \ . \end{aligned} \tag{8.67}$$

現在考えている系が、物質優勢期 ($a \propto t^{2/3}$) にあると仮定する。すると式 (8.66) は、以下のようにまとめられる。

$$\begin{bmatrix} i\ddot{S} - \dot{S}^2 + U''(\phi) - \dot{\theta}^2 + \frac{\vec{k}^2}{a^2} & -2i\dot{\theta}\dot{S}\phi \\ 2i\dot{\theta}\dot{S} & \left(i\ddot{S} - \dot{S}^2 + \frac{\vec{k}^2}{a^2}\right)\phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta\phi \\ \delta\theta \end{pmatrix} = 0 \ . \tag{8.68}$$

よって、$\delta\phi$, $\delta\theta$ が非自明な解を持つためには、

$$\left[i\ddot{S} - \dot{S}^2 + U'' - \dot{\theta}^2 + \frac{\vec{k}^2}{a^2}\right]\left[i\ddot{S} - \dot{S}^2 + \frac{\vec{k}^2}{a^2}\right] - 4\dot{\theta}^2\dot{S}^2 = 0 \ , \tag{8.69}$$

である。$S = -i\alpha(t)$, $\dot{\alpha}^2 = X$ と置こう。すると、式 (8.69) は次のようになる。

$$X^2 + \left(2\frac{\vec{k}^2}{a^2} + 3\dot{\theta}^2 + U''\right) X + \frac{\vec{k}^2}{a^2}\left(\frac{\vec{k}^2}{a^2} + U'' - \dot{\theta}^2\right) = 0 \, . \tag{8.70}$$

したがって、摂動が指数関数的に成長する解が存在する条件は、

$$\frac{\vec{k}^2}{a^2} + U'' - \dot{\theta}^2 < 0 \, , \tag{8.71}$$

で与えられる。もっとも早く摂動の成長するモードは、

$$\frac{k_{max}^2}{a^2} = \frac{1}{16\dot{\theta}^2}\left(-U''^2 - U''\dot{\theta}^2 + 7\dot{\theta}^4\right) \tag{8.72}$$

で与えられ、そのとき、

$$X = \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{16}\left(-2U'' + \frac{U''^2}{\dot{\theta}^2} + \dot{\theta}^2\right) \tag{8.73}$$

である。

8.3.2 Gravity Mediation Model における Q-Ball の形成

今、有限温度効果は効かない状況を考える。$\Phi = \phi/\sqrt{2}$ とおいたとき、Affleck-Dine 場が振動を開始した後の平坦方向の有効ポテンシャルは、以下のように、近似される。

$$U(\phi) = \frac{1}{2}m_\phi^2\left(1 + K\ln\left(\frac{|\phi|^2}{M_G^2}\right)\right)\phi^2 \tag{8.74}$$

ここで、M_G は m_ϕ を定義した繰り込み点のスケールである。この場合の摂動の成長を調べよう。摂動に対して不安定な条件は、前節の式 (8.72) より、

$$\frac{\vec{k}^2}{a^2} + m_\phi^2\left(1 + K\ln\left(\frac{|\phi|^2}{M_G^2}\right)\right) - 3m_\phi^2|K| - \dot{\theta}^2 < 0 \, , \tag{8.75}$$

で与えられる。

$$\dot{\theta}^2 \simeq m_{eff}^2 = m_\phi^2\left(1 + K\ln\left(\frac{|\phi|^2}{M_G^2}\right)\right) \tag{8.76}$$

を使うと、摂動が指数関数的に成長するモードは、

$$0 \lesssim \frac{\vec{k}^2}{a^2} \lesssim 3m_\phi^2|K| \tag{8.77}$$

で与えられる。もっとも成長するモードは、このバンドのほぼ中心であり、式 (8.72) より、

$$\frac{k_{max}^2}{a^2} \simeq \frac{3}{2}m_\phi^2|K| \tag{8.78}$$

で与えられる。このとき、

$$X = \frac{9}{16}\frac{m_\phi^4|K|^2}{\dot{\theta}^2} \tag{8.79}$$

である。このモードに対しては、式 (8.67) より、

$$\left|\frac{\delta\phi}{\phi}\right| = \left|\frac{\delta\phi_0}{\phi_0}\right| \exp\left(\int dt \frac{3}{4} m_\phi |K|\right) \tag{8.80}$$

である。但し、$\dot{\theta} \simeq m_\phi$ を用いた。したがって、

$$\begin{aligned} H_i &= \frac{m_\phi |K|}{2\alpha} , \\ \text{where} \quad \alpha &= \ln\left(\frac{\phi_0}{\delta\phi_0}\right) \end{aligned} \tag{8.81}$$

のときに、このモードに関して摂動が非線形に発達する。但し、宇宙は物質優勢期にあると仮定した。また、このモードに対応する波長が丁度 Q-Ball の半径に等しいので、この時期に式 (8.38) で与えられるような半径を持った、Q-Ball が形成されると考えられる。そのときに半径 R 内に存在している Charge で Q-Ball の Charge が決まる。

$$Q \simeq \frac{4}{3}\pi R^3 \times n_B(t_i) . \tag{8.82}$$

ここで t_i は H_i に対応し、最初に摂動が非線形になる時刻である。Affleck-Dine 場が原点周りの振動を開始するときの初期摂動の大きさは、波長 λ のモードに対して、

$$\delta\phi(\lambda) \simeq \frac{1}{2\pi\lambda} \tag{8.83}$$

と計算されている [58]。有限温度効果による Early Oscillation がないと思うと、振動を開始するときの Affleck-Dine 場の大きさは、

$$\phi_0 \simeq (m_\phi M^{n-3})^{1/n-2} \tag{8.84}$$

で与えられた。したがって、

$$\alpha = \ln\left(\frac{\phi_0}{\delta\phi_0}\right) \approx \ln\left((m_\phi M^{n-3})^{\frac{1}{n-2}} \frac{4\pi^2}{\left[\frac{3}{2} m_\phi^2 |K|\right]^{1/2}}\right) \tag{8.85}$$

で与えられる。$n = 6$ のスーパーポテンシャルを用いる場合には $\alpha \sim 30$ である。

Affleck-Dineo 場 ϕ が原点まわりの振動を開始するときに、有限温度効果は効いていないと仮定して、生成される Q-Ball の Charge の大きさを見積もっておこう。(そもそも、有限温度効果で振動を開始した場合には、数回の振動ののちに、Affleck-Dine 場は プラズマ状態になると考えられる。Appendix 参照。) 式 (4.49) を使うと、

$$n(t_i) \simeq \frac{4\beta}{3\left(1 + \frac{n-4}{n-2}\right)} \delta_{eff} m_{3/2} \left(\frac{H_i}{H_O}\right)^2 (H_O M^{n-3})^{2/n-2} \tag{8.86}$$

となる。これより、生成される Q-Ball の Charge は、$H_O \simeq m_\phi$ として、次のように求められる。

$$Q_0 \approx \frac{8\sqrt{2}\pi}{9\alpha^2} \left(\frac{\beta\delta_{eff}}{1 + \frac{n-4}{n-2}}\right) \frac{|K|^{1/2} m_{3/2}}{m_\phi^3} (m_\phi M^{n-3})^{2/n-2} . \tag{8.87}$$

特に、$n = 6$ のスーパーポテンシャルで平坦方向が持ち上がっている場合には、

$$Q_0 \approx 10^{19} \left(\frac{30}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{|K|}{0.01}\right)^{1/2} \left(\frac{1\text{TeV}}{m_\phi}\right)^{5/2} \left(\frac{m_{3/2}}{1\text{TeV}}\right) \left(\frac{M}{M_*}\right)^{3/2} \tag{8.88}$$

である。

8.3.3 Gauge Mediation Model における Q-Ball の形成

この場合も、(5.2.1 節) のように、ポテンシャルが $\sim m_{3/2}^2|\phi|^2$ のところで Affleck-Dine 場が振動を開始する場合は、計算は前節と全く同じで、単に $m_\phi \to m_{3/2}$ の置換えをするだけである。

以下では、ポテンシャルが

$$V \simeq V_0 \left(\ln \frac{|\phi|^2}{\langle S\rangle^2}\right)^2 \tag{8.89}$$

で与えられるときに振動を開始する場合 (5.2.2 節) について考える。不安定性が成長する条件 (8.72) は、

$$\frac{\vec{k}^2}{a^2} + \left[-4\frac{V_0}{|\phi|^2}\ln\left(\frac{|\phi|^2}{\langle S\rangle^2}\right) + 8\frac{V_0}{|\phi|^2}\right] - \dot{\theta}^2 \ < 0\ . \tag{8.90}$$

で与えられる。$\dot{\theta}^2$ の見積もりは、log ポテンシャルで振動しているために正確には不可能だが、

$$\dot{\theta}^2 \sim \left|\frac{1}{|\phi|}\left(\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}\right)\right| \tag{8.91}$$

である。したがって、摂動の成長するバンドは、

$$\begin{aligned} 0 \ \lesssim\ & \frac{\vec{k}^2}{a^2} \lesssim B\frac{V_0}{|\phi|^2}\ , \\ \text{where} \quad B \ =\ & (\text{a few}) \times \ln\left(\frac{|\phi|^2}{\langle S\rangle^2}\right)\ , \end{aligned} \tag{8.92}$$

と見積もることが出来る。また、式 (8.73) から、もっとも摂動の早く成長するモードに対して、

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} \ \equiv\ & -i\dot{S} \approx c'\frac{V_0}{\dot{\theta}|\phi|^2} \\ =\ & c\frac{V_0}{n_B} \\ \text{where} \qquad & c \sim c' \sim (\text{a few}) \end{aligned} \tag{8.93}$$

である。物質優勢期には $n_B \propto t^{-2}$ であることを用いると、このモードの摂動が非線形になる時期は、

$$H_i \approx \left[\frac{\frac{2}{9}cH_0^2\frac{V_0}{n_B(t_0)}}{\ln(\frac{\phi_0}{\delta\phi_0})}\right]^{1/3} \tag{8.94}$$

で与えられる。ここで、添字 0 は Affleck-Dine 場が振動を開始した時刻を表す。この後、Q-Ball の Charge を求める議論は前節と同じである。但し、Q-Ball の半径は Gravity Mediation Model のように一定にはなっていない。上のモードに関する摂動が非摂動になった時点で、対応する波長 $\lambda/2 \sim \pi|\phi(t_i)|/\sqrt{BV_0}$ を半径とするような球内の Charge が最終的に出来上がる Q-Ball の Charge になると考えられる。Q-Ball Charge は結局、

$$Q \simeq \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\lambda_{\text{non-linear}}}{2}\right)^3 \times n_B(t_i) \tag{8.95}$$

で与えられる。勿論、徐々に、長い波長に対応するモードに関する摂動も非線形に発達していくが、最初に非線形になったモードに対応する Q-Ball が主要な成分となる。

生成される Q-Ball の、Charge の大きさを見積もろう。ここでは、Q-Ball 生成期に有限温度効果は効かないと仮定する。((7.1.2 節) で議論した Two Loop の有限温度効果が効いて $aT^4\ln(|\phi|^2)$ のポテンシャルが生じる場合には、V_0 は aT^4 で置き換えなければならない。) さて、Gauge Mediation Type の Q-Ball が生成される為には、(5.2.2 節) の状態になっていなければならない。この場合には、

$$n_B(H_O) \simeq \frac{8\beta\delta_{eff}}{9} m_{3/2} H_O^{1/2} M^{3/2} \tag{8.96}$$

である。式 (8.94) に代入して整理すると、

$$H_i \approx \frac{1}{\alpha^{1/3}} \left[\frac{c}{4\beta\delta_{eff}}\right]^{1/3} \left(\frac{H_O}{m_{3/2}}\right)^{1/3} H_O \tag{8.97}$$

となる。ここで、$\alpha = \ln(\phi_0/\delta\phi_0)$ である。多くのパラメータに依存するが、α が極端に大きくない限り、H_i は H_O と比べて、さほど小さくなれず、せいぜい $H_i \lesssim H_O$ である。これは、[59] の数値計算と一致しない。そこでの数値計算では、$H_i \ll H_0$ である。そこでは、平坦方向を持ち上げる非繰り込み可能なスーパーポテンシャルとして、4 次のものを使用しており、上記の見積もりと直接比べることは不可能であるが、さらに、それ以上に、Affleck-Dine 場が原点まわりの振動を開始するときに存在する Baryon 数密度 $n_B(H_O)$ を、非常に大きな値に手で設定している。この値は、第 4 章で調べた Affleck-Dine 機構から帰結する Baryon 数密度と比べると何桁も大きな値であり、それが、摂動の発展を遅らせている原因であろう。

ひとまず、上記の見積もりを信じることにすると、Affleck-Dine 場が原点まわりの振動を開始して間もなく、$\lambda/2 \sim \pi|\phi(t_i)|/\sqrt{BV_0}$ の Q-Ball が形成される。しかし、Affleck-Dine 場は log のポテンシャルで振動するので、以前見たように $|\phi| \propto R^{-3} \propto H^2$ であり、Q-Ball の半径はその形成時期に大きく依存することになる。したがって、生成される Q-Ball の Charge の大きさの見積もりは、Gravity Mediation Model の場合よりはるかに困難である。仮に、$H_i = \xi H_O$ と定義すると、物質優勢期を仮定するなら、

$$\begin{aligned} Q &\simeq \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)^3 n_B(H_i)\ , \\ &\simeq \xi^8 \left(\frac{1}{H_O}\right)^3 n_B(H_O)\ , \\ &\simeq \xi^8 m_{3/2}\frac{M^3}{V_0}\ , \\ &\simeq 10^{35} \times \xi^8 \left(\frac{m_{3/2}}{100\mathrm{keV}}\right)\left(\frac{M}{M_*}\right)^3 \left(\frac{10^4\mathrm{GeV}}{V_0^{1/4}}\right)^4\ , \end{aligned} \tag{8.98}$$

と見積もることが出来る。

第9章　Q-Ball の熱力学

この章では、背景に高温のプラズマが存在する場合の Q-Ball の振る舞いについて詳しく議論する。これにはまず、熱平衡系にある場合の Q-Ball の性質について理解することが必要である。第一部で議論した、有限温度系の場の量子論の知識を利用して、熱平衡にある Q-Ball の熱力学的諸量を求めることが出来る。これに関連して、Appendix において、化学ポテンシャルが存在する場合の、高温展開と Resummation の具体的な計算を実行する。有限温度系においては、プラズマ状態の Affleck-Dine 場も存在し、Charge Q を運ぶことになる。したがって、このような系では、Q-Ball , Q-Matter , Q-Plasma の三つの状態が、もっとも自由エネルギーを小さくするように実現される。

実際には、宇宙膨張などの影響により Q-Ball は非平衡状態として実現されるが、どのようなスピードで平衡系に近付こうとするのかを、近似的に求めることが出来る。この課程でもっとも重要であり、この章の主な目標となるのが、Q-Ball の蒸発率の計算である。これは、Q-Ball から Q-Plasma への変化率である。これを計算することで、Affleck-Dine 場から、初期に形成された Q-Ball がいつどれだけ Q-Plasma に移行するかを知ることが出来る。

Gauge Mediation Type と New Type の Q-Ball が蒸発から生き残れば、これらは直接 Cold Dark Matter に寄与し、Baryon asymmetry と Dark Matter の量との間に関係を付けられ得る。不安定な Gravity Mediation Type の Q-Ball も、LSP がフリーズアウトした後まで生き残れば、LSP Cold Dark Matter の量と Baryon asymmetry との間に関係が付けられ、新たな Constraints も生じる。また、$B-L=0$ の平坦方向を利用した場合にも ($(LH_u)^2$ 以外の n=4 のスーパーポテンシャルを利用したものである)、Q-Ball が電磁弱スケールより充分低い温度まで、蒸発から生き残れば、“sphaleron” から Baryon 数を護ることが出来る。これが実現すれば、従来は不可能であった、新しい平坦方向を利用した Affleck-Dine Baryogenesis が可能となる。これらは、次章以降の主なトピックである。

9.1　有限温度系における Q-Ball の定式化

9.1.1　種々の熱力学的物理量の定義と関係

ここでは、以下で使う定義を簡単にまとめておく。保存 Charge を持つような熱力学系においては、種々の熱力学的物理量は以下の大正準分配関数で決定される。

$$Z_\mu = \mathrm{e}^{-\beta\Omega(T,V,\mu)} = \mathrm{e}^{\frac{V}{T}p(T,\mu)} = \mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{Q})} \tag{9.1}$$

ここで、

$$\frac{\left\langle \hat{Q} \right\rangle}{V} \equiv \frac{Q}{V} \equiv q = \frac{\partial p(T,\mu)}{\partial \mu} \tag{9.2}$$

である。Ω は grand ポテンシャルで、μ は化学ポテンシャルである。化学ポテンシャルの代わりに、Cahrge Q が固定された系は、次式で定義されるヘルムホルツの自由エネルギーを最小化する

ように実現される。

$$F(T,V,Q) \equiv E - TS = V f(T,q) = \Omega + \mu Q = V\left[-p + \mu q\right] \tag{9.3}$$

ここで、Charge と 化学ポテンシャルは

$$\mu = \frac{\partial f(T,q)}{\partial q} \tag{9.4}$$

で、関係付けられている。また、

$$dF = -SdT + PdV + \mu dQ \tag{9.5}$$

である。温度、体積、Charge 一定のもとでは、系はヘルムホルツの自由エネルギーを最小化するように、系は発展するわけであるが、このとき、化学ポテンシャルは、式 (9.5) から分かるように、Charge を一つ増やす時に必要な有効エネルギーである。圧力は、

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,Q} = -f \tag{9.6}$$

で関係付けられる。エントロピー S は、

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{Q,V} \tag{9.7}$$

によって、求められる。以上は、保存 Charge が一つの場合であるが、複数の場合も同様である。

9.1.2 有限温度系の場の量子論の経路積分形式による記述

熱平衡系にある Q-Ball 解を議論するには、化学ポテンシャルの存在する有限温度系での有効ポテンシャルを用いなければならない。このためには、経路積分形式が非常に便利なので、ここで、化学ポテンシャルが存在する系での経路積分形式について、簡単にまとめておこう [12]。

分配関数は経路積分形式だと、次のように表される。

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \mathrm{Tr}\ \mathrm{e}^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{Q})} = \int [d\phi_a] \left\langle \phi_a \right| \mathrm{e}^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{Q})} \left| \phi_a \right\rangle \\ &= \int [d\pi] \int_{\text{(anti)periodic}} [d\phi]\ \exp\left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(i\pi(\vec{x},\tau)\frac{\partial\phi}{\partial\tau} - \mathcal{H}(\pi,\phi) + \mu q(\pi,\phi) \right) \right\} \end{aligned} \tag{9.8}$$

π は ϕ の共役運動量である。ここで、境界条件は (フェルミオン) ボソンに対して、(反) 周期的にとる。この式は、零温度において、

$$\left\langle \phi_a \right| \mathrm{e}^{-iHt_f} \left| \phi_a \right\rangle = \int [d\pi] \int_{\phi(\vec{x},0)=\phi_a}^{\phi(\vec{x},t_f)=\phi_a} [d\phi] \exp\left\{ i \int_0^{t_f} dt \int d^3x \left(\pi(\vec{x},t)\frac{\partial\phi(\vec{x},t)}{\partial t} - \mathcal{H}(\pi,\phi) \right) \right\} \tag{9.9}$$

であることを考えると、境界条件を除いて自明である。境界条件は以前導いた KMS-relation による。フェルミオンの場合はこのままで良いが、ボソンの場合は、式 (9.8) から、共役運動量 π を

積分してしまわないと、ラグランジアンを用いた形には書き直せない。ここで、Charge 密度 q にも、π が含まれることに注意する。積分を実行すると結局以下のようになることが分かる。

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \int \mathcal{D}\left[\text{All fields}\right] \exp\left(- \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E(\partial_\tau \to \partial_\tau - q_i\mu) \right) \\ &\quad \text{where} \quad \mathcal{L}_E = \mathcal{L}(it \to \tau) \end{aligned} \tag{9.10}$$

ユークリッドラグランジアンの虚時間微分 ∂_τ を、それのかかる場の Charge が q_i の時に、$\partial_\tau - q_i\mu$ で置き換えれば良い。これはフェルミオンの時にも全く同じである。例えば、ϕ の Charge が q なら、

$$\begin{aligned} &\partial_\tau \phi \to (\partial_\tau - q\mu)\phi \\ &\partial_\tau \phi^* \to (\partial_\tau + q\mu)\phi^* \end{aligned} \tag{9.11}$$

のようにすれば良い。後は、通常の方法を用いて、量子補正を加えれば良い。第 2 章で導いた有限温度系での Feynman 則は、化学ポテンシャルが零のものに対応するので、ここでは使えない。ここでは、汎関数行列式を展開する方法で求めることが出来る。具体的な計算例は Appendix に載せておく。

次に、熱力学的物理量との間の関係をまとめることにしよう。圧力は有効作用を用いると、次のように表される。

$$p(T,\mu) = -(\beta V)^{-1}\, \Gamma_\mu[\Phi]|_{\delta\Gamma_\mu/\delta\Phi} \ . \tag{9.12}$$

一様な系では、有効ポテンシャルを使って書くことが出来る。

$$p(T,\mu) = -V_\mu(\Phi)|_{dV(\Phi)/d\Phi=0} \ . \tag{9.13}$$

ヘルムホルツの自由エネルギーを求めるには、式 (9.3) のように Legendre 変換が必要である。これは、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} V_q(\Phi) &= V_\mu(\Phi) + \mu q \ , \\ \text{where} \qquad & q = \frac{\partial V_\mu(\Phi)}{\partial \mu} \ . \end{aligned} \tag{9.14}$$

これを用いて、自由エネルギー密度は次のように表される。

$$f(T,q) = V_q(\Phi)|_{dV_q/d\Phi=0} \ . \tag{9.15}$$

『系が空間的に一様』であると仮定しよう。この場合には、Charge density が固定されたとき、$V_q(\Phi)$ の最小値点がどこかによって、プラズマ中の個々の粒子が Charge を担う Q-Plasma 状態が実現されるか、Φ の Bose-Einstein condensation が Charge を担う Q-Matter 状態が実現されるかが分かる。勿論、最小値点が $\Phi = 0$ なら Q-Plasma であり、そうでなければ、Q-Matter である。このような状態が安定であるためには、

$$\left. \frac{\partial^2 V_\mu(\Phi)}{\partial \Phi^2} \right|_{\Phi=\Phi_{min}} > 0 \tag{9.16}$$

が必要である。これは、熱力学的には、

$$c_V = -T\left(\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}\right)_q > 0 \ , \ \kappa_T = \frac{1}{q}\left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)_T^{-1} > 0 \ , \ \left(\frac{\partial \mu}{\partial q}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\right)_T > 0 \tag{9.17}$$

である。二つめと、三つ目は等価な条件である。一つ目は、高温においては、自由エネルギーが $\sim -T^4$ の項に支配されていることを考えると、ほとんど自明に満たされる。結局、チェックしないとならないのは、実質 3 つ目の条件のみである。

9.1.3 有限温度系における Q-Ball

この節では、有限温度系における Q-Ball 解の定式化を行う。これは、次節以降に Q-Ball の自由エネルギーを求める時の基礎を与えてくれる。Q-Ball の自由エネルギーを求めることは、後の Q-Ball の安定性や蒸発率の計算に欠かせないものである。Q-Ball はそもそも非局所的な対象であるから、有効ポテンシャルを用いた、式 (9.14),(9.15) のような方法によって求めることは出来ず、直接有効作用を求めないとならない。場の汎関数である有効作用を直接計算で求めることは一般に非常に困難であるが、Q-Ball は球対称な場の配位なので、今の場合には幸い良い近似で Q-Ball の有効作用と自由エネルギーを計算することが出来る。

さて、高温において relevant な配位は、虚時間 τ に依らない静的な配位である。この場合、ユークリッド作用の bosonic な部分は次のようになる。

$$S_E = \beta \int d^3x \left[\sum_j |\partial_i \phi_j|^2 + V(\phi) - \mu^2 \sum_i q_i^2 \phi_i^\dagger \phi_i \right] . \tag{9.18}$$

これは、tree の有効作用であるが、極めて重要な情報を含んでいる。$V(\phi)$ が Q-Ball を許すようなポテンシャルであるならば、式 (9.18) を最小化するような配位は、$\omega \to \mu$ とした Q-Ball 解になるのである。ここで、化学ポテンシャルは式 (9.2) を通して決定される。正確には、有限温度における量子補正をとりこんで、

$$S_{E\,eff} = \beta \int d^3x \left[\sum_j Z_j(\phi, T, \mu) |\partial_i \phi_j(r)|^2 + V_{eff}(\phi, T, \mu) + \ldots \right] \tag{9.19}$$

をもちいて、この有効作用を最小化するような Q-Ball 解を探すことになる。ここで、波動関数の Z-factor は 1 として扱って差し支えない。高次の補正を行った後でも、Z が重要になるようなことはないことが数値的にも確かめられている [61, 62]。また、以前 Q-Ball 解を求めたときの議論を使うためには、有効ポテンシャルの原点を 0 に規格化する必要が有ることに注意しておく。

次に有限温度系の Q-Ball のヘルムホルツの自由エネルギーについて調べよう。Q-Ball からの grand ポテンシャルへの寄与は、

$$\begin{aligned} \Omega_Q &= \int d^3x \; \bar{S}_{E\,eff} \\ &\simeq \int d^3x \left[\sum_j |\partial_i \phi_j|^2 + V_{eff}(\phi, T, \mu) - \mu^2 \sum_i q_i^2 \phi_i^\dagger \phi_i \right] \Bigg|_{Q-Ball} ; \end{aligned} \tag{9.20}$$

である。ここで、上記の有効ポテンシャルには、式 (9.19) 中の有効ポテンシャルには含まれるような、プラズマからの寄与は含めないことに注意する。つまり ϕ に依らない項は含めてはならない。Q-Ball 中の Charge は、

$$\begin{aligned} Q_Q &= -\frac{\partial \Omega_Q}{\partial \mu} \\ &\simeq 2\mu \int d^3x \sum_i q_i^2 \phi_i^\dagger \phi_i \neq Q_{total} \end{aligned} \tag{9.21}$$

である。ここで、これまでと係数が違うのは、今の場合は ϕ の normaliztion を変えていないからである。また、系全体の Charge はプラズマも運んでいることに注意しよう。また、化学平衡にない場合には、化学ポテンシャルはプラズマのそれとは異っている。式 (9.21) の化学ポテンシャルには、あくまで、Q-Ball のものを使う。以上から、Q-Ball のヘルムホルツ自由エネルギーは以下のように計算される。

$$\begin{aligned} F_Q &= \Omega_Q + \mu Q_Q \\ &= \int d^3x \left[\sum_j |\partial_i \phi_j|^2 + V_{eff} + \mu^2 \sum_i q_i^2 \phi_i^\dagger \phi_i \right] \Bigg|_{Q-Ball} \\ &= \int d^3x \mathcal{H}_Q \ . \end{aligned} \tag{9.22}$$

したがって、Q-Ball の自由エネルギーは、対応する有限温度ポテンシャル中での『零温度の Q-Ball 解』におけるエネルギー (質量) に等しい。このとき、有効ポテンシャルの原点が 0 に規格化されていることに注意する。したがって、他の状態と比較するには、自由エネルギーの規格化を合わせないとならないが、これは、次節の議論で分かるが、$\propto T^4$ の shift だけであり、容易に実行できる。

9.2 Gauge Mediation Model を例にした Q-Ball 熱力学

ここでは、Gauge Mediation Type の Q-Ball を例に、その熱力学について詳しく調べる [56]。最初に定性的な議論をした後で、この節の大きな目標である、Q-Ball の蒸発率の計算をする。ここで得られる知識は、後に Gravity Mediation Type の Q-Ball の蒸発率の計算に直接利用出来るものとなる。また、Appendix に Toy モデルを利用した、化学ポテンシャルが存在する場合の有効ポテンシャルの具体的な計算を実行してあるので、参照されたい。

9.2.1 平衡系の Q-Ball 熱力学

この節では、平衡系にある Gauge Mediation Type の Q-Ball の熱力学について、定性的に見ていく。充分大きな Q-Ball を考える限り、重要になるのは遠方のポテンシャルの振る舞いだけである。

$$V(\phi) \to M^4 \tag{9.23}$$

ここで、ϕ は超対称標準理論中のスカラー (クオーク, レプトン) の Gauge 不変な組合せで、その方向が平坦方向に対応するものを想定している。簡単の為に、Charge は $(q = 1)$ にしておこう。式 (9.23) のようなポテンシャルにおいては、式 (8.62) から、対応する零温度の Q-Ball 解は次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi(r) &\simeq \exp(i\omega t) \begin{cases} \phi_Q \dfrac{\sin \omega r}{\omega r}, & r < R_Q \\ 0, & r > R_Q \end{cases} \\ R_Q &\simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{Q^{1/4}}{M} \ , \ \phi_Q \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} M Q^{1/4} \\ \omega R_Q &\simeq \pi \end{aligned} \tag{9.24}$$

ここで、R_Q は Q-Ball 半径である。また、この Q-Ball の質量は、

$$M_Q \simeq \frac{4\pi\sqrt{2}}{3} M Q^{3/4} \tag{9.25}$$

で与えられる。陽子の質量を m_p とするとき、$M_Q < m_p Q$ なら、この Q-Ball は陽子への崩壊に対して安定となり、Dark Matter へ直接寄与する。この条件は、

$$Q \ > \ 1.2 \times 10^{15} \left(\frac{M}{1\mathrm{TeV}} \right)^4 \tag{9.26}$$

と求められる。

さて、この Q-Ball の高温における振る舞いを調べよう。ϕ の有効ポテンシャルに影響を及ぼすのは、One Loop Order では ϕ に直接相互作用する場の積分から出て来る。この寄与は、第 2 章で見たように、$f|\phi| > T$ では Boltzmann factor によって指数関数的に surppression を受ける。$f|\phi| < T$ での支配的な寄与は、

$$\Delta V \simeq -2n \left(1 + \frac{7}{8} \right) \frac{\pi^2 T^4}{90} \equiv -NT^4 \tag{9.27}$$

ここで、n は平坦方向に相当する ϕ と直接相互作用するスーパーフィールドの数である (第 2 章参照)。 ϕ と相互作用しないものも同様であるが、それは単にポテンシャルの定数の shift なので Q-Ball の物理に関係しない。簡単の為に、(7.1.2 節) で見たような Two Loop の効果は、これより充分小さいと仮定しよう。

ここで、式 (9.27) は、Q-Ball の形成には影響を及ぼさないことに注意しておこう。これは、この項が (8.3.3 節) で見たような、不安定性の成長に寄与しないからである。したがって、初期に出来る Q-Ball の大きさと Charge は零温度のものと同じであると考えられる。但し、$T^4 \ln(|\phi|^2)$ のような Two Loop の項が存在した場合には、生成される Q-Ball の大きさや Charge は全く違うものになる。このような効果が無視できる条件については、後の章で改めて議論する。

平衡系における議論に戻ろう。熱平衡になって落ち着くところの Q-Ball 解は、式 (9.23)、(9.27) より次の変換を してやれば良い。解 (9.24),(9.25) において、

$$M^4 \to M(T)^4 \simeq M^4 + NT^4 \tag{9.28}$$

を行う。図 (9.1) 参照。このとき、前節の議論より、上の置き換えによって、

$$M_Q \to F_Q \tag{9.29}$$

となる。つまり、Gauge Mediation Type の Q-Ball のヘルムホルツの自由エネルギーは、

$$F_Q \simeq \frac{4\pi\sqrt{2}}{3} M(T) Q^{3/4} \tag{9.30}$$

と簡単に求めることが出来るわけである。但し、全体に + NT^4 のかさ上げをしていることに注意しておく。したがって、式 (9.24) より、

$$F_Q \ \simeq \ \frac{4}{3} (\sqrt{2}\pi)^4 M(T) \left(\frac{M(T)}{\mu} \right)^3 \tag{9.31}$$

$$Q_Q \ \simeq \ (\sqrt{2}\pi)^4 \left(\frac{M(T)}{\mu} \right)^4 \tag{9.32}$$

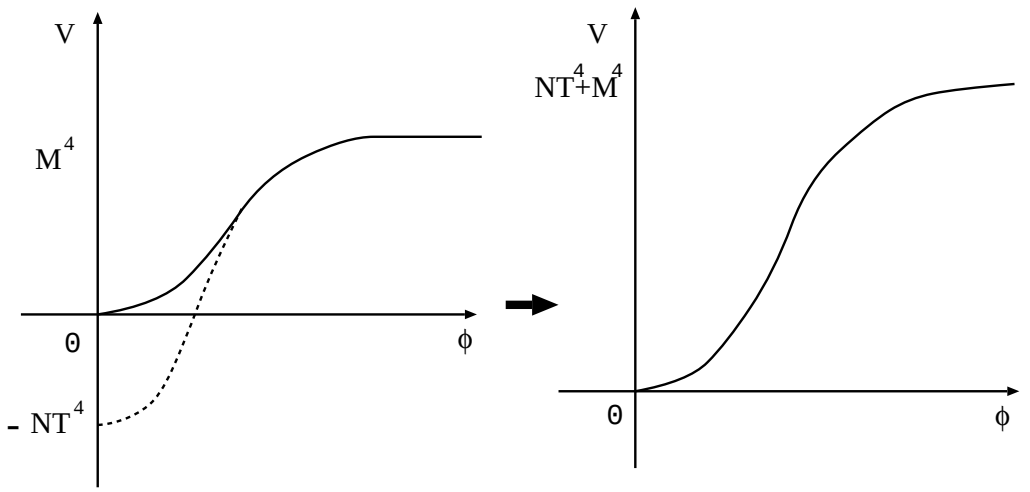


図 9.1: 有限温度ポテンシャルの模式図

である。但し、Q_Q は Q-Ball 中の Charge を表している。今、体積 V 中に Q-Ball が一つ有る状態を考えよう。この系全体の grand ポテンシャルの化学ポテンシャルに依存する項は、近似的に

$$\Omega(T,V,\mu) \simeq \Omega_Q(\mu) - C\frac{1}{2}\mu^2 T^2 V \tag{9.33}$$

と表せる。ここで、一項目は Q-Ball からの寄与を表し、二項目は同じ Charge を持った他の軽い粒子のプラズマからの寄与と、ϕ のうちで Q-Ball を構成せずにプラズマでいるものからの寄与であり、C はこれらの軽い粒子達の数によって決まる。このような項が出て来るのは、Appendix の具体的な計算から分かるが、上記のような形の項の存在は次のように考えるといい。式 (9.10),(9.18) から分かるように、化学ポテンシャルは負の質量項の形でラグランジアンに入ってきている。したがって、Thermal mass term の符号を逆にした形の項が存在するのである。もっとも、propagator 中にも化学ポテンシャルが入って来るので、この様な議論から係数 C まで決めることは出来ない。さて、この系の全 Charge は、

$$\begin{aligned} Q_{total} &= -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu} = Q_Q + C\mu T^2 V \\ &= (\sqrt{2}\pi)^4 \left(\frac{M(T)}{\mu}\right)^4 + C\mu T^2 V \end{aligned} \tag{9.34}$$

と求められる。二項目はプラズマが担っている Charge である。これより、系の自由エネルギーは、

$$\begin{aligned} F(T,V,Q) &= \Omega(T,V,\mu) + \mu Q_{totla} \\ &= F_Q + C\frac{1}{2}\mu^2 T^2 V \\ &= \frac{4}{3}(\sqrt{2}\pi)^4 M(T) \left(\frac{M(T)}{\mu}\right)^3 + C\frac{1}{2}\mu^2 T^2 V \end{aligned} \tag{9.35}$$

と計算される。ここで、化学ポテンシャル μ は、式 (9.34) を通して、Charge と関係付けられている。式 (9.34),(9.35) が、高温における Q-Matter , Q-Plasma 間の平衡系を決定する。

さて、条件式 (9.34) の解を考えよう。一つ目の解は、化学ポテンシャルが『大きい』場合に対応し、系の Charge の大部分をプラズマが担う状態に対応するものである。この場合、化学ポテンシャルは近似的に、

$$\mu \simeq \frac{Q_{total}}{CT^2V} = \frac{n_Q}{CT^2} \tag{9.36}$$

と計算される。ここで、n_Q は Charge 密度である。もう一つは、化学ポテンシャルが『小さい』場合に対応し、系の Charge の大部分を Q-Ball が担う状態に対応するものである。この場合いは、

$$\mu \simeq \sqrt{2}\pi M(T) Q_{total}^{-1/4} = \sqrt{2}\pi M(T)(n_Q V)^{-1/4} \tag{9.37}$$

と求められる。前者に対応する プラズマが支配的な解では、

$$F(T,V,Q) \simeq \frac{1}{2}\frac{n_Q^2 V}{CT^2} = \frac{1}{2}\frac{Q_{total}^2}{CT^2V} \tag{9.38}$$

であり、後者に対応する Q-Ball が支配的な解においては、

$$F(T,V,Q) \simeq \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} M(T)(n_Q V)^{3/4} = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} M(T) Q_{total}^{3/4} \tag{9.39}$$

と求められる。したがって、全 Charge Q_{total} が固定さているときに Gauge Mediation Type の Q-Ball が熱力学的に安定になる条件は、

$$M(T)T^2V \lesssim \frac{3}{8\sqrt{2}\pi}\frac{Q_{total}^{5/4}}{C} \tag{9.40}$$

となる。$T \gg M$ では、式 (9.40) の左辺は T^3V に比例し、宇宙膨張の際に一定に保たれる。したがって、充分高温においては、初期の Charge 等により Q-Ball の安定性は決まってしまう。$T < M$ においては、式 (9.40) の左辺は時間と共に増加し、Q-Ball は徐々に不安定になる。この議論は、今までの熱力学的近似が正当化できる程度に高温、つまり、$T > m_\phi$ の範囲では正しい。更に低温においては、零温度の時の議論が良い近似となり、$\omega \sim \mu$ が陽子の質量より小さければ、完全に安定となる。したがって、初期に作られた Q-Ball が $T \lesssim m_\phi$ まで、充分大きな Charge を持ったままプラズマへの蒸発から生き残れば、これらの Q-Ball は Dark Matter の成分として寄与することになる。

さて、仮に、完全な化学平衡が成立しているとして、Q-Ball が 全 Charge の多くを担っている場合に、Q-Ball 中に含まれる Charge と、周囲のプラズマが担う Charge の間にどのような関係が有るかを調べておこう。これは、化学平衡が実現された場合には、宇宙の『物質』を構成している Baryon asymmetry と、Cold Dark Matter の量の間に関係を付けてくれる。プラズマが担う Charge を δQ で表そう。全 Charge を Q とすれば、Q-Ball が担う Charge は $Q - \delta Q$ である。したがって、プラズマと Q-Ball の化学ポテンシャルはそれぞれ、

$$\begin{aligned} \mu_{plasma} &\simeq \frac{\delta Q}{CT^2V} \\ \mu_{Q-Ball} &\simeq \sqrt{2}\pi M(T)(Q-\delta Q)^{-1/4} \end{aligned} \tag{9.41}$$

である。それぞれの化学ポテンシャルが等しいとして、

$$\frac{\delta Q}{Q} \simeq \sqrt{2}\pi C \frac{M(T)T^2V}{Q^{5/4}} \tag{9.42}$$

と、計算される。初期宇宙の有る時期に化学平衡が実現されたとすれば、最終的な $\delta Q/Q$ を計算するには、化学平衡から decouple し、蒸発が止まる温度を計算して、式 (9.42) に代入してやれば良い。化学平衡が実現しており、式 (9.42) が成立しているならば、プラズマ中の Baryon asymmmetry とエントロピーの比は、

$$\left(\frac{q}{s}\right)_{plasma} \simeq \frac{45\sqrt{2}}{2\pi g_{*s}(T)} C \left(\frac{M(T)}{T}\right) Q^{-1/4} \tag{9.43}$$

で与えられる。式 (9.42) が充分高温 $T \gtrsim M$ で成立しており、その近似が成立しているうちに、蒸発も止まったと考えよう。蒸発が止まった時点で、式 (9.43) は固定される。この場合には、適当なパラメータの範囲内で

$$\left(\frac{q}{s}\right) = \mathcal{O}(10^{-(1\sim 2)}) Q^{-1/4} \tag{9.44}$$

である。したがって、この方法によって、BBN を説明するには、$Q \gtrsim 10^{40}$ が必要となる。否定は出来ないが、このような大きな Q-Ball が宇宙の歴史の中で化学平衡に達したとは考えにくい。

9.2.2 Q-Ball の Thermalization

実際に (5.2.2 節) のタイプの Affleck-Dine Baryogenesis が起こって、Gauge Mediation Type の Q-Ball が出来たとしよう。この場合の宇宙論的帰結を議論するには、Q-Ball の蒸発率の計算が必要である。以下の節では、この蒸発率の計算について考える。ここでの議論は、Gauge Mediation Type の Q-Ball についてのものであるが、後で Gravity Mediation Type や New Type の Q-Ball の蒸発率を議論する際の基礎を与えてくれる。

6 次のスーパーポテンシャルによって持ち上がるような平坦方向を利用した場合を考える。この場合には、以前の議論から分かるように、Q-Ball が形成される時期には、Affleck-Dine 場 ϕ は熱浴から decouple していると考えて良い。一般に、有限温度効果で Early Oscillation を開始して Baryon 数が固定される場合以外は、Affleck-Dine 場から形成された Q-Ball は零温度の解にしたがっている。(但し、7.1.2 節で議論したような Two Loop 効果はこれに影響しない程度に小さかったと仮定しよう。)

この節では、蒸発率の計算に移る前に、このようにして形成された零温度の Q-Ball を、高温の熱浴に入れたときに、どのような時間スケールで有限温度の有効ポテンシャルに従う Q-Ball に発展するかを簡単に見積もっておくことにする。単位時間当たりの自由エネルギーの変化率は、以下のように見積もることが出来る。

$$\frac{dF}{dt} \sim R_Q^2 T^3 \sigma n_\phi \delta R \delta E \sim T^2 \left(\frac{T}{M}\right)^3 Q^{1/4} \tag{9.45}$$

ここで、$R_Q^2 T^3$ はプラズマから Q-Ball に入射してくる粒子の flux である。δE は一回の散乱によって、Q-Ball に供給されるエネルギー、σ はプラズマからの入射粒子と、Q-Ball を構成する Affleck-Dine 場との断面積、n_ϕ はその Q-Ball 中での数密度である。δR は入射粒子の Q-Ball への貫入距離であり、$\sigma n_\phi \delta R$ で、単位面積、単位時間当たりの散乱回数を与える。

各パラメータの値がどのように決定されていくかをみていこう。まず、σ を考える。Q-Ball を構成する Affleck-Dine 場零モードの有効質量は ω で、入射プラズマの平均エネルギーは $\sim T$ である。したがって式 (1.24) より、$\sigma \sim 1/\omega T$ である。(但し、結合定数は全て 1 とした。) 数密度は、$n_\phi \sim \omega \phi^2$ である。次にプラズマの貫入距離 δR を見積もろう。Affleck-Dine 場 ϕ と相互作

用する粒子は、Q-Ball 中では $\sim f\langle\phi\rangle$ の有効質量をもらう。ここで、f は湯川あるいは Gauge 結合定数である。したがって、エネルギー $\sim T$ を持って入射した粒子は、$f\langle\phi(r)\rangle \sim T$ となる半径 $r \sim R_P$ まで貫入する。これは、式 (9.24) を使って簡単に求められる。$\Delta \equiv \pi - \omega R_P$ とおこう。$\omega R_P \simeq \pi$ であるから、

$$\phi_Q \sin(\pi - \Delta) \simeq \pi T \tag{9.46}$$

したがって、$R_P \sim R_Q(1 - T/\phi_Q)$ と計算され、

$$\delta R \sim R_Q \frac{T}{\phi_Q} \sim \frac{Q^{1/4}}{M}\frac{T}{MQ^{1/4}} \sim \frac{T}{M^2} \tag{9.47}$$

と見積もることが出来る。最期に δE を見積もろう。Q-Ball の Charge が充分大きい場合には、ϕ の Q-Ball 中の有効質量 ω は入射粒子の有効質量 $(\sim f\langle\phi\rangle \sim T)$ に比べるとはるかに小さい。したがって、一回の散乱によって入射粒子から ϕ に供給されるエネルギーは、

$$\delta E \sim T\left(\frac{\omega}{m_{plasma}}\right) \sim \omega \tag{9.48}$$

である。以上と式 (9.24) より、式 (9.45) の右辺の導出ができる。系がインフレーション終了後の物質優勢期にあるとしよう。この時期には、$T \simeq (HT_{RH}^2 M_*)^{1/4}$ であるから、

$$\frac{dT}{dt} \simeq -\frac{3}{8}\frac{T^5}{T_{RH}^2 M_*} \tag{9.49}$$

である。したがって、

$$\frac{dF}{dT} \sim -\frac{T_{RH}^2 M_*}{M^3} Q^{1/4} \tag{9.50}$$

となり、Q-Ball へのエネルギーの供給は高温時期にもっとも効率的に進む。Q-Ball の自由エネルギーがその熱平衡値 $\sim TQ^{3/4}$ のオーダーであることを要求すると、Q-Ball の熱平衡化には、

$$T_{RH} \gtrsim \left(\frac{M^3}{M_*}\right)^{1/2} Q^{1/4} \sim \mathcal{O}(10)\mathrm{GeV}\left(\frac{M = V_0^{1/4}}{1\mathrm{TeV}}\right)^{3/2}\left(\frac{Q}{10^{24}}\right)^{1/4} \tag{9.51}$$

が必要である。

9.2.3 Q-Ball の Evaporation と Diffusion Rate

次に、Q-Ball の Q-Plasma への蒸発率の計算を行う [56, 63]。ここでは、Gauge Mediation Type の Q-Ball について計算するが、考え方は、そのまま、Gravity Mediation Type の Q-Ball にも利用できる。Affleck-Dine 場は Q-Ball 生成の時は、熱浴から decouple しており、Q-Plasma はほとんど存在していないと考えられる。(4 次のスーパーポテンシャルで平坦方向が持ち上がっている場合など、有限温度効果によって、Affleck-Dine 場が振動を開始する場合は例外である。) したがって、初期には $\mu_{plasma} \ll \mu_{\text{Q-Ball}}$ である。Q-Ball 生成後には、$r \sim R_P$ の所までは ϕ は熱浴と couple することになる。プラズマの温度が $T \gg m_\phi$ ならば、この領域は相対論的な ϕ のガスで満たされることになる。この場合には、$r \gtrsim R_P$ から、ほとんど自由に Affleck-Dine 場 ϕ

が Q-Plasma へと蒸発していくと考えられる。この場合の、Charge の蒸発率は、次の式で与えられる。

$$\Gamma_{evap} \equiv \frac{dQ}{dt} = -D(\mu_{Q-Ball} - \mu_{plasma})T^2 4\pi R_Q^2 \ . \tag{9.52}$$

ここで、$D \lesssim 1$ である。仮に、Q-Ball の周囲から充分早く Charge が運び去られ、常に化学ポテンシャル間の大きな差が実現されているとして、蒸発する Charge を式 (9.52) を使って計算してみよう。ここでは、$T_{RH} \lesssim m_\phi$ として計算する。(第 5 章参照。) この時期には、$T \simeq (HT_{RH}^2 M_*)^{1/4}$ であるから、式 (9.52) は、

$$\frac{dQ}{dT} = \left(\frac{8}{3}\frac{T_{RH}^2 M_*}{T^5}\right) D\mu_{Q-Ball} T^2 4\pi R_Q^2 \tag{9.53}$$

となり、蒸発は低温でより効率的である。$T < m_\phi$ では、Q-Ball からの Affleck-Dine 場の蒸発は Boltzmann factor により指数関数的に抑制される。したがって、$T \sim m_\phi$ までの蒸発量を計算すれば良い。実は、gluino の交換による $\phi\phi \to qq$ から、$T < m_\phi$ でもクオークを通しての蒸発が存在するが、($D \to \beta T^2/m_\phi^2$ で置き換える [56]) 蒸発量の Order を変えることはないのでここでは無視する。以上から、$T \sim m_\phi$ まで蒸発しないで残っている Q-Ball の Charge は、

$$Q \approx Q_0 \left[1 - \frac{D}{Q_0^{3/4}}\left(\frac{4\pi^2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{T_{RH}}{m_\phi}\right)^2\left(\frac{M_*}{V_0^{1/4}}\right)\right]^{4/3} \tag{9.54}$$

である。ただし、非繰り込み可能な項の surppression と紛らわしいので $M = V_0^{1/4}$ で表した。また、Q_0 は Q-Ball の 初期 Charge である。上式から、Q-Ball が蒸発から生き残るためには、初期 Charge が

$$\begin{aligned} Q_0 &\gtrsim \left[D\left(\frac{4\pi^2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{T_{RH}}{m_\phi}\right)^2\left(\frac{M_*}{V_0^{1/4}}\right)\right]^{4/3} \\ &\sim 10^{20}\mathrm{GeV}\left(\frac{T_{RH}}{10\mathrm{GeV}}\right)^{8/3}\left(\frac{10^2\mathrm{GeV}}{m_\phi}\right)^{8/3}\left(\frac{1\mathrm{TeV}}{V_0^{1/4}}\right)^{4/3} \end{aligned} \tag{9.55}$$

を満たせば良い。再加熱終了後の輻射優勢期を仮定しても、蒸発量にほとんど変化はない。

以上は、$\mu_{Q-Ball} \gg \mu_{plasma}$ を仮定していた。実際には、Charge の輸送が充分でないと、Q-Ball のすぐ外側では Q-Ball と Q-Plasma の化学平衡が実現される。この場合、Q-Ball からの Charge の散逸は拡散効果によって決定される [63]。この場合には、Charge 密度は拡散方程式に従う。拡散方程式は、吸い込みも湧き出しも存在しない場合には、

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t}\right) n_B(\vec{r}, t) = 0 \tag{9.56}$$

と書ける。ここで、D は拡散係数であり、Charge の flux は

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = -D\vec{\nabla} n_B(\vec{r}, t) \tag{9.57}$$

で与えられる。これを、以下のような境界条件のもとで解く。

$$n_B(R_Q, t) = n_B^{EQ} \sim \mathrm{const} \ . \tag{9.58}$$

このような境界条件が妥当であることは、数値的にも確かめられている [63]。解は、

$$n_B(r,t) = n_B^{EQ}\left(\frac{R_Q}{r}\right) \tag{9.59}$$

で与えられる。したがって、Q-Ball の Charge の時間変化は、

$$\Gamma_{diff} \equiv \frac{dQ}{dt} = -4\pi k R_Q D n_B^{EQ} \simeq -4\pi k D R_Q \mu_{Q-Ball} T^2 \tag{9.60}$$

である。ここで、k は数値的に非常に 1 近い定数であることが分かっており、以下では省略する。また、拡散係数 D は $D \approx aT^{-1}$ であり、

$$a \approx \begin{cases} 4 & \text{for squarks} \\ 6 & \text{for quarks} \end{cases} \tag{9.61}$$

が知られている [64, 65]。$\Gamma_{diff} < \Gamma_{evap}$ の時は、Q-Ball の Charge の散逸はこの拡散によって決まっている。この条件は、

$$Q \gtrsim \left(\frac{M(T)}{T}\right)^4 \tag{9.62}$$

と書き直され、基本的に Charge の大きいときは、いつでも成立している。式 (9.60) を用いて、もう一度、Charge の蒸発量を計算しよう。最初に、$T_{RH} < m_\phi$ を仮定する。

$$\frac{dQ}{dT} = \left(\frac{8}{3}\frac{T_{RH}^2 M_*}{T^5}\right) 4\pi D R_Q \mu_Q T^2 \simeq \left(\frac{8}{3}\frac{T_{RH}^2 M_*}{T^5}\right) 4\pi^2 D T^2 \,. \tag{9.63}$$

これから、Charge の蒸発量は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta Q &\simeq \left(\frac{32\pi^2}{9}a\right)\frac{T_{RH}^2 M_*}{m_\phi^3} \\ &\sim 10^{16}\left(\frac{10^2\mathrm{GeV}}{m_\phi}\right)^3\left(\frac{T_{RH}}{10\mathrm{GeV}}\right)^2 \,. \end{aligned} \tag{9.64}$$

したがって、蒸発から生き残るために必要な Initial Charge は、以前のように自由な蒸発を考えていたときより、ずっと小さくて良い。$T_{RH} > m_\phi$ の場合にも計算しておこう。この場合は、

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -\alpha^{1/2}\frac{T^3}{M_*} \,, \\ \text{where} \qquad \alpha &= \left(\frac{\pi^2 g_*}{90}\right) \,, \end{aligned} \tag{9.65}$$

である。これより、Q-Ball からの Charge の蒸発量は、

$$\Delta Q \simeq 4\pi^2 a\ \alpha^{-1/2}\ \frac{M_*}{m_\phi} \sim 10^{18}\ \left(\frac{10^2\mathrm{GeV}}{m_\phi}\right) \tag{9.66}$$

と見積もられる。

9.3 Gravity Mediation Type の Q-Ball の蒸発量

この節では前節の議論をもとに、Gravity Mediation Type の Q-Ball の蒸発量を計算する。Q-Ball の蒸発量を計算するには、その化学ポテンシャルの値が必要である。この化学ポテンシャルの値を正確に求めるには、温度効果を含めた有効ポテンシャル中の Q-Ball 解を求めなければならない。Q-Ball が生成される時期には、Affleck-Dine 場は熱浴から decouple しているので、最初に生成される Q-Ball は零温度のときのものと変わらないが、生成後、外側の場の値の小さな所は熱浴に入り、有限温度ポテンシャルを感じることになる。このようなポテンシャル中での Q-Ball 解を求め、正確に化学ポテンシャルを求めることは極めて困難である。ここで重要なのは、Q-Ball の蒸発量に、化学ポテンシャルの正確な値や、温度依存性が必要ないことである。幸いなことに、有限温度効果を含めた有効ポテンシャルの詳細に関わらず、かなり一般的に Gravity Mediation Type の Q-Ball の蒸発量が計算できるのである。これは、前節で見たように、宇宙の温度の時間発展の中においては、Q-Ball の蒸発は低温側で効くことによっている。以下で、具体的にみていくことにする。

まず、(8.2.1 節) の議論をみれば分かる通り、有限温度効果を入れても Q-Ball 半径はほとんど変わらない。これは、ln 依存性を持つポテンシャル部分で決定されているからである。また、Q-Ball の化学ポテンシャルは少なくとも、

$$m_\phi \lesssim \mu_Q \lesssim T \tag{9.67}$$

の範囲内にある。前節と同様の議論から、Q-Ball の Evaporation Rate と Diffusion Rate は以下のように見積もることが出来る。

$$\Gamma_{evap} \equiv \frac{dQ}{dt} = -D\mu_Q(T)T^2 4\pi R_Q^2 \quad , \quad D \lesssim 1 \tag{9.68}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{diff} &\equiv \frac{dQ}{dt} = -4\pi D R_Q n_B^{EQ} \\ &\simeq -4\pi D R_Q \mu_Q(T) T^2 \\ D = \frac{a}{T}\ ,\ a &\approx \begin{cases} 4 & \text{for squarks} \\ 6 & \text{for quarks} \end{cases} . \end{aligned} \tag{9.69}$$

ここで R_Q は、熱浴中の粒子が侵入して来て Plasma 化される領域の半径を与える。(8.2.1 節) の議論より、次の式を解けばいい。

$$f|\phi| = f|\phi|(r=0)\mathrm{e}^{-\frac{R_Q^2}{R^2}} = T \tag{9.70}$$

ここで、f は湯川あるいは gauge 結合定数である。したがって、

$$\begin{aligned} R_Q &= \gamma R \equiv \left[\ln\left(\frac{f|\phi|(0)}{T}\right)\right]^{1/2} R \\ &\text{where } R = \frac{\sqrt{2}}{m_\phi |K|^{1/2}} \end{aligned} \tag{9.71}$$

と求まる。したがって温度依存性は極めて弱く、$\gamma \sim$ a few $\sim$ const. である。これから、

$$\frac{\Gamma_{diff}}{\Gamma_{evap}} = \frac{a|K|^{1/2}}{\gamma\sqrt{2}}\left(\frac{m_\phi}{T}\right) \tag{9.72}$$

であるから、$T \gtrsim m_\phi$ において、常に Diffusion が Q-Ball からの Charge の散逸を決定していると思って良い。$T < m_\phi$ では、前節の議論同様、sfermion の蒸発は Boltzmann factor で指数関数的に抑制される。しかし、Gravity Mediation Type の Q-Ball では $\mu \sim m_\phi$ であり、$T < m_\phi$ でも軽いフェルミオンへの崩壊が可能であり、低温ではこちらが支配的となる。これらについては、次章で議論する。

したがって、計算するべきは、式 (9.69) である。再加熱終了前の物質優勢期を仮定すると、

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dT} &\simeq \frac{8}{3}\frac{T_{RH}^2 M_*}{T^5}\, 4\pi D\gamma R\mu_Q(T)T^2 \\ &= \frac{32\sqrt{2}\pi a}{3}\gamma\frac{T_{RH}^2 M_*}{m_\phi |K|^{1/2}}\,\frac{\mu_Q(T)}{T^4} \end{aligned} \tag{9.73}$$

と書き直せる。これを見て分かる通り、Q-Ball からの Charge の散逸は低温側で効く。結局、$\mu_Q = T$ としても $\mu_Q = m_\phi$ としても、トータルの Charge の散逸量は factor しか変化しない。ここでは、$\mu_Q = m_\phi$ として計算しよう。

$$\begin{aligned} \Delta Q &\gtrsim \frac{32\sqrt{2}\pi a}{9|K|^{1/2}}\gamma\,\frac{T_{RH}^2 M_*}{m_\phi^3} \\ &\sim 10^{(16\sim 17)}\left(\frac{0.01}{|K|}\right)^{1/2}\left(\frac{1\mathrm{TeV}}{m_\phi}\right)^3\left(\frac{T_{RH}}{10^2\mathrm{GeV}}\right)^2 . \end{aligned} \tag{9.74}$$

次に、再加熱温度が高く、$T_{RH} > m_\phi$ の場合を調べておこう。この場合は、式 (9.65) より、

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dT} &= \alpha^{-1/2}\frac{M_*}{T^3}4\pi D\gamma R\mu_Q(T)T^2 \\ &= \frac{4\sqrt{2}\pi}{\alpha^{1/2}|K|^{1/2}}a\gamma\frac{M_*\mu_Q(T)}{T^2 m_\phi} \end{aligned} \tag{9.75}$$

となる。ここで、$\alpha = (\pi^2 g_*/90)$ である。やはり、Charge の蒸発は低温側で効く。したがって、

$$\begin{aligned} \Delta Q &\gtrsim \frac{4\sqrt{2}\pi}{\alpha^{1/2}|K|^{1/2}}a\gamma\left(\frac{M_*}{m_\phi}\right) \\ &\sim 10^{(17\sim 18)}\left(\frac{0.01}{|K|^{1/2}}\right)^{1/2}\left(\frac{1\mathrm{TeV}}{m_\phi}\right) \end{aligned} \tag{9.76}$$

である。Q-Ball の 生成時の Charge がこれより大きければ、$T \sim m_\phi$ まで Q-Ball は生き残ることになる。

第10章　Q-Ball の Affleck-Dine Baryogenesis に及ぼす影響

10.1　Baryon asymmetry と Dark Matter の量の間に関係がつくためにつく制限

この章では、Q-Ball と Dark Matter の関係に付いて調べる。Gauge Mediation Type あるいは、New Type の Q-Ball は、核子への崩壊に対して安定なので、前章の後半で調べた『蒸発』から生き残れば、そのまま Dark Matter に寄与することになる。また、Gravity Mediation Type の Q-Ball も、LSP の freeze-out temperature より低い温度まで生き残れば、Baryon と Dark Matter の量を同時に説明する可能性をもっている。しかし、宇宙を over close しないためには、この事実が逆に非常に強い制限ともなる。以下で、その可能性と問題点について見ていく。

10.1.1　Gravity Mediation Type Q-Ball の場合

Q-Ball を通しての Baryon asymmetry と Dark Matter の量の関係について、まず、Gravity Mediation Type の Q-Ball について調べていこう [9]。最初に Q-Ball の寿命を見積もらないとならない。前節で調べたように、Q-Ball の Q-Plasma への蒸発については式 (9.74) あるいは、式 (9.76) により、その量が計算されていた。最初に生成された Q-Ball がこれより大きな Charge を持っていた場合について考えよう。ここでは、$T < m_\phi$ での核子と軽いスカラーへの崩壊について調べなければならない。軽いフェルミオンへの崩壊については以下が知られている [66]。

$$\left|\left(\frac{dQ}{dt}\right)\right|_{fermion} \leq \frac{\omega^3 A}{192\pi^2} \,. \tag{10.1}$$

ここで、A は Q-Ball の面積であり、ω は、$\phi(\vec{r},t) = \mathrm{e}^{i\omega t}\phi(r)$ で定義されている。Gravity Mediation Type の Q-Ball については $\omega \simeq m_\phi$ であることは、既にみた。式 (10.1) の上限は、$\phi(0) \gg m_\phi$ の Q-Ball については saturate されていることが数値的に知られている。Affleck-Dine 場より軽いスカラー場が存在する場合には、そのようなスカラー場への崩壊が許される。その効果を含めた enhancement factor を f_s としよう。f_s の見積もりは後で行う。

$$\frac{dQ}{dt} = f_s \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{fermion} \,. \tag{10.2}$$

これより、Q-Ball の崩壊温度 T_d は次のように与えられる。

$$T_d = \frac{\zeta^{-1/4}}{\sqrt{48\pi}} \left(\frac{f_s}{|K|}\right)^{1/2} \left(\frac{M_* m_\phi}{Q}\right)^{1/2} \,,$$

$$\sim 2\mathrm{GeV}\ \left(\frac{0.01}{|K|}\right)^{1/2}\sqrt{fs}\left(\frac{m_\phi}{1\mathrm{TeV}}\right)^{1/2}\left(\frac{10^{20}}{Q}\right)^{1/2}\ ,$$

$$\text{where}\quad \zeta=\left(\frac{\pi^2 g_*}{90}\right)\ . \tag{10.3}$$

ここで、Baryon asymetry は 6 次のスーパーポテンシャルで持ち上げられる平坦方向を用いた、Affleck-Dine mechanism で説明されると仮定して、Q を再加熱温度を用いた式に書きなおしておこう。式 (4.73) と式 (8.87) より、

$$\begin{aligned} Q_0 &\approx \frac{8\sqrt{2}\pi}{3\alpha^2}|K|^{1/2}\frac{M_*^2}{m_\phi T_{RH}}B\ , \\ &\sim 8\times 10^{19}\ \left(\frac{30}{\alpha}\right)^2\left(\frac{|K|}{0.01}\right)^{1/2}\left(\frac{1\mathrm{TeV}}{m_\phi}\right)\left(\frac{10\mathrm{GeV}}{T_{RH}}\right)\ , \end{aligned}$$

where

$$B=\frac{n_B}{s}\quad ,\quad \alpha=\ln\left(\frac{\phi_O}{\delta\phi_O}\right) \tag{10.4}$$

が得られる。次に、軽いスカラー場が存在した場合の効果について調べておく [9]。ϕ と直接相互作用している粒子は非常に重くなっており、この場合、ϕ の崩壊に効く最低次の operator は次のようなものである [1]。

$$\frac{1}{g\langle\phi\rangle}\int d^4\theta\phi\chi^\dagger\eta\ . \tag{10.5}$$

ここで、g は Affleck-Dine 場との結合定数である。これには、フェルミオンへの崩壊の寄与も入っており、ここでは、Q-Ball のあり得る『最大限』の崩壊率を求めることになる。

$$\frac{dQ}{dt}=-\int dr\omega\phi^2(r)\Gamma(r)4\pi r^2\ . \tag{10.6}$$

ここで、$\omega\phi^2$ は Charge 密度を表している。また、

$$\begin{aligned} \Gamma(r)\ &\approx\ \begin{cases} \dfrac{\alpha^2 m_\phi^3}{\phi^2}\ ; & g\phi>m_\phi \\ \alpha m_\phi\ ; & g\phi<m_\phi \end{cases} \\ &\text{where}\qquad \alpha=\frac{g^2}{4\pi} \end{aligned} \tag{10.7}$$

である。$g\phi=m_\phi$ となる半径を r^* と定義する。(8.2.1 節) の議論を使うと、

$$r^*=\gamma R\quad ,\quad \gamma=\ln^{1/2}\left(\frac{g\phi(0)}{m_\phi}\right)\sim \text{a few} \tag{10.8}$$

である。したがって、Q-Ball の崩壊率の上限は、

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt}\ &\approx\ -4\pi\alpha\omega m_\phi\left(m_\phi^2\alpha\int_0^{r^*}dr\ r^2+\phi^2(0)\int_{r^*}^{\infty}dr\ r^2\mathrm{e}^{-\frac{2r^2}{R^2}}\right) \\ &\approx\ -\frac{12\pi\gamma}{|K|^{1/2}}\left(1+\frac{\gamma^2 g^4}{3\pi}\right)\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{fermion} \end{aligned} \tag{10.9}$$

で与えられる。したがって、せいぜい $f_s \sim 10^3$ 程度である。

さて、典型的な neutralino LSP の freeze-out temperature は、

$$T_{fr} \approx \frac{m_\chi}{20} \tag{10.10}$$

である。仮に、$T_d < T_{fr}$ だった場合を考えよう。R-Parity が保存される理論を考えると、Baryon Charge 1 あたり、最低 3 単位の R-Parity が生成され、したがって、最低 3 つの neutralino LSP が生成される。$T_d < T_{fr}$ の場合は、これから Baryon asymmetry と LSP Dark Matter の間に直接関係がつくことになる。Charge 1 当たり、$N_\chi \geq 3$ の neutralino に崩壊したとしよう。すると、

$$n_\chi = 3\left(\frac{N_\chi}{3}\right) f_B n_B \tag{10.11}$$

である。ここで、f_B は、生成された Baryon 数の内で Q-Ball に含まれるものの割合を表す。数値計算からは $f_B \simeq 1$ が示唆されている [60]。式 (10.11) は以下と等しい。

$$\Omega_\chi = 3\left(\frac{N_\chi}{3}\right) f_B \left(\frac{m_\chi}{m_n}\right) \Omega_B \ . \tag{10.12}$$

ここで、m_n は陽子の質量である。BBN から、Ω_B には制限がついている。conservative な条件 [67] を使っても、

$$0.004 \lesssim \Omega_B h^2 \lesssim 0.023 \tag{10.13}$$

であり、$\Omega_\chi \leq 1$ を満たすには、以下のような厳しい制限がつく。

$$\begin{aligned} m_\chi &\lesssim \frac{h^2}{\Omega_B h^2}\frac{m_n}{N_\chi f_B} \\ &\lesssim 40.8\text{GeV}\left(\frac{h}{0.7}\right)\left(\frac{3}{N_\chi}\right)\left(\frac{1}{f_B}\right) \end{aligned} \tag{10.14}$$

Dark Matter の量として $\Omega_\chi \sim 0.4$(残りは Cosmological Constant Λ) を使えば、

$$m_\chi \lesssim 16\text{GeV}\left(\frac{h}{0.7}\right)\left(\frac{3}{N_\chi}\right)\left(\frac{1}{f_B}\right) \tag{10.15}$$

が必要である。直接的な実験の制限は、$m_\chi > 32.3\text{GeV}$ [68] であり、式 (10.14) の制限はぎりぎりクリアしているが、unification scale での universal A-terms and gaugino masses を仮定すると、$m_\chi > 46\text{GeV}$ [69] の制限がついており、既に排除されている。式 (10.15) を考えた場合には、既に実験的に排除されている。したがって、$T_d < T_{fr}$ は実験的にほとんど排除されており、そうでなくても、近い内に軽い neutralino が観測されなければいけないことが分かる。

以上から、Gravity Mediation Type の Q-Ball で、必要とされる Baryon asymmetry も Dark Matter の量も説明するという試みは、$f_B \ll 1$ や、MSSM の枠の外へ出ることを考えない限りは [70]、ほとんど失敗している。逆に、実験と矛盾しないためには、$T_d > T_{fr}$ としてやらねばならない。6 次のスーパーポテンシャルで持ち上げられる平坦方向として、$\bar{u}\bar{d}\bar{d}$ を考えてみよう。特に、R-parity と Gauge 対称性を満たす 5 次のスーパーポテンシャルが全て存在した場合には、6 次のスーパーポテンシャルまで持ち上がらずに残っているのは、この方向だけである [27]。unificaton scale において universal soft SUSY breaking terms を仮定すると、right hand squarks が他のス

カラーより一般に軽いために、大きな f_s は考えにくい [9]。この場合には、カットオフスケール M を下げてやって、Q-Ball の Charge Q を小さくし、$T_d > T_{fr}$ を満たすようにしてやらねばならない。例えば、$M \sim M_{GUT}$ を仮定すると、$T_{RH} \sim 10^5$GeV であり、$Q \sim 10^{15}$ となる。この場合には、$T_d \sim 10^{(2\sim 3)}$GeV であり、条件を満たしている。勿論、Baryon asymmetry と Dark Matter の量に関係をつけることには失敗している。(図 10.1) に $fs = 1$, $m_\phi = 1$TeV の場合の Baryon asymmetry と T_d の等高線プロットを載せておく。

10.1.2 New Type と Gauge Mediation Type Q-Ball の場合

次に安定な Q-Ball の場合につて考えよう。この場合は、蒸発しないで残った Q-Ball はそのまま Dark Matter に寄与することになる。また、最初ほとんど全ての Baryon 数が Q-Ball に閉じ込められと仮定すると ($f_B \simeq 1$)、Q-Ball からの蒸発から、BBN に必要な Baryon asymmetry を説明せねばならない。これらの条件から来る制限について考えていこう。New Type から考えよう。このときの Q-Ball の性質は、前節の Gravity Mediation Type の Q-Ball において、

$$m_\phi \to m_{3/2}$$

のように、Affleck-Dine 場の質量を gravitino の質量で置換えればいい [57]。したがって、生成される Q-Ball の Charge の大きさは、式 (8.87) より、

$$\begin{aligned} Q_0 &\approx \frac{16\sqrt{2}\pi}{27\alpha^2}\beta\delta_{eff}\frac{|K|^{1/2}}{m_{3/2}^2}(m_{3/2}M^3)^{1/2}\,, \\ &\sim 2\times 10^{28}\left(\frac{43}{\alpha}\right)^2\left(\frac{|K|}{0.01}\right)^{1/2}\left(\frac{1\text{MeV}}{m_{3/2}}\right)^{3/2}\left(\frac{M}{M_*}\right)^{3/2} \end{aligned} \tag{10.16}$$

となる。蒸発量については、式 (9.74) あるいは、式 (9.76) をそのまま用いれば良い。ここで、Q-Ball 半径にはいる gravitino mass は化学ポテンシャルの項とキャンセルしている。

$$\frac{n_B}{s} = \frac{n_Q\Delta Q}{s} \tag{10.17}$$

であるから、

$$\Omega_Q = \frac{1}{h^2}\left(\frac{m_{3/2}}{m_n}\right)\Omega_B h^2\left(\frac{Q}{\Delta Q}\right) \tag{10.18}$$

が得られる。ここで、n_Q は Q-Ball の数密度である。したがって、$\Omega_Q \lesssim 1$ であるためには、

$$\begin{aligned} \left(\frac{Q}{\Delta Q}\right) &\lesssim h^2\frac{1}{\Omega_B h^2}\left(\frac{m_n}{m_{3/2}}\right) \\ &\lesssim 10^5\left(\frac{1\text{MeV}}{m_{3/2}}\right) \end{aligned} \tag{10.19}$$

を満たさねばならない。ここで、式 (10.13) を使用した。式 (9.74) あるいは、式 (9.76) から、蒸発量 $\Delta Q \sim 10^{18}$ 程度であるから、$Q \lesssim 10^{23}$ が必要である。このような条件は、カットオフスケール M を小さくすることで実現でき、$M \lesssim M_{GUT}$ ぐらいが必要である。式 (10.16) から、小さな gravitino mass については、M に対してより強い制限となる。なお、New Type Q-Ball が生成さ

れるには、(5.2.1 節) で議論した条件 (5.14) が必要であることに注意する。また、Q-Ball 生成時の有限温度効果についてコメントしておこう。以前述べたように、6 次のスーパーポテンシャルで平坦方向が持ち上がる場合には、One Loop の有限温度効果 (Thermal mass) は、再加熱温度を下げることで容易に回避可能だ。ここで、問題なのは、Two Loop からくる $\propto aT^4\ln(|\phi|^2/T^2)$ の効果である。これが無視できるためには、この項が運動方程式の中で支配的な寄与をしなければいいので、

$$\left(\frac{|a|T^4}{|\phi|^2}\right) = H^2$$

となる H が $m_{3/2}$ より、充分小さければ良いと思われる。この条件は、

$$T_{RH} \ < \ \left[\frac{(Mm_{3/2})^{3/2}}{|a|M_*}\right]^{1/2} \tag{10.20}$$

と書き直せる。いったん Q-Ball が形成されてしまえば、温度の低下とともに、この項の影響はなくなる。$|a|$ がせいぜい $\lesssim 10^{-2}$ 程度であると思うと、

$$T_{RH} \lesssim 60\mathrm{GeV}\left(\frac{M}{M_{GUT}}\right)^{3/4}\left(\frac{m_{3/2}}{1\mathrm{MeV}}\right)^{3/4} \tag{10.21}$$

であり、大きめの gravitino mass でないと回避は厳しいことが分かる。この存在による影響を正確に調べるには、平坦方向を特定して a を具体的に求めなければならない。どちらにしても、$m_{3/2}$, M などの未知で直接実験と結び付かないパラメータが存在し、definite な議論は困難である。

次に、Gauge Mediation Type のものについて同様の議論を行っておこう。ここでも、Two Loop からくる有限温度効果が重要になる可能性が存在するが、definite な議論が出来ないのでここでは省略する。この効果が無視できる条件については、New Type のものと同様の議論を繰り返せば良い。式 (10.17) より、

$$\Omega_Q = \frac{1}{h^2}\left(\frac{M_Q}{m_n}\right)\Omega_B h^2 \frac{1}{\Delta Q} \tag{10.22}$$

であり、Gauge Mediation Type の Q-Ball の質量を代入すると、

$$\Omega_Q = \frac{1}{h^2}\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}\left(\frac{V_0^{1/4}}{m_n}\right)\Omega_B h^2\left(\frac{Q^{3/4}}{\Delta Q}\right) \tag{10.23}$$

が得られる。$\Omega_Q \lesssim 1$ でなければならないので、

$$\begin{aligned} Q \ &\lesssim \ \left[h^2\frac{1}{\Omega_B h^2}\frac{3}{4\pi\sqrt{2}}\left(\frac{m_n}{V_0^{1/4}}\right)\Delta Q\right]^{4/3} , \\ &\lesssim \ 3\times 10^{-4}\left(\frac{10\mathrm{TeV}}{V_0^{1/4}}\right)^{4/3}\Delta Q^{4/3} \end{aligned} \tag{10.24}$$

という制限がつく。ΔQ は 10^{18} 前後なので、Q-Ball の Charge Q はおおよそ、$Q \lesssim 10^{20}$ を満足せねばならない。これは、(8.3.3 節) の式 (8.98) の計算を思い出すと、

$$Q \ \sim \ \xi^8\beta\delta_{eff}\frac{m_{3/2}M^3}{(V_0^{1/4})^4} ,$$

$$\sim \quad 10^{35} \times \xi^8 \left(\frac{m_{3/2}}{100\mathrm{keV}}\right) \left(\frac{M}{M_*}\right)^3 \left(\frac{10^4\mathrm{GeV}}{V_0^{1/4}}\right)^4 \tag{10.25}$$

であった。これを考えると、ξ が小さい特殊な場合を除いて、かなり小さなカットオフスケール M が必要なことが分かる。温度効果でちいさな Q-Ball が出来る可能性も否定は出来ないが、そのような特別なことがない限り、$M \ll M_G$ が必要である。

10.1.3 $aT^4\ln(|\phi|^2)$ において、a が負であった場合の影響についてのコメント

前節で少し触れたように、Gravity Mediation Model の場合と違い、Gauge Mediation Model の場合には、Affleck-Dine 場が原点まわりの振動を開始する時期が遅く、$-|a|T^4\ln(|\phi|^2)$ が無視できない可能性が強い。再加熱終了前までは、温度の変化が非常に緩やかなために、一度、この効果が支配的になると、それは再加熱終了まで確実に続くことになる。この場合には、Affleck-Dine 場の振動開始時期が非常に遅くなり ($-|a|T^4\ln(|\phi|^2)$ のポテンシャルに捕まる)、巨大な Baryon asymmetry を生み出すことになり、有効なモデルとなる可能性はほぼ絶望的である。特に、平坦方向として $\bar{u}\bar{d}\bar{d}$ を考えると、a が負になる可能性が強く、New あるいは、Gauge Mediation Type のシナリオが、より厳しいものとなっている。

Gravity Mediation Type の場合は、Q-Ball 形成時期にこの影響が効くことはまずなかった (式 (7.49) と (図 10.1) を参照せよ)。いったん Q-Ball が形成されると、Affleck-Dine 場の振幅が固定されるために、大きな影響を与えることはないと考えられる。Q-Ball の蒸発は $\sim m_\phi$ であり、再加熱終了後あるいは、それに非常に近い。したがって、Q-Ball 蒸発後の Affleck-Dine 場の時間発展にこの効果が効くことはないと思える。したがって、Gravity Mediation Model の場合は、この効果による大きな変更は存在しないと考えられる。

10.1.4 W=0 の Affleck-Dine Baryogenesis に対する Q-Ball の影響

第 6 章で平坦方向を持ち上げるようなスーパーポテンシャルが存在しない場合の Affleck-Dine Baryogenesis とその "Moduli" 問題の解決に果たす役割について議論した。第 6 章で見たように、W=0 の Affleck-Dine Baryogenesis は非常に大量の Baryon asymmetry を生み出せ、"Moduli" を late time inflation や late time entropy producyion で充分薄めた後に、BBN で必要な Baryon asymmetry を残すことが出来た。この節では、その際に Q-Ball が生成されたとして、それが引き起こす問題点について見ていく。

平坦方向を持ち上げる繰り込み不可能なスーパーポテンシャルが存在しない場合は、Affleck-Dine 場はインフレーション中に、$|\phi| \sim M_*$ まで転がっていくと考えられる。したがって、この場合に形成される Q-Ball は New Type か Gravity Mediation Type のものである。

まず、生成される Q-Ball の Charge の大きさから見積もろう。Affelck-Dine 場が振動を開始した時点での Baryon 数密度は、式 (6.8) で与えられる。

$$n_B(t_O) \simeq \frac{1}{3} m_{3/2} M_*^2 \delta_{eff} \beta \ . \tag{10.26}$$

(8.3.2 節) の議論を利用すると、生成される Q-Ball の大きさは、次のように見積もることが出来る。

$$Q_0 \approx \frac{4}{3}\pi \left(\frac{2}{m_{3/2}^2|K|}\right)^{3/2} \left[\frac{1}{3} m_{3/2} M_*^2 \delta_{eff} \beta\right] \left[\left(\frac{H_i}{m_{3/2}}\right)^2 \ \text{or} \ \left(\frac{H_i}{m_{3/2}}\right)^{3/2}\right] \tag{10.27}$$

最期の部分は、それぞれ物質優勢期、輻射優勢期に対応する。かりに、物質優勢期を仮定しても、

$$\begin{aligned} Q_0 &\approx 10^{26} \left(\frac{40}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{|K|}{0.01}\right)^{1/2} \left(\frac{1\mathrm{TeV}}{m_{3/2}}\right)^2 , \\ &\approx 10^{40} \left(\frac{60}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{|K|}{0.01}\right)^{1/2} \left(\frac{100\mathrm{keV}}{m_{3/2}}\right)^2 , \end{aligned} \tag{10.28}$$

となる。(輻射優勢期なら、一桁程度大きくなる。)

まず、Gravity Mediation Type のものからその影響を考えよう。式 (10.3) より、仮に f_s が大きいとしても、Q-Ball の崩壊温度は、

$$T_d \sim 1 \times 10^{-1}\mathrm{GeV} \left(\frac{0.01}{|K|}\right)^{1/2} \left(\frac{f_s}{10^3}\right)^{1/2} \left(\frac{m_{3/2}}{1\mathrm{TeV}}\right)^{1/2} \left(\frac{10^{26}}{Q}\right)^{1/2} \tag{10.29}$$

である。これは、LSP の freeze-out temperature より充分低い温度である。Q-Ball 生成後にインフレーションや、エントロピーの生成が起こっても、Q-Ball の大きさは変わらない。したがって、今考えている $W = 0$ の Affleck-Dine mechanism で Baryon asymmetry を説明しようとする限り、(10.1.1 節) で議論した困難を避けることは出来ない。つまり、実験からの制限ぎりぎりの軽い LSP でない限り、$\Omega_\chi > 1$ となってしまう。Cosmological Constant が宇宙のエネルギー密度の 2/3 程度を占めるようなモデルを信じるならば、このシナリオは実験的に既に排除されている。たまたま平坦方向にスカラートップが占める割合が極めて高い場合には、Q-Ball が生成されない可能性も存在するが、そのような特殊なことが起こるとは考えにくい。

次に、New Type について考えよう。late time inflation あるいは、late time entropy production が Q-Ball 蒸発が効率的な時間 $\sim m_{soft}$ より、後である場合には、そもそも、Baryon asymmetry を説明できない。Q-Ball の蒸発がその後起こるとしても、式 (10.19) より、必要な Baryon asymmetry を Q-Ball の蒸発から説明するには、生成される Q-Ball の Charge が大きすぎる。

なお、ケーラーポテンシャルが特殊な対称性を満たし、soft mass term $m_{3/2}^2|\phi|^2$ が出ないような No-Scale Type のモデルでは、非常に大きな Gauge Mediation Type の Q-Ball が生成されることになる。この場合も Q-Ball からの Charge の蒸発で必要な Baryon asymmetry を説明できないのは、上記の New Type 同様である。

したがって、$W = 0$ の Affleck-Dine Baryogenesis は特殊な事情で Q-Ball が非常に小さくなるか、生成された Baryon 数がほとんど Q-Matter の状態にあるような特殊な事態が起きない限り、有効なモデルとはならない。[59, 60] の数値計算を信じるとこのようなことは起こりそうにない。したがって、"Moduli" 問題が存在する場合に、必要な Baryon asymmetry を供給するのは、従来言われているような $W = 0$ の Affleck-Dine Baryogenesis では不可能である可能性が極めてたかく、別の機構が必要であると考えられる。

なお、今の場合には、Affleck-Dine 場の値が振動を開始するまで $|\phi| \sim M_*$ という非常に大きな値に留まっているために、有限温度効果は充分無視できる。

10.2 B-L を保存する平坦方向を用いた Affleck-Dine Baryogenesis

4 次のスーパーポテンシャルで持ち上げらる平坦方向を使用した場合には、$(LH_u)^2$ 以外では $B-L$ が保存している [27]。したがって、$T \gg T_{ew} \sim 100\mathrm{GeV}$ において存在していた Baryon asymmetry は、"sphaleron" 効果によって消されてしまう。しかし、Q-Ball が生成されて $T < T_{ew}$ まで B , L

を熱浴中の Plasma から守り、そのあと崩壊すれば、従来は考えられなかった新しいタイプの Affleck-Dine Baryogenesis が可能となる [8]。ここでは、その可能性について議論しよう。以下では、超対称性の破れの機構として、Gravity Mediation Model を念頭に考える。

生成される Q-Ball の Charge は、式 (8.87) に $n = 4$ を代入すれば良い。α についても、式 (8.85) から見積もることが出来る。

$$\begin{aligned} Q_0 &\approx \frac{8\sqrt{2}\pi}{9\alpha^2}\beta\delta_{eff}\frac{|K|^{1/2}m_{3/2}M}{m_\phi^2}\,, \\ &\sim 10^{12}\left(\frac{20}{\alpha}\right)^2\left(\frac{1\mathrm{TeV}}{m_\phi}\right)^2\left(\frac{m_{3/2}}{1\mathrm{TeV}}\right)\left(\frac{M}{M_*}\right)\,. \end{aligned} \tag{10.30}$$

式 (9.74), 式 (9.76) から分かるように、Q-Ball が蒸発から生き残るためには、かなり大きな M が必要なことが分かる。また、Q-Ball が非常に大きい場合には、$T_d < T_{fr}$ となって、LSP を作り過ぎるという問題もある。図 (10.2) に $Q/\Delta Q$ と Baryon asymmetry の等高線プロットを描いた。また、仮に、$T_d > 15\mathrm{GeV}$ をかしたときの条件も描いておいた。ここでは、f_s が 10^2 程度はあると仮定したが、これが小さい場合には、許される領域が存在しない場合もある。この図から分かるように、Q-Ball を蒸発から救い、なおかつ LSP Dark Matter の作り過ぎを防ぐには、$M \sim 10^{25}\mathrm{GeV}$ が必要になる。再加熱温度は、$T_{RH} \sim 10^2\mathrm{GeV}$ が要求される。このように低い再加熱温度ならば、そもそも Q-Ball に Chrage を保存する必要性がないと考えるかも知れないが、温度は再加熱終了前に $T \sim (HT_{RH}^2 M_*)^{1/4}$ と振舞、Q-Ball が存在しない場合は、“sphaleron” は充分に熱平衡に達する。

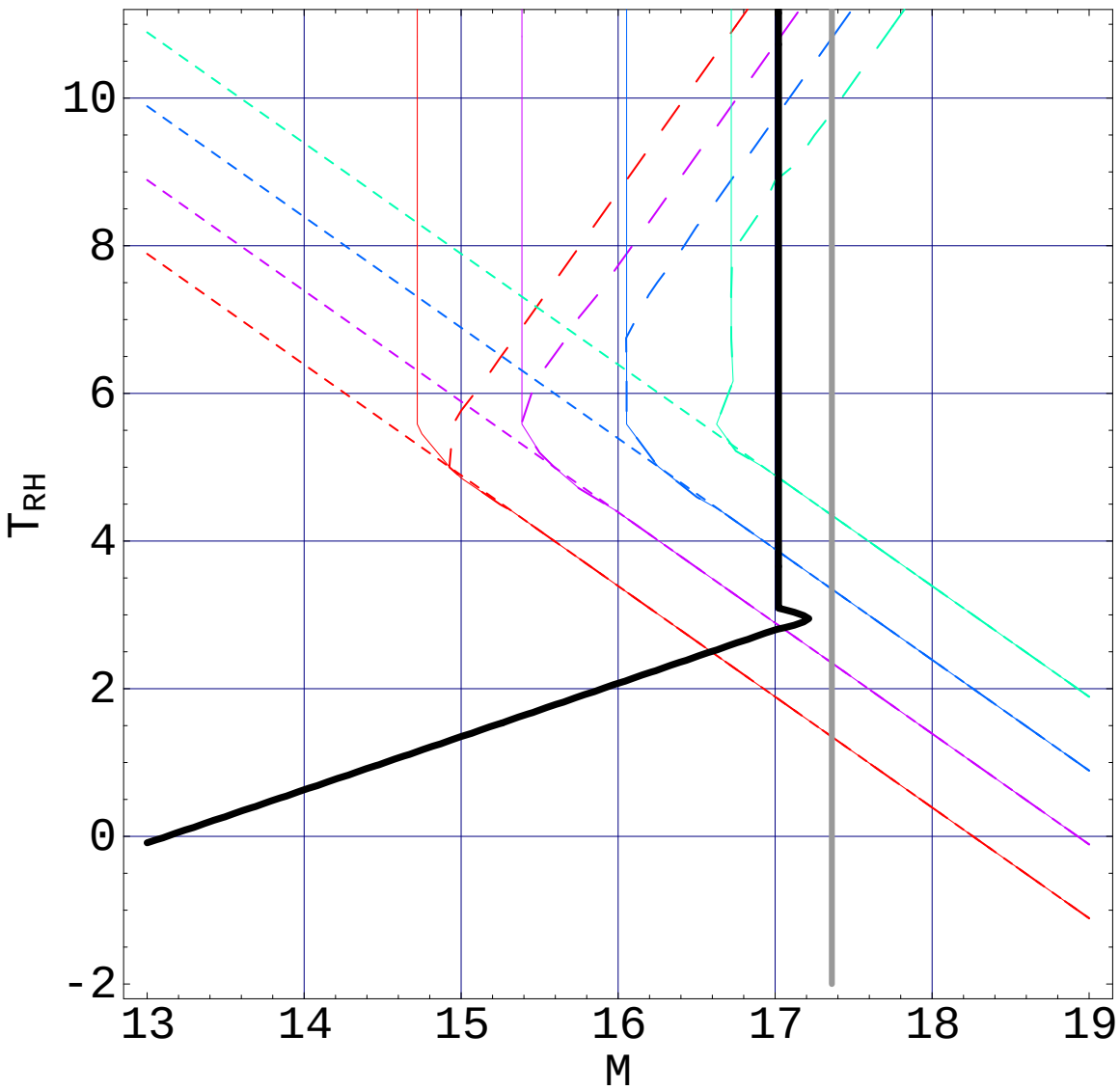


図 10.1: $fs = 1$, $m_\phi = 1\text{TeV}$ の場合の n_B/s と、T_d , $\Delta Q/Q$ の等高線プロット; 横軸、縦軸とも 10^xGeV を単位に描かれている。n_B/s の等高線は左から順に、10^{-12} , 10^{-11} , 10^{-10} , 10^{-9} を表している。破線等の定義は (図 7.17) と同じである。垂直な線は $T_d = 20\text{GeV}$ の等高線であり、この左側が $T_d > 20\text{GeV}$ に対応する。もう一つの折れ線が $\Delta Q/Q = 10$ に対応するもので、この左側なら $T \sim m_\phi$ までに、Q-Ball は充分蒸発してしまっていると考えて良い。不連続性は $T_{RH} = m_\phi$ で使用する公式が変わることによっており、実際には滑らかにつながっている。これから分かるとおり、$M < M_{GUT}$ なら、宇宙を over close する問題は存在しない。$M \simeq M_*$ は neutralino が非常に軽くない限り排除される。

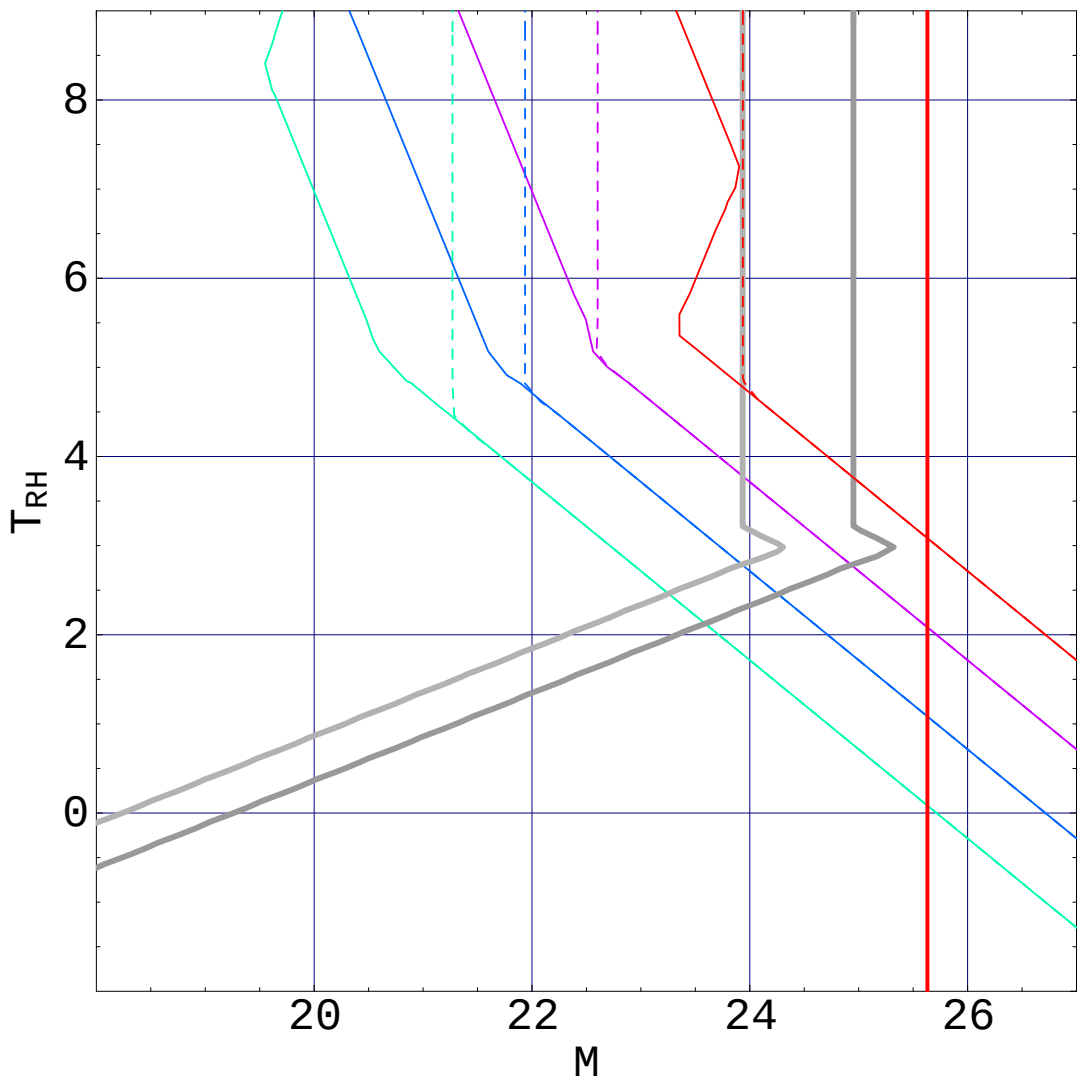


図 10.2: $m_\phi = 10^3$GeV の場合の $Q/\Delta Q$ と n_B/s の等高線プロット ($n = 4$ のスーパーポテンシャルで持ち上げられる場合) ; ここでは、横軸、縦軸とも 10^xGeV を単位に書かれている。n_B/s は左から順に 10^{-12} , 10^{-11} , 10^{-10} , 10^{-9} に対応しており、破線は $a \sim 1$ の Two Loop からくる有限温度効果 $aT^4 \ln|\phi|^2$ が存在した場合に相当している。また、ここでは、湯川結合定数 $y \sim 10^{-5}$ が存在するものとした。太線は上から順に $(Q/\Delta Q \approx 1\ ,\ 10)$ に対応する。$T_{RH} \simeq 10^3$GeV での不連続は蒸発量として使う公式が違うからで、実際には滑らかにつながっている。この下側が Q-Ball が蒸発から生き残る領域である。これから分かるように、有限温度効果は Q-Ball が蒸発から生き残る条件よりはるかに弱い。$M \sim 10^{25}$GeV 付近の垂直な直線は $f_s \sim 10^2$ のときの $T_d \sim 15$GeV に対応する。この T_d より高い崩壊温度を要求する場合には、この左側と $Q/\Delta Q$ にはさまれたところが許される領域である。

第11章　結論ー (有効な Affleck-Dine Baryogenesis ?) ー

ここまで、Affleck-Dine Baryogenesis における有限温度効果と、Q-Ball がおよぼす影響、その宇宙論的な帰結について議論して来た。Affleck-Dine Baryogenesis が有効なシナリオになるための条件は、前章にまとめられている。(平坦方向として (LH_U) を用いた場合については、(7.1 節) に述べられている。)

ここでは、超対称性の破れの機構として、Gravity Mediation Model を仮定して、以前の結果から言えることを簡単にまとめておこう。Gauge Mediation Model に関する議論や、その他の詳細は、前章あるいは、対応する節の議論を参照されたい。

11.1　4次のスーパーポテンシャルで持ち上がる平坦方向を用いた場合

11.1.1　$(LH_U)^2$ 以外のスーパーポテンシャルを利用するもの

surppression スケール $M \sim 10^{25}$GeV 、非常に低温の再加熱温度が必要 $(T_{RH} \lesssim 10^3\text{GeV})$。(図 10.2) 参照。ほとんど死んでいる？

11.1.2　$(LH_U)^2$ のスーパーポテンシャルを利用する Affleck-Dine Leptogenesis

軽いニュートリノの質量が必要 $(m_{\nu 1} \lesssim 10^{-(8\sim 9)}\text{eV})$。この条件が満たされた場合には、ほとんど再加熱温度に依存せず、必要な Baryon asymmetry は一番軽いニュートリノの質量だけで完全に決まっている (図 7.5 参照)。また、近い将来に観測可能な Double Beta Decay を予言する (図 7.8 参照)。

11.2　6次のスーパーポテンシャルで持ち上げられる平坦方向を利用するもの

(図 10.1) と前章の議論を参照。$M \lesssim M_{GUT}$, $T_{RH} \gtrsim 10^4$GeV が必要。これは、LSP が宇宙を over close しない為の条件である。

$M \sim M_*$ の場合には、LSP が実験からの制限ぎりぎりの非常に軽いものでない限り、死んでいる。また、観測から示唆されているように、Cosmological Constant が宇宙のエネルギー密度の多くを占めているような場合には、既に、実験的に排除されている。

11.3 平坦方向を持ち上げるスーパーポテンシャルが存在しない場合

このシナリオは、“Moduli” 問題が存在した場合に、必要な Baryon asymmetry を供給できる数少ない一つであったが、この方法で Baryon asymmetry を供給する限り、LSP の作り過ぎを免れない。制限は 6 次のスーパーポテンシャル $(M \sim M_*)$ を用いるものと同じである。

11.4 まとめ

以上の議論から分かることは、Gravity Mediation に関する限り、有効なシナリオとして生き残っているのは、(LH_U) を平坦方向として利用した、非常に小さい $m_{\nu 1}$ をもちいた、Affleck-Dine Leptogenesis と、低めの surppression スケール $M \lesssim M_{GUT}$ を利用した、6 次のスーパーポテンシャルを利用するシナリオのみである。

謝辞

修士課程での学習、研究の指導をして頂いた柳田勉先生に心から感謝致します。また、諸先輩方からは、おりにふれて多くのことを教えて頂きました。特に、浅賀さん、浜口さん、渡利さん、鈴木さん には、とても多くのことを教えて頂きました。疋田さんには Computer に関して、お世話になりっぱなしでした。ここに、改めて感謝いたします。また、M 2 の同輩とは、度々楽しい議論が出来ました。特に、市川君には、Computer 環境についても非常にお世話になりました。ここに感謝します。

付 録A　Sample Calculation

ここでは、Toy モデルを使って、化学ポテンシャルが存在する場合の有限温度有効ポテンシャルの計算を行う [56]。計算の方法自体は極めて一般的なので、他の現実的なモデルを特定したより進んだ議論の準備となる。また、保存 Charge のある系の高温での振る舞いはそれ自体興味深いものであり、他の宇宙論的な考察に有用であろう。

A.1　The Model

次のような ϕ と χ の二種類のスーパーフィールドで構成されるスーパーポテンシャルで与えられるモデルを考える。

$$W = \frac{1}{2} f \chi \phi^2 - \chi m^2 \tag{A.1}$$

ここで、f, m^2 は実に取ることが出来る。また、後々の便宜の為に $\tilde{m}^2 \equiv f m^2$ と定義しよう。ラグランジアンは以下で与えられる。

$$\mathcal{L}_M = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi + \partial^\mu \chi^* \partial_\mu \chi + i \bar{\psi}_\phi \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_\phi + i \bar{\psi}_\chi \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_\chi - V(\phi_1, \phi_2, \chi) - \mathcal{L}_\psi \tag{A.2}$$

ここで、ψ_ϕ , ψ_χ はそれぞれ ϕ , χ のスーパーパートナーである Weyl フェルミオンである。さらに、$\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ と実成分に分解した。また、

$$V(\phi_1, \phi_2, \chi) = \frac{1}{2}\tilde{m}^2(\phi_1^2 - \phi_2^2) + \frac{1}{16} f^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 + \frac{1}{2} f^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 |\chi|^2 + \frac{\tilde{m}^4}{f^2} \tag{A.3}$$

$$\mathcal{L}_\psi = \frac{1}{2} f \chi \psi_\phi \psi_\phi + f \phi \psi_\chi \psi_\phi + \text{h.c} \tag{A.4}$$

この系には次の Global U(1) 対称性がある。

$$\begin{aligned} \phi \to \phi \quad &, \quad \chi \to \mathrm{e}^{i\alpha} \chi \\ \psi_\phi \to \mathrm{e}^{-i\alpha/2} \psi_\phi \quad &, \quad \psi_\chi \to \mathrm{e}^{i\alpha/2} \psi_\chi \, . \end{aligned} \tag{A.5}$$

対応する Charge は、

$$Q = \int d^3x \left[i(\chi^* \partial^0 \chi - \chi \partial^0 \chi^*) + \frac{1}{2} \bar{\psi}_\chi \bar{\sigma}^0 \psi_\chi - \frac{1}{2} \bar{\psi}_\phi \bar{\sigma}^0 \psi_\phi \right] ; \tag{A.6}$$

である。零温度の tree level ポテンシャルにおいては、$\chi = 0$, $\phi_2 = 0$, $\phi_1^2 = 4\tilde{m}^2/f^2$ に global minimum $V(\phi, \chi) = 0$ が存在する。このときは、全ての スカラー、フェルミオンの自由度が等しい質量 $\sqrt{2}\tilde{m}$ を持つ。一方で、$|\chi|$ が大きな期待値を持つ場合には $\phi_1 = \phi_2 = 0$ であり、ポテン

シャルは χ に依らず $\tilde{m}^4/f^2 = m^4$ となる。したがって、この方向は平坦方向になっている。(9.1.2 節) の一般的な議論から、有限温度における大正準分配関数は、

$$Z_\mu = \int_{\text{境界条件}} \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\chi\mathcal{D}\psi_\phi\mathcal{D}\psi_\chi \exp\left(-\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E\right) \tag{A.7}$$

によって与えられる。ここで、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_E &= \frac{1}{2}(\partial_\tau\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\tau\phi_2)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi_2)^2 \\
&+ \frac{1}{2}(\partial_\tau\chi_1 - i\mu\chi_2)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\tau\chi_2 + i\mu\chi_1)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\chi_1)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\chi_2)^2 \\
&+ \bar{\psi}_\phi\bar{\sigma}^0\left(\partial_\tau + \frac{\mu}{2}\right)\psi_\phi - i\bar{\psi}_\phi\bar{\sigma}^i\partial_i\psi_\phi \\
&+ \bar{\psi}_\chi\bar{\sigma}^0\left(\partial_\tau - \frac{\mu}{2}\right)\psi_\chi - i\bar{\psi}_\chi\bar{\sigma}^i\partial_i\psi_\chi \\
&+ V(\phi,\chi) + \mathcal{L}_\psi
\end{aligned} \tag{A.8}$$

である。ϕ , χ background で有限温度有効ポテンシャルを計算したいわけであるが、$\phi_2 = 0$ は有限温度にしても変化しないので、最初から零においておく。また、U(1) 対称性から、一般性を失うことなく $\chi_2 = 0$ とおいていい。これによって、質量行列が簡単になり、以降の計算を楽に実行することが出来る。

A.2 高温展開

ここでは、高温展開が使える領域

$$M_\phi \ , \ M_\chi \ , \ \mu \ll \pi T \tag{A.9}$$

を考える。ここで、

$$M_\phi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} f\phi_1 \ , \ M_\chi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} f\chi_1 \tag{A.10}$$

で定義されている。以下で、高温領域での One Loop 有効ポテンシャルを計算し、3d 有効理論の tree level ラグランジアンを構成し、その後、3d 有効理論中でさらに One Loop 積分を実行することで Resummation 改良を施す。

A.2.1 Bosonic な自由度の積分

(2.1.2 節) の最初の議論を利用して Bosonic な自由度を One Loop Order で積分する。汎関数行列式を mass と結合定数で巾展開して計算する。One Loop Level では f^4 までの展開でいいので、質量行列の 4 次まで展開すればいい。計算するべき汎関数行列式は、

$$\frac{1}{2}\ln\det(A+B) = \frac{1}{2}\ln\det(A) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}\mathrm{Tr}(A^{-1}B)^n \tag{A.11}$$

である。ここで、行列 A、B は以下の式で定義されている。

$$
\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{p^2}\mathrm{diag}(1,1,1,1) \\
B &= \begin{pmatrix} \tilde{m}^2+\frac{1}{2}M_\phi^2+M_\chi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{m}^2+\frac{3}{2}M_\phi^2+M_\chi^2 & 2M_\phi M_\chi & 0 \\ 0 & 2M_\phi M_\chi & -\mu^2+M_\phi^2 & -2\mu p_0 \\ 0 & 0 & 2\mu p_0 & -\mu^2+M_\phi^2 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
\tag{A.12}
$$

$$
\text{where } p^2 = p_0^2+\vec{p}^2 .
$$

ここで、$p_0=\omega_n=2\pi n/\beta$ は Bosonic な松原級数である。式 (A.11) の一項目は、すでに (2.2.5 節) で計算したものである。

$$
\frac{1}{2}\ln\,\det A = \sum_{bosons}\left(-\frac{\pi^2}{90}T^4\right) = -\frac{2\pi^2}{45}T^4 . \tag{A.13}
$$

これは、Free な理論の黒体輻射に相当する部分である。以降の計算には次の積分公式が便利である。

$$
\not{\int}'_B \frac{1}{p^2} = \frac{T^2}{12} ,\ \not{\int}'_B \frac{1}{(p^2)^2} = \frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{1}{\epsilon}+L_b(\bar{\mu})\right] ,\ \not{\int}'_B \frac{1}{(p^2)^3} = \frac{\zeta(3)}{128\pi^4T^2} ; \tag{A.14}
$$

ここで、

$$
\not{\int}'_B = T\sum_{n\ni 0}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3} \tag{A.15}
$$

であり、$'$ は零松原モードが省かれていることを示している。また、

$$
L_b(\bar{\mu}) = 2\ln\frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}_T} ,\ \bar{\mu}_T = 4\pi\mathrm{e}^{-\gamma}T , \tag{A.16}
$$

と定義されている。他の必要になる積分公式、

$$
\not{\int}\frac{(p_0^2)^n}{(p^2)^m}
$$

は、式 (A.14) を T で微分することであられる。このとき、式 (A.15) にある $\not{\int}$ の定義に注意する。式 (A.11) の $n=1$ の展開は、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A^{-1}B) &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\not{\int}'_B\frac{1}{p^2}B \\
&= \frac{T^2}{24}\left[4M_\phi^2+2M_\chi^2-2\mu^2\right] = \frac{T^2}{24}\left[2f^2\phi_1^2+f^2\chi_1^2-2\mu^2\right] ,
\end{aligned}
\tag{A.17}
$$

となる。$n=2$ の展開は、

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(A^{-1}B)^2 &= -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\,\sum\!\!\!\!\!\!\int'_B \frac{1}{(p^2)^2}B^2 \\
&= -\frac{1}{4}\sum\!\!\!\!\!\!\int'_B \frac{1}{(p^2)^2}\left[\begin{array}{l} 2\tilde{m}^4+\frac{1}{2}f^4\chi_1^4-\tilde{m}^2f^2\phi_1^2+3f^4\chi_1^2\phi_1^2 \\ +\frac{9}{8}f^4\phi_1^4-2f^2\phi_1^2\mu^2+2\mu^4 \end{array}\right] \\
&+ 2\sum\!\!\!\!\!\!\int'_B \frac{(p_0)^2}{(p^2)^2}\mu^2
\end{aligned} \tag{A.18}$$

ここで、二項目の積分公式は、先程述べた通り、

$$\sum\!\!\!\!\!\!\int'_B \frac{1}{p^2} = T\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{(2\pi n)^2T^2+\vec{p}^2} = \frac{T^2}{12}$$

の両辺を T で微分することで計算でき、

$$\sum\!\!\!\!\!\!\int'_B \frac{(p_0)^2}{(p^2)^2} = -\frac{T^2}{24} \tag{A.19}$$

が得られる。したがって、式 (A.18) と式 (A.19) より、

$$-\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(A^{-1}B)^2 = \frac{1}{4}\,\frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{1}{\epsilon}+2\ln\frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}_T}\right]\left[\begin{array}{l} 2\tilde{m}^4+\frac{1}{2}f^4\chi_1^4-\tilde{m}^2f^2\phi_1^2+3f^4\chi_1^2\phi_1^2 \\ +\frac{9}{8}f^4\phi_1^4-2f^2\phi_1^2\mu^2+2\mu^4 \end{array}\right] - \frac{T^2}{12}\mu^2 \tag{A.20}$$

次に $n=3$ の展開を行う。One Loop Order の範囲の項を拾って来ると、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}\mathrm{Tr}(A^{-1}B)^3 &= \frac{1}{6}\sum\!\!\!\!\!\!\int'_B \frac{1}{(p^2)^3}\left[-24M_\phi^2\mu^2(p_0)^2+24\mu^4(p_0)^2\right] \\
&= 4\sum\!\!\!\!\!\!\int'_B \frac{(p_0)^2}{(p^2)^3}\left[-\frac{1}{2}f^2\phi_1^2\mu^2+\mu^4\right]
\end{aligned} \tag{A.21}$$

となる。ここで必要になる積分公式は、以前と同様に、

$$\sum\!\!\!\!\!\!\int'_B \frac{1}{(p^2)^2} = \frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{1}{\epsilon}+2\ln\frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu_T}}\right]$$

の両辺を T で微分することで得られ、

$$\sum\!\!\!\!\!\!\int'_B \frac{(p_0)^2}{(p^2)^3} = \frac{1}{64\pi^2}\left[\frac{1}{\epsilon}+2\ln\frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}_T}\right]+\frac{1}{32\pi^2} \tag{A.22}$$

である。したがって、式 (A.21) は以下のように計算される。

$$\frac{1}{6}\mathrm{Tr}(A^{-1}B)^3 = \left[\frac{1}{16\pi^2}\left(\frac{1}{\epsilon}+2\ln\frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu_T}}\right)+\frac{1}{8\pi^2}\right]\left[-\frac{1}{2}f^2\phi_1^2\mu^2+\mu^4\right]\,. \tag{A.23}$$

最期に $n=4$ の展開を計算する。One Loop Oreder で効いて来るのは以下の項だけである。

$$-\frac{1}{8}\mathrm{Tr}(A^{-1}B)^4 = -\frac{1}{8}\sum\!\!\!\!\!\!\int'_B \frac{1}{(p^2)^4}\left[32(p_0^2)^2\mu^4\right] = -4\sum\!\!\!\!\!\!\int'_B \frac{(p_0^2)^2}{(p^2)^4}\mu^4\,. \tag{A.24}$$

ここで必要になる積分は式 (A.22) の両辺を T で微分することで得られて、

$$\not{\int}'_B \frac{(p_0^2)^2}{(p^2)^4} = \frac{1}{128\pi^2}\left[\frac{1}{\epsilon} + 2\ln\frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}_T}\right] + \frac{1}{48\pi^2} \tag{A.25}$$

である。これを用いて式 (A.24) は、

$$-\frac{1}{8}\mathrm{Tr}(A^{-1}B)^4 = -\frac{1}{32\pi^2}\left[\frac{1}{\epsilon} + 2\ln\frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}_T}\right]\mu^4 - \frac{1}{12\pi^2}\mu^4 \tag{A.26}$$

のように計算される。さて、以上の計算をまとめれば、Bosonic な自由度からの One Loop Order での有効ポテンシャルへの寄与を、以下のように得ることが出来る。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln\,\det(A+B) &= -\frac{4\pi^2}{90}T^4 + \frac{T^2}{12}f^2\phi_1^2 + \frac{T^2}{24}f^2\chi_1^2 - \frac{T^2}{6}\mu^2 - \frac{1}{16\pi^2}f^2\phi_1^2\mu^2 + \frac{1}{24\pi^2}\mu^4 \\ &- \frac{1}{64\pi^2}\left[\frac{1}{\epsilon} + 2\ln\frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}_T}\right]\left[2\tilde{m}^4 + \frac{1}{2}f^4\chi_1^4 - \tilde{m}^2 f^2\phi_1^2 + 3f^4\chi_1^2\phi_1^2 + \frac{9}{8}f^4\phi_1^4\right] .\end{aligned} \tag{A.27}$$

A.2.2 Fermionic な自由度の積分

前節同様、(2.1.2 節) の前半の議論を利用して、Fermionic な自由度を One Loop Order で積分する。計算の便宜上、以下の計算は 4-component Ψ で行う。また、γ 行列、Metric は Minkowski のままで計算する。その代わりに、運動量の第零成分は虚数であることに注意する。

$$p_0 = p^0 = i\omega_n = i(2n+1)\pi/\beta \tag{A.28}$$

したがって、

$$\not{p}\not{p} \equiv \tilde{p}^2 = (p_0)^2 - \vec{p}^2 = -(\omega_n^2 + \vec{p}^2) = -p^2 \tag{A.29}$$

である。したがって、Minkowski のものを単に虚時間に変換しただけのものを用いる。ラグランジアンの Fermionic な部分は、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\psi &= \frac{1}{2}\bar{\Psi}_\phi\left(\gamma^0\partial_\tau - i\gamma^i\partial_i\right)\Psi_\phi + \frac{1}{2}\bar{\Psi}_\chi\left(\gamma^0\partial_\tau - i\gamma^i\partial_i\right)\Psi_\chi \\ &- \frac{\mu}{4}\bar{\Psi}_\phi\gamma^0\gamma^5\Psi_\phi + \frac{\mu}{4}\bar{\Psi}_\chi\gamma^0\gamma^5\Psi_\chi \\ &+ \frac{1}{2}M_\chi\bar{\Psi}_\phi\Psi_\phi + \frac{1}{2}M_\phi\left(\bar{\Psi}_\chi\Psi_\phi + \bar{\Psi}_\phi\Psi_\chi\right)\end{aligned} \tag{A.30}$$

Furier 成分に分解するとこの部分は、

$$\mathcal{L}_\psi = \frac{1}{2}(\bar{\Psi}_\phi\ \bar{\Psi}_\chi)\begin{pmatrix} -\not{p} - \frac{\mu}{2}\gamma^0\gamma^5 + M_\chi & M_\phi \\ M_\phi & -\not{p} + \frac{\mu}{2}\gamma^0\gamma^5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_\phi \\ \Psi_\chi\end{pmatrix} \tag{A.31}$$

となる。したがって、

$$A = \begin{pmatrix} -\not{p} & 0 \\ 0 & -\not{p}\end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{2}\gamma^0\gamma^5 + M_\chi & M_\phi \\ M_\phi & \frac{\mu}{2}\gamma^0\gamma^5\end{pmatrix} \tag{A.32}$$

と定義したとき、有効ポテンシャルへの寄与は、

$$-\frac{1}{2}\ln\,\det(A+B) = -\frac{1}{2}\ln\,\det A - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}\mathrm{Tr}\,(A^{-1}B)^n \tag{A.33}$$

を計算すればいい。また、γ 行列のトレースの性質から、B について偶数剰の巾だけ考えれば良い。ここでも、式 (A.33) の一項目は既に (2.2.5 節) で計算済である。

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\ln\,\det A &= -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\,\ln A^2 = -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\,\ln\begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\sum\!\!\!\!\!\!\int_F \ln\left[(\omega_n^2+\vec{p}^2)\mathbf{1}_{4\times4}\right] = -\frac{\pi^2T^4}{90}\left(4\,\frac{7}{8}\right) \end{aligned} \tag{A.34}$$

以降の計算には、以下の積分公式を用いる。

$$\begin{aligned} \sum\!\!\!\!\!\!\int_F \frac{1}{p^2} &= -\frac{T^2}{24}\,,\ \sum\!\!\!\!\!\!\int_F \frac{1}{(p^2)^2} = \frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{1}{\epsilon}+L_f(\bar{\mu})\right]\,,\ \sum\!\!\!\!\!\!\int_F \frac{1}{(p^2)^3} = \frac{7\zeta(3)}{128\pi^4T^2} \\ \text{where}\ \sum\!\!\!\!\!\!\int_F &= \sum_n\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,,\ L_f(\bar{\mu}) = 2\ln\frac{4\bar{\mu}}{\bar{\mu}_T} \end{aligned} \tag{A.35}$$

ここで、Bosonic な場合同様に、他に必要になる $\sum\!\!\!\!\!\!\int (p_0^2)^n/(p^2)^m$ の形の積分は、式 (A.35) の両辺を T で微分することで得られる。さて、次に $n=2$ の展開を計算を実行しよう。まず、

$$A^{-1} = \frac{1}{\tilde{p}^2}\begin{pmatrix} -\not{p} & 0 \\ 0 & -\not{p} \end{pmatrix}\,, \tag{A.36}$$

である。計算するべきは、

$$-\frac{(-1)}{4}\mathrm{Tr}(A^{-1}B)^2 = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{\tilde{p}^2}\begin{pmatrix} \frac{\mu}{2}\not{p}\gamma^0\gamma^5 - \not{p}M_\chi & -\not{p}M_\phi \\ -\not{p}M_\phi & -\frac{\mu}{2}\not{p}\gamma^0\gamma^5 \end{pmatrix}\right]^2 \tag{A.37}$$

である。繁雑な計算の後に、

$$\mathrm{Tr}(A^{-1}B)^2 = \mathrm{Tr}\frac{1}{(p^2)^2}\left[\frac{\mu^2}{2}\not{p}\gamma^0\not{p}\gamma^0 + \mu M_\chi p^2\gamma^0\gamma^5 - p^2(2M_\phi^2+M_\chi^2)\mathbf{1}_{4\times4}\right] \tag{A.38}$$

となる。ここで、二項目のトレースは零である。一項目の γ 行列のトレースは、

$$\mathrm{Tr}_\gamma\left[\not{p}\gamma^0\not{p}\gamma^0\right] = \mathrm{Tr}_\gamma\left[(p^2-2(p_0)^2)\mathbf{1}_{4\times4}\right] = 4p^2-8(p_0)^2 \tag{A.39}$$

と計算される。以上から式 (A.37) は、

$$\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(A^{-1}B)^2 = \frac{1}{4}\sum\!\!\!\!\!\!\int_F\frac{1}{p^2}\left[2\mu^2-4(2M_\phi^2+M_\chi^2)\right] - \sum\!\!\!\!\!\!\int_F\frac{(p_0)^2}{(p^2)^2}\mu^2 \tag{A.40}$$

を計算すれば良いことが分かる。二項目の積分は、

$$\sum\!\!\!\!\!\!\int_F\frac{1}{p^2} = -\frac{T^2}{24}$$

の両辺を T で微分することで得られて、

$$\not\!\!\int_F \frac{(p_0)^2}{(p^2)^2} = \frac{T^2}{48} \tag{A.41}$$

である。故に、

$$\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(A^{-1}B)^2 = -\frac{T^2}{24}\mu^2 + \frac{T^2}{24}\left(f^2\phi_1^2 + \frac{1}{2}f^2\chi_1^2\right) \tag{A.42}$$

が得られる。最期に必要なのが、$n = 4$ の展開、

$$-\frac{(-1)}{8}\mathrm{Tr}(A^{-1}B)^4 \tag{A.43}$$

の計算である。非常に繁雑な計算の後に、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8}\mathrm{Tr}(A^{-1}B)^4 \\
&= \frac{1}{8}\not\!\!\int_F \frac{1}{(p^2)^4}\left[\begin{array}{l}
+(p^2)^2\left\{8\left(\frac{\mu}{2}\right)^4 + 8M_\phi^4 + 4M_\chi^4 + 16M_\phi^2M_\chi^2 - 24\left(\frac{\mu}{2}\right)^2M_\chi^2 - 16\left(\frac{\mu}{2}\right)^2M_\phi^2\right\} \\
+p^2(p_0)^2\left\{-64\left(\frac{\mu}{2}\right)^4 + 32\left(\frac{\mu}{2}\right)^2M_\chi^2 + 64\left(\frac{\mu}{2}\right)^2M_\phi^2\right\} \\
+(p_0)^4\left\{64\left(\frac{\mu}{2}\right)^4\right\}
\end{array}\right]
\end{aligned} \tag{A.44}$$

が得られる。これまでと同様の方法によって、以下の必要な積分公式が得られる。

$$\not\!\!\int_F \frac{1}{(p^2)^2} = \frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{1}{\epsilon} + 2\ln\frac{4\bar{\mu}}{\bar{\mu}_T}\right] \tag{A.45}$$

$$\not\!\!\int_F \frac{(p_0)^2}{(p^2)^3} = \frac{1}{32\pi^2} + \frac{1}{64\pi^2}\left[\frac{1}{\epsilon} + 2\ln\frac{4\bar{\mu}}{\bar{\mu}_T}\right] \tag{A.46}$$

$$\not\!\!\int_F \frac{(p_0^2)^2}{(p^2)^4} = \frac{1}{48\pi^2} + \frac{1}{128\pi^2}\left[\frac{1}{\epsilon} + 2\ln\frac{4\bar{\mu}}{\bar{\mu}_T}\right] \tag{A.47}$$

式 (A.44) と以上の公式から、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8}\mathrm{Tr}(A^{-1}B)^4 \\
&= \frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{1}{\epsilon} + 2\ln\frac{4\bar{\mu}}{\bar{\mu}_T}\right]\left\{\frac{1}{4}f^4\phi_1^4 + \frac{1}{8}f^4\chi_1^4 + \frac{1}{2}f^4\phi_1^2\chi_1^2 - \left(\frac{\mu}{2}\right)^2 f^2\chi_1^2\right\} \\
&-\frac{1}{12\pi^2}\left(\frac{\mu}{2}\right)^4 + \frac{1}{16\pi^2}\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 f^2\chi_1^2 + \frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 f^2\phi_1^2\,,
\end{aligned} \tag{A.48}$$

が得られる。

以上の結果から、Fermionic な自由度の積分からの、One Loop Order での有効ポテンシャルへの寄与は、次のようにまとめることが出来る。

$$- \quad \frac{1}{2}\ln\,\det(A+B)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\pi^2 T^4}{90}\left(4\,\frac{7}{8}\right) - \frac{T^2}{24}\mu^2 - \frac{1}{12\pi^2}\left(\frac{\mu}{2}\right)^4 \\
&+\frac{T^2}{24}\left(f^2\phi_1^2 + \frac{1}{2}f^2\chi_1^2\right) + \frac{1}{16\pi^2}\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 f^2\chi_1^2 + \frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 f^2\phi_1^2 \\
&+\frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{1}{\epsilon} + 2\ln\frac{4\bar{\mu}}{\bar{\mu}_T}\right]\left\{\frac{1}{4}f^4\phi_1^4 + \frac{1}{8}f^4\chi_1^4 + \frac{1}{2}f^4\phi_1^2\chi_1^2 - \left(\frac{\mu}{2}\right)^2 f^2\chi_1^2\right\} .
\end{aligned}
\tag{A.49}
$$

A.2.3 One Loop 有効ポテンシャルと繰り込み改良

前節と前々節の結果から、One Loop Order での有効ポテンシャルへ寄与は、次のようにまとめられる。

$$
\begin{aligned}
V_T \;=\; & -\frac{\pi^2 T^4}{90}4\left(1+\frac{7}{8}\right) - \frac{5}{24}T^2\mu^2 + \frac{7}{192\pi^2}\mu^4 \\
&+\frac{1}{2}\phi_1^2\left\{\frac{1}{4}T^2f^2 - \frac{f^2}{16\pi^2}\mu^2\right\} + \frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{1}{\epsilon} + 2\ln\frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}_T}\right]\frac{1}{4}\tilde{m}^2 f^2\phi_1^2 \\
&+\frac{1}{2}\chi_1^2\left\{\frac{1}{8}T^2f^2 + \frac{1}{32\pi^2}f^2\mu^2\right\} - \left(\frac{\mu}{2}\right)^2 f^2\chi_1^2\,\frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{1}{\epsilon} + 2\ln\frac{4\bar{\mu}}{\bar{\mu}_T}\right] \\
&-\frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{1}{\epsilon} + 2\ln\frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}_T}\right]\frac{1}{2}\tilde{m}^4 \\
&+f^4\phi_1^4\left\{\frac{1}{4}\,\frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{1}{\epsilon} + 2\ln\frac{4\bar{\mu}}{\bar{\mu}_T}\right] - \frac{1}{16\pi^2}\,\frac{9}{32}\left[\frac{1}{\epsilon} + 2\ln\frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}_T}\right]\right\} \\
&+f^4\chi_1^4\left\{\frac{1}{16\pi^2}\,\frac{1}{8}\,2\ln 4\right\} \\
&+f^4\phi_1^2\chi_1^2\left\{\frac{1}{2}\,\frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{1}{\epsilon} + 2\ln\frac{4\bar{\mu}}{\bar{\mu}_T}\right] - \frac{3}{4}\,\frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{1}{\epsilon} + 2\ln\frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}_T}\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{A.50}
$$

ここで、ϵ^{-1} の発散項は相殺項を用いて繰り込む。$\ln(T)$ の項が残るが、これは高温においては大きくなるので、繰り込み群を用いて改良する。なお、ここで $\ln(T)$ のような項が出て来るのは、(2.2.5 節) の議論から予想されていたことである。波動関数と結合定数を、繰り込みスケール $\sim T$ まで走らせることが必要だ。なお、係数は最低次の展開係数が一致するように選べば良い。このモデルにおける、種々の β 関数は、One Loop Order で以下のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
\bar{\mu}\frac{d}{d\bar{\mu}}f^2 &= \frac{5}{16\pi^2}f^4 \qquad , \qquad \bar{\mu}\frac{d}{d\bar{\mu}}\tilde{m}^2 = \frac{3}{16\pi^2}f^2\tilde{m}^2 \qquad , \\
\bar{\mu}\frac{d}{d\bar{\mu}}\phi^*\phi &= -\frac{2}{16\pi^2}f^2\phi^*\phi \qquad , \qquad \bar{\mu}\frac{d}{d\bar{\mu}}\chi^*\chi = -\frac{1}{16\pi^2}f^2\chi^*\chi \qquad .
\end{aligned}
\tag{A.51}
$$

これらより、波動関数と結合定数のランニングはこの Order では次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\phi^*\phi(\bar{\mu}) &= \phi^*\phi(\bar{\mu}_0)\left(\frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}_0}\right)^{-\frac{2f^2}{16\pi^2}} \qquad , \qquad \chi^*\chi(\bar{\mu}) = \chi^*\chi\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{-\frac{f^2}{16\pi^2}} \qquad , \\
\tilde{m}^2(\bar{\mu}) &= \tilde{m}^2(\bar{\mu}_0)\left(\frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}_0}\right)^{\frac{3f^2}{16\pi^2}} \qquad , \qquad f^2(\bar{\mu}) = \frac{16\pi^2}{5\ln(\Lambda/\bar{\mu})} \qquad ,
\end{aligned}
$$

$$\text{where} \quad \Lambda = \bar{\mu}_0 \exp\left[\frac{16\pi^2}{5f^2(\bar{\mu}_0)}\right] \ . \tag{A.52}$$

以上を用いて、式 (A.50) を繰り込み群で補正する。結果 3 次元有効理論の Tree Level の作用が得られる。

$$\begin{aligned} S_{3d} &= \frac{V}{T}\left[-\frac{\pi^2}{12}T^4 - \frac{5}{24}\mu^2T^2 + \frac{7}{192\pi^2}\mu^4 + \frac{\tilde{m}^4(\bar{\mu}_T)}{f^2(\bar{\mu}_T)}\right] \\ &+ \int d^3x \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}(\nabla\phi_1^2) + \frac{1}{2}(\nabla\phi_2)^2 + (\nabla\chi)^*(\nabla\chi) \\ +\frac{1}{2}m_1^2\phi_1^2 + \frac{1}{2}m_2^2\phi_2^2 + m_\chi^2\chi^*\chi \\ +\frac{1}{4}\lambda_\phi(\phi_1^2+\phi_2^2)^2 + \frac{1}{2}\lambda_m(\phi_1^2+\phi_2^2)\chi^*\chi + \lambda_\chi(\chi^*\chi)^2 \end{array}\right] . \end{aligned} \tag{A.53}$$

ここで、3d 理論と 4d 理論における場は、以下の関係になっている。

$$(\phi\phi)_{3d} = \frac{1}{T}(\phi\phi)_{4d}\left(\frac{1}{4}\bar{\mu}_T\right) \quad , \quad (\chi\chi)_{3d} = \frac{1}{T}(\chi\chi)_{4d}\left(\frac{1}{4}\bar{\mu}_T\right) \ . \tag{A.54}$$

これと β 関数より上記の結合定数は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} m_1^2 &= -\tilde{m}^2\left(2^{-4/3}\bar{\mu}_T\right) - \frac{f^2\mu^2}{16\pi^2} + \frac{f^2T^2}{4} \ , \\ m_2^2 &= \tilde{m}^2\left(2^{-4/3}\bar{\mu}_T\right) - \frac{f^2\mu^2}{16\pi^2} + \frac{f^2T^2}{4} \ , \\ m_\chi^2 &= -\mu^2\left(1 - \frac{f^2}{32\pi^2}\right) + \frac{f^2T^2}{8} \ , \\ \lambda_\phi &= \frac{1}{4}Tf^2\left(2^{8/5}\bar{\mu}_T\right) \ , \\ \lambda_m &= Tf^2\left(2^{2/5}\bar{\mu}_T\right) \ , \\ \lambda_\chi &= T\frac{f^4}{8\pi^2}\ln 2 \ . \end{aligned} \tag{A.55}$$

これから、Resummation 改良の行われた理論にいくには、式 (A.53) で定義される有効理論において、One Loop 繰り込みを行えば良い。これには、以下の積分公式を用いれば簡単である。

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi^3)} \ln(p^2+m^2) = -\frac{m^3}{6\pi} \ . \tag{A.56}$$

3 次元理論の One Loop 補正は、次のようになる。

$$V_{1-loop} = -\frac{1}{12\pi}\sum_{i=\phi_2,\chi_2,\pm} m_i^3 \tag{A.57}$$

ここで、各パラメータは以下のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
m_{\phi_2}^2 &= m_2^2 + \lambda_\phi \phi_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_m \chi_1^2 \ , \\
m_\pm^2 &= \frac{1}{2}\left[m_{\phi_1}^2 + m_{\chi_1}^2 \pm \left((m_{\phi_1}^2 - m_{\chi_1}^2)^2 + 4 m_{\phi\chi}^2 \right)^{1/2} \right] \ , \\
m_{\phi_1}^2 &= m_1^2 + 3\lambda_\phi \phi_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_m \chi_1^2 \ , \\
m_{\chi_1}^2 &= m_\chi^2 + 3\lambda_\chi \chi_1^2 + \frac{1}{2}\Lambda_m \phi_1^2 \ , \\
m_{\phi\chi} &= \lambda_m \phi_1 \chi_1 \ .
\end{aligned}
\tag{A.58}
$$

これを実行することで、(2.2.5 節) で少し触れた Resummation 改良が出来た One Loop 有効ポテンシャルになっている。

付 録B　Affleck-Dine Baryogenesis に関するいくつかのコメント

B.1　有限温度効果が効いた時の Affleck-Dine 場の蒸発時期についてのコメント

One Loop の有限温度効果が効いて Affleck-Dine 場が原点まわりの振動を開始する場合の Affleck-Dine 場の蒸発について議論しておく。有限温度効果がきいて、原点まわりの振動を開始する前に Affleck-Dine 場が Plasma 化するようなことがあれば、今までの Baryon asymmetry の見積もりは誤っていたことになる。以下で見るように、Affleck-Dine 場は振動開始後間もなく、熱浴中の粒子からの散乱により、蒸発して、Q-Plasma になると考えられるが、とにかく数回の振動が可能であり、Baryon asymmetry の見積もりは変更しなくて良い。この Appendix ではその事実を簡単に見ておくことにしよう。Affleck-Dine 場が蒸発するには以下の二つの条件が必要である [3]。
(1)、Affleck-Dine 場と熱浴の相互作用率が平衡化するのに充分である。つまり、$\Gamma_{scatt} > H$。
(2)、熱浴が持つエネルギー密度が Affleck-Dine 場の持つエネルギー密度より大きい。
今、Affleck-Dine 場が次のようなスーパーポテンシャルを持っているとしよう。

$$W = y\phi\chi_1\chi_2 \ . \tag{B.1}$$

今、$y|\phi| < T$ の条件が満たされ、χ_1 , χ_2 が熱平衡にあるとする。このときの、典型的な相互作用率は [26]、

$$\Gamma_{scatt} \sim \frac{y^2\alpha}{yT\,T}T^3 = y\alpha T \tag{B.2}$$

あるいは、

$$\Gamma_{scatt} \sim \frac{y^4}{yT\,T}T^3 = y^3 T \tag{B.3}$$

である。ここで、Affleck-Dine 場の有効質量として、yT を用いている。[3] では、有効質量として T を用いているため、相互作用率を小さく見積もりすぎている。まず、条件 (2) について考えよう。Affleck-Dine 場のエネルギー密度は、

$$E_\phi \sim y^2T^2|\phi|^2 \tag{B.4}$$

であり、熱浴のエネルギー密度は、

$$E_{plasma} \sim T^4 \tag{B.5}$$

である。ここで χ_1 , χ_2 が熱浴に入るには、そもそも $|y\phi| < T$ が必要であるから、式 (B.4)、式 (B.5) より必ず、$E_\phi < E_{plasma}$ であり、条件 (2) は必ず満足している。次に、条件 (1) について考えよう。Affleck-Dine 場の原点まわりの振動を開始するときは、

$$H_O \sim yT \tag{B.6}$$

である。したがって、熱浴中の粒子からの散乱 Rate より α , y^2 程度小さい。これから、Affleck-Dine 場は $Q - Plasma$ へと蒸発する前に、数回振動が可能である。また、これから、thermal mass term で Affleck-Dine 場が振動を開始した場合は、Q-Ball が生成される前に、Affleck-Dine 場は蒸発して Q-Plasma になると思われる。生成されたとしても、充分内部まで Plasma 中の粒子が侵入可能であるので、すぐに蒸発する。

B.2 4 次のスーパーポテンシャルを用いた Gauge Mediation Model における Affleck-Dine Baryogenesis に対するコメント

文献の中には、4 次のスーパーポテンシャルで持ち上げられるような平坦方向をもちいて、Gauge Mediation Model における Afflec-Dine Baryogenesis について考えているものが存在する。ここでは、4 次のスーパーポテンシャル

$$W = \frac{1}{4M}\phi^4$$

で持ち上げられるような平坦方向を用いた場合、Gauge Mediation Model においては、Affleck-Dine Baryogenesis で必要な Baryon asymmetry が説明することは、ほとんど不可能であることを簡単に見ておこう。

まず、有限温度効果による Early Oscillation は考えないで議論を進めよう。対応するポテンシャルとしては、以下を考える。

$$\begin{aligned} V(\phi) &= (m_{3/2}^2 - cH^2)|\phi|^2 + V_0\left(\frac{|\phi|^2}{\langle S\rangle^2}\right)^2 \\ &\quad + \frac{m_{3/2}}{4M}(a_m\phi^4 + \text{h.c}) + \frac{H}{4M}(a_H\phi^4 + \text{h.c}) + \frac{1}{M^2}|\phi|^4 \,. \end{aligned} \tag{B.7}$$

この場合、Affleck-Dine 場が原点まわりの振動を開始する時期は以下のように求めることが出来る。

$$H_O = \max\left[m_{3/2}\ ,\ a\left(\frac{V_0}{M}\right)^{1/3}\right] \,. \tag{B.8}$$

ここで、a は $\mathcal{O}(1)$ の定数である。式 (4.50) より、得られる Baryon asymmetry は、

$$\begin{aligned} \frac{n_B}{s} &\simeq \frac{\beta\delta_{eff}}{3}\frac{T_{RH}M}{M_*^2}\left(\frac{m_{3/2}}{H_O}\right) \\ &\lesssim \frac{\beta\delta_{eff}}{3}\frac{T_{RH}M}{M_*^2} \\ &\simeq 10^{-10}\left(\frac{T_{RH}}{10^8\text{GeV}}\right)\left(\frac{M}{M_*}\right) \end{aligned} \tag{B.9}$$

である。軽い gravitino mass の場合には、再加熱温度はもっと低く抑えねばならなかったので、上のような Baryon asymmetry は得ることが出来ない。

そもそも、4 次のスーパーポテンシャルで持ち上げられる平坦方向は、$B-L$ を破るものとしては、(LH_U) 方向しか存在しない。ここでは、有限温度効果が避けがたいのは以前見た通りである。他の平坦方向についても同様である。今の場合は、$m_{3/2}$ が小さいために、$\left(\frac{m_{3/2}}{H_O}\right)$ の surppression は非常に大きく、必要な Baryon asymmetry を得るのは絶望的である。

付 録C　超対称理論における平坦方向とその持ち上がり

ここで、便宜の為に、超対称非標準理論における平坦方向と、それを持ち上げる非繰り込み可能なスーパーポテンシャルをまとめておく。ここでは、Gauge 対称性と R-Parity を満たすような相互作用は一般に全て存在するとして、平坦方向の持ち上がりを議論する。実際の導出や詳細は、[27] を参照されたい。

まず、最初に、平坦方向を parametrize する Gauge 不変な単公式を列挙する。

	$B-L$	Always lifted by $W_{\rm renom}$?
LH_u	-1	
H_uH_d	0	
$\bar{u}\bar{d}\bar{d}$	-1	
$LL\bar{e}$	-1	
$Q\bar{d}L$	-1	
$Q\bar{u}H_u$	0	$\surd$
$Q\bar{d}H_d$	0	$\surd$
$LH_d\bar{e}$	0	$\surd$
$QQQL$	0	
$Q\bar{u}Q\bar{d}$	0	
$Q\bar{u}L\bar{e}$	0	
$\bar{u}\bar{u}\bar{d}\bar{e}$	0	
$QQQH_d$	1	$\surd$
$Q\bar{u}H_d\bar{e}$	1	$\surd$
$\bar{d}\bar{d}\bar{d}LL$	-3	
$\bar{u}\bar{u}\bar{u}\bar{e}\bar{e}$	1	
$Q\bar{u}Q\bar{u}\bar{e}$	1	
$QQQQ\bar{u}$	1	
$\bar{d}\bar{d}\bar{d}LH_d$	-2	$\surd$
$\bar{u}\bar{u}\bar{d}Q\bar{d}H_u$	-1	$\surd$

(C.1)

次のページに続く。

	$B-L$	Always lifted by $\mathrm{W}_{\mathrm{renom}}$?
$(QQQ)_4 LLH_u$	-1	$\surd$
$(QQQ)_4 LH_u H_d$	0	$\surd$
$(QQQ)_4 H_u H_d H_d$	1	$\surd$
$(QQQ)_4 LLL\bar{e}$	-1	
$\bar{u}\bar{u}\bar{d}Q\bar{d}Q\bar{d}$	-1	
$(QQQ)_4 LLH_d\bar{e}$	0	$\surd$
$(QQQ)_4 LH_d H_d\bar{e}$	1	$\surd$
$(QQQ)_4 H_d H_d H_d\bar{e}$	2	$\surd$

(C.2)

ここで、$(QQQ)_4$ の添字 4 は、$SU(2)_w$ の足を 4 表現になるように縮約したことを意味している。最期の欄は、繰り込み可能なスーパーポテンシャルによって常に持ち上がっている場合には、チェックがついている。

ここでは、Gauge 対称性と R-Parity を満たすスーパーポテンシャルは全て存在するとして、平坦方向がどのスーパーポテンシャルで持ち上がるかを示した。横欄が平坦方向が含むスーパーフィールドを表し、縦欄が存在するスーパーポテンシャルを表す。チェックのついたところは、そのスーパーポテンシャルによって持ち上げられる平坦方向が存在することを意味する。一番高次のスーパーポテンシャルにおけるチェックが、そのスーパーフィールドを含む平坦方向が完全に持ち上げられるところである。例えば、$L, \bar{e}$ で構成される平坦方向 $(LL\bar{e})$ 達では、3 次、5 次、6 次のスーパーポテンシャルで持ち上げられるが、6 次のスーパーポテンシャルで全ての自由度が持ち上げられる。つまり、3 次、5 次では持ち上げられる平坦方向が存在するが、世代等の自由度により、持ち上げられずにいる平坦方向が存在するわけである。ここで、平坦方向が Higgs 場を含むものについては含めてない。これらについては、$(H_u H_d)^2$, $(LH_u)^2$ の 4 次のスーパーポテンシャルによって、完全に持ち上がる。

	L $\bar{d}$	L $\bar{e}$	$\bar{u}$ $\bar{d}$	$\bar{u}$ $\bar{e}$	Q L	Q $\bar{u}$	Q $\bar{u}$ $\bar{e}$	L $\bar{u}$ $\bar{d}$	L $\bar{d}$ $\bar{e}$	L $\bar{u}$ $\bar{e}$	$\bar{u}$ $\bar{d}$ $\bar{e}$	Q L $\bar{e}$	Q L $\bar{d}$	Q L $\bar{u}$
$H_u Q\bar{u}$						√	√							√
$H_d L\bar{e}$		√							√	√		√		
$H_d Q\bar{d}$													√	
$QQQL$					√	√	√					√	√	√
$Q\bar{u}Q\bar{d}$						√	√						√	√
$Q\bar{u}L\bar{e}$							√			√		√		
$\bar{u}\bar{u}\bar{d}\bar{e}$			√	√			√	√		√	√			
$H_u LQ\bar{d}L$														
$H_u L\bar{u}\bar{d}\bar{d}$								√						
$H_u LLL\bar{e}$		√							√					
$H_d L\bar{d}\bar{d}\bar{d}$	√							√	√					
$Q\bar{d}LQ\bar{d}L$														
$\bar{u}\bar{d}\bar{d}Q\bar{d}L$								√						
$\bar{u}\bar{d}\bar{d}\bar{u}\bar{d}\bar{d}$			√					√						
$Q\bar{d}LLL\bar{e}$														
$LL\bar{e}LL\bar{e}$		√												
$LL\bar{e}\bar{u}\bar{d}\bar{d}$								√						
$H_u LLL\bar{d}\bar{d}\bar{d}$	√													
$Q\bar{u}Q\bar{u}Q\bar{u}H_d\bar{e}\bar{e}$							√							

(C.3)

次ページに続く。

	Q $\bar{u}$ $\bar{d}$	L $\bar{u}$ $\bar{d}$ $\bar{e}$	Q L $\bar{d}$ $\bar{e}$	Q L $\bar{u}$ $\bar{e}$	Q $\bar{u}$ $\bar{d}$ $\bar{e}$	Q L $\bar{u}$ $\bar{d}$	Q L $\bar{u}$ $\bar{d}$ $\bar{e}$
$H_u Q \bar{u}$	$\surd$			$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
$H_d L \bar{e}$		$\surd$	$\surd$	$\surd$			$\surd$
$H_d Q \bar{d}$	$\surd$		$\surd$		$\surd$	$\surd$	$\surd$
$QQQL$	$\surd$		$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
$Q\bar{u}Q\bar{d}$	$\surd$		$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
$Q\bar{u}L\bar{e}$		$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
$\bar{u}\bar{u}\bar{d}\bar{e}$	$\surd$	$\surd$		$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
$H_u L Q \bar{d} L$							
$H_u L \bar{u} \bar{d} \bar{d}$							
$H_u L L L \bar{e}$							
$H_d L \bar{d} \bar{d} \bar{d}$							
$Q\bar{d}LQ\bar{d}L$							
$\bar{u}\bar{d}\bar{d}Q\bar{d}L$							
$\bar{u}\bar{d}\bar{d}\bar{u}\bar{d}\bar{d}$							
$Q\bar{d}LLL\bar{e}$							
$LL\bar{e}LL\bar{e}$							
$LL\bar{e}\bar{u}\bar{d}\bar{d}$							
$H_u LLL\bar{d}\bar{d}\bar{d}$							
$Q\bar{u}Q\bar{u}Q\bar{u}H_d\bar{e}\bar{e}$							

(C.4)

関連図書

[1] I. Affleck , M. Dine, Nucl. Phys. B249 (1985) 361.

[2] M. Dine, L. Randoll and S. Thomas, Nucl. Phys. B458 (1996) 291.

[3] R. Allahverdi, B. A. Campbell and J. Ellis, Nucl. Phys. B579 (2000) 355.

[4] T. Asaka, Masaaki Fujii, K. Hamaguchi and T. Yanagida, Phys. Rev. D62 (2000) 123514, hep-ph/0008041.

[5] S. Coleman, Nucl. Phys. B262, 263 (1985).

[6] G. Dvali, A. Kusenko, and M. Shaposhnikov, Phys. Lett. B417 ,99,(1998).

[7] A. Kusenko and M. Shaposhnikov, Phys. Lett. B 418,46 (1998) .

[8] K. Enqvist and J. McDonald, Phys. Lett. B425 309 (1998).

[9] K. Enqvist and J. McDonald, Nucl. Phys. B538 321 (1999).

[10] Edward W. Kolb , Michael S. Turner , "The Eary Universe," Perseus Books (1990).

[11] Antonio Riotto,"Theories of Baryogenesis," hep-ph/9807454.

[12] J. I. Kapusta, "Finte-Temperature Field Theory, " Cambridge University Press (1989).

[13] M. Quiros, "Finte Temperature Field Theory and Phase Transitions, " hep-ph/9901312.

[14] M. L. Bellac, "Thermal Field Theory,"Cambridge University Press (1996).

[15] 九後 汰一郎," ゲージ場の量子論 (I,II)," 培風館 (1989).

[16] Ashok Das,"Finite Temperature Field Theory,"Word Scientific (1997).

[17] R. R. Parwani, Phys. Rev. D45 (1992) 4695.

[18] P. Arnold and O. Espinosa, Phys. Rev. D47 (1993) 3546.

[19] D. Comelli, J. R. Espinosa, Phys. Rev. D55 , 6253 (1997) .

[20] A. D. Sakharov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. Pis'ma 5, 32 (1967);JETP Lett. 91B, 24 (1967).

[21] G. L. Fogli, E. Lisi, D. Montanino, and A. Palazzo, Phys. Rev. D62 (2000) 013002,hep-ph/9912231 .

[22] G. L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, and D. Montanino, hep-ph/0009269 .

[23] See ,for example,H. V. Klapdor-Kleingrothaus, H. P*ä*s, hep-ph/00020109.

[24] See, for example, Y. Obayashi, talk given at the Joint US/Japan Workshop On New Initiatives In Muon Lepton Flavor Violation and Neutrino Oscillation With High Intense Muon and Neutrino Sources, Honolulu, Hawaii, Oct. 2-6, 2000, http: / / meco.ps.uci.edu/lepton __ workshop/talks/ obayashi.pdf.

[25] C. Albright et.al, hep-ex/0008064.

[26] A. Anisimov and M. Dine, hep-ph/0008058.

[27] T. Gherghetta, C. Kolda, and S. Martin, Nucl. Phys. B468,37, (1996) .

[28] M. K. Gailard , H. Murayama, and K. A. Olive, Phys. Lett. B355 (1995) 71.

[29] T. Moroi and H. Murayama, JHEP 0007 ; 009, 2000, and references therein .

[30] E. Holtmann, M. Kawasaki, K. Kohri, and T. Moroi, Phys. Rev. D60, 023506 (1999)

[31] T. Moroi, hep-ph/9503210

[32] M. Fukugita and T. Yanagida, Phys. Lett. 174B, 45 (1986)

[33] V. A. Kuzumin, V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B155, 36 (1985).

[34] SuperKamiokande Collaboration, Y. Fukuda et al. Phys. Lett B433, 9 (1998); 436, 33 (1998); Phys. Rev. Lett. 81, 1562 (1998)

[35] S. P. Martin ,"A SUPERSYMMETR PRIMER,"hep-ph/9709356.

[36] S. Y. Khlebnikov and M. E. Shaposhnikov ,Nucl. Phys. B308, 885 (1988); J.A.Harvey and M.S.Turner, Phys. Rev. D42, 3344 (1990).

[37] M. Dine and A. E. Nelson , Phys. Rev. D48, 1277 (1993).

[38] M. Dine , A. E. Nelson, and Y. Shirman , Phys. Rev. D51, 1362 (1995).

[39] M. Dine , A. E. Nelson, Y. Nir , and Y. Shirman , Phys. Rev. D53, 2658 (1996).

[40] A. de Gouvêa, T. Moroi, and H. Murayama ,Phys. Rev. D56 1281 (1997).

[41] S. Raby, Phys. Rev. D56, 2852 (1997).

[42] L. Randall, M. Soljacic and A. H. Guth, Nucl. Phys. B472 ,408 (1996).

[43] T. Moroi, M. Yamaguchi,and T. Yanagida, Phys. Lett. B342, 105 (1995).

[44] E. Holtmann , M. Kawasaki, K. Kohri , and T. Moroi, Phys. Rev. D60, 023506 (1999).

[45] M. Kawasaki and T. Moroi, Astrophys. J. 452,506 (1195)

[46] A.D.Linde, Phys.Lett. B160, 243 (1985) .

[47] V.V.Klimov , Sov. J. Nucl. Phys. 33(6), (1981).

[48] D. H. Lyth and E. D. Stewart, Phys. Rev. Lett. 75, 201 (1995); Phys. Rev. D53, 1784 (1996).

[49] E. D. Stewart, M. Kawasaki and T. Yanagida, Phys. Rev. D54 ; 6032 (1996) .

[50] B. de Carlos, J. A. Casas, F. Quevedo, and G. G. Ross, Phys.Lett. B322, 349 (1993) .

[51] J. Grundberg, T. H. Hansson and U.Lindström, hep-th/9510045 .

[52] A. Kusenko, Phys. Lett. B404 285 (1997) .

[53] A. D. Linde, Nucl. Phys. B216, 421 (1982).

[54] T. Multamäki, I. Vilja, Nucl. Phys. B574, 130 (2000).

[55] K. Enqvist, A. Jokinen, and J. McDonald, Phys. Lett. B483, 191 (2000) .

[56] M. Laine and M. Shaposhnikov, Nucl. Phys. B532, 376 (1998).

[57] S. Kasuya and M. Kawasaki, Phys. Rev. Lett. 85,(2000) 2677 .

[58] K. Enqvist and J. McDonald, Nucl. Phys. B570, 407 (2000).

[59] S. Kasuya and M. Kawasaki, Phys. Rev. D61, 04130 (2000).

[60] S. Kasuya and M. Kawasaki, Phys. Rev. D62, 023512 (2000).

[61] K. Farakos, K. Kajantie, K. Rummukainen and M. Shaposhnikov, Nucl. Phys. B 425 ,67 (1994); K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen and M. Shaposhnikov, Nucl. Phys. B 458, 90 (1996) .

[62] D. Bödeker, W. Buchmüller, Z. Fodor and T. Helbig, Nucl. Phys. B 423, 171 (1994); J. Kripfganz, A. Laser and M. G. Schmidt, Z. Phys. C 73, 353 (1997) .

[63] R. Banerjee and K. Jedamzik, Phys. Lett. B484,278 (2000).

[64] M. Joyce, T. Prokopec and N. Turok, Phys. Rev. D53, 2930 (1996) .

[65] H. Davoudiasl and E. Westphal, Phys. Lett. B432, 128 (1998) .

[66] A. Cohen, S. Coleman, H. Georgi, and A. Manohar, Nucl. Phys. B272, 301 (1986) .

[67] K. Olive, G. Steigman, and T. Walker, Phys. Rep. 333 (2000); 389 .

[68] D. Hutchcroft, hep-ex/9912015.

[69] J. Ellis, T. Falk, G. Ganis, and K. A. Olive, Phys. Rev. D62, 075101 (2000).

[70] J. Mcdonald, hep-ph/0012369.