小弦理論のホログラフィックな記述と
その応用について

福田 剛司（基礎物理）

2001 年 2 月 1 日

概 要

超弦理論は重力相互作用を量子論的に無矛盾に記述すると考えられているが、非摂動的な定式化はまだ発展途上にある。一方、超弦理論にソリトンとして存在する、NS5-brane は理論の非摂動的側面の現われている好例である。そのため、NS5-brane を理解することは超弦理論の非摂動的側面の理解につながると考えられている。NS5-brane がさらに魅力的なのは、その上に現われる理論が Little String Theory と呼ばれる非局所的な理論であるということである。この修士論文では Little String Theory の Holographic な記述の構成を概観した後、実際にそれを使った Little String Theory の解析の一例を示す。

目 次

1　はじめに

本当の意味での統一理論であるというには、摂動の範囲を抜けなければならない。最近の弦理論の話題はこのように非摂動的側面に集まっている。一言で非摂動的側面へのアプローチといっても形態は様々である。一気に非摂動的な理論を定義してしまおうという壮大な計画もあれば、地道に今ある理論で非摂動的な側面の尻尾をつかんでみようという試みもある。(弦理論自体すでに壮大な計画の一部だという意見はもっともです。)

この修士論文は、どちらかというと後者の地道な手法の仲間である。ここに書かれた目的が全て達成されたからといって統一理論が出来上がる、という種の取り組みではないように思える。しかし、壮大な計画には無い魅力的な側面があることがここで強調されるべきである。

近年の弦理論においては、90 年代半ばの Seiberg と Witten の論文 [1] に代表される supersymmetric な場の理論での duality や moduli 空間といった概念の発展と、Polchinski の論文 [2] に代表される D-brane の理解が重要な役割を果たしている。さらに、90 年代半ばの発展を受けて、97 年の暮れに Maldacena [3] によって D-brane 上の場の理論と D-brane のつくる background 上の string theory は dual であるとする、いわゆる AdS/CFT 対応が提唱され、D-brane 上に作った場の理論を弦理論で研究するということが盛んに行われてきた。

一方、NS5-brane に目を向けると、NS5-brane は 90 年頃には [4] に見られるように弦理論における soliton として理解されていた。しかし、NS5-brane 上に現われる理論は強結合理論であり、さらに Lorenz covariant な action を持たないなどの特異性から解析は満足いくものとはいえなかった。その一方で、97 年には Seiberg により non-local な場の理論が NS5-brane 上に現われることが指摘されるなど NS5-brane に対する興味は増大していくことになる。NS5-brane 上の理論を解析する手段はあるか？上にあげた D-brane での発展をふまえると、AdS/CFT 対応の拡張を使ってこれを解析することが考えられる。Aharony などは実際に NS5-brane 上の理論を解析する手法を提案し [5]、さらに、Giveon らによって拡張された。[6]

このように、最近の主要な発展をもとに、今まで解析が難しかった NS5-brane 上の理論にアプローチしようというのがここでの提案である。特に先に進んでいくにつれ、NS5-brane 上の理論を解析しようとする過程には今まで弦理論や場の理論において発展してきた概念が非常に頻繁に使われていることを目にすることになる。この点からも NS5-brane の解析からでてきた結果には、何か弦理論や場の理論にとっての breakthrough が含まれていることが期待される。

この論文では 10 次元の弦理論として TypeII 弦理論を考え、Heterotic 弦理論などは想定していないことを注意しておきたい。このことは worldsheet 上に (2,2) supersymmetry があるという場合だけを考えることに対応している。

この論文では NS5-brane 上の理論として Little String Theory が生じることを示した後、その holographic description を導入し、実際に Little String Theory を解析する方法を示すことを目標にしている。以下に全体の細かい構成を述べる。はじめに、NS5-brane についてごく簡単に述べた後 (section 2)、NS5-brane 上に現われる 6 次元の supersymmetric な理論について議論する (section 3)。次に non-local な理論としての Little String Theory が存在していることを示し (section 4)、AdS/CFT 対応に見られる操作を NS5-brane に対して用いることで Little String Theory に dual な重力理論を見つける (section 5)。ここで

話は一段落する。次にいく前にこれからの議論に対する introduction を行う (section 6)。具体的には、これから調べる holographic duality を提示する。実際に duality についての考察が (section 7,8,9) で行われ、その duality の check をした後 (section 10)、duality の微妙な点について考える (section 11)。全てをうまく扱うために、double scaling limit が必要なことを述べ (section 12)、今までの議論の物理系への応用として駆け足で Little String Theory の相関関数を計算してみる (section 13)。最後にこれからの課題について述べる。付録については、主に本文中に使われる convention や結果についてまとめている。付録の結果は特に断りなしに本文中に使われている。本文を理解する上での background という意味において付録は重要である。

2 Introduction to NS5-brane

NS5-brane 上の理論を議論する前に、NS5-brane そのものについて簡単に説明しておく必要がある。[4]

はじめに string theory の低エネルギー理論に現われる NS5-brane について説明し、次に string theory の中での振る舞いについてコメントする。

2.1 NS5-Brane

NS5-brane は string theory において、string、つまり one-brane を elementary なものと考えたときに理論に soliton としてあらわれる空間 5 次元の多次元的な物体である。Low Energy Effective Theory (LEET) での場の方程式は α' の 0 次までで string metric を使って書くと

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int d^{10}x\sqrt{-g}[R - 4(\partial\Phi)^2 - \frac{e^{2\alpha\Phi}}{2(p+2)!}F^2 + \cdots] \tag{1}$$

となる。

この action から得られる運動方程式を解くことによって、magnetic charge をもって特徴づけられる soliton 解がえられる。いま elementary な string が 2-form $B_{\mu\nu}$ に electric に couple することから、electric-magnetic duality によって結び付けられる soliton 解は 5-brain となる。このように action から運動方程式を解くことによって求められる解はいくつもあるが、ここでは次の性質を持つ解に注目する。

- 場は 5+1 次元方向には依存しない。
- 場は残り 4 次元方向に対して球対称である。
- no-force conditon を満たす。(supersymmetry を残す。)

これらの条件を満たす解として

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + e^{2\Phi}\delta_{mn}dx^m dx^n && (2)\\ e^{2\Phi} &= 1 + \frac{q}{r^2} && (3)\\ H_{mnl} &= -\epsilon_{mnl}{}^k\nabla_k\phi && (4) \end{aligned}$$

($\mu,\nu = 0,1,\cdots,5$; $m,n = 5,\cdots,9$; $r^2 = x_6^2 + \cdots + x_9^2$) が存在する。この解は NS5-brane と呼ばれる “supersymmetric soliton” である。

2.2 Some properties of NS5-brane

NS5-brane の性質について、必要なことの結果だけを簡単に述べておく。

- M 理論との関連
  NS5-brane は 5+1 次元の多次元的な物体であり、M 理論にも 5+1 次元の多次元的な物体 (M5-brane) が存在している。M 理論を x^{11} 方向に compact 化すると typeIIA 理論が得られるとする。そのとき x^{11} 方向に巻きついていない M5-brane は、IIA 理論において NS5-brane になると考えられている。

- T-duality と S-duality
  NS5-brane が x^i 方向に伸びており、x^p 方向の 1 点であるとする。typeIIA(B) 理論において x^i 方向の 1 つを compact 化して T-dual をとると、それは typeIIB(A) 理論における NS5-brane になる。しかし、x^p 方向のうち 1 つを compact 化して T-dual をとると、Kaluza-Klein monopole (5-brane) と呼ばれるものになる。typeIIB 理論において S-dual をとると、NS5-brane は D5-brane になる。

- Open 5-brane としての NS5-brane
  M2-brane は M5-brane 上に端を持つことが知られている。このことから M2、M5-brane ともに x^{11} 方向に巻きついていなければ typeIIA 理論に移行することで D2-brane は NS5-brane 上に端を持つことができる。M2-brane は x^{11} 方向に巻きついており、M5-brane は巻きついていないときには NS5-brane 上に string があるような状態になる。

- NS5-brane 上の supersymmetry
  NS5-brane の存在によって、typeII 真空では守られていた supersymmetry は半分になる。特に残っている supersymmetry は NS5-brane 上の理論を supersymmetric にする。特に typeIIA 理論では 6 次元 (2,0) supersymmetry が、typeIIB 理論では 6 次元 (1,1) supersymmetry が NS5-brane 上に現われることが知られている。6 次元 (p,q) supersymmetry は chirality が left のものが p 個、right のものが q 個であることを意味するがどちらを left と決めるかは convention の問題である。

3 Supersymmetric Theories

NS5-brane 上の理論は 6 次元で 16 個 supercharge を持つ理論であった。一般に 16 個 supercharge を持つ場の理論はどのような特徴を持っているかを、主に Low energy effective theory の観点から考える。NS5-brane 上に現われる理論は何らかの形でこれから議論する理論と関係があることは簡単に予想できる。

この section では、はじめに 16 個の supercharge を持つ理論の一般論を展開して、その後 6 次元においてはどのようなことが結論できるか考える。[7] 次に 6 次元と 5 次元の理論の関係を考えることで、6 次元理論は non-trivial な側面を持っていることを示したい。[9, 7]

3.1 $d > 4$ Supersymmetric Theories with 16 Supercharges

16 個 supercharge をもった理論について考察する。16 個 supercharge をもった最も対称性の良い古典論は $N = 1, d = 10$ SYM 理論であり、Lagrangian は次の式で与えられる。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g_{10\mathrm{YM}}^2}\mathrm{Tr}[F_{MN}F^{MN}] - \frac{i}{2}\mathrm{Tr}[\overline{\chi}\Gamma^M D_M\chi] \tag{5}$$

この 10 次元の理論は $U(1)$ 以外では anomalous で量子論として存在しないが、dimensional reduction して求まる理論は量子論的にも存在することが知られている。はじめに 10 次元 SYM 理論を dimensional reduction することにより得られる理論から考察していこう。

さて、10 次元の N=1 SYM 理論における massless multiplet は vector A_M + Majorana-Weyl fermion χ 、である。dimensional reduction においては次にしたがって表現を分解する。

$$SO(1,9) \longrightarrow SO(1,d-1) \times SO(10-d)$$

すると A_M は A_μ と ϕ^a に分解される。χ は $SO(1,d-1)$ spinor となる。詳しい分解は文献 [8] を参考にするとしてここでは boson の項に注目して、得られる Lagrangian を書くと

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g_{\mathrm{dYM}}^2}\mathrm{Tr}\Big(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2D_\mu\phi^a D^\mu\phi^a - [\phi^a,\phi^b]^2\Big) + (fermi) \tag{6}$$

$(fermi)$ は fermion を 0 におくと消える項を表している。

このような理論の特徴は真空の muduli space が存在していることである。例えばこの場合の moduli 空間は scalar の値に応じて

$$\mathcal{M} = \frac{\mathbf{R}^{r(10-d)}}{\mathcal{W}} \tag{7}$$

となる。ここで $\mathcal{W}$ はゲージ群 G の Weyl 群で、r はゲージ群 G の rank である。例えば $SU(2)$ に対しては $r = 1, \mathcal{W} = \mathbf{Z_2}$ となる。

さらに、flat direction に沿った effective Lagrangian はゲージ群が $U(1)^r$ の free Lagrangian で書ける。

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4g^2}\Big(F_{\mu\nu}^2 + 2(\partial\phi^a)^2 + (fermi)\Big) \tag{8}$$

supersymmetry から low energy effective theory の flat direction の Lagrangian はこのように決まってしまう。

Eq. (8) は理論の moduli 空間 Eq. (7) の generic な点での Lagrangian を記述している。興味があるのは moduli 空間 Eq. (7) の singular point でどのような事が起こるかである。古典的には massless boson の出現による gauge 群の enhancement が起こる。では量子論的には何が起こるであろうか？

その第一段階として coupling constant の次元を考えてみる。coupling constant の次元の解析は Lagrangian を持った理論の UV や IR limit での振るまいを考える手っ取り早い方法である。Operator $\mathcal{O}$ の質量次元を $[\mathcal{O}]$ と書くことにすると gauge 場に対しては $[A] = 1$、Eq. (8) より $[\phi] = [A] = 1$ であり

$$[\frac{1}{g^2}] + [F^2] = d$$

が要求される。したがって $[g]$ は

$$[g]=\frac{4-d}{2},\quad [A]=1,\quad [\phi]=1 \tag{9}$$

$d>4$ では $[g]<0$、つまり IR limit で理論は free であると結論される。

上の議論は Lagrangian をもった理論に適用される。今考えたいのは singular point 上の理論で Lagragian は明らかではない。この場合は次のように考えることができる。この点での IR limit theories は繰り込み群の fixed point であり、scale 不変性をもっている。singular point から少しずれた moduli 空間上の点を考えてみると、そこでの理論は Low energy effective Lagrangian Eq. (8) で書かれ、scale に依存している。もし singular point 上での理論が interacting かつ scale 不変な理論であるならば、spontaneous symmetry breaking によって Lagrangian Eq. (8) の理論に移行しなければいけない。しかし、Lagrangian Eq. (8) は YM coupling が次元を持つことで explicit に scale 不変性を破っている。このため singular point 上での理論が interacting な scale 不変理論であることありえない。これより、$d>4$ では 10 次元 N=1 SYM 理論から demensional reduction で得られる理論は IR limit で free である、と結論することができる。Eq. (8) のような free な理論は、場 A_μ や ϕ を coupling constant を含めて再定義することで scale 不変にすることができる。しかしこうして scale 不変にされた理論においては A_μ や ϕ は特殊な scaling 則を持っており、存在している interaction 項においても scaling 則がうまく働くとは期待できない。

supersymmetric な理論で scale 不変性も持ち合わせている理論があるとしよう。このときその理論がもし、unitary な interacting theory であるならばその理論は conformal 不変性も備えた superconformal theory (SCFT) になっていると信じられている。SCFT の分類によると、5 次元 $\mathcal{N}=4$ 理論、6 次元 (1,1) 理論や 7 次元以上の理論に superconformal 代数は存在していない。この 2 つの事実を考え合わせると、“$d>4$ では 10 次元 $\mathcal{N}=1$ SYM 理論から demensional reduction で得られる理論は IR limit で free である” という前の段落の主張と一致する。

3.2 one more supersymmetric theory

6 次元にはもう 1 つ 16 個の supercharge を持った superalgebra、つまり 6 次元 (2,0) supersymmetry が存在している。その superalgebra を実現する理論は 10 次元 N=1 SYM 理論から dimensional reduction で得ることはできない。

massless multiplet は

$$(B_{\mu\nu},4\chi,5\Phi) \tag{10}$$

である。ここで $B_{\mu\nu}$ は self-dual 2-form で $dB=*dB$ を満たす。χ は positive chirality の 6 次元 pseudo-Majorana-Weyl fermion である。

self-dual 2-form が存在しているために Lorenz covariant な Lagrangian を書くことはできない。self-duality の constraint を無視すると次のような low energy effective Langangian を書くことができる。

$$\mathcal{L}\sim H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho}+(\partial\Phi^i)^2+(\text{fermion}) \tag{11}$$

ただし、$H=dB$。数因子は無視している。self-duality constraint $dB=*dB$ があるためにまえの Eq (8) とは異なり、coupling constant は入ってこない。

前のように scale 不変性の議論を繰り返そう。B 場は 2-form なので gauge 場に質量次元 1 を与えたように $[B] = 2$ とするべきである。そうすると (11) から、

$$[B] = [\phi] = 2 \tag{12}$$

となる。いずれにせよ Lagrangian Eq (11) は scale 不変である。前の議論を適用するとこのことは、moduli 空間に singular point があればその点は繰り込み群の non-trivial fixed point (interacting で scale 不変な点) になり得ることを示している。

前の subsection によると、上の主張が成立するためには 6 次元 (2,0) 理論に superconformal 代数が存在している必要がある。実際の SCFT の分類によると確かに 6 次元 (2,0) 理論に superconformal 代数が存在している。

次に理論の moduli 空間について考察する。generic な理論は low energy effective Lagrangian として Eq (11) を持っている。そのため moduli 空間は理論に存在している scalar で parametrize される。今の場合、理論には 1 つの tensor multilet Eq (10) に scalar が 5 つあり、gauge 群の rank が r であるので multiplet は r 個あることになる。したがって、moduli 空間は全部で 5r 個の scalar で parametrize される。moduli 空間に singular point が存在するとき、scalar の期待値はその点からの距離を表す。ところが scalar は今の場合次元を持っているので、scalar が期待値を持った理論は conformal 不変ではあり得ない。このことから singular point が存在していると、その singular point は孤立していることがわかる。さらに (2,0) supersymmetry により local には flat な moduli 空間があらわれる。これらをまとめると、moduli 空間に許される singularity は orbifold singularity のみである。moduli 空間は離散群 $\mathcal{W}$ を用いて、

$$\frac{\mathrm{R}^{5r}}{\mathcal{W}} \tag{13}$$

となる。singular point で理論は 6 次元 (2,0)SCFT となる。

6 次元 (2,0) 理論は Eq (10) からわかるように 2-form B をもっているので、B 場が canonical に couple する BPS one-brane (string) もまた存在する。その tension は tensor multiplet の scalar Φ の期待値によって決まる。Φ は (12) より質量次元 2 であったのでこれは矛盾しない。

3.3 5d-6d relation

6 次元 (2,0) supersymmetric theory は self-dual 2-form の存在のため Lorentz covariant な Lagrangian をもたないなどの特徴的な理論であった。そこで少し道をそれるが、6 次元 (2,0) 理論を dimensional reduction したときどうなるか考えるのは興味深い。

S^1 でコンパクト化しても supersymmetry の数は変わらないので、簡単のために boson 部分だけを考えることにする。self-dual 2-form B は dimensional reduction で次のように変化する。

$$B_{MN} \longrightarrow b_{\mu\nu}\,,\; a_\mu = B_{5\mu} \tag{14}$$

ここでこの subsection だけでは $M, N = 0, \cdots, 5$ 、$\mu, \nu = 0, \cdots, 4$ とする。大文字、小文字はそれぞれ 6 次元、5 次元での場を表している。ところが self-duality constraint は

$$dB = *dB \longrightarrow db = *da \tag{15}$$

ここで Hodge dual はそれぞれ 6 次元、5 次元でとる。

つまり、5 次元では b と a は electric-magnetic dual なので両方を独立な場として取り扱うべきではない。まとめると 6 次元での tensor multiplet Eq (10) の boson 部分は dimensional reduction で次のように変化する。

$$(B_{\mu\nu}, 5\Phi) \longrightarrow (a_\mu, 5\Phi) \tag{16}$$

これは 5 次元 SYM multiplet と一致している。

Eq (12) と Eq (15) より、5 次元の YM multiplet の場 a や Φ は質量次元 2 を持っている。しかし、YM 理論の gauge 場や gauge multiplet の scalar は Eq (9) のように次元を持っているのが望ましい。6 次元から 5 次元にコンパクト化する際の半径を R_6 とおけば望ましい次元を持った、新しい 5 次元理論における場は

$$A_\mu = R_6 a_\mu, \quad \phi^i = R_6 \Phi^i \tag{17}$$

によって自然に定義されることがわかる。一般に、6 次元 (2,0) 理論の action は書くことはできないが、gauge 群が $U(1)$ つまり free のときには self-duality constraint を無視することによって action を書くことができる。この事実は low energy effective action Eq (11) を書く際にも使われている。そのような特別なときにコンパクト化を具体的にすると、action は

$$\int d^6x(H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho} + (\partial\Phi^i)^2 + fermion) \longrightarrow \frac{1}{R_6}\int d^5x(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (\partial\phi^i)^2 + fermion) \tag{18}$$

のように変化する。これは 6 次元 (2,0) 理論を半径 R_6 でコンパクト化すると gauge 群が $U(1)$ で YM coupling が $g_{YM}^2 = R_6$ であるような SYM 理論になるということを意味している。さらに見方を変えると、IR free な 5 次元 U(1) SYM 理論の強結合極限 ($g_{YM} \longrightarrow \infty$) は $R_6 \longrightarrow \infty$ に対応しており、6 次元理論の出現を意味していることがわかる。

gauge 群が一般の G であるような場合を考えよう。このとき 6 次元 (2,0) 理論の action を書くことができないために U(1) 群におけるようなコンパクト化についての考察を加えることはできない。しかし、コンパクト化したあとの 5 次元の理論は gauge 群 G の SYM 理論であることが予想される。そこで、5 次元 SYM 理論から出発してみる。この理論は前の subsection でも述べたように繰り込み不可能で 5 次元に non-trivial な fixed point を持っていない。このために energy scale $1/g_{YM}^2$ で新しい dynamics が出現する必要がある。

このようにして、次の conjecture が成立する。IR free な 5 次元 SYM 理論の UV 理論は 6 次元 (2,0) 理論を半径 g_{YM}^2 でコンパクト化した理論で記述される。特に UV fixed point は (2,0)SCFT である。さらにこの fixed point は $g_{YM}^2 \longrightarrow \infty$ という、5 次元 SYM 理論の強結合極限で、6 次元 (2,0) 理論に scale をあらわすパラメータが存在しなくなるような点に対応している。

> 別の言い方をすると、6 次元 (2,0) SCFT(に少し摂動を加えた理論) の Low energy effective theory は 5 次元 SYM 理論であるという主張である。6 次元 (2,0) SCFT は 5 次元 SYM 理論の UV 理論という側面や、今まで moduli 空間を作って、議論してきたように、ある 6 次元理論の LEET であるという側面を持っているということを混同するべきではない。

6 次元 (2,0) 理論において、5 次元に dimensional reduction すると YM interaction を生じるような interaction は “M-interaction” と呼ばれることもあり、M 理論のコンパクト化の際に重要な役割をすると考えられ、考察されている。

話をもどして、6 次元 (2,0) 理論の moduli 空間 Eq. (13) に現われていた離散群 $\mathcal{W}$ について考える。6 次元 (2,0) 理論のコンパクト化によって新たに scalar が作り出されたりしなかったことを考えると、6 次元 (2,0) 理論の moduli 空間はコンパクト化で変化せず、5 次元でも Eq (13) のままである。5 次元の SYM 理論の moduli 空間 Eq (7) と比較することで離散群 $\mathcal{W}$ は gauge 群の Weyl 群であることもわかる。

ここでは詳しく述べないが、5 次元理論の BPS 状態などは 6 次元理論の BPS 状態や KK-mode から理解できる。その質量などとコンパクト化の半径との関係などを考えてみると上の conjecture を支持するものとなっている。

少し注意として、6 次元 (1,1)SYM 理論について述べておくべきである。6 次元 (1,1)SYM を同じように dimensional reduction しても、5 次元 SYM 理論になることはすぐにわかる。では 5 次元 SYM 理論の強結合極限となるのが、6 次元 (1,1) 理論ではなく 6 次元 (2,0) 理論であるのはどうしてか？ 理由は理論に存在する R-symmetry や scalar の数を考えるとわかる。理論が強結合にいっても、global R-symmetry 、scalar 数や supersymmetry などは変わらないことが期待されるが 6 次元 (2,0) 理論と 5 次元理論はこれらの性質が同じため、6 次元 (2,0) 理論を 5 次元理論の強結合極限とみなすことができたのである。

brane realization

5 次元 SYM 理論と 6 次元 (2,0) 理論の関係を示す例の 1 つとして、IIA 理論において N 枚の D4-brane が重なっている系を考える。N 枚の D4-brane 上の理論は 5 次元 SYM 理論である。さらにその YM coupling は $g_{YM} \propto l_s g_s$ で表されている。D4-brane 上の理論の強結合極限 $g_{YM} \longrightarrow \infty$ をとることは $R_{10} = g_s l_s \longrightarrow \infty$ に対応しており、あらたな次元の出現を意味し、M 理論の中で考察しなければいけない。N 枚の D4-brane は M 理論での N 枚の M5-brane に対応している。つまり、D4-brane 上の理論の強結合極限は M5-brane 上の理論になる。ここでいう N 枚重なった M5-brane 上の理論は後で述べるように 6 次元 (2,0)SCFT である。このように string theory は上の non-trivial な関係を支持するように思える。

実際には brane 上の理論といったときの理論は decoupling limit （brane 上にない場と brane 上にある場が相互作用しない極限）をとった後の理論のことをいっている。例えば上の場合 D4-brane 上の理論といったものは極限 ($l_s \to 0, \quad g_{YM} = \text{fixed}$) がとられたものをいう。M5-brane 上の理論に対してどのような limit をとるかは次の section に述べられている。

最後に誤解の無いように注意を述べておく。この section で議論されてきた場の理論は 16 個の supercharge を持った理論に限られている。それより少ない supercharge をもった理論に対してこの section で述べられたことは一般に適用されない。また、今まで議論されてきた理論は 6 次元 (2,0)SCFT のように特殊な理論であっても、すべて local field theory であったことに注意しておくべきである。

4 Little String Theory

typeII string theory や M 理論に存在する 5-brane 上の理論はどのような理論かを考える。各 brane に対して、はじめに brane 上だけで理論が閉じるための極限を考える。その後、

brane 上に現われる理論、特に Low energy での理論をよく知られている事実をもとに考える。このとき前の section での議論が利用される。特に、typeII 理論における NS5-brane 上の理論として、新しい理論が現われる必要があることが指摘される。[10]

4.1 M5-brane 上の理論

M 理論における soliton 解である M5-brane 上の理論は 6 次元 (2,0) supersymmetry を持った理論である。理論に対して次の極限をとることを考える。

$$l_p \longrightarrow 0 \tag{19}$$

重力結合定数とプランクスケールは $2\kappa^2 = (2\pi)^8 l_p^9$ で関係していることを考え合わせると、このような極限では $\kappa \to 0$ となる。M5-brane 上の場と bulk の場との coupling constant が 0 になるために 2 つの場の間の相互作用はなくなる。このことは、M5-brane 上の理論には理論が無矛盾であるために必要な自由度が備わっていて、それ自身閉じた理論として定式化されうることを意味している。

さらに M 理論にはパラメターは 1 つ (l_p) しかないことから、極限 Eq. (19) での M5-brane 上の理論には次元を持ったパラメターが全く存在していないことがわかる。これらのことは 6 次元 (2,0) supersymmetric な場の理論についてした考察と一致する。

11 次元 M 理論において k 枚 M5-brane が並行に存在している系を考えると、理論の moduli 空間は

$$\mathcal{M} = \frac{(\mathbf{R^5})^k}{S_k} \tag{20}$$

であり、特に作用 S_k での固定点 (fixed point) は k 枚が重なっているときに対応している。このことから k 枚重なった NS5-brane 上の理論は Moduli 空間の singular point 上にあり、interacting な 6 次元 (2,0) SCFT であると考えられる。

以前に述べたように、moduli 空間の generic point で理論に one-brane BPS 解が存在している。singular point ではその one-brane の tension は 0 である。このことから M5-brane 上に現れる理論は "tensionless string theory" と呼ばれる。この言葉は tensionless string を持つ理論と解釈されるべきで 6 次元 (2,0) SCFT は local field theory であることに注意しなければいけない。

この tensionless string の出現は、string theory の言葉で次のように理解される。2 枚の NS5-brane が距離 r 離れて存在しているときに 2 枚の M5-brane に端を持つ M2-brane は M5-brane 上では one-brane、つまり string として解釈され、その tension は距離 r と M2-brane の tension を使って、rT_{M2} のように書かれる。2 枚の M5-brane が近づくにつれ、M5-brane 上に現れる string の tension は小さくなり、一致すると 0 になる。つまり tensionless string が出現する。場の理論の言葉で言うと moduli 空間の singular point 近傍では scalar 期待値に比例した tension をもった string があるが、singular point ではその tension は消えるということになる。6 次元 (2,0) supersymmetry をもった場の理論は上のように M5-brane 上の理論として考えることができる。

4.2 typeIIB string theory における NS5-brane 上の理論

M5-brane 上の理論を考えたときと同じように、NS5-brane 上の理論がそれ自身閉じた理論であるための条件を考える。つまり bulk と相互作用しないためには重力結合定数 κ ($2\kappa^2 = (2\pi)^{1/2} g_s^2 l_s^8$) が 0 になるように次の極限をとることを考える

$$g_s \longrightarrow 0 \tag{21}$$

typeIIB 理論における NS5-brane 上の理論を考えるのに typeIIB 理論には S-duality があることを利用する。つまり IIB 理論においては

$$\text{D5-brane} \overset{\text{S}}{\Longleftrightarrow} \text{NS5-brane}$$

また、D5-brane と NS5-brane 上の理論は 6 次元であってさらに同じ supersymmetry (1,1) を持っている。さらに、両理論とも Low Energy では SYM として振る舞い、特に IR 極限で free であった。これらのことと S-duality とを考え合わせると、D5-brane 上の YM coupling に S-duality の処方をほどこすと NS5-brane 上の YM coupling が得られることがわかる。D5-brane 上の理論の YM coupling は $g_{D5}^{-2} = (2\pi)^3 g_s l_s^2$ であったから S-duality の処方

$$g_s \quad \longrightarrow \quad g_s' = 1/g_s \tag{22}$$

$$l_s \quad \longrightarrow \quad l_s' = l_s/\sqrt{g_s} \tag{23}$$

を使うと

$$\frac{1}{g_{NS5}^2} = \frac{1}{(2\pi)^3 g_s' l_s'^2} = \frac{g_s}{g_s l_s^2} = \frac{1}{l_s^2} \tag{24}$$

この YM coupling は極限 Eq. (21) をとっても constant のままであり、NS5-brane 上の理論に 1 つのパラメター l_s が存在していることになる。このことは重要である。M5-brane 上の理論にはこのようなパラメータは全く存在していなかった。

さて、YM coupling g_{NS5} を見ると、IIB NS5-brane 上の理論の SYM としての記述は Energy Scale $\sim 1/l_s$ で破綻する。この energy scale で新しい dynamics が出現する必要がある。ここまででわかっている新しい dynamics の特徴は low energy で SYM として振舞うということだけである。

ここで次の提案をする、$g_s \longrightarrow 0$ として定義された IIB NS5-brane 上の理論を "Little String Theory (LST)" と呼ぶ。この LST の low energy effective theory は (1,1) SYM 理論である。

この新しい理論、つまり LST について得られる情報はいまのところ low energy での理論の振る舞いからだけである。LEET としての 6 次元 SYM には one-brane BPS 解があり、その tension は $1/g_s^2 = 1/l_s^2$ で与えられる。low energy で存在する BPS 解は energy scale が上がっても存在し続ける。また、その tension に現れているパラメータ l_s は理論に唯一存在する fundamental scale とみなされる。

これらのことから Little String という名前の由来がわかる。LST は tension が fundamental scale であらわされる、one-brane (string) を fundamental な自由度として持つ、6 次元の重力を含まない string theory であるとの期待からこのような名前がつけられている。ここでの LST は存在している supersymmetry にちなんで (1,1) string theory と呼ばれたり iia string theory と呼ばれたりする。

4.3 typeIIA String Theory における NS5-brane 上の理論

IIA 理論には IIB 理論におけるような S-duality は存在していない。しかし IIA 理論は M 理論を S^1 コンパクト化してえられることを使うと IIB 理論の場合と同じように NS5-brane 上の理論について議論することができる。IIA 理論における NS5-brane は、M 理論でコンパクト化する S^1 方向に巻きついていない M5-brane から得られる。そこで M5-brane 上の理論から出発することを考える。

M5-brane 上の理論を定義するのに bulk との相互作用を消すために極限 Eq. (19) ($l_p \longrightarrow 0$) をとった。IIA 理論を議論する際にはもう 1 つのパラメータであるコンパクト化の半径 R_{10} が導入されている。そこでここでは次の極限で定義された IIA NS5-brane 上の理論を考える。

$$l_p \longrightarrow 0, \quad R_{10} \longrightarrow 0, \quad \frac{R_{10}}{l_p^3} = \text{fixed} \tag{25}$$

ここでまた理論に固有のパラメータが存在していることに注意するべきである。

上の極限は M 理論の変数を用いて表されているので、IIA 理論の変数で書き換えておくのが便利である。

$$g_s \longrightarrow 0, \quad l_s = \text{fixed} \tag{26}$$

IIA 理論においてもこの極限では bulk との相互作用がないことは重力結合定数 κ との関係 ($2\kappa^2 = (2\pi)^7 g_s^2 l_s^8$) からわかる。

M5-brane が k 枚ある理論の moduli 空間は、M 理論を S^1 コンパクト化して NS5-brane が k 枚ある系の moduli 空間に移るとき次のように変更される。

$$\mathcal{M}_{M5} = \frac{(\mathbf{R^5})^k}{S_k} \Longrightarrow \mathcal{M}_{NS5} = \frac{(\mathbf{R^4} \times \mathbf{S^1})^k}{S_k} \tag{27}$$

ここで S^1 はコンパクト化に関係して出てくる。k 枚の NS5-brane が重なっている場合に、NS5-brane 上の理論は moduli 空間の singular point 上の理論である。したがって、本質的に low energy effective theory は M5-brane を考察したときと同じで、interacting 6 次元 (2,0) SCFT であることがわかる。

M5-brane 上の理論と NS5-brane 上の理論との違いを見るために moduli 空間に出てきた S^1 の半径 P を考察しておく、というのも S^1 の半径は IIB 理論における Yang-Mills coupling に対応するもので、new dynamics の出現を示唆するものと考えられるためである。S^1 の半径は明らかにコンパクト化の半径 R_{10} に比例しており、次元を持った残りのパラメータは l_p だけなので次元解析から

$$P = R_{10}\frac{1}{l_p^3}$$

6 次元 (2,0) 理論では Eq. (12) より scalar の mass dimension は 2 であったことをここで指摘しておく。10 次元の変数では

$$P = \frac{1}{l_s^2}$$

というように期待通りの値になる。つまり極限 Eq. (26) をとったときにも constant のままである。さらに、このことは energy scale $\sim 1/l_s$ で new dynamics が出現することを意味している。

IIB 理論における場合と同様に次の提案をする。$g_s \longrightarrow 0, \quad l_s = \text{fixed}$ として定義された IIA NS5-brane 上の理論を "Little String Theory (LST)" と呼ぶ。この LST の low energy effective theory は (2,0) SCFT である。

IIA 理論の LST においても、IIB 理論の LST の場合のように low energy での理論の振る舞いから fundamental object の候補となるようなものを見つけることはできるであろうか？実は同じように IIA 理論の LST にも、fundamental な自由度とみなせる one-brane が存在している。それを見るのに M 理論で M2-brane が M5-brane 上に端を持っているような状態を考えよう。しかし今度は M2-brane はコンパクト化する S^1 方向に巻きついているとする。このとき M5-brane 上で string のように見える M2-brane の端は次の string tension を持っていると思うことができる。

$$2\pi R_{10} \times T_{M2} = 2\pi g_s l_s \times \frac{1}{4\pi^2 l_s^3 g_s} = \frac{1}{2\pi l_s^2} \tag{28}$$

この状態で極限 Eq. (26) をとると、M5-brane 上に現われていた string は、IIA 理論の NS5-brane 上でも string のままであり、その tension は fundamental scale l_s で表されている。

このことから、Little String Theory は string を fundamental な自由度として持つ、重力を含んでいない 6 次元の string theory だと期待される。ここでの LST は存在している supersymmetry にちなんで (2,0) string theory や iib string theory と呼ばれたりする。

4.4 Little String Theory

以上のことをまとめておく Little String Theory は k 枚重なった NS5-brane 上の理論で decoupling limit $g_s \longrightarrow 0, \quad l_s = \text{fixed}$ をとったものであり、存在している supersymmetry により 2 種類存在する。

IIA 理論における k 枚重なった NS5-brane 上の理論として現われる LST は

- 6 次元の理論で bulk、特に重力と相互作用しない。
- ただ 1 つの fundamental scale l_s がある。
- (2,0) supersymmetry をもっている。
- IR 極限で interacting な (2,0)SCFT である。

IIB 理論における k 枚重なった NS5-brane 上の理論として現われる LST は

- 6 次元の理論で bulk、特に重力と相互作用しない。
- ただ 1 つの fundamental scale l_s がある。
- (1,1) supersymmetry をもっている。
- IR 極限で free な SYM 理論である。

4.5 String theory としての Little String Theory

ここまでで明らかに 10 次元の string theory と LST には類似性があることがわかる。この類似性は T-duality のもとでの理論の振る舞いを調べることでさらに明らかになる。

はじめに 10 次元の typeIIB 理論において NS5-brane が半径 R の S^1 に巻き付いている系を考え、S^1 方向に T-dual をとると

$$\text{IIB NS5-brane} \overset{\text{T}}{\longleftrightarrow} \text{IIA NS5-brane}$$

この関係は NS5-brane 上の理論として定義される LST に対しては

$$(1,1) \text{ string theory} \overset{\text{T}}{\longleftrightarrow} (2,0) \text{ string theory}$$

となり、LST もまた string theory と同じように T-duality のもとで振舞うことがわかる。この性質はまた LST は定まった energy-momentum tensor を持たず、non-local field theory であることを意味している。

5 Holography

NS5-brane 上には LST が存在していることがわかった。non-local field theory である LST を解析する手法は [5] において提案された。この手法は、重力のある理論と、より次元の低い重力の無い理論の間の duality –holography– を用いるもので、Maldacena による AdS/CFT 対応を一般化したものである。そのため、この section では AdS/CFT 対応の場合と同様に議論が進められる。[3, 11]

この section では、IIA、IIB 理論において、NS5-brane の supergravity 解を調べ、どの background 上の string theory が LST と dual であるかを決定する。最後に、この LST の holographic description を用いて LST を解析することを提案する。

5.1 IIA and M Theory 5-Brane Geometry

N 枚の M5-brane が重なった 11 次元 supergravity 解は harmonic function H を用いると次のように書かれる。

$$ds^2 = H^{-1/3}[dx_{(6)}^2 + H(dx_{11}^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_3^2)] \tag{29}$$

$$H = 1 + \tfrac{\pi N l_p^3}{(r^2+x_{11}^2)^{3/2}} \tag{30}$$

ただし、M5-brane は $x_0 \sim x_5$ 方向に広がっていて、$dx_{(6)}^2 = -dx_0^2 + \cdots + dx_5^2$ とした。$x_6 \sim x_9$ 方向についてはは $r^2 = x_6^2 + \cdots + x_9^2$、$d\Omega_3^2$ は 3 次元 unit sphere 上の metric で $dx_6^2 + \cdots + dx_9^2 = dr^2 + d\Omega_3^2$ とした。さらに、x_{11} は 10 方向を表す。

near horizon limit では H の第一項目の constant は無視できて

$$H = \frac{\pi N l_p^3}{(r^2 + x_{11}^2)^{3/2}} \tag{31}$$

となる。

これらは 11 次元 supergravity の解であるから、10 次元へいくために 1 つの方向 x_{11} について、半径 R_{10} の S^1 でコンパクト化することを考える。これは関数 H を次のように書き換えればよい。

$$H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi N l_p^3}{[r^2 + (x_{11} - 2\pi n R_{10})^2]^{3/2}} \tag{32}$$

これは 5-brane を x_{11} 方向に等間隔に置くことで、S^1 コンパクト化の周期性を表現している。

さて、前の章までで議論されているようにここでは極限

$$l_p \longrightarrow 0, \quad R_{10} \longrightarrow 0, \quad \frac{R_{10}}{l_p^3} = \frac{1}{l_s^2} = \text{fixed} \tag{33}$$

を実行したい。その極限での physical な変数としては

$$U = \frac{r}{l_p^3}, \quad y_{11} = \frac{x_{11}}{l_p^3} \tag{34}$$

を採用する。これは 2 枚の M5-brane 上に端を持つ M2-brane を M5-brane 上の理論の string とみなしたときの tension ($T_{M2} \times r$) が極限 Eq. (33) をとったときに constant のままであるような変数への scale 変換である。

これらの physical な変数で書かれた関数 H は

$$H = \frac{1}{l_p^6} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi N}{[U^2 + (y_{11} - 2\pi n \frac{R_{10}}{l_p^3})^2]^{3/2}} = \frac{1}{l_p^6} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi N}{[U^2 + (y_{11} - 2\pi n \frac{1}{l_s^2})^2]^{3/2}} \tag{35}$$

この式を見ると Eq. (30) において何故 near horizon limit だけを考えればよかったかがわかる。この部分は $l_p \longrightarrow 0$ をとると大きくなって Eq. (30) の constant 部分を考慮する必要はなくなってしまう。

次にこれまでのことから metric Eq. (29) を次のように書きなおすことができる。

$$ds^2 = l_p^2 \widetilde{H}^{-1/3} [dx_{(6)}^2 + \widetilde{H}(dy_{11}^2 + dU^2 + U^2 d\Omega_3^2)] \tag{36}$$

ここで $\widetilde{H} = H l_p^6$ である。metric 全体に l_p^2 がかかっているが、これは全ての物理量の計算結果には現れないので式自体の意味を損ねるものではない。

ここで、次の 2 つの場合には H は簡単になり、metric を具体的に書くことができる。

- $U, y_{11} \ll 1/l_s^2$
- $U, y_{11} \gg 1/l_s^2$

$U, y_{11} \ll 1/l_s^2$ の場合

$U, y_{11} \ll 1/l_s^2$ に対しては H の表式 Eq. (35) に現れる無限和の中で $n = 0$ の効果だけを考えれば良い。よって

$$\widetilde{H} \simeq \frac{N}{r'^3}, \quad r'^2 \equiv U^2 + y_{11}^2 \tag{37}$$

この近似のもとでの metric を書くと

$$ds^2 = l_p^2 \frac{r'}{(\pi N)^{1/3}} [dx_{(6)}^2 + \frac{\pi N}{r'^3}(dr'^2 + r'^2 d\Omega_4^2)] \tag{38}$$

この metric は $r' = r''^2$ と変数変換することで

$$ds^2 = l_p^2[\frac{r''^2}{(\pi N)^{1/3}}dx_{(6)}^2 + 4\frac{(\pi N)^{2/3}}{r''^2}dr''^2 + (\pi N)^{2/3}d\Omega_4^2] \tag{39}$$

この metric は $AdS_7 \times S^4$ を表している。それぞれの半径を R_{AdS}, R_S と書くと

$$R_{AdS} = 2R_S = 2l_p(\pi N)^{1/3} \tag{40}$$

この background 上の重力理論は Maldacena によって 6 次元 (2,0) SCFT に dual であることが指摘されている。

ここで $U, y_{11} \ll 1/l_s^2$ という条件は boundary 理論の low energy の様子を見ることに対応していることから、この結論は NS5-brane 上の理論の low energy での振る舞いが 6 次元 (2,0) SCFT であるという主張と合致している。次の subsection の終わりの図 1 に大まかな duality の様子がまとめられている。

$U, y_{11} \gg 1/l_s^2$ の場合

このとき、表式 Eq. (35)integer n についての和は積分に置き換えて近似することができる。

$$\begin{aligned}
\widetilde{H} &= \frac{l_s^2}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{l_s^2}\frac{\pi N}{[U^2 + (y_{11} - 2\pi n\frac{1}{l_s^2})^2]^{3/2}} && (41)\\
&= \frac{l_s^2 N}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dz\frac{1}{r'^2 + x^2} \\
&= \frac{l_s^2 N}{2}\cdot\frac{2}{r'^2} \sim \frac{Nl_s^2}{U^2} && (42)
\end{aligned}$$

ここで、考えている極限では $U \sim r'$, $\quad r'^2 \equiv U^2 + y_{11}^2$ とできることを使った。

この近似での metric をあらわに書くと、

$$\begin{aligned}
ds^2 &= l_p^2(\frac{Nl_s^2}{U^2})^{-1/3}[dx_{(6)}^2 + \frac{Nl_s^2}{U^2}(dy_{11}^2 + dU^2 + U^2 d\Omega_3^2)] \\
&= l_p^2\frac{U^{3/2}}{(Nl_s^2)^{1/3}}[dx_{(6)}^2 + \frac{Nl_s^2}{U^2}(dy_{11}^2 + dU^2) + Nl_s^2 d\Omega_3^2)] && (43)
\end{aligned}$$

この metric において dy_{11} の項をコンパクト化してしまったと思って無視する。そうすると、それは 11 次元 M5-brane のコンパクト化に対応し、10 次元 IIA 理論における NS5-brane を表している。特に $[\cdots]$ の部分は x_0 から x_5 方向に広がる NS5-brane を string metric で書いたものになっていることがわかる。

ここでは string metric では NS5-brane はある関数 $f(y)$ を使って

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + f(y)\delta_{mn}dy^m dy^n$$

と書かれるということを利用している。

さて、(43) は mass dimension 2 を持った U を使って書かれているので、通常の座標としては理論に唯一存在している scale l_s を使って $u = l_s^3 U$ を導入すると良い。新しい座標を使って string metric を書くと

$$ds^2_{\text{string}} = dx^2_{(6)} + \frac{N}{U^2 l_s^4}(du^2 + u^2 d\Omega_3^2) \tag{44}$$

となる。IIA 理論における effective string coupling constant $g_s(U)$ は

$$g_s^2(U) = \frac{N}{U^2 l_s^4} \tag{45}$$

であるので、IIA 理論としての記述は $g_s(U) \ll 1$ の領域においてのみ信用できることがわかる。例えば $1/l_s^2 \ll U \ll N/l_s^2$ のような領域は 11 次元 supergravity（M 理論) を用いるべきである。

さらに新しい変数 ϕ を

$$\exp[\frac{\phi}{N^{1/2} l_s}] = \frac{l_s^2}{N^{1/2}} U \tag{46}$$

によって導入すると、Eq (44)、Eq (45) を使って次の最終的な表式に到達する。

$$ds^2_{\text{string}} = dx^2_{(6)} + d\phi^2 + N l_s^2 d\Omega_3^2, \quad g_s^2(\phi) = exp[-2\frac{\phi}{N^{1/2} l_s}] \tag{47}$$

この background 上の重力理論 (string theory) に AdS/CFT 対応のように dual な場の理論があるであろうか？ これまでの議論から U は energy scale に対応しており $U \ll 1/l_s^2$ での background ($AdS_7 \times S^4$) 上の重力理論には 6 次元 (2,0) SCFT が対応していると信じられているのであった。$U \gg 1/l_s^2$ での background Eq. (47) 上の重力理論には 6 次元 (2,0) SCFT の UV 理論が対応していると考えるのが自然である。つまり、Little String Theory は background Eq. (47) 上の重力理論に dual であるように思える。(図 1 を参照。)

dual な理論が境界 ($\phi \to \infty$) 上にあるという AdS/CFT 対応での主張はここでは $g_s(\phi) \to 0$、つまり $g_s \to 0$ という decoupling limit で LST が存在するという主張と合致している。

上に書かれていることに関連して、ここで string coupling に関係した convention について述べておきたい。以後、string coupling を g_s と書き、effective string coupling を $g_s(\phi)$ のように依存する座標とともに書くことにする。特に effective という言葉をつけることはしない。g_s と $g_s(\phi)$ の関係は通常のように、

$$g_s(\phi) = e^{\Phi}\,,\, g_s = e^{\Phi_0}\,,\, g_s(\phi \to \infty) = g_s \tag{48}$$

である。したがって Eq. (47) のような liner dilaton $\Phi = -Q'\phi$ を考えるときには必然的に $g_s \to 0$ である。

5.2 IIB NS5-Brane Geometry

同じようにして IIB 理論での duality について議論することができる。NS5-brane metric は

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + (1 + \frac{N l_s^2}{r^2})\delta_{ij} dx^i dx^j & (49) \\ e^{2(\Phi - \Phi_0)} &= 1 + \frac{N l_s^2}{r^2} & (50) \end{aligned}$$

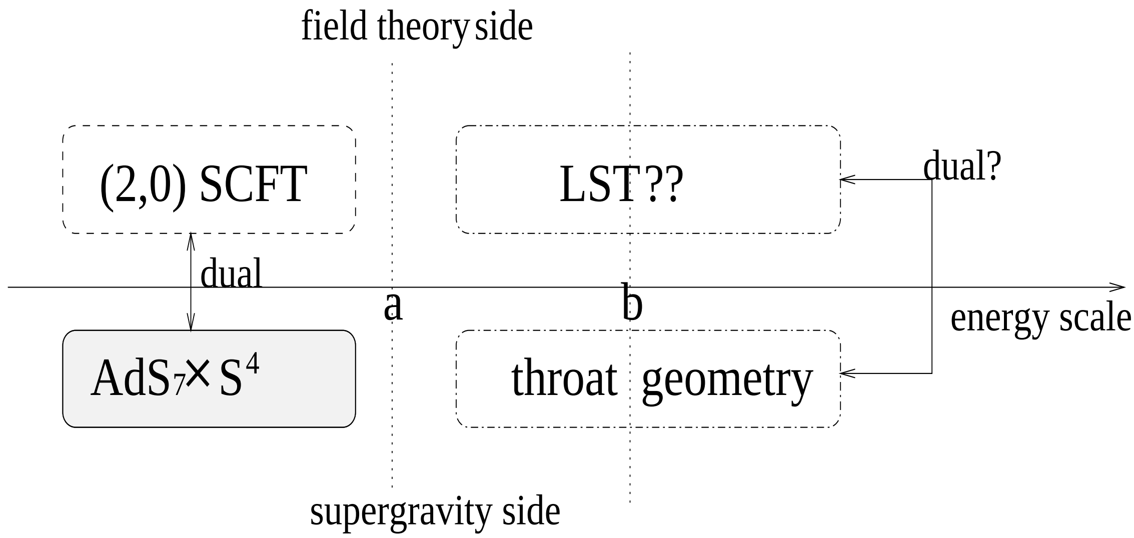

図 1: それぞれの energy scale での duality。上は場の理論としての記述で下は supergravity 側での記述。どちらの描像が良いかわかっているときには、良い記述のほうが塗りつぶされている。$a = \frac{1}{l_s}, b = \frac{N^{\frac{1}{4}}}{l_s}$

と書かれる。IIA 理論におけるように極限

$$g_s \longrightarrow 0, \quad l_s = \text{fixed} \tag{51}$$

をとることを考える。そのときの physical な座標として今度は 2 枚の平行な NS5-brane 上に端をもつ D1-brane を考える。D1-brane は NS5-brane 上の理論では粒子とみなすことができる。その質量が極限 Eq. (51) をとったときに constant であるように physical な座標をとる。具体的には $T_{D1} \times r = r/(2\pi l_s^2 g_s)$ が constant であることを要求するので、新しい座標 U を

$$U = \frac{r}{g_s l_s^2}$$

のように導入する。座標 U をもちいて NS5-brane metric を書きなおすと

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + (1 + \frac{N}{g_s^2 l_s^2 U^2})\delta_{ij} dx^i dx^j \tag{52}$$

$$e^{2(\Phi - \Phi_0)} = 1 + \frac{N}{g_s^2 l_s^2 U^2} \tag{53}$$

極限 Eq (51) をとることを考えると、上の式は near horizon limit で近似される。また、$g_s = e^{\Phi_0}$ を使うと

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + N l_s^2 \frac{dU^2}{U^2} + N l_s^2 d\Omega_3^2 \tag{54}$$

$$e^\Phi = g_s(U) = \frac{N^{1/2}}{l_s U} \tag{55}$$

$g_s(U)$ は effective string coupling constant である。ここで IIA 理論におけるように次の変数変換

$$\exp[\frac{\phi}{N^{1/2} l_s}] = \frac{l_s}{N^{1/2}} U \tag{56}$$

をすると
$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + d\phi^2 + Nl_s^2 d\Omega_3^2, \quad g_s^2(\phi) = \exp[-2\frac{\phi}{N^{1/2}l_s}] \tag{57}$$
この式は、IIA 理論において出てきた Eq (47) と全く同じ式である。この表現が有用なのは string coupling $g_s(U)$ が小さく、曲率が string unit l_s に比べ大きいときである。それぞれは
$$g_s^2 = \frac{N}{U^2 l_s^2} \ll 1, \quad N \gg 1 \tag{58}$$
であることを意味する。

Uが小さくなるにつれ、理論はどのように変わっていくか考えてみる。U をだんだん小さくしていったときに Eq (58) のはじめの式は $g_s(U) \sim 1$ になったとき満足されなくなる。しかし、この時まだ supergravity 側の条件 ($N \gg 1$) は満たされている。したがって、S-dual をとることで string coupling を小さくすると、string theory での条件と supergravity での条件をともに満足する系に移ることができる。N 枚の NS5-brane の系は S-dual をとると、N 枚の D5-brane の系になる。よって NS5-brane 上の理論は D5-brane 上の理論へと $g_s(U) \sim 1$ で移行する。

N 枚の D5-brane 解は near horizon limit で
$$\begin{aligned} ds^2 &= (\frac{N\widetilde{l}_s^2\widetilde{g}_s}{r^2})^{-1/2}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + (\frac{N\widetilde{l}_s^2\widetilde{g}_s}{r^2})^{1/2}\delta_{ij}dx^i dx^j & (59)\\ e^{-2(\Phi-\Phi_0)} &= \frac{N\widetilde{l}_s^2\widetilde{g}_s}{r^2} & (60)\end{aligned}$$
$\widetilde{l}_s^2$, $\widetilde{g}_s$ については Eq (22)、Eq (23) にあるようにもとの変数に S-duality の処方を施したものである。

effective string coupling は S-dual する前の変数で書くと
$$\widetilde{g}_s^2(\phi) = \frac{1}{g_s^2(\phi)} = \frac{U^2 l_s^2}{N} \tag{61}$$
こうすると、U が小さくなっていっても string coupling は小さいままである。

さらにUを小さくしていき、supergravityの条件が破られるときを考える。今度はEq. (58) の supergravity に対する条件は metric Eq (59) で作られなければいけない。Eq (59) の曲率はだいたい $(\sqrt{N}\widetilde{l}_s\widetilde{g}_s^{1/2}r)^{-1/2}$ であるから、
$$\sqrt{N}\widetilde{l}_s\widetilde{g}_s^{1/2}r \sim l_s^2 \tag{62}$$
U、l_s を使って書き換えると
$$\sqrt{N}l_s U \sim 1 \tag{63}$$
この scale において supergravity による記述は破綻する。

このことは supergravity による記述ではなく D5-brane 上の理論 (SYM) に移行するべきことを示している。D5-brane 上の YM coupling は
$$\begin{aligned} g_{YM}^2 &= (2\pi)^3\widetilde{l}_s^2\widetilde{g}_s \\ &= (2\pi)^3 l_s^2 \end{aligned}$$

であるので、N 枚の D5-brane 上の理論の effective dimensionless coupling は

$$g_{effective}^2 = g_{YM}^2 NU = Nl_s^2 U \tag{64}$$

であり、D5-brane 上の SYM 理論としての記述が信頼できるためには $g_{effective} \ll 1$ が必要。この条件は Eq (63) そのものである。

それぞれの理論の scale U に対する理論の様子は次のようにまとめられる。

- $U^2 l_s^2 \gg N \gg 1$; LST??

- $N \gg U^2 l_s^2 \gg \frac{1}{N}$; supergravity 側での記述が良い

- $\frac{1}{N} \gg U^2 l_s^2$; SYM 理論による記述が良い

このように IIB NS5-brane 上の理論に対しても IIA NS5-brane 上の理論に対して述べられたことがほとんどそのまま当てはまる。low energy では 6 次元 (1,1) SYM である理論は、energy scale が上がるにつれ様子を変える。6 次元 (1,1)SYM 理論を low energy の effective theory として持つ LST は Eq (57) のような background 上の重力理論 (string theory) と dual であるという conjecture がここでも成立する。(図 2 参照)

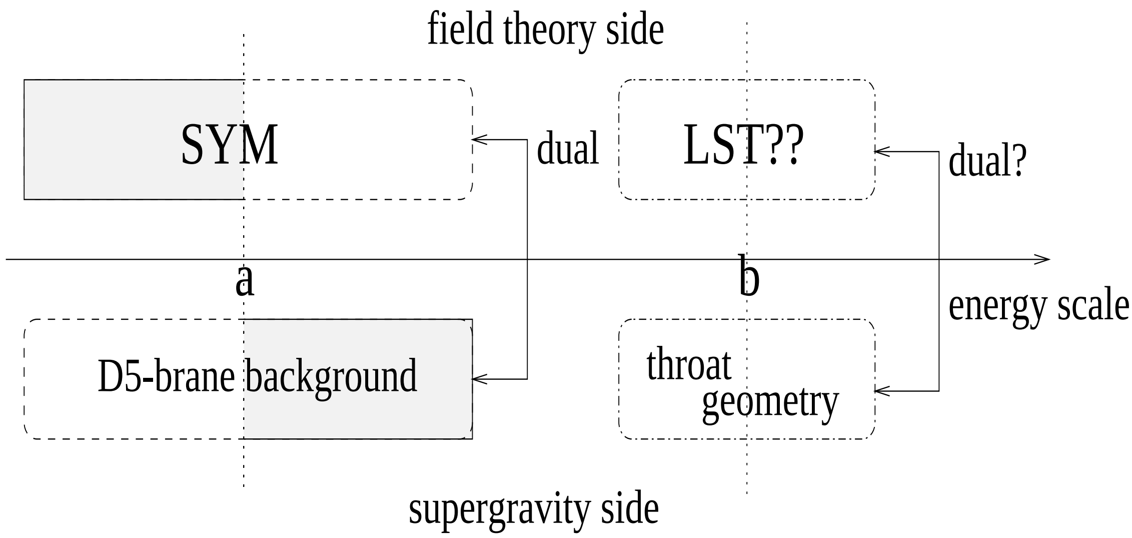

図 2: それぞれの energy scale での duality。上は場の理論としての記述で下は supergravity 側での記述。どちらの描像が良いかわかっているときには、良い記述のほうが塗りつぶされている。$a = \frac{1}{\sqrt{N} l_s}, b = \frac{\sqrt{N}}{l_s}$

5.3 Holography

ここで、この section で述べられてきた duality についてまとめておく。

Eq (47) のような background 上の string theory は Little String Theory に dualである、という主張が主な内容であった。

さらに具体的には、漸近的に

$$ds^2 = dx_{(6)}^2 + d\phi^2 + ds^2(S^3) \tag{65}$$

$$g_s^2(\phi) = e^{-Q\phi}, \quad Q > 0 \tag{66}$$

（ここで x は $\mathrm{R}^{5,1}$ の座標、$ds^2(S^3)$ は S^3 の metric で x や ϕ とは独立。）になるような時空上の string theory は重力を含まない境界上 ($\phi \longrightarrow \infty$) の理論に dualであると主張された。

この主張は重力を含む理論 (string theory) と、より次元の低い重力を含まない理論 (Little String Theory) の間の duality を主張するものである。このような duality は holography の考えに沿うもので、holographic duality といわれる。AdS/CFT 対応も holography の考えを実現するものであるが AdS/CFT 対応と今の場合の duality の大きな違いは、重力を含まない理論が non-local field theory であるという点である。

以上の点をふまえて、LST の holographic description は background Eq. (81) 上の string theory であるということができる。次からはこの holographic description を用いて、non-local field theory である LST を解析することを考える。

6 Generalization of Holographic Duality

前の section の最後に述べられた holographic duality は [6] によってさらに拡張された。ここでは、議論の方向性を明らかにするために最終的な結論だけを述べる。詳細な説明は以後の section においてなされる。

holographic duality の一般化にはまず、NS5-brane 上の decoupled ($g_s \to 0$) theory (LST) と、isolated singular point をもった CY で compact 化された string theory の decoupling limit ($g_s \to 0$) とは等価である [12]、という事実に注目する。そうすると、holographic duality は NS5-brane 上の理論と singular CY で compact 化された理論を置き換えて、次のように書き換えられる。

string theory on $R^{d-1,1} \times R_\phi \times \mathcal{N}$
$\|$ holographic dual
string theory on $R^{d-1,1} \times$ singular CY^n in $g_s \to 0$

ここで $\mathcal{N}$ は compact manifold を表し、$d + 2n = 10$ である。それぞれの詳しい定義については以後の section において説明する。このように duality を書き換えることは、実は duality の一般化に相当している。

ここで d は任意であることをまず注意しておきたい。実際に考察の対象になるのは、string theory において時空が 10 次元であることや、CY は実偶数次元であることを考えて d=2、4、6 となる。d を任意にするような一般化は trivial な一般化である。というのも、NS5-brane 上の理論に対して d を任意にするという一般化を適用することも可能であった。

ここでなされた一般化の重要な点は singular CY が含まれているという点である。この論文では十分に説明することはできないが、CY singularity にはいくつかの type が存在している。NS5-brane をただ単に並べることにより生じる singularity は A-type として知られるものだけである。しかし、holographic duality を上のように一般化することで様々

な type の singularity を持った CY に対応している理論について duality を議論できるようになる。つまり、NS5-brane 上の理論として実現される以外の理論にも成り立っている holographic duality について考察をすることができる。

この duality を使うと singular CY で compact 化された理論や non-trivial な場の理論を従来の string theory を使って解析することが可能になる。

続く 4 つの section では、dual な 2 つの理論の正確な定義、上にあげた duality の詳細、duality の check などについて議論する。

7 String Theory on $R^{d-1,1} \times \bar{X}^{2n}$

ここでは duality の片側である、$R^{d-1,1} \times \bar{X}^{2n}$ 上の string theory について考察する。ここで $\bar{X}^{2n}$ は compact CY n-fold を表すものとする。

$\bar{X}^{2n}$ が smooth であるときには、$R^{d-1,1}$ 上に現われる理論は $g_s \to 0$ とした極限においても、non-trivial な物理は現われそうにない、特に、今考察したい非局所理論は現われそうにない。

対して $\bar{X}^{2n}$ が isolated singular point を持つときは singular point 近傍に localize した mode により non-trivial な物理が現われることが期待される。例えば、orbifold point の近傍には twisted sector が現われたことを指摘しておく。

そこで singular CY を考察することを考えるが、compact な singular CY ($\bar{X}$) を取り扱うのは一般に困難である。ここでは、良くされるようにある近似を使う。注目したいのは non-trivial な結果が得られることを期待している、singular point 近傍だけなので、non-compact singular CY (X) を導入し、compact CY ($\bar{X}$) の singular point 近傍を近似することを考える。そのとき、$\bar{X}$ を X で置き換えて議論しても得られる結果は変わらない。

singular CY で compact 化された理論の詳細は知られていないが、$\bar{X}^{2n}$ の singular point 近傍が、

$$F(z_1, \cdots, z_{n+1}) = 0, \quad \text{in} \quad C^{n+1} \tag{67}$$

という代数多様体で置き換えられ、定義式 $F(z)$ に対しては

$$F(z_i) \to \lambda F(z_i) \quad \text{under} \quad z_i \to \lambda^{r_i} z_i \tag{68}$$

($r_i > 0$) が成り立つときには、いくつかの議論が存在している。ここで singular point は原点、$z_a = 0$ である。$|\lambda| = 1$ とした Eq (68) の変換性から系は $U(1)$ 対称性を持っていることがわかる。その対称性に対して F や z_i はそれぞれ U(1) charge 1、r_i を持っている。

CY^n は constant holomorphic n-form Ω をもつ。今の場合には

$$\Omega = \frac{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}{\partial F / \partial z_{n+1}}, \quad \Omega_{i_1, \cdots, i_n} = \eta^T \Gamma_{i_1, \cdots, i_n} \eta \tag{69}$$

である。η は covariant constant spinor と呼ばれるもので、X 上で constant な spinor である。このことは、η を X で compact 化したときに破れずに残る supercharge とみなすことができることを意味する。Ω は上で述べた U(1) charge $r_\Omega = \sum_{i=1}^{i=n+1} r_i - 1$ を持っており、Eq. (69) から η はその半分を持っていることがわかる。また moduli 空間に対する物理的な要請により、$r_\Omega > 0$ が課されるので、この U(1) 対称性は系の global な対称性であり、

系の $U_R(1)$ 対称性とみなすことができる。[13] この対称性を space-time R 対称性、その charge を space-time R charge と呼ぶことにする。

space-time supercharge の数を数えておく。covariant constant spinor である η は supercharge とみなされるが、d 次元での spinor の real な成分は $2^{d/2+1}$ 個で Weyl 条件により 1 つの spinor による supercharge の成分は $2^{d/2}$ 個である。今の場合は left-moving 部分から生じるものと、right-moving 部分から生じるものがあるので合計は

$$\text{space-time supercharge の数} \ ; \ 2^{\frac{d}{2}+1} \ \text{個}$$

となる。

7.1 (complex structure) deformation of CY

この subsection では、singular CY の complex deformation について考察する。このような deformation をしても CY conditon は守られたままである。CY の complex deformation に使用される項は、CY sigma-model を N=2 SCFT と考えたときの marginal operator や (c,c) ring に対応しており、worldsheet で N=2 supersymmetry を壊さない。そのため、CY の complex deformation を考察することは、"space-time" に存在している chiral superfield の top component を考察することに対応している。(section 9.2 の議論を参照。)

今、singular CY^n が C^{n+1} の中に定義式 $F(z)=0$ として定義されているとする。$A(z_j)$ を z_i の多項式であるとして、その $A(z_j)$ で定義式を次のように deform することを考える。

$$F(z_i)=0 \Longrightarrow F(z_i)+tA(z_i)=0 \tag{70}$$

ここで、t は complex parameter である。大雑把に言えば、この操作により定義式の形が変化していることから、CY の complex structure が変形されたことに対応しているのであった。

$z_i \to \lambda^{r_i} z_i$ のもとで $F \to \lambda F$ という F の変換性は well-defined な space-time R charge を持つためにも必要であった。F の deformation term tA に対しては

$$A \to \lambda^{r_a} A, \quad t \to \lambda^{1-r_a} \tag{71}$$

ということが要求される。初めの式の r_a は $A(z)$ が z_i の多項式であることから、$A(z)$ の形が決まれば z_i の変換性から決まってしまう。

もともとの定義式 $F=0$ で表される（多様体上の sigma-model の）理論の space-time Lagrangian (density) を $\mathcal{L}$ と書き、定義式 $F+tA=0$ で表される理論の space-time Lagrangian を $\mathcal{L}+\Delta\mathcal{L}$ と書くことにする。さらに deformation (chiral ring) $A(z)$ に対応している space-time operator を $\tilde{A}$ と書くと、（数因子までで）

$$\Delta\mathcal{L}=t\tilde{A} \tag{72}$$

となることがわかる。これは、space-time Lagrangian $\mathcal{L}$ の変形は明らかに deformation の大きさ t に線形に依存していることからすぐわかる。。さらに $A(z)$ は complex deformation であるということより、$\tilde{A}$ は Lagrangian に加えて supersymmetry を破らないような operator であるので space-time chiral superfield の top compnent である。(ここでは、$\tilde{A}$ が F-term であるということを意味している。) chiral superfield と anti-chiral superfield は complex conjugation で写り合うので、どちらを chiral と呼ぶかは convention である。ここでは上のようにしておく。

当然、space-time Lagrangian $\mathcal{L}+\Delta\mathcal{L}$ は R 対称性に関して neutral でなければいけない。以上のことから space-time chiral superfield の top component operator $\tilde{A}$ の space-time R charge は

$$\frac{2}{r_\Omega}(r_a-1) \tag{73}$$

となる。ここで space-time supercharge の space-time R charge が (±1) であるように $2/r_\Omega$ で normalize している。(Eq. (69) の下の議論を参照。)

上のような complex deformation に対応する operator $A(z)$ は存在するであろうか？実は A が complex deformation ($(n-1,1)$-form) として存在するためには、

$$r_a+r_\Omega-1>0 \tag{74}$$

が成立していなければいけないことが知られている。[13] $r_i>0$ から $r_a>0$ であるので、この不等式は $r_\Omega>1$ のとき常に満足される。$r_\Omega<1$ のときにはこの不等式を満足しないような、complex deformation に対応していない変形がある。

8 Dual theory

まだ、片側の理論についてしか述べていないが、上の理論に dual な理論を考えることができる。

具体的にいうと、ここでは

$R^{d-1,1}\times X^{2n}$ 上の string theory で $g_s\to0$ とした理論

に dual な理論を考える。ここで X^{2n} は C^{n+1} の中の定義式 $F(z_i)=0$ で表される CY であり、$F(z)$ は

$$F(z_i)\to\lambda F(z_i),\quad \text{under}\quad z_i\to\lambda^{r_i}z_i \tag{75}$$

$(\lambda\in C)$ を満たしている。

もとめる dual な理論は

$$R^{d-1,1}\times R_\phi\times\mathcal{N},\quad g_s(\phi)=\exp[-\frac{Q}{2}\phi] \tag{76}$$

という background 上の string theory であると仮定しよう。ここでは $\mathcal{N}$ がどのような多様体であるか推察する。決定された duality の check は section 10 でなされる。

初めに、X^{2n} の R_+ 対称性を固定する。つまり、Eq. (75) より $F(z)=0$ は $z_i\to|\lambda|^{r_i}z_i$ という変換のもとでも不変である。そこで、商空間多様体 X^{2n}/R_+ を考える。これは singular point からの距離が一定の manifold を表している。ここで

$$\mathcal{N}\cong X^{2n}/R_+ \tag{77}$$

と定義しておくと非常に都合が良いことがわかる。そのひとつの例として R_+ 対称性を固定した後にもまだ残っている Eq. (75) の対称性に注目する。つまり、$F(z)$ はまだ $z\to$

λz, $|\lambda| = 1$ という $U(1)$ 対称性のもとで不変である。この $U(1)$ 対称性でさらに Eq. (77) を割ることを考えると、Eq. (77) は

$$\mathcal{N}/U(1) \cong X^{2n}/C \tag{78}$$

となる。言い換えると、これは

$$\mathcal{N}/U(1) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} F(z_i) = 0 \text{ in WCP}^n(k_1, \cdots, k_{n+1}) \ ; \ \tfrac{k_i}{r_i} = d \ ; \ k_i, d;\text{integer}$$

としたことに相当する。ここで k_i は共通因子を持たず、$\frac{k_i}{r_i} = d$ (k_i, d;integer) である。上の式の右辺は (smooth) CY^{n-1} であり、さらに CY^{n-1} 上の sigma-model はその定義式 $F(z)$ を superpotential W としてもつ、LG 理論 ($W = F(z)$) と解釈できる。

まとめると、$R^{d-1,1} \times X^{2n}$ 上の string theory で $g_s \to 0$ とした理論と dual な理論は次の background 上の string theory である。

$$R^{d-1,1} \times R_\phi \times U(1) \times \mathcal{N}/U(1), \quad g_s(\phi) = \exp[-\frac{Q}{2}\phi] \tag{79}$$

さらに $\mathcal{N}/U(1)$ の部分は LG model で置き換えられる。

$$R^{d-1,1} \times R_\phi \times U(1) \times LG(W = F(z)), \quad g_s(\phi) = \exp[-\frac{Q}{2}\phi] \tag{80}$$

実は、この $R^{d-1,1} \times R_\phi \times U(1) \times$(N=2 SCFT) という background 上の string theory の記述は non-critical superstring theory として知られた理論である。[14, 6] 次の section では non-critical superstring theory を概観する。

9 Non-critical Superstring Theory

少しの間、前までの議論を忘れて、ここでは

$$R^{d-1,1} \times R_\phi \times \mathcal{N} \tag{81}$$

という background 上の string theory を考える。ただし、R_ϕ は dilaton Φ と

$$\Phi = -\frac{Q}{2}\phi \tag{82}$$

というように関係しているとする。

この background の特徴は Linear dilaton が存在しているということである。(やや詳しい取り扱いについては Appendix を参照。) はじめ worldsheet に supersymmetry がない場合を考える。ϕ 方向についての CFT を考えると、holomorphic (left-moving) 部分の energy-momentum tensor (EM tensor) は

$$T = -\frac{1}{2}[(\partial\phi)^2 + Q\partial^2\phi] \tag{83}$$

(right-moving part も同様) となり、central charge $c_\phi = 1+3Q^2$ である。ただし $d+2n = 10$。

次に worldsheet 上に supersymmetry が 1 つあるときには上の bosonic な場に加えて real fermion ψ が加えられる。すると left-moving の EM tensor T と supercurrent T_F は

$$T = -\frac{1}{2}[(\partial\phi)^2 + Q\partial^2\phi] + \frac{1}{2}\psi\partial\psi \tag{84}$$

$$T_F = -\frac{1}{2}(\psi\partial\phi + Q\partial\psi) \tag{85}$$

(right-moving part も同様) このとき central charge は $c_{N=1} = 1 + 3Q^2 + 1/2 = 3/2 + 3Q^2$ である。Eq. (81) という background 上の string theory 全体で central charge が消えるという要求により、$\mathcal{N}$ 部分の SCFT の central charge $c_{\mathcal{N}}$ は

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{N}} &= 15 - \frac{3}{2} \times d - (\frac{3}{2} + 3Q^2) \\ &= 3(n - \frac{1}{2} - Q^2) \end{aligned} \tag{86}$$

というように表現される。

以後、本文では left-right symmetric な場合のみを考察する。そこで特に断らなければ考えているのは left-moving part である。right-moving part にも同様の式が成り立ち、$z \to \bar{z}$ のように、出てくる変数や場に "$\bar{\ }$" をつけることで left-moving part に対して述べられたほとんど全ての結果はそのまま right-moving part にも適用できる。

さらに worldsheet supersymmetry の数を増やすことを考える。space-time に supersymmetry が存在するためには worldsheet 上の理論は (global) N=2 supersymmetric でなければならない。したがって N=1 から N=2 SCFT に拡張することは superstring theory となるために必要である。しかし Eq. (81) のままでは、N=2 理論に拡張するのは難しい。それは N=2 理論の scalar になるためには real scalar が 2 つ必要なことを考えると、明らかに dilaton part は孤立してしまう。そこで Eq. (81) は次のように書き直すことができ、それぞれの part が以下のように解釈できると仮定する。

$$R^{d-1,1} \times (R_\phi \times U(1)) \times \mathcal{N}/U(1) \tag{87}$$

$R^{d-1,1}$	free N=2 SCFT	$c_f = 3d/2$
$R_\phi \times U(1)$	N=2 ($\mu = 0$) Liouville theory	$c_L = 3(1 + Q^2)$
$\mathcal{N}/U(1)$	N=2 SCFT	$c_{N/U(1)} = 3(n - 1 - Q^2)$

最後に書いたのは、それぞれの part の central charge である。この仮定を満たす background 上の string theory は space-time で supersymmetry を持つことが、次のように実際に supercharge を書くことによって示される。

worldsheet 上に N=2 supersymmetry があることを仮定しているので、worldsheet $U_R(1)$ charge を使って簡単に space-time supercharge は書くことができる。しかし、その前にいろいろな場を定義しておかなければいけない。

- $R^{d-1,1}$ part
  この部分は良く知られた free theory であり、ほとんど場の詳細については議論に利用しない。そこでここではこの部分の spin field を S_α と書くとだけ述べておく。

- $R_\phi \times U(1)$ part
  R_ϕ part は real scalar ϕ、real fermion ψ_ϕ と書き、U(1) part は real boson Y、real fermion ψ_Y と書く。それぞれは canonically normalized である。つまり OPE は

$$\phi(z)\cdot\phi(0) \sim -\ln z \quad , \qquad Y(z)\cdot Y(0) \sim -\ln z \tag{88}$$

$$\psi_\phi(z)\cdot\psi_\phi(0) \sim -\frac{1}{z} \quad , \qquad \psi_Y(z)\cdot\psi_Y(0) \sim -\frac{1}{z} \tag{89}$$

  である。2つの fermion を bosonize したものは worldsheet $U_R(1)$ current となる。つぎのように canonically normalized boson H を導入する。

$$\partial H = \psi_\phi \psi_Y \tag{90}$$

  Y は Eq. (87) の U(1) part を表しており、background space-time の global な対称性を表している。つまりこの U(1) part は space-time $U_R(1)$ 対称性（今後 worldsheet $U_R(1)$ 対称性と区別するために space-time R 対称性と呼ぶ。）と考えることができる。

- $\mathcal{N}/U(1)$ part
  この部分も同じく N=2 SCFT であるので worldsheet $U_R(1)$ current を持つ。この current を $J_R^{N/U(1)}$ と記すことにする。さらに convention にしがって

$$J_R^{N/U(1)}(z)J_R^{N/U(1)}(0) \sim \frac{1}{3}\frac{c_{N/U(1)}}{z^2} \tag{91}$$

  と normalize しておく。さらに新しい canonically normalized boson Z を

$$J_R^{N/U(1)} = i\sqrt{\frac{c_{N/U(1)}}{3}}\partial Z \equiv ia\partial Z \tag{92}$$

  で導入する。

ここで current 以外に導入した boson は全て canonically normalized である。fermion も全て $\psi(z)\psi(0) \sim -1/z$ に従う。
　そうすると supercharge は簡単に

$$Q_\alpha^+ = \oint dz e^{-\frac{\varphi_g}{2}} S_\alpha e^{\frac{i}{2}(H+QY)} e^{-\frac{i}{2}aZ} \tag{93}$$

と書ける。ここで、$R_\phi \times U(1)$ part の $U_R(1)$ current は improvement term を持っていたことを指摘しておく。また、φ_g と書いたのは superghost である。上の supercharge の complex conjugate は

$$Q_{\dot\alpha}^- = \oint dz e^{-\frac{\varphi_g}{2}} S_{\dot\alpha} e^{-\frac{i}{2}(H+QY)} e^{\frac{i}{2}aZ} \tag{94}$$

complex conjugate といっているのは関数空間に関することで left-moving と right-moving を入れ換えるものではないことに注意するべきである。
　ここで、Q の index(±) は space-time R charge の符号を表している。space-time R charge は operator

$$\oint dz i\partial Y + \oint d\bar{z} i\partial\bar{Y} \tag{95}$$

ではかることができる。space-time supercharge Eq. (93) 、Eq. (94) はそれぞれ space-time R charge、$(\frac{Q}{2}, -\frac{Q}{2})$ をもっている。space-time supercharge の R charge は ±1 に規格化し

ておくのが自然であるが、これから後、特に前置きが無ければこのような規格化はしないことにする。

これらの operator (Q^+, Q^-) は通常の BRS 不変な fermion vertex operator の特別な場合 (momentum vector = 0) にあたっており、fermion vertex operator がそうであるのと同様に BRS 不変といえる。また、どの 2 つの supercharge の OPE も branch cut を出さないことを要求する (GSO projection) と S_α に Weyl 条件が課される。

supercharge の数を数えておく。spin field (S_α) は $SO(d-1,1)$ の spinor であるので Q^+_α は real 成分で $2^{d/2+1}$ 個あるが GSO projection により Weyl 条件が課されることから全部で $2^{d/2+1}/2 = 2^{d/2}$ 個である。これは left-moving part から生じる supercharge を考えただけなので right-moving part からの寄与も考えると、結局全部で $2^{d/2+1}$ 個あることがわかる。$Q^-_{\dot\alpha}$ を考える必要が無いのは、それがただ Q^+_α の complex conjugate であるためである。

ここで、参考までに right-moving part の supercharge を書いておく。先ほど述べたように、出てくる変数や場に "$^-$" をつけることで right-moving part を得ることができるのであった。

$$\bar{Q}^+_\alpha = \oint d\bar{z} e^{-\frac{\bar{\varphi}_g}{2}} S_\alpha e^{\frac{i}{2}(\bar{H}+Q\bar{Y})} e^{-\frac{i}{2}a\bar{Z}} \tag{96}$$

さらにその complex conjugate は

$$\bar{Q}^-_{\dot\alpha} = \oint d\bar{z} e^{-\frac{\bar{\varphi}_g}{2}} S_{\dot\alpha} e^{-\frac{i}{2}(\bar{H}+Q\bar{Y})} e^{\frac{i}{2}a\bar{Z}} \tag{97}$$

となる。

このように構成された理論は non-critical superstring と呼ばれる。

9.1 non-critical superstring における operator

この subsection では、実際に後に重要となる non-critical superstring における operator を構成することを考える。

はじめに Eq. (81) の $\mathcal{N}$ part の primary field を考えよう。$\mathcal{N}$ は $\mathcal{N} \cong U(1) \times \mathcal{N}/U(1)$ という直積に書けることが仮定されている。したがって、$\mathcal{N}$ 上の primary field は 2 つの part の operator の積となる。$U(1)$ part が charge q を持った operator で書かれるとき、$\mathcal{N}$ 全体の operator は

$$e^{iqY} V \tag{98}$$

となる。ここで V は $\mathcal{N}/U(1)$ 上の N=2 SCFT の NS-sector にある primary operator で $U_R(1)$ charge Q_V を持っているとする。良く知られているように N=2 SCFT の NS-sector にある field については、weight と $U_R(1)$ charge の間に不等式が成り立つ。したがって、V の weight Δ_V と Q_V の間にも $\Delta_V \geq \frac{|Q_V|}{2}$ という関係がある。

様々な operator を書くことができるが、ここでは space-time で scalar であるような operator を $(-1,-1)$ picture で書き、その operator に課される on-shell 条件、GSO projection、Seiberg bound をまとめて書いておく。この operator は後々非常に重要になる。

$$e^{-\varphi_g - \bar{\varphi}_g} e^{ik\cdot x} e^{\beta\phi + iqY} V \tag{99}$$

on-shell 条件	$\frac{1}{2}\lvert k\rvert^2 + \frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}\beta(\beta+Q) + \Delta_V = \frac{1}{2}$
GSO projection	$Q_V - qQ = 2Z + 1$ ただし Z は整数を表す。
Seiberg bound	$\beta > -\frac{Q}{2}$

Seiberg bound から等号を抜かしているのは、そのような場合には vertex operator は Eq. (99) とは少し違った形になり、そのため今からする議論が適用できないためである。

さらに、operator Eq. (99) において、次の条件が満たされている特別な場合を考えよう。

$$k = 0\ ,\ V \text{ は chiral primary field } (\Delta_V = \tfrac{Q_V}{2})$$

そのときの operator を $\mathcal{A}'_V$ と書く。具体的には

$$\mathcal{A}'_V = e^{-\varphi_g - \bar{\varphi}_g} e^{\beta\phi + iqY} V \tag{100}$$

この operator に対して、on-shell 条件と GSO projection を次のようにして解く

$$\beta = q, \quad Q_V - qQ = 1 \tag{101}$$

このようにして、最終的に得られる operator $\mathcal{A}_V$ は

$$\mathcal{A}_V = e^{-\varphi_g - \bar{\varphi}_g} e^{q(\phi + iY)} V \tag{102}$$

である。

$\mathcal{A}_V$ についてまとめておくことにする。はじめに Seiberg bound は

$$Q_V + \frac{Q^2}{2} - 1 > 0 \tag{103}$$

となり、space-time R-charge は normalization $(\frac{2}{Q})$ を含めて

$$R_{\mathcal{A}_\mathcal{V}} = \frac{2}{Q} q = \frac{2(Q_V - 1)}{Q^2} \tag{104}$$

となっている。(正確に言えばこの space-time R charge は Eq. (95) の left-moving part からの寄与のみを考えている。ここでは left-right symmetric な場合を考えているので、実際の space-time R charge はこの値に 2 を掛けたものである。)

9.2 $\mathcal{A}_V$ について

ここで、さらに $\mathcal{A}_V$ について詳しく考察する。

はじめに、$(-1,-1)$ picture で書かれた vertex operator が picture changing と関連して持つ興味深い性質についてコメントしておく。$(-1,-1)$ picture で書かれた vertex operator

$$e^{-\varphi_g - \bar{\varphi}_g} \mathcal{O} \tag{105}$$

に picture change をして、$(0,0)$ picture にすることを考える。[25] 結果出てくる operator は

$$\oint dz T_F(z) \oint d\bar{z} \bar{T}_F(\bar{z}) \mathcal{O} \tag{106}$$

となる。ここで T_F や $\bar{T}_F$ はそれぞれ left、right-moving part の supercurrent で、上の式は operator $\mathcal{O}$ と OPE をとることを表している。つまり $\mathcal{O}$ の superpartner が (0,0) picture の vertex operator となる。

この部分の議論は chiral ring から marginal operator への map の議論とほとんど同じであることに注意してください。

今考えている系に話を戻す。まず、$\mathcal{A}_V$ と T_F^+ との OPE は singularity を出さないことを注意しておく。これは $R^{d-1,1}$ part は NS-ground state であることからわかり、$\mathcal{N}/U(1)$ part は V を chiral operator としたことからわかる。最後に Liouville part は実際に T_F^+ を作用させれば簡単にわかる。

この時点で、今議論しているのは chiral ring から marginal operator への map であることがわかる。というのも chiral field に対しては T_F を作用させることと、T_F^- を作用させることは全く同じことである。

次に space-time supercharge Eq. (93) と Eq. (94) を $\mathcal{A}_V$ に作用したときにどうなるか考えてみる。実際に作用させてみると $\mathcal{A}_V$ と Eq. (94) との OPE は singularity を出さないことがわかる。つまり、space-time chiral supermultiplet の成分に対応している。anti-chiral や chiral であることは convention の問題であるので、ここでは $\mathcal{A}_V$ に対応するものが space-time chiral superfield になるようにしておく。space-time R-symmetry は U(1) であるので符号は適当に決めることができ、また complex conjugation によって反転させることができる。

$(-1,-1)$ picture で書かれた Eq. (102) の superghost を除いた部分を worldsheet chiral superfield の bottom component と考えると、(0,0) picture vertex operator はその top component である。(ここで chiral superfield Φ が $\Phi = \phi_\pm + \cdots + \theta_\pm\bar{\theta}_\pm F$ と書かれるとき ϕ を bottom component、F を top component と呼んでいる。) このことから (0,0) picture vertex operator を worldsheet Lagrangian に加えることは worldsheet 上に存在している (2,2) supersymmetry を破らない。そのことは、space-time での supersymmetry もそのまま保たれることを意味する。つまり、$(0,0)$ picture で書かれた $\mathcal{A}_V$ に対応する space-time operator は space-time chiral superfield の top component である。

まとめると、$\mathcal{A}_V$ (Eq. (102)) を (0,0) picture で書いたものは space-time chiral superfield の top component に対応しており、space-time R-charge

$$R_{\mathcal{A}_V} = \frac{2(Q_V - 1)}{Q^2} \tag{107}$$

をもっている。

worldsheet Lagrangian に operator を加えるということは別の表現をすると、$\mathcal{A}_V$ (から superghost を除いた部分) は N=2 SCFT の chiral ring (c,c) であり、chiral ring から marginal operator への map を使って写した operator は N=2 SCFT の moduli 空間上のある点から他の点への理論の変形を引き起こすことに対応している。

ここで根本的な問題に戻って考える。いったい上で議論したような operator は存在しているだろうか？Eq. (102) が physical であるのは Seiberg bound Eq. (103) を満たすときである。このことは非常に重要である。これは Seiberg bound を満たす $\mathcal{A}_V$ を Lagrangian に加えることを考えると、新しい Lagrangian による理論と初めの Lagrangian による理論とは同じ moduli 空間の異なる 2 点であることを意味する。反対に Lagrangian に加えられる operator が Seiberg bound を満たさないとき、新しい Lagrangian による理論と初めの Lagrangian による理論とは何の関係もないことになる。

9.3 $\mathcal{N}/U(1)$ 上の理論

$\mathcal{N}/U(1)$ 上の理論に対しては、一般に N=2 SCFT であることしか指定していなかった。section 8 において述べたように、ここでは $\mathcal{N}/U(1)$ 上の N=2 理論として Landau-Ginzburg 理論 (LG) を考えて、その結果出てくることをまとめておく。

はじめに LG の superpotential を

$$W = F(z_i) \quad i = 1, \cdots n+1$$

とする。ここで z_i は worldsheet chiral superfield である。また F は次の条件を満たす。

$$F(z) \to \lambda F(z) \text{ under } z_i \to \lambda^{r_i} z_i \text{ 、} \lambda \in C$$
$$\text{F は transverse}$$

つまり、F の worldsheet $U_R(1)$ charge は+1 であり、chiral superfield z_i のそれは $r_i (> 0)$ である。

LG は superpotential を指定すれば理論が決まってしまう。特に central charge c_{LG} は

$$c_{LG} = 3\sum_{i=1}^{n+1}(1 - 2r_i) = n + 1 - 2\sum_{i=1}^{n+1} r_i \tag{108}$$

$r_\Omega = \sum_{i=1}^{n+1} r_i - 1$ と定義して c_{LG} を書きなおすと便利である。

$$c_{LG} = 3(n - 1 - 2r_\Omega) \tag{109}$$

この central charge c_{LG} は Eq. (87) の下にあるように $c_{\mathcal{N}/U(1)} = 3(n - 1 - Q^2)$ に等しくなければならない。したがって

$$Q^2 = 2r_\Omega > 0 \tag{110}$$

と結論される。

最後に vertex operator に対してはどうなるか考える。chiral primary field V は z_i の多項式 $A_a(z_i)$ によって書くことができる。(正確にはこれは (c,c) ring である。) worldsheet $U_R(1)$ charge を $Q_{A_a} = r_a$ とすると

$$A_a(z_i) \to \lambda^{r_a} A_a(z_i) \quad \text{under} \quad z_i \to \lambda^{r_i} z_i \tag{111}$$

である。よって、vertex operator は Eq. (102) から

$$\mathcal{A}_{A_a} = e^{-\varphi_g - \bar{\varphi}_g} e^{q(\phi + iY)} A_a(z) \tag{112}$$

となる。この vertex operator の space-time R charge は Eq. (104) より

$$R_{A_a} = \frac{2(r_a - 1)}{Q^2} = \frac{r_a - 1}{r_\Omega} \tag{113}$$

となる。Eq. (95) にならって right-moving part からの寄与も考慮に入れた結果はこの 2 倍である。Seiberg bound は Eq. (103) を使って

$$r_a + r_\Omega - 1 > 0 \tag{114}$$

この式は Eq. (74) とまったく同じ式である。また、A_a は chiral primary field であるので $r_a > 0$ より、Eq. (74) の下の議論と同様にして $r_\Omega = 1$ で deformation のようすが変わることを読み取ることができる。

10 Duality check

実際に、dualityが成立しているか調べてみる。しかし、特にsingular CY上の理論は理解されているとは言えないので、対称性の議論から出てくる結果が一致することを見るだけにとどまる。

提唱されたdualityは

$$R^{d-1,1} \times R_\phi \times \mathcal{N}\ (g_s(\phi) = e^{-\frac{Q}{2}\phi})\ \text{上の string thery}$$
$$\|$$
$$R^{d-1,1} \times X^{2n}\ \text{上の string theory の}\ g_s \to 0\ \text{limit}$$

である。

それぞれの理論について次の一致がある。

- 対称性の性質
  space-time superchargeの数は$2^{d/2+1}$個で一致している。
  両理論とも space-time R 対称性を持っている。

- parameter r_Ω
  両理論ともに$r_\Omega > 0$であって、$r_\Omega = 1$で物理が変わる。

- space-time chiral superfieldの top component
  それぞれに space-time R charge
  $$\frac{2(r_a - 1)}{r_\Omega}$$
  を持ったfieldが存在しており、space-time chiral superfieldの top component である。また、$r_a + r_\Omega - 1 > 0$が要求された。

10.1 approach to singular theory

2つの理論の間のdualityを以上の証拠をもとに認めてしまう。そうすると、$g_s \to 0$とした$R^{d-1,1} \times X^{2n}$ 上のstring theoryは、holographic dualな描像である$R^{d-1,1} \times R_\phi \times \mathcal{N}$ $(g_s(\phi) = e^{-\frac{Q}{2}\phi})$ 上のstring theryを使って調べることができる。

しかし、ここで微妙な点が存在している。non-critical superstring theoryを表すbackgroundは$\phi \to -\infty$で$g_s(\phi) \to \infty$のようにstring couplingが発散してしまう。これはstring theoryにおいて致命的である。次のsectionではこの困難に関する提案をいくつかする。この困難は、dual theoryの言葉でいうとsingular manifoldでcompact化することにより生じたということができる。

11 Second Proposal

前のsectionまでで議論してきたdualityにはもう少し考察していくべき点があった。簡単に言えば摂動論的なstring theoryにおいて

$$ds^2 = dx^2 + d\phi^2 + dY^2 + ds^2(\mathcal{N}/U(1)) \tag{115}$$
$$g_s(\phi) = \exp[-\frac{Q}{2}\phi], \quad Q > 0 \tag{116}$$

のようなbackground上のstring theoryを考えることはできない。このbackgroundはlinear dilaton backgroundと呼ばれdilaton Φ とspace-timeの座標 ϕ がlinearに関係しているようなbackgroundであった。($\Phi = -\frac{Q}{2}\phi$) このsectionではこのことについて詳しく議論していく。

11.1 Liouville regularization

Linear dilaton part $d\phi^2 + dY^2$ の (superconformal gaugeをとった後の) actionを書くと次のようになっていた。

$$S = \frac{1}{8\pi}\int dz^2 d^4\theta \Phi^* \Phi \tag{117}$$

ABKS[5]、GKP[6]ではこれに加えて次のようにpotential termも持っているべきだということが提案されている。

$$S = \frac{1}{8\pi}\int dz^2 d^4\theta \Phi^* \Phi + \frac{\mu}{4\pi}\int d^2z d^2\theta_- e^{\gamma\Phi} + \frac{\mu^*}{4\pi}\int d^2z d^2\theta_+ e^{\gamma\Phi^*} \tag{118}$$

ここで、それぞれの項はN=2 superspace formalizmで書かれており、chiral superfield Φ のbosonic componentは $\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi - iY)$ であり、μ、μ^* はcomplex parameterとその複素共役である。また、$\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{Q}$ である。

これは $\mu = 0$ のLiouville理論を、$\mu \neq 0$ のLiouville理論に置き換えることを意味している。こうすることにより $\phi \to -\infty$ のときにexponentialに増大するpotentialの効果により、ϕ がstring couplingの発散する領域に行くことはなくなる。もちろんこのとき μ はある程度大きくとらなければ強結合領域のstring theoryを扱うことになってしまう。

potentialをいれると、一応、問題となっているstring couplingが発散してしまうという困難は回避できるように見える。しかし、いかにも人工的なpotentialをいれるという行為はどういったことを意味しているのかは明らかではない。続くsubsectionにおいては、potentialをいれることが持つ意味を考える。

11.2 second proposal

[5, 6]ではholographic dualityに加えてもう一つの提案がなされた。それはnon-zero Liouville potentialが無ければならない、ということである。

前のsubsectionで提案されているように、string theoryの範囲の中で議論する以上Liouville potentialではないとしても、string couplingが発散する領域を回避するような項は必ず必要である。そういった項なしに対称性に関係した議論以外のことをするのは全く意味が無いことである。何故、Liouville potentialが選ばれるのかということは後で議論するとして、ここではLiouville potentialをいれて、得られる結果が何を意味しているのかについて考えたい。

Eq. (118)から、Liouville potential termはcomponentで書くと、

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu}{4\pi}\int d^2z d^2\theta_- e^{\gamma\Phi} + \frac{\mu^*}{4\pi}\int d^2z d^2\theta_+ e^{\gamma\Phi^*} \\
&= \frac{\mu\gamma^2}{2\pi}\int d^2z \Psi_+ \bar{\Psi}_+ e^{-\frac{1}{Q}(\phi - iY)} + \frac{\mu^*\gamma^2}{2\pi}\int d^2z \Psi_- \bar{\Psi}_- e^{-\frac{1}{Q}(\phi + iY)}
\end{aligned} \tag{119}$$

ここで、$\Psi_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_\phi \mp i\psi_Y)$ である。右辺第二項は worldsheet supercharge を使って次のように書くことができる。

$$\frac{\mu^*\gamma^2}{2\pi}\Psi_-\bar{\Psi}_- e^{-\frac{1}{Q}(\phi+iY)} = \frac{2\mu^*}{\pi}\oint\frac{dw}{2\pi i}\oint\frac{d\bar{w}}{2\pi i}\, T_F^-(w)\bar{T}_F^-(\bar{w})e^{-\frac{1}{Q}(\phi+iY)} \tag{120}$$

Eq. (119) の右辺第 1 項は、この式の complex conjugate で表される。$e^{-\frac{1}{Q}(\phi+iY)}$ は Eq. (102) において $V=1$ とおいた式である。このことは $V=1$ の worldsheet $U_R(1)$ charge Q_V は 0 であることから Eq. (101) を解けばわかる。この式を見ると、Liouville potential term には section 9.2 の話がそのまま当てはまることがわかる。加えられた operator は理論の変形にあたっており、その役割については section 9.2 で議論された。今の場合に当てはめて考えてみよう。

section 9.2 において議論されているように、operator $e^{-\frac{1}{Q}(\phi+iY)}$ が理論に存在しているためには、この operator が Seiberg bound Eq. (103) を満たしていなければならないのであった。Eq. (103) の不等式は今の場合、$Q^2 > 2$ を意味する。この条件を満たす場合と、そうでない場合ではまったく Liouville potential term の意味は異なる。2 つの場合を分けて議論する。$Q^2 = 2$ はここでは考えないが、実際に考察される系はいつも $Q^2 \neq 2$ という状況に対応している。

- $Q^2 > 2$ の場合
  $Q^2 > 2$ の時、Liouville potential term は理論に operator として存在しており、それは $\mu = 0$ の Liouville 理論の marginal operator とみなすことができる。$\mu = 0$ と $\mu \neq 0$ の Liouville 理論とは同じ moduli 空間の異なる 2 点で、同じ N=2 SCFT の family に属している。
  つまり、Liouville potential term を加えるということは、singular な理論を marginal operator を加えることによって正則化していることに対応している。

- $Q^2 < 2$ の場合
  このとき、operator $e^{-\frac{1}{Q}(\phi+iY)}$ は $\mu = 0$ の Liouville 理論には存在していない operator である。section 9.2 でも述べられているように $\mu = 0$ の Liouville 理論と、$\mu \neq 0$ の Liouville 理論とは異なる moduli 空間の点であり、異なる family に属するということができる。

ここでなされた主張は自明なこととは言えない。つまり、もともとの $\mu = 0$ の Liouville 理論を表しているような理論は string theory では記述できない。むしろ、存在していないとみなすべきで、存在するのは $\mu \neq 0$ を表す理論である。すべての物理的結果は $\mu \neq 0$ Liouville 理論から導かれなければいけない。この主張は $Q^2 < 2$ の時にさらに強い主張であるように思える。この場合、実際には異なる family の SCFT により理論は記述されているということを述べているのである。

Liouville potential term Eq. (119) は、いずれの場合も $\mu = 0$ の Liouvile 理論の摂動項とはみなすことができない。この項は非繰り込み定理により摂動を受けないことから、摂動論的に導かれるものではないことがわかる。逆にこの項は非摂動的な効果を表している項であると考えることができる。このように $\mu \neq 0$ Liouville 理論の性質を明らかにしていくことは string theory の非摂動的な部分を記述する、より基本的な理論の効果を考えることにつながると思われる。

11.3 Why Liouville potential?

Liouville potential termを持った理論はどういった状況に対応しているのか考えてみる。そうすることで何故、理論をよく定義するためにLiouville potentialをいれるのが適当かがわかる。

次のように考える。Liouville potential term Eq. (119)はspace-time Lagrangianにspace-time (anti-)chiral superfieldのtop componentを加えていることに対応している。section 10において述べられているようにspace-time (anti-)chiral superfieldのtop componentは、dualな2つの理論でそれぞれ対応するoperatorを持っていた。それぞれは理論のdeformationに対応していたためにこの2つのoperatorを比較することによって、Liouville potentialをいれることとsingular CYのdeformationをすることがどのように関連しているかを見てみる。

今の場合Eq. (120)を見ると、non-critical superstring側ではchiral ring "1" と定数 $\frac{2\mu^*}{\pi}$ の積から作られたoperatorをmap Eq. (106)を使ってmarginal operatorへ写し、得られたoperatorを理論の変形として使っている。これに対応するsingular CYのdeformation Eq. (70)は、同じく $A(z_i) = 1$ であって

$$t \Longleftrightarrow \frac{2\mu^*}{\pi} \tag{121}$$

とするべきである。

つまり、Liouville potentialを加えるということは、singular CYのdeformationに対しては

$$F(z) = 0 \longrightarrow F(z) = \epsilon \tag{122}$$

というように、constant termを加えることに対応している。ここで ϵ はnormalizationまでで μ^* に等しく、ここでのconventionでは $\epsilon = -\frac{2\mu^*}{\pi}$ となっている。この変形は非常に自然なsingularityの正則化であるということができる。さらに、Liouville potentialをいれるという効果はNS5-brane backgroundの意味においても自然であることを次のsectionでみることができる。

最終的に、

Liouville potential (μ) を持ったEq. (115)上のstring theory
$\|$ dual
singularity近傍が $F(z) = \epsilon$ で近似されるCYで
compact化されたstring theoryの $g_s \to 0$ 極限

ということが結論される。

最後に少し、注意をしておきたい点がある。それは、$Q^2 < 2$ のときには理論にはLiouville potential termのようなoperatorは存在していないので、上のような対応関係は一般に期待するべきではないかもしれない。しかし、それでもSeiberg boundを満たさないoperatorによる理論の変形と、CYのcomplex deformationでない変形の間には対応関係があるように思える。

12 Double Scaling Limit

これまでの、duality は一般（といっても偶数）の d に対して述べられてきた。ここで、NS5-brane により作られる background ($d = 6$) に戻って具体的に $F(z) = \epsilon$ という変形が何を意味しているのかを考えることにより、Little String Theory を実際に解析するための方法を提案する。[15]

この section では、はじめに singular CY で compact 化された理論と、NS5-brane 上の理論がどう対応しているか考察した後、Eq. (122) のような変形が、NS5-brane 上の理論では何に対応しているかを考える。その結果として、Little String Theory を解析するためには、holographic description において Double Scaling Limit を考える必要があるという結論に至る。

12.1 T-dual of NS5-brane

section 6 において少し述べたように、NS5-brane 上の理論と singularity を持った CY で compact 化された理論は等価である。その間の関係について簡単に説明しておくのがよい。次のように、順番に示していこう。[16, 17] (この subsection と次の subsection においては便宜上、少し他の部分とは convention が異なっていることに注意するべきである。)

NS5-brane と Taub-NUT space

1 枚の NS5-brane が $\mu = 0, \cdots, 5$ 方向に広がっていて、$x_i = 0$、$(i = 6, \cdots, 9)$ にあるとする。今、ある 1 つの i 方向について compact 化して、T-dual をとることを考える。この結果、得られる空間は $R^{5,1}\times$ Taub-NUT space であることが知られている。Taub-NUT space は 4 次元の空間であり、metric が

$$ds^2 = V^{-1}(x_i)(dx_4 + \omega_p(x_i) \cdot dx_p)^2 + V(x_i)dx_p \cdot dx_p \tag{123}$$

のようになる空間である。ただし p は $p = 7, 8, 9$ を走る。ここで、$V(x_i)$、$\omega(x_i)$ は次のように決められる。

$$\begin{aligned} \partial_i V(x_j) &= \pm\epsilon_{ijk}\partial_j\omega_k(x_i) & (124) \\ V(x_i) &= 1 + 2m\frac{1}{|x - x_i|} & (125) \end{aligned}$$

NS5-brane は B 場に magnetic に couple する object であった。B 場は compact 化の winding に対応しているので、T-dual により Kaluza-Klein mode に対応した KK monopole が出てくるはずである。したがって、Taub-NUT space は $x_i = 0$ にある KK monopole (5-brane) によって作られる空間であると考えることができる。

Taub-NUT space と ALE space

次に KK monopole の近傍を考える。この領域では Eq. (125) のはじめの定数を無視することができる。このとき、Eq. (123)$\sim$ Eq. (125) で表される空間は ALE space と呼ばれるものになる。

KK monopole 近傍を考える限り、Taub-NUT space は ALE space で近似することができる。このような近似が有用なのは次に見るように、ALE space は代数多様体として比較的簡単に表現することができ、Taub-NUT space よりも扱いやすい空間となっているためである。

代数多様体としての ALE space

ALE space Eq. (123)~Eq. (125) はどのような代数多様体として表現されるか結果だけ述べておく。

ALE space は smooth で、topological には R^4 と同じである。そこで、はじめに次の変数を導入する。

$$z_1 = x_6 + ix_7\,,\ z_2 = x_8 + ix_9 \tag{126}$$

z は ALE space の複素座標というべきものである。

次に

$$u = z_1 z_2\,,\ v = z_1\,,\ w = z_2 \tag{127}$$

として C^3 の座標 (u, v, w) を導入する。そうすると、それらの間には

$$u = vw \tag{128}$$

という関係がある。これはすなわち ALE space は C^3 の中に上の式で定義されることを意味している。

結果として、1 枚の NS5-brane に対応した ALE space は C^3 の中の定義式

$$F(u, v', w') = u + v'^2 + w'^2 = 0 \tag{129}$$

で表される。ただし、$vw \equiv -v'^2 - w'^2$。この空間が singularity を持たないことは $F = 0$、$\partial_{u,v',w'} F = 0$ を同時に満たす解が無いことからもわかる。

multi-ALE space

上の smooth な ALE space の原点近傍で

$$z_1 \longrightarrow \omega z_1\,, \quad z_2 \longrightarrow \omega^{-1} z_2 \tag{130}$$

という同一視をすることを考える。($\omega^n = 1$) その結果生じる空間は orbifold singularity を持つ。上の同一視において不変な座標 (u, v, w) を

$$u = z_1 z_2,\ v = z_1^n,\ w = z_2^n \tag{131}$$

において導入する。(u, v, w) には次の関係がある。

$$u^n = vw \tag{132}$$

これは、今考えている orbifold 化した理論は C^3 の中に上の式で定義される空間であることを意味する。これを multi-ALE space と呼ぶことにする。

Eq. (132) を再び、$vw = -v'^2 - w'^2$ を使って書きなおしておくと

$$F(u, v', w') = u^n + v'^2 + w'^2 = 0 \tag{133}$$

となることがわかる。この式で表される空間が原点に singularity を持つことは、$F = 0$、$\partial_{u,v',w'} F = 0$ を同時に満たす解 $(u = v' = w' = 0)$ が存在していることからもわかる。

ここで出てきたような type の singularity は A_{n-1}-type singularity と呼ばれる。A-type 以外の singularity を考えることもできるがここでは A-type だけを考えることにする。

ALE space と multi-ALE space

Eq. (129) と Eq. (133) で表される空間の関係について考えてみる。ALE space Eq. (129) が singularity を持っていなかったのに対して、multi-ALE space Eq. (133) は singularity を持っていた。2 つの空間に関係をつけるために、multi-ALE space の singularity を取り除くことを考える。具体的には次のようにする。

$$u^n + v'^2 + w'^2 = 0 \Longrightarrow \prod_{i=1}^{n}(u - \zeta_i) + v'^2 + w'^2 = 0 \tag{134}$$

ζ_i は complex number であり、全ての ζ は異なるとき singularity は取り除かれる。

ここで、ある 1 つの ζ_i に注目してみる。特に $u = \zeta_i$ の近傍を考えるだけなら、第一項は適当な complex number C を使って書きなおすことができて、

$$C(u - \zeta_i) + v'^2 + w'^2 = 0 \tag{135}$$

となる。この式は u の再定義までで Eq. (129) に等しい。つまり、文字通り multi-ALE space は ALE space がいくつか集まったものとみなすことができる。

これより、複数枚の NS5-brane の近傍に T-dual な空間は multi-ALE space であり、同じ位置に複数の NS5-brane があるとき singularity が生じることがわかる。

12.2 $F(u, v', w') = \epsilon$ について

前の section の内容を踏まえて、

$$F(u, v', w') = u^n + v'^2 + w'^2 = \epsilon \tag{136}$$

によって表される多様体と、対応する NS5-brane の系について考えよう。

ALE space の local picture

さらに、Eq. (128) の解釈について考えてみる。簡単に言えば、Eq. (128) で表される空間は local には $T^2 \times C$ になる。(elliptic fibration) しかし、ここではさらに T^2 部分を local に見て、cylinder と complex plane の積になることを述べる。

もっとも簡単にそれを見るには、cylinder は C^2 の中で

$$vw = a \tag{137}$$

と表されることに気をつければ良い。ここで a は複素数。また、$a=0$ は cylinder の円周があるところで 0 になっているような、円錐を 2 つつなげたような空間に対応している。

この式を Eq. (128) と比較すると、a と u が入れ替わっているだけである。u は複素変数であるので、結局 ALE space は、(local には) base space が u で表される complex plane で、その上の fiber として cylinder ($vw=u$) を持っているとみなすことができる。($u=0$ であるとき cylinder は singular になるが、全体の空間としては non-singular になっていることに注意するべきである。)

ここで、cylinder には S^1 があることに注意すると、この S^1 に対して T-dual をとることができる。つまり、NS5-brane の描像に移ろうと思うときには、この S^1 方向に T-dual をとる必要がある。

NS5-brane configuration

以上のことから、$F(u,v',w')=\epsilon$ に対応した NS5-brane の configuration を見出すことができる。

次のように定義式を変形してみる。

$$u^n+v'^2+w'^2=\epsilon \longrightarrow \prod_{j=1}^{n}(u-r_0e^{2\pi i\frac{j}{n}})+v'^2+w'^2=0 \tag{138}$$

ただしここで、$\epsilon=-(-r_0)^n$ により新しい変数 r_0 を定義した。

上の式を見ると、それぞれの KK monopole のある位置は

$$u=r_0e^{2\pi i\frac{j}{n}}, \quad v'=w'=0 \tag{139}$$

となっている。つまり、KK monopole は base space (complex plane) の半径 r_0 の円周上に、等間隔にあることがわかる。space-time (target space) でいうと、2 次元平面上の円周上に等間隔に並んでいるということができる。

このような系に対応した NS5-brane の configuration は T-dual をとることによって決定することができる。今の場合、T-dual をとる方向と、KK monopole の並ぶ円周とは異なっている。したがって最終的に、$F(u,v',w')=u^n+v'^2+w'^2=\epsilon$ は $x_6\sim x_9$ で作られる R^4 の中の 2 次元平面に描いた半径 r_0 の円周上に等間隔に NS5-brane を n 枚置いた configuration に対応していると結論される。

12.3 duality map

ここまでで得られた duality の相互関係についてまとめておくと次のようになる。

Liouville potential μ を持った
$R^{5,1}\times R_\phi\times S^1\times \mathcal{N}/U(1)$ 上の string theory
$\|$ holographic dual
singularity 近傍が $F(z)=\epsilon$ in C^3 で近似される CY^2 で
compact 化された string theory の $g_s\to 0$ 極限
$\|$ T-dual
NS5-brane を半径 r_0 の円上に等しい角度で並べた理論の $g_s\to 0$ 極限

ここに現われている理論は正しく定義されており摂動計算により正しい結果を得ることができる。上の duality を用いると、NS5-brane 上の理論の相関関数などの物理量は Liouville potential を持った string theory を使って計算することができる。

上の duality に出てくる理論が良く定義されていたのは singular な理論を変形したためであった。これは NS5-brane 側では重なった NS5-brane を引き離したことに対応していた。NS5-brane が重なった状態は $r_0 = 0$ であり、$\epsilon = \mu = 0$ である。今までの議論を信用すると、重なった NS5-brane 上の decoupled theory については string theory の範囲では議論することができない。重なった NS5-brane 上に現われる理論についての情報を string theory から得るためには、理論を変形しただけではまだ不充分であることがわかる。

12.4 Double Scaling Limit

Liouville potential を持った、non-critical superstring theory を考えてみよう。

action は Eq. (118) で書かれていた。この action に対して standard dimensinal analysis を適用すると、摂動の展開係数 x が次のようになることがわかる。(次の section 参照。)

$$x = \frac{g_s}{\mu^{\frac{Q^2}{2}}} \tag{140}$$

この展開係数は CY 上の string theory においては、Eq. (110) を使って

$$x = \frac{g_s}{\mu^{r\Omega}} \tag{141}$$

となる。この式を見ると今考えているよく定義された理論においては

$$\mu \neq 0\,, \quad g_s \longrightarrow 0 \tag{142}$$

であるので展開係数 x は $x \to 0$ で、理論としてよく定義されていると見ることができる。対して、Liouville potential を持っていない ($\mu = 0$) ときには展開係数は発散してしまい、理論として意味が無い。

ここまでくると、どのように重なった NS5-brane 上の理論 ($\mu \to 0$) を定義するのが適切かがわかる。展開係数 x を小さく保ったまま μ と g_s が同時に 0 になるような極限を考えればよい。この極限は "Double Scaling Limit" と呼ばれる。Double Scaling Limit は重なった NS5-brane 上に現われる理論 (LST) を定義する操作である。また、このように重なった NS5-brane を string theory の範囲内で議論するときにはいつも、はじめ円周上に等間隔に並べた NS5-brane で得られた結果の Double scaling limit をとらなければいけない。

13 Correlation function

今までの結果を使って、駆け足で Little String Theory での相関関数を求めてみる [18]。方針は AdS/CFT 対応において用いられているように、重力理論の相関関数は場の理論の Green 関数に対応していると考えて、重力理論で求められた相関関数を場の理論の Green 関数とみなすというものである。また、求められた相関関数の極を見ることで、LST に存在する spectrum について考察を加える。

13.1 4点相関関数

ここでは、重力理論、つまり non-critical superstring theory の4点相関関数をもとめてみる。4点相関関数の計算は次の段階に進むために非常に役に立つ。また、簡単のため相関関数の normalization factor などには気を使わないことにする。

主に問題となるのは、Liouville part の取り扱いである [19]。Liouville part の相関関数は、今なお研究の対象となっている領域であるがここでは [20, 21] に見られる手法を使って、議論を進めていきたい。

準備

はじめに action は

$$S = S_{free} + S_L + S_{LG} \tag{143}$$

と書かれる。ここで S_{free} は $R^{5,1}$ の free part を表し、S_L は Liouville part、S_{LG} は Landau-Ginzburg part を表しているとする。S_{free} は、boson X^μ と fermion ψ_X^μ を使って

$$S_{free} = \frac{1}{4\pi}\int d^2z(\bar\partial X^\mu \partial X^\mu - \psi_X^\mu \bar\partial \psi_X^\mu - \bar\psi_X^\mu \partial \bar\psi_X^\mu) \tag{144}$$

となり、Liouville part は

$$\begin{aligned} S_L &= \frac{1}{2\pi}\int d^2z(\bar\partial\phi_-\partial\phi_+ - \psi_-\bar\partial\psi_+ - \bar\psi_-\partial\bar\psi_+) \\ &+ \frac{\mu}{4\pi}\int d^2z\gamma^2\psi_+\bar\psi_+e^{\gamma\phi_+} + \frac{\mu^*}{4\pi}\int d^2z\gamma^2\psi_-\bar\psi_-e^{\gamma\phi_-} - \frac{Q}{8\pi}\int d^2z\sqrt{g}R\phi \end{aligned} \tag{145}$$

で、$\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{Q}$ であった。いつものように boson は $\phi_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi \mp iY)$ と分けて書かれる。

上の表現を使って Eq. (145) を少し書きなおしておく、

$$S = S_{\mu=0} + \int d^2z\frac{\gamma^2}{4\pi}(\mu\psi_+\bar\psi_+e^{i\frac{1}{Q}Y} + \mu^*\psi_-\bar\psi_-e^{-i\frac{1}{Q}Y})e^{-\frac{1}{Q}\phi} \tag{146}$$

$S_{\mu=0}$ は $\mu = 0$ のときの Liuville action を表している。

tachyon vertex operator

この section では、tachyon vertex operator Eq. (99) の4点相関関数を考える。特に、最も簡単な Landau-Ginzburg part V が1であるようなものを考える。これにより、LG part の相関関数については気を使う必要がない。具体的には次の vertex operator $T_i(z_i, \bar z_i)$ を考える。

$$T_i(z_i, \bar z_i) = e^{-\varphi_g - \bar\varphi_g}e^{ik_ix}e^{\beta_i\phi + iq_iY} \tag{147}$$

ここで、closed string を考えているために場の argument には z と $\bar z$ が入る。ここからは簡単のために明らかな場合には argument は省略することにする。

superstring を考えているので、picture change をして $(0,0)$ picture を用意しておく必要がある。そのときの operator を $\tilde T$ と書くと

$$\tilde T_i = \frac{1}{4}[ik_i\cdot\psi_X + \beta_i\psi_\phi + iq_i\psi_Y][ik_i\cdot\bar\psi_X + \beta_i\bar\psi_Y + iq_i\bar\psi_Y]\, e^{ik_ix}e^{\beta_i\phi + iq_iY} \tag{148}$$

となる。ここで、$\psi_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_\phi \mp i\psi_Y)$ を使っている。

これらの operator に対する on-shell 条件は

$$\frac{1}{2}|k_i|^2 + \frac{1}{2}q_i^2 - \frac{1}{2}\beta_i(\beta_i + Q) = \frac{1}{2} \tag{149}$$

である。また、GSO projection と Seiberg bound は

$$q = -\frac{2Z+1}{Q}, \quad \beta > -\frac{Q}{2} \tag{150}$$

となる。

$SL(2,C)$ 不変性

はじめに、一般の N-point function の場合を復習しておく。bc ghost を考慮せずに散乱振幅を書いてみると次のようになる。

$$< \int d^2z_1 \mathcal{O}_1(z_1) \int d^2z_2 \mathcal{O}_2(z_2) \int d^2z_3 \mathcal{O}_3(z_3) \int \cdots > \tag{151}$$

ここで、$\mathcal{O}$ は weight 1 の (physical な) vertex operator である。これらの operator を BRS 不変にするために複素平面上で積分している。

この振幅は $SL(2,C)$ という不変性により、発散してしまうことが知られている。したがって、振幅を well-defined にするためには $SL(2,C)$ の体積 $V_{SL(2,C)}$ で割っておかなければならない。ここでは振幅を次のように定義されたものと考える。

$$A^{(N)} \equiv \frac{1}{V_{SL(2,C)}} < \int d^2z_1 \mathcal{O}_1(z_1) \int d^2z_2 \mathcal{O}_2(z_2) \int d^2z_3 \mathcal{O}_3(z_3) \int \cdots > \tag{152}$$

一方、α、β、γ を $SL(2,C)$ 変換を parametrize するものとする。そのとき、$d^2\alpha d^2\beta d^2\gamma$ は $SL(2,C)$ の体積要素を表している。実は次のような関係があることが知られている。

$$\int d^2z_1 \int d^2z_2 \int d^2z_3 = \int_{SL(2,C)} d^2\alpha d^2\beta d^2\gamma \, |(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)|^2 \tag{153}$$

$SL(2,C)$ 不変性があるために振幅の式 Eq. (152) において、z_1、z_2、z_3 の 3 変数についての積分によって生じるのは、ある決まった値を持つ z_1、z_2、z_3 での結果の重複である。上の式をみると、z_1、z_2、z_3 の 3 変数についての積分から出てくる同じ結果の重複は、$SL(2,C)$ の体積と Jacobian ($|(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)|^2$) の積で表されることがわかる。

これらのことより、振幅の $SL(2,C)$ 不変性の効果を考慮するためには次の置き換えをして、z_1、z_2、z_3 について決まった値を入れてやればよいことがわかる。

$$\frac{1}{V_{SL(2,C)}} \int d^2z_1 \int d^2z_2 \int d^2z_3 \longrightarrow |(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)|^2 \tag{154}$$

4 点相関関数

4 点相関関数はだいたい

$$< \tilde{T}_1(z_1)\tilde{T}_2(z_2)T_3(z_3)T_4(z_4) > \sim \int [d\phi][dO]\tilde{T}_1\tilde{T}_2T_3T_4e^{-S} \tag{155}$$

と表現される。ここで $[dO]$ は ϕ 以外の場の measure をまとめているとする。この式では z_i についての積分 $\int d^2 z_i$ と $SL(2,C)$ group の体積 $V_{SL(2,C)}$ の (-1) 乗は省略されている。また、$(0,0)$ picture を T_1、T_2 に選んだが結果はこの選択で変わらない。

total action Eq. (143) と tachyon vertex operator Eq. (147) の具体的な形から、実際に議論に必要な項だけを取り出すと

$$< T_1(z_1)T_2(z_2)T_3(z_3)T_4(z_4) > \sim \int [d\phi][dx][dY][dO'] \, J_4 \, (\prod_{i=1}^{4} e^{ik_i x})(\prod_{i=1}^{4} e^{\beta_i \phi + iq_i Y}) e^{-S_{free} - S_L} \tag{156}$$

$[dO']$ は表記されている以外の必要な場の積分の measure を表している。また、J_4 は (super) ghost part や picture changing による効果を表しており次のような具体的な形をしている。

$$\begin{aligned} J_4 \quad &\sim \quad |(z_1 - z_2)(z_2 - z_4)(z_4 - z_1)|^2 \\ &\times \quad [ik_1 \cdot \psi_X + \beta_1 \psi_\phi + iq_1 \psi_Y][ik_2 \cdot \bar{\psi}_X + \beta_1 \bar{\psi}_\phi + iq_1 \bar{\psi}_Y](z_1, \bar{z}_1) \\ &\times \quad [ik_2 \cdot \psi_X + \beta_2 \psi_\phi + iq_2 \psi_Y][ik_2 \cdot \bar{\psi}_X + \beta_2 \bar{\psi}_Y + iq_2 \bar{\psi}_Y](z_2, \bar{z}_2) \\ &\times \quad e^{-\varphi_g(z_3) - \bar{\varphi}_g(\bar{z}_3)} e^{-\varphi_g(z_4) - \bar{\varphi}_g(\bar{z}_4)} \int d^2 z_3 \end{aligned} \tag{157}$$

ここで固定する変数として z_1、z_2、z_4 を選んでいる。また $\int d^2 z_3$ も J_4 に含めておいた。以後、Eq. (156) を $A^{(4)}(k_1, \cdots, k_4)$ と記すことにする。

string coupling g_s の分離

相関関数が string coupling g_s にどのように依存するかを議論するための準備をしておきたい。今の場合 dilaton Φ と座標 ϕ は $\Phi = -\frac{Q}{2}\phi$ のように関係しているために厳密に議論することは難しい。ここでは次のように考える。

string coupling g_s は dilaton $\Phi(\phi)$ の期待値により $g_s = e^{\Phi(\phi)}$ のように決定される。したがって、$\phi \to \phi + c$ $(c \in C)$ という shift のもとで g_s は

$$g_s \longrightarrow e^{-\frac{Q}{2}c} g_s \tag{158}$$

のように shift する。このことを利用すると、$A^{(4)}(k_1, \cdots, k_4)$ Eq. (156) において shift $\phi \to \phi + c$ をしたときの振る舞いにより、string coupling g_s についての依存性がわかる。Eq. (156) の中で ϕ に依存する部分は $e^{\beta\phi}$ と S_L の部分であるので、この shift により

$$A^{(4)}(k_1, \cdots, k_4) \longrightarrow (\prod_{i=1}^{4} e^{\beta_i c}) e^{\frac{Q}{2}\chi c} A^{(4)}(k_1, \cdots, k_4) \tag{159}$$

ここで χ は worldsheet の Euler 数で genus h のとき

$$\frac{1}{4\pi} \int d^2 z \sqrt{g} R = \chi = 2(1-h) \tag{160}$$

である。string coupling に対する依存性という形で表現すると、$A^{(4)}(k_1, \cdots, k_4)$ は

$$g_s^{-\frac{2}{Q}(\sum_{i=1}^{4} \beta_i + \frac{Q}{2}\chi)} \tag{161}$$

に依存しているということができる。ここで、$\sum_{i=1}^{4} = \beta$、$s = Q(\beta + \frac{Q}{2}\chi)$ である。

Liouville potential term の ϕ については shift しなかったことに注意するべきである。この部分は potential part であり、$\mu = 0$ の場合と $\mu \neq 0$ の場合で string coupling が異なるようなことない。このことからも Liouville potential term からの寄与は考えないのが自然である。ちなみに、この項からの寄与を考えると ϕ の path integral の範囲は $-\infty < \phi < \infty$ であるので ϕ を shift しても $A^{(4)}(k_1, \cdots, k_4)$ は shift せず、g_s に依存しないという結果になってしまう。

ϕ の 0-mode 積分

Eq. (156) の path integral を実際に実行するのは、Liouville potential などの存在のために非常に難しい。しかし、Liouville field (ϕ) の 0-mode を積分することで手掛かりをつかむことができる。ϕ は 0-mode ϕ_0 とそれ以外の mode ϕ' に分離することができる。

$$\phi = \phi_0 + \phi', \quad \int d^2z\phi' = 0 \tag{162}$$

Eq. (156) に対して、0-mode を分離すると

$$\begin{aligned} A^{(4)}(k_1, \cdots, k_4) \sim \int [d\phi'][dx][dY][dO']\ J_4 \Big[(\prod_{i=1}^4 e^{ik_ix}) (\prod_{i=1}^4 e^{\beta_i\phi' + iq_iY}) e^{-S_{free} - S_{\mu=0}} \\ \times \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_0 (\prod_{i=1}^4 e^{\beta_i\phi_0}) e^{-\int d^2z \frac{\gamma^2}{4\pi}(\mu\psi_+\bar{\psi}_+ e^{i\frac{1}{Q}Y} + \mu^*\psi_-\bar{\psi}_- e^{-i\frac{1}{Q}Y})\, e^{-\frac{1}{Q}(\phi_0+\phi')}} e^{\frac{Q}{2}\chi\phi_0} g_s^{-\frac{2}{Q^2}s} \Big] \end{aligned} \tag{163}$$

のようになる。ただし、Eq. (161) を考慮している。

ここで便宜上次の表現を導入しておく。

$$B = \int d^2z \frac{\gamma^2}{4\pi}(\mu\psi_+\bar{\psi}_+ e^{i\frac{1}{Q}Y} + \mu^*\psi_-\bar{\psi}_- e^{-i\frac{1}{Q}Y})\ e^{-\frac{1}{Q}\phi'} \tag{164}$$

そうして Eq. (163) を書きなおすと

$$\begin{aligned} A^{(4)}(k_1, \cdots, k_4) \quad \sim \quad & \int [d\phi'][dx][dY][dO']\ J_4 \Big[(\prod_{i=1}^4 e^{ik_ix}) (\prod_{i=1}^4 e^{\beta_i\phi' + iq_iY}) e^{-S_{free} - S_{\mu=0}} \\ \times \quad & \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_0 (\prod_{i=1}^4 e^{\beta_i\phi_0}) e^{\frac{Q}{2}\chi\phi_0} e^{-Be^{-\frac{1}{Q}\phi_0}} \Big] \end{aligned} \tag{165}$$

Eq. (165) の ϕ_0 積分は $e^{-\frac{1}{Q}\phi_0} = y$ という変数変換を使って実行することができる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\phi_0\ e^{(\beta + \frac{Q}{2}\chi)\phi_0 - Be^{-\frac{1}{Q}\phi_0}} \quad = \quad Q\int_0^{\infty} dy\ y^{-Q(\beta+\frac{Q}{2}\chi)-1} e^{-By} \tag{166}$$

$$= \quad QB^s\Gamma(-s) \tag{167}$$

となる。ただし、ここでまた $\beta = \sum_{i=1}^4 \beta_i$、$s = Q(\beta + \frac{Q}{2}\chi)$ とした。

したがって、最終的に Eq. (156) は次のようにまとめられる。

$$\begin{aligned} & A^{(4)}(k_1, \cdots, k_4) \sim \\ & \int [d\phi'][dx][dY][dO']\ J_4 \Big[(\prod_{i=1}^4 e^{ik_ix}) (\prod_{i=1}^4 e^{\beta_i\phi' + iq_iY}) e^{-S_{free} - S_{\mu=0}} B^s\Gamma(-s) g_s^{-\frac{2}{Q^2}s} \Big] \end{aligned} \tag{168}$$

全体にかかる Q は無視した。

展開係数

Eq. (168) を使うと、理論の展開係数が Eq. (140) のようになるのを見ることができる。はじめに、Eq. (164) において $\mu = |\mu| e^{i\theta}$ とおくと

$$B = |\mu| \int d^2 z \frac{\gamma^2}{4\pi} (\psi_+ \bar{\psi}_+ e^{i(\frac{1}{Q} Y + \theta)} + \psi_- \bar{\psi}_- e^{-i(\frac{1}{Q} Y + \theta)})\, e^{-\frac{1}{Q}\phi'} \tag{169}$$

となる。ここで $B = |\mu| B'$ と書くと、Eq. (168) は

$$\begin{aligned} & A^{(4)}(k_1, \cdots, k_4) \sim \\ & |\mu|^s \Gamma(-s) g_s^{-\frac{2}{Q^2} s} \int [d\phi'][dx][dY][dO']\ J_4 \left[(\prod_{i=1}^{4} e^{ik_i x})(\prod_{i=1}^{4} e^{\beta_i \phi' + iq_i Y}) e^{-S_{free} - S_{\mu=0}} (B')^s \right] \end{aligned} \tag{170}$$

と書かれる。以後、混乱がない限り、$|\mu|$ を μ と書くことにする。

このように μ と g_s は常に

$$\left[\frac{\mu}{g_s^{\frac{2}{Q^2}}} \right]^s \tag{171}$$

という組み合わせで出てくることがわかる。

また、$s = Q(\beta + \frac{Q}{2}\chi)$ であったので、genus が 1 つ増えるたびに s は $-Q^2$ 変化する。これは、string の emitting と reabsorbing に対応しているので展開係数 x は実際には

$$x = \left[\frac{\mu}{g_s^{\frac{2}{Q^2}}} \right]^{(-\frac{Q^2}{2})} = \frac{g_s}{\mu^{\frac{Q^2}{2}}} \tag{172}$$

となる。これは Eq. (140) と同じ式である。

積分公式

これから頻繁に利用する積分の公式を書き記しておく。[22]

$$\begin{aligned} I &= \int d^2 z |z|^{-A} |1-z|^{-B} \\ &= B(1 - \frac{A}{2}, 1 - \frac{B}{2}, \frac{A+B}{2} - 1) \end{aligned} \tag{173}$$

$$B(a,b,c) = \pi \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b)\Gamma(b+c)\Gamma(c+a)} \tag{174}$$

後で必要になるので I の極についてコメントしておく。I の極は $\Gamma(1 - \frac{A}{2})$、$\Gamma(1 - \frac{B}{2})$、$\Gamma(\frac{A+B}{2} - 1)$ の極から生じる。I の表式から、それぞれの極は積分領域が

$$|z| \longrightarrow 0, 1, \infty$$

となるようなところからの寄与に対応していることがわかる。例えば、$z \to 0$ の積分領域からの寄与を考えると I は

$$I \sim \int d^2 z |z|^{-A}$$

のような表式で支配され、結果出てくる極を作り出す A について解析的な表現は $\Gamma(1-\frac{A}{2})$ である。

上の事実を利用すると、全体で解析的な表現を持つと仮定された積分表式において、極が生じる z の積分領域近傍での振る舞いを調べることにより、積分した結果生じる極の構造を見ることができる。具体的な例はあとで見られる。

4 点相関関数の評価

4 点相関関数 Eq. (170) を評価することを考える。

この式の前の係数は s が負でない整数になるとき発散する。しかし、この発散については良く理解されている。[20] worldsheet の観点では、これは Liouville mode ϕ が有限の範囲にないことを表していると解釈できる。また、$s=0$ での amplitude は bulk においておこる散乱過程としての space-time での解釈を持っている。bulk といっているのは Liouville potential による散乱ではないという意味である。実際に後で見るように、このことは Liouville potential の複雑さを除く効果を持っている。今後、この無限大の定数因子は書かないことにする。

ここでは、この $s=0$ で sphere の場合を実際に計算することにする。$s=0$ は摂動の leading term に相当しているために、LST においても意味を持った量であると考えられる。また、$s=0$ のときには Eq. (170) は

$$A^{(4)}_{s=0}(k_1,\cdots,k_4)\sim\int[d\phi'][dx][dY][dO']\ J_4\left[(\prod_{i=1}^{4}e^{ik_ix})(\prod_{i=1}^{4}e^{\beta_i\phi'+iq_iY})e^{-S_{free}-S_{\mu=0}}\right] \tag{175}$$

と簡単になる。この式は $\mu=0$ での Liouville action で評価されるので、普通の critical string の方法によって評価することができる。また、$s=0$ で sphere であるということから

$$\beta=\sum_{i=1}^{4}\beta_i=-Q \tag{176}$$

という関係があることがわかる。これは Liouville momentum の保存を表す式になっている。x や Y には通常の momentum 保存の式がある。

$$\sum_{i=1}^{4}k_i=0\,,\quad \sum_{i=1}^{4}q_i=0 \tag{177}$$

Eq. (175) を実際に評価してみる。$K_i\cdot K_j\equiv k_i\cdot k_j+q_iq_j-\beta_i\beta_j$ を使って

$$\begin{aligned}A^{(4)}_{s=0}(k_1,\cdots,k_4)\quad&\sim\quad\int d^2z_3\Bigg[|(z_1-z_2)(z_2-z_4)(z_4-z_1)|^2\\&\times\quad(K_1\cdot K_2)^2\cdot|z_1-z_2|^{-2}\cdot|z_3-z_4|^{-2}\prod_{1\le i<j\le 4}^{4}|z_i-z_j|^{2K_i\cdot K_j}\Bigg]\end{aligned} \tag{178}$$

ここで、$z_1\to 0$、$z_2\to 1$、$z_4\to\infty$ として、$z_3=z$ と書くと

$$\begin{aligned}&A^{(4)}_{s=0}(k_1,\cdots,k_4)\\&\sim(K_1\cdot K_2)^2\int d^2z|z|^{2K_1\cdot K_3}\cdot|1-z|^{2K_2\cdot K_3} &(179)\\&\sim(K_1\cdot K_2)^2\frac{\Gamma(1+K_1\cdot K_3)\Gamma(1+K_2\cdot K_3)\Gamma(-K_1\cdot K_3-K_2\cdot K_3-1)}{\Gamma(2+K_1\cdot K_3+K_2\cdot K_3)\Gamma(-K_1\cdot K_3)\Gamma(-K_2\cdot K_3)} &(180)\end{aligned}$$

Eq. (149)、Eq. (176) と Eq. (177) を使うと、右辺は

$$\begin{aligned}
&(K_1\cdot K_2)^2\frac{\Gamma(1+K_1\cdot K_3)\Gamma(1+K_2\cdot K_3)\Gamma(K_3\cdot K_4)}{\Gamma(1-K_3\cdot K_4)\Gamma(-K_1\cdot K_3)\Gamma(-K_2\cdot K_3)}\\
&=-\frac{\Gamma(1+K_1\cdot K_3)\Gamma(1+K_2\cdot K_3)\Gamma(1+K_3\cdot K_4)}{\Gamma(-K_3\cdot K_4)\Gamma(-K_1\cdot K_3)\Gamma(-K_2\cdot K_3)}
\end{aligned}\tag{181}$$

と変形される。結局以下のような簡単な表現にまとまる。

$$A^{(4)}_{s=0}(k_1,\cdots,k_4)\sim\prod_{i=1,2,4}\frac{\Gamma(k_3\cdot k_i+q_3q_i-\beta_3\beta_i+1)}{\Gamma(\beta_3\beta_i-k_3\cdot k_i-q_3q_i)}\tag{182}$$

13.2 Little String Theory における 4 点相関関数

上のようにして求まった、non-critical superstring theory の 4 点相関関数は holographic duality により、Little String Theory の 4 点相関関数とみなすことができる。求められた 4 点相関関数 Eq. (182) について考察しておこう。

Eq. (182) の極がどこにあるのか調べてみる。Γ 関数の性質から、次の位置に 1 位の極があることがわかる。

$$k_3\cdot k_i+q_3\cdot q_i-\beta_3\cdot\beta_i+1=-n;\ n=0,1,2,\cdots\tag{183}$$

この極を $k_1+k_2\to k\to k_3+k_4$ という過程の中間状態によって作り出されると考えてみる。その中間状態の運動量は $k=k_1+k_2=-k_3-k_4$ である。この運動量のときに相関関数に極ができるということから、Little String Theory には on-shell mass spectrum M として

$$M^2=-k^2=-(k_3+k_4)^2=-k_3^2-k_4^2-2k_3\cdot k_4\tag{184}$$

が存在しているといえる。Eq. (149) と Eq. (183) より

$$k_3^2 = 1-q_3^2+\beta_3(\beta_3+Q)\tag{185}$$

$$k_4^2 = 1-q_4^2+\beta_4(\beta_4+Q)\tag{186}$$

$$k_3\cdot k_4 = -q_3\cdot q_4+\beta_3\cdot\beta_4-1-n\tag{187}$$

であるので、最終的な表式として

$$M^2=2n+(q_3+q_4)^2-(\beta_3+\beta_4)^2-(\beta_3+\beta_4)Q\tag{188}$$

が得られる。

この spectrum Eq. (188) は β が連続的であることから、連続的である。これを固定するような条件はこの場合見当たらない。このことは、noncrtical superstring theory の 4 点相関関数の中間状態は単粒子に対応しているが、一方その dual である LST における 4 点相関関数の中間状態は複雑な多粒子状態に対応しているためである。このように、4 点相関関数から粒子 spectrum を読み取ることはできないことがわかる。

次に、mass spectrum は任意の負でない整数 n に対して linear に依存しており、β や q が固定されれば、mass はどこまででも離散的に大きくなる。Eq. (150) という条件と Eq. (176) より、

$$-Q<\beta_3+\beta_4<0\tag{189}$$

という条件があることがわかる。両辺に $\frac{Q}{2}$ を加えて 2 乗することにより、

$$-\frac{Q^2}{2} < (\beta_3+\beta_4)^2 + (\beta_3+\beta_4)Q \le 0 \tag{190}$$

という条件がつく。この式と Eq. (188) を比べると spectrum は下から bound されていることがわかる。特に M^2 は必ず 0 よりも大きく、理論に tachyon による不安定性は存在していないことになる。

13.3 2 点相関関数

上で述べたように、4 点相関関数を調べても、LST においてどのような粒子 spectrum が存在しているのかを知ることはできない。粒子 spectrum を調べるためには 2 点相関関数を計算し、その極がどこに生じるか考える必要がある。

2 点相関関数の計算は、4 点相関関数の計算を応用することにより実行することができる。しかし、4 点相関関数のときとは大きく異なる点がいくつか存在している。主な違いは 2 つある。1 つには、よく知られているように string theory で 2 点相関関数を計算してもそれは 0 である。大雑把に言うと、このことは Eq. (154) をみてもわかるように $V_{SL(2,C)}$ で割って有限な値を出すには積分が 3 つ必要であるが、2 点相関関数では 2 つしかないためである。

次に、2 点相関関数の場合には s を決めると保存則により自由に動くことのできる変数がなくなってしまうことである。このために spectrum を計算するためには s を任意にしたまま議論する必要がある。

この subsection では、以上の問題を考慮しながら 2 点相関関数の計算を、4 点相関関数の計算に沿って進めていく。

2 点相関関数

2 点相関関数 $A^{(2)}$ は次のように表されるべきである。

$$A^{(2)}(k_1,k_2) \sim \frac{1}{V_{SL(2,C)}} < \int d^2z_1\, T(z_1) \int d^2z_2\, T(z_2) > \tag{191}$$

$$\sim \frac{1}{V_{SL(2,C)}} \int [d\phi][dO] \int d^2z_1\, T_1 \int d^2z_2\, T_2\; e^{-S} \tag{192}$$

この式において ϕ の 0-mode 積分は前と同じようにして実行することができ、次のようになることがわかる。

$$A^{(2)}(k_1,k_2) \sim \int [d\phi'][dx][dY][dO']\, \frac{B^s\Gamma(-s)}{V_{SL(2,C)}} \Big(\prod_{i=1}^{2} \int d^2z_i\, e^{-\varphi_g-\bar{\varphi}_g} e^{ik_ix} e^{\beta_i\phi'+iq_iY}\Big)\, e^{-S_{free}-S_{\mu=0}} \tag{193}$$

ここで、4 点相関関数のときの類似として、次の変数が定義されている。

$$\beta = \beta_1+\beta_2,\ s = Q(\beta+\frac{Q}{2}\chi) \tag{194}$$

以後、sphere $(\chi=2)$ の場合に集中する。また 4 点の場合と全く同様にして string coupling g_s は常に Eq. (171) という組み合わせで出てくるので、簡単のために $g_s=1$ として議論を進めることにする。こうすると μ は double scaling limit をとったとき理論の展開係数 x に対応している。Eq. (193) より 2 点相関関数は μ^s の order であるために Eq. (171) より $x^{-\frac{2}{Q^2}s}$ の order である。この事実のために、計算の過程において μ を省略することにする。

bosonization

はじめに述べたように 2 点相関関数の場合には s を任意のまま残しておく必要がある。したがって B を取り扱いやすい形に書き換えておくのが便利である。B は具体的には Eq. (164) にあるように次の形をしている。

$$B=\int d^2z\frac{\gamma^2}{4\pi}(\mu\psi_+\bar{\psi}_+e^{i\frac{1}{Q}Y}+\mu^*\psi_-\bar{\psi}_-e^{-i\frac{1}{Q}Y})\,e^{-\frac{1}{Q}\phi'} \tag{195}$$

この式には fermion ψ_+ や ψ_- が存在しているので bosonize しておく。boson $H(z,\bar{z})$ を次のように導入する。

$$\psi_+\bar{\psi}_+=e^{iH}\quad,\qquad \psi_-\bar{\psi}_-=e^{-iH} \tag{196}$$

$$H(z,\bar{z})\cdot H(0,0)\quad\sim\quad -\ln|z|^2 \tag{197}$$

cocycle は議論に影響しないので、簡単のために無視する。このとき H は free boson と同じようにして扱うことができる。B は H を使って書くと次のようになる。

$$B=\int d^2z\frac{\gamma^2}{4\pi}(\mu e^{i\frac{1}{Q}Y+iH}+\mu^*e^{-i\frac{1}{Q}Y-iH})\,e^{-\frac{1}{Q}\phi'} \tag{198}$$

しばしばこの式は次のように書かれる。

$$B=\mu\frac{\gamma^2}{4\pi}\Big(\int d^2\omega\,e^{i\alpha Y+iH+i\theta}\,e^{-\alpha\phi'}+\int d^2\sigma\,e^{-i\alpha Y-iH-i\theta}\,e^{-\alpha\phi'}\Big) \tag{199}$$

ここで、$\alpha=\frac{1}{Q}$ によって α を導入している。

積分表式

2 点相関関数を任意の s について求めるのは Eq. (193) を見てもわかるように無理である。ここでは s は整数だと仮定して計算する。そうして得られた式が s が一般の複素数であるように解析接続されていると考えることにする。

2 点相関関数 Eq. (193) は次のような path-integral として表現される。

$$\begin{aligned}&A^{(2)}(k_1,k_2)\sim\\&\frac{1}{V_{SL(2,C)}}\int[d\phi'][dx][dY][dO']\Bigg[\\&\quad\times\Big(\int d^2z_1e^{-\varphi_g-\bar{\varphi}_g}e^{ik_1x+\beta_1\phi'+iq_1Y}\Big)\Big(\int d^2z_2e^{-\varphi_g-\bar{\varphi}_g}e^{ik_2x+\beta_2\phi'+iq_2Y}\Big)\\&\qquad\times\Big(\int d^2\omega e^{i\alpha Y+iH+i\theta}e^{-\alpha\phi'}+\int d^2\sigma e^{-i\alpha Y-iH-i\theta}e^{-\alpha\phi'}\Big)^s\Bigg]\end{aligned} \tag{200}$$

この式で 0 にならない寄与を与える項は次のように書ける。

$$
\begin{aligned}
&A^{(2)}(k_1,k_2) \sim \\
&\frac{1}{V_{SL(2,C)}}\int [d\phi'][dx][dY][dO']\Bigg[\\
&\quad\times\left(\int d^2z_1 e^{-\varphi_g-\bar{\varphi}_g}e^{ik_1x+\beta_1\phi'+iq_1Y}\right)\left(\int d^2z_2 e^{-\varphi_g-\bar{\varphi}_g}e^{ik_2x+\beta_2\phi'+iq_2Y}\right) \\
&\qquad\times\left(\prod_{I=1}^{\frac{s}{2}}\int d^2\omega_I e^{i\alpha Y+iH}e^{-\alpha\phi'}\right)\left(\prod_{I=1}^{\frac{s}{2}}\int d^2\sigma_I e^{-i\alpha Y-iH}e^{-\alpha\phi'}\right)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{201}
$$

つまり、s は偶数である必要がある。

ここで $\int d^2z_1\int d^2z_2\int d^2\omega_1$ が Eq. (154) により、$V_{SL(2,C)}$ を生じると考えることにより、

$$
\begin{aligned}
&A^{(2)}(k_1,k_2) \sim \\
&|(z_1-z_2)(z_2-\omega_1)(\omega_1-z_1)|^2 e^{-\varphi_g-\bar{\varphi}_g}e^{ik_1x+\beta_1\phi'+iq_1Y}e^{-\varphi_g-\bar{\varphi}_g}e^{ik_2x+\beta_2\phi'+iq_2Y} \\
&\times\left(e^{i\alpha Y+iH}e^{-\alpha\phi'}(\omega_1)\right)\left(\prod_{I=2}^{\frac{s}{2}}\int d^2\omega_I e^{i\alpha Y+iH}e^{-\alpha\phi'}\right)\left(\prod_{I=1}^{\frac{s}{2}}\int d^2\sigma_I e^{-i\alpha Y-iH}e^{-\alpha\phi'}\right)
\end{aligned}
\tag{202}
$$

という表現を得る。このように string theory の 2 点相関関数に意味のある値を与えることができた。

この式は次のようにまとめられる。

$$
\begin{aligned}
&A^{(2)}(k_1,k_2) \sim \\
&|(z_1-z_2)(z_2-\omega_1)(\omega_1-z_1)|^2\frac{1}{|z_1-z_2|^2}|z_1-z_2|^{2K_1\cdot K_2}\times \\
&\Bigg[\left(\prod_{I=2}^{\frac{s}{2}}\int d^2\omega_I\right)\left(\prod_{I=1}^{\frac{s}{2}}\int d^2\sigma_I\right)\left(\prod_{I=1}^{\frac{s}{2}}\prod_{i=1}^{2}|z_i-\omega_I|^{2\alpha q_i+2\alpha\beta_i}\right)\left(\prod_{I=1}^{\frac{s}{2}}\prod_{i=1}^{2}|z_i-\sigma_I|^{-2\alpha q_i+2\alpha\beta_i}\right) \\
&\cdot\left(\prod_{1\le I<J\le\frac{s}{2}}|\omega_I-\omega_J|^2\right)\left(\prod_{1\le I<J\le\frac{s}{2}}|\sigma_I-\sigma_J|^2\right)\left(\prod_{I,J=1}^{\frac{s}{2}}|\omega_I-\sigma_J|^{-4\alpha^2-2}\right)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{203}
$$

この場合の保存則は次のようになる。

$$
k_1+k_2=0,\quad q_1+q_2=0,\quad \beta=\beta_1+\beta_2=s\alpha-Q \tag{204}
$$

z_1、z_2、ω_1 の位置を $z_1\to 0$、$z_2\to 1$、$\omega_1\to\infty$ のように固定しよう。そうすると上の式は

$$
\begin{aligned}
&A^{(2)}(k_1,k_2) \sim \\
&\int\prod_{I=2}^{\frac{s}{2}}d^2\omega_I\prod_{I=1}^{\frac{s}{2}}d^2\sigma_I\Bigg[\\
&\left(\prod_{I=2}^{\frac{s}{2}}|\omega_I|^{2\alpha q_1+2\alpha\beta_1}|1-\omega_I|^{2\alpha q_2+2\alpha\beta_2}\right)\cdot\left(\prod_{I=1}^{\frac{s}{2}}|\sigma_I|^{-2\alpha q_1+2\alpha\beta_1}|1-\sigma_I|^{-2\alpha q_2+2\alpha\beta_2}\right) \\
&\left(\prod_{2\le I<J\le\frac{s}{2}}|\omega_I-\omega_J|^2\right)\left(\prod_{1\le I<J\le\frac{s}{2}}|\sigma_I-\sigma_J|^2\right)\left(\prod_{I=2,J=1}^{\frac{s}{2}}|\omega_I-\sigma_J|^{-4\alpha^2-2}\right)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{205}
$$

となる。式からも明らかなように、この時点ではまだ s が偶数ということは仮定されている。

次に進む前に Eq. (149) と Eq. (204) から得られる関係について述べておく。Eq. (204) のはじめの 2 つの式から $k_2 = -k_1$、$q_2 = -q_1$ が得られるが、Eq. (149) にこれを代入することで β_i に関して $\beta_1 = \beta_2$ が成り立つことがわかる。したがって、β_1 と β_2 はともに s の関数として

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}(s\alpha - Q) \tag{206}$$

と表される。このために s を任意のまま残して計算する必要があったのである。

積分表式の評価

non-critical superstring theory の 2 点相関関数は Little String Theory で解釈すると off-shell の Green 関数に相当している。したがって、Little String Theory の on-shell spectrum は求めた 2 点相関関数の 1 位の極を作り出す運動量によって決定される。

実際に Eq. (205) を計算して極がどこに生じるのか考えたいが、この積分を実行することは難しい。今、知りたいのは極がどこに生じるのかということであるので、Eq. (205) の完全な表現を知る必要はない。ここでは、Eq. (173) の下でなされた議論を応用することにより、極の位置を知ることを考える。

Eq. (205) を実行する際に極が生じるのは 2 つ以上の変数が同じ位置にくるような領域で積分をするときである。そこで、0 にいくつかの変数が近づくことにより生じる極について考える。そうすることで一般性は失われない。ω_I のうち L 個、σ_I のうち N 個が 0 に近づくと考える。次のような変数変換をする。

$$\begin{aligned} &\omega_1 = \varepsilon,\ \omega_2 = \varepsilon\lambda_2, \cdots,\ \omega_L = \varepsilon\lambda_L, \\ &\sigma_1 = \varepsilon\lambda_{L+1},\ \sigma_2 = \varepsilon\lambda_{L+2},\ \cdots,\ \sigma_N = \varepsilon\lambda_{L+N} \end{aligned} \tag{207}$$

そうして、$\varepsilon \to 0$ という積分領域での振る舞いをみる。Eq. (207) を Eq. (205) に代入して $\varepsilon \to 0$ において重要になる項を取り出すと

$$\begin{aligned} &A^{(2)}(k_1, k_2) \\ \sim\ &\int d^2\varepsilon \prod_{I=1}^{L} |\varepsilon|^{2\alpha(\beta_1+q_1)} \prod_{I=1}^{N} |\varepsilon|^{2\alpha(\beta_1-q_1)} \prod_{1\le I<J\le L} |\varepsilon|^2 \prod_{1\le I<J\le N} |\varepsilon|^2 \prod_{I=1}^{L}\prod_{J=1}^{N} |\varepsilon|^{-4\alpha^2-2} \\ \sim\ &\int d^2\varepsilon\ |\varepsilon|^{2\alpha\left(L(\beta_1+q_1)+N(\beta_1-q_1)\right)+(L-N)^2-L-N-4LN\alpha^2} \end{aligned} \tag{208}$$

とまとめられる。このときにどのような極が生じるかということは Eq. (173) の下で議論された。その結果を用いると上のような状況で $A^{(2)}$ に生じる構造は

$$A^{(2)}(k_1, k_2) \sim \Gamma\Big(1 + \alpha[L(\beta_1 + q_1) + N(\beta_1 - q_2)] + \frac{1}{2}(L-N)^2 - \frac{L+N}{2} - 2LN\alpha^2\Big) \tag{209}$$

である。この時点で s は一般の複素数だと考えることができる。(Eq. (206) 参照)

2 点相関関数の極は次の位置に生じることがわかる。

$$1 + \alpha[L(\beta_1 + q_1) + N(\beta_1 - q_1)] + \frac{1}{2}(L-N)^2 - \frac{L+N}{2} - 2LN\alpha^2 = -m \tag{210}$$

ここで m は負でない整数。つまり、$m = 0, 1, 2, \cdots$。

Little String Theory の mass spectrum

上に得られた結果に対して、$(L=1,N=0)$、$(L=0,N=1)$ というもっとも単純な 1 位の極に対応する LST の spectrum を考える。これ以外の極は多重極に対応しているなど、より singular な振る舞いをして非物理的であると考えられる。さらに考察する 2 つの極は $q_1 \leftrightarrow q_2$ という自明な変数の変換に対応しているので $(L=0,N=1)$ の場合だけに集中して、$q_1>0$ と考えれば十分である。このとき Eq. (210) は

$$\alpha(\beta_1 - q_1) = -n, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{211}$$

のように簡単になる。これより、Eq. (149) を使うと、LST における mass spectrum M^2 を導くことができる。はじめに β を消去することを考える。

$$\begin{aligned} M^2 &= -k_1^2 = -1 + q_1^2 - \beta_1(\beta_1 + Q) \\ &= -1 + q_1^2 - (q_1 - \frac{n}{\alpha})(q_1 - \frac{n}{\alpha} + Q) \end{aligned} \tag{212}$$

q_1 については Eq. (150) のように GSO projection により条件がついている。したがって l を正の奇数 $(l=1,3,5,\cdots)$ と考えて

$$q = \frac{l}{Q} \tag{213}$$

とおくと、Eq. (212) は

$$\begin{aligned} M^2 &= -1 + \frac{l^2}{Q^2} - (q_1 - \frac{n}{\alpha})(q_1 - \frac{n}{\alpha} + Q) \\ &= l - 1 + Q^2(n-1)(\frac{2}{Q^2}l - n) \quad l = 1, 3, \cdots, \quad n = 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{214}$$

と書きなおされる。

4 点相関関数における結論とは違って、ここで spectrum が離散的なことは考えている spectrum が単粒子状態に対応していることを意味している。

$n=1$、$l=1$ とすればわかるように、massless state が存在していることは興味深い。このことは supersymmetry と組み合わさって対称性の存在を示唆しているように思える。また、この spectrum は無限に多くの massive state を持っているなど、string theory に特徴的な性質を持っていることもわかる。

$SL(2)/U(1)$ coset model を使った結果との比較

N=2 Liouville theory と $SL(2)/U(1)$ coset model は dual であることが知られている。Giveon らはこの duality を使って、$SL(2)/U(1)$ coset model で 2 点相関関数を計算し、LST に存在する mass spectrum を決定している。[15] この section で求めた結果は、Giveon らが求めた結果をほとんど再生している。ここでの結果が $SL(2)/U(1)$ coset model での結果と一致したということは coset model と N=2 Liouville theory の duality の証拠の 1 つとなり得る。

$SL(2)/U(1)$ coset model に比べて、ここで紹介された方法が優れていると思われる点としては holographic duality によって直接に NS5-brane のような物理的な系とつながっているということがあげられる。それぞれの parameter は NS5-brane background の parameter

と直接に対応している。そのため、実際に問題を物理的な系に当てはめるときに直観的な描像が得やすい。また、展開係数 x の order が明らかになっているということも重要である。そのため、どの order で議論がしているのかが非常に明確になっている。

今後の課題

今後の課題もまた残されている。Giveon らの結果をほとんど再生したと述べたのは unitary bound についての議論が不充分であるためである。Giveon らは $SL(2)/U(1)$ coset model の unitarity bound から mass spectrum が tachyonic になる領域を取り除いている。しかし、N=2 Liouville 理論において対応する条件は見つけられない。具体的には Liouville momentum β に対して

$$\beta < \frac{1}{Q} - \frac{Q}{2} \tag{215}$$

という条件が必要であるように思える。この条件が一般的に成り立つものなのか、今の系に特有なのかということは非常に興味深い。また、NS5-brane の系に対して何を意味しているのかを考察する必要もある。そのためにやや大雑把であった議論をもっと厳密にしていくことが必要であろう。

次にあげられるのは、摂動の展開係数 x についての order をあげることである。ここで得られた結果は x の leading term を取り出しただけである。order をあげることで、もっと特異な現象が見られるのは理論の非局所性から明らかである。これは、string loop 計算をすることが必要で困難であると考えられる。

またここでは、tachyon vertex operator でさらに LG part が 1 であるような operator Eq. (147) の相関関数だけを求めた。これをもっといろいろな operator に拡張することを考えるのは自然で、それほど困難とは思われない。このようにして、LST についてもっと多角的な情報を得る必要がある。

最後に、ここでは 2 点相関関数と 4 点相関関数だけを考えたが、3 点相関関数についても同様の議論ができる。3 点相関関数についても Giveon らによって計算されている [23]。そこでの結果とここに紹介された方法での結果がどのように対応しているか考察することは非自明な duality の check であるとともに、LST の相互作用を考える上でも興味深い。

14 おわりに

この論文では NS5-brane 上に現われる理論として、Little String Theory を定義して、その holographic description を用いて LST を解析する方法までを紹介してきた。その過程では、holographic duality や重なった NS5-brane に対して double scaling limit などが提案された。

holographic description は singular CY のように活発な分野との関わりをもち、その解析の手段を提供する。

また double scaling limit は NS5-brane に対して非摂動的な新しい見方を提案するもので、従来では理解できないことを説明することに成功している。例えば、NS5-brane を含んだ brane configuration を考えたとき、NS5-brane 上の field content などが double scaling limit を使ってうまく説明された。[24]

NS5-brane や非局所理論としての Little String Theory に対する理解を深めていくことは string theory や場の理論双方にとって重要な意味をもち、その手段を与える holographic description や double scaling limit が今後ますます重要になっていくと思われる。

本文に紹介された相関関数に関する今後の課題については section 13 の最後で述べた通りである。ここでは、そのほかの応用について考えたい。

- singular CY deformation
  本文において考察された変形の他にどのような変形があるか、探すのは興味深い。新しい変形は新しい理論に対応するように思える。特に singularity の regulate には blow up と deformation の 2 種類ある。それぞれに対応するものは何かという考察は意味があるように思える。

- 違った NS5-brane configuration への応用
  重なった NS5-brane 以外のいろいろな状況に double scaling limit を応用してみて、出てきた結果を解析してみるのは面白い。

- 様々な次元へ
  ここでは具体的な考察は 6 次元に絞られていたが、様々な次元でやってみるのは面白い。4 次元非局所的場の理論などは何か応用を持っていることが考えられる。また、対応する configuration、deformation は何か？

- Liouville potential term について
  何故、どのように、Liouville potential term が作り出されるのかはあまり明らかではない。この点を明らかにするのは最も重要な課題であるように思える。

これらの研究を通して、orbifold point 近傍での Little String Theory のような特異な理論の振る舞いなどを明らかにしていきたい。

他の部分でうまくいっていることを NS5-brane に応用してみても、必ずうまくいかない。これは NS5-brane が非摂動的な効果を考慮して記述するべきものであるためであるように思える。うまくいかない 1 つの現象は double scaling limit によって解決される。これが double scaling limit の研究が重要と思われる理由の 1 つである。

最後に、NS5-brane の研究をきっかけにして、弦理論の非摂動的側面の理解が飛躍的に深まることを期待する。

Acknowledgements

この論文を精読してくださった二宮正夫先生、国友浩先生に感謝します。また、国友浩先生にはテーマの提供をはじめ、不明な点を何度も教えていただきました。最後に、細道和夫さんはじめ基礎物理学研究所の方々にはこの論文を書く上で大変お世話になりました。本当にありがとうございました。

A worldsheet notation

worldsheet 上の座標の取り方と、metric について記しておく。[26] 初めに、worldsheet 上では Euclid metric をとる。worldsheet 上の座標を σ_1、σ_2 とすると、metric g_{ab} は

$$d^2s = g_{ab}d\sigma^a d\sigma^b = d\sigma_1 d\sigma_1 + d\sigma_2 d\sigma_2 \tag{216}$$

complex 座標 z、$\bar{z}$ を次のように導入する。

$$z = \sigma_1 + i\sigma_2\,, \quad \bar{z} = \sigma_1 - i\sigma_2 \tag{217}$$

z を left-moving part、$\bar{z}$ を right-moving part と呼ぶ。さらに、微分を

$$\frac{\partial}{\partial z} \equiv \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial \sigma_1} - i\frac{\partial}{\partial \sigma_2}) \tag{218}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial \sigma_1} + i\frac{\partial}{\partial \sigma_2}) \tag{219}$$

と定義する。次のような省略記号はいたるところで使われる。

$$\frac{\partial}{\partial z} = \partial_z = \partial \tag{220}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \partial_{\bar{z}} = \bar{\partial} \tag{221}$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_1} = \partial_1 \quad e.t.c. \tag{222}$$

complex 座標における metric は

$$g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = \frac{1}{2} \quad , \quad g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \tag{223}$$

$$g^{z\bar{z}} = g^{\bar{z}z} = 2 \quad , \quad g^{zz} = g^{\bar{z}\bar{z}} = 0 \tag{224}$$

最後に、積分の measure を次のように定義する。

$$d^2\sigma = d\sigma_1 d\sigma_2 = \frac{1}{2}d^2z = \frac{1}{2}dzd\bar{z} \tag{225}$$

つまり、いつも $d^2\sigma\sqrt{g}$ は座標変換の不変量であるようにする。ただし、$g = |det[g_{ab}]|$ 。これに伴い δ 関数は

$$\int d^2z\delta(z,\bar{z}) = \int d^2\sigma\delta(\sigma_1)\delta(\sigma_2) = 1 \tag{226}$$

のように定義される。

B convention

ここでは、使われている brane などに関係した convention をまとめておく。[26]
はじめに、string coupling g_s と string scale l_s を導入する。
string theory や M theory に登場する全ての量はこれら 2 つの変数であらわされる。
fundamental string の tension は

$$T_{F_1} = \frac{1}{2\pi l_s^2} \tag{227}$$

Dp-brane の tension は

$$T_{Dp} = \frac{1}{(2\pi)^p l_s^{p+1} g_s} \tag{228}$$

NS5-brane の tension は

$$T_{NS5} = \frac{1}{(2\pi)^5 l_s^6 g_s^2} \tag{229}$$

Dp-brane 上の YM 理論を考えたときの coupling は

$$g_{Dp}^2 = g_{YM}^2 = \frac{1}{(2\pi l_s^2)^2 T_{Dp}} = (2\pi)^{p-2} l_s^{p-3} g_s \tag{230}$$

10 次元 Newton constant κ (10 次元 supergravity の action を書くと $\frac{1}{2\kappa^2}\int d^{10}xR + \cdots$ となる。) は

$$\kappa^2 = \frac{1}{2}(2\pi)^7 l_s^8 g_s^2 \tag{231}$$

gravitational length (10 次元 planck length) は

$$l_0 = (4\pi)^{-1/8}\kappa^{1/4} = (2\pi)^{1/2} l_s g_s^{1/4} \tag{232}$$

次に M 理論との関係を考える。

type IIA 理論は M 理論を半径 $R_{10} = g_s l_s$ でコンパクト化した理論であって、M2-brane tension は

$$T_{M2} = T_{D2} = \frac{1}{4\pi^2 l_s^3 g_s} \tag{233}$$

M5-brane tension は

$$T_{M5} = T_{NS5} = \frac{1}{(2\pi)^5 l_s^6 g_s^2} \tag{234}$$

11 次元 gravitational coupling (11 次元 supergravity の action を書くと $\frac{1}{2\kappa^2}\int d^{10}xR + \cdots$ となる。) は

$$\kappa_{11}^2 = 2\pi R_{10}\kappa^2 = \frac{1}{2}(2\pi)^8 l_s^9 g_s^3 \tag{235}$$

11 次元 planck length は

$$l_p = l_s g_s^{1/3} \tag{236}$$

11 次元 planck mass は

$$M_{11} = l_s^{-1} g_s^{-1/3} \tag{237}$$

また、次の関係が成り立つ。

$$(M_{11}R_{10})^{3/2} = g_s \tag{238}$$

$$M_{11}^{-3} R_{10}^{-1} = l_s^2 \tag{239}$$

C NS5-brane and Dp-brane metric

NS5-brane と Dp-brane の supergravity 解を string metric でまとめて書いておく。はじめに N 枚の重なった NS5-brane metric は

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + f_{NS}(x^i)\delta_{ij}dx^i dx^j \tag{240}$$

$$e^{-2(\Phi-\Phi_0)} = f_{NS}^{-1}(x^i) \tag{241}$$

$$H_{ijk} = (dB)_{ijk} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijkl}\partial_l f_{NS}(x^i) \tag{242}$$

$$f_{NS}(x^i) = 1 + \frac{Nl_s^2}{(x^i)^2} \tag{243}$$

ここで、NS5-brane は μ 方向に広がっており、i 方向には直交している。($\mu,\nu = 0,\cdots,5$, $i,j = 6,\cdots,9$) また、$(x^i)^2 = (x^6)^2 + \cdots + (x^9)^2$ であり、B は 2 階の反対称 tensor。(NS B field)

つぎに N 枚の重なった Dp-brane metric は

$$\begin{aligned} ds^2 &= f_p^{-1/2}(x^i)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + f_p^{1/2}(x^i)\delta_{ij}dx^i dx^j && (244) \\ e^{-2(\Phi-\Phi_0)} &= f_p^{\frac{p-3}{2}}(x^i) && (245) \\ A_{0\cdots p} &= -\frac{1}{2}(f_p^{-1}(x^i) - 1) && (246) \\ f_p(x^i) &= 1 + N\frac{2^{5-p}\pi^{\frac{5-p}{2}}\Gamma(\frac{7-p}{2})l_s^{7-p}g_s}{(x^i)^{7-p}} && (247) \end{aligned}$$

ここで、Dp-brane は μ 方向に広がっており、i 方向には直交している。($\mu,\nu = 0,\cdots,p$, $i,j = p+1,\cdots,9$) また、$(x^i)^2 = (x^{p+1})^2 + \cdots + (x^9)^2$ であり、A は p 階の反対称 tensor。(RR field)

D 6 次元 supersymmetry

ここでは、16 個の supercharge を持った 6 次元の理論における、superalgebra とその massless multiplet を書きとめておく。[27]

その前にまず、6 次元の spinor について述べておく必要がある。6 次元 Lorenz 群 SO(1,5) の spinor 表現は pseudoreal である。よって spinor の chirality は charge conjugate では変わらない。また、独立な real 成分は 8 個である。

一般に 6 次元 (p,q) supersymmetry ($Q_{i+}; i = 1,\cdots,p$, $Q_{j-}; j = 1,\cdots,q$) を持った、superalgebra は

$$\begin{aligned} \{Q_{i+}\,,\,Q^T_{j+}\} &= P_+\Gamma_\alpha p^\alpha C\Omega^+_{ij} \\ \{Q_{i+}\,,\,Q^T_{j-}\} &= P_+ C Z_{ij} \\ \{Q_{i-}\,,\,Q^T_{j-}\} &= P_-\Gamma_\alpha p^\alpha C\Omega^-_{ij} \end{aligned} \qquad (248)$$

ここで Γ_α、$P_\pm$、Z_{ij}、p^α、C はそれぞれ Γ 行列、chirality $\pm$ への射影演算子、central charge、運動量 vector、charge conjugation operator である。spinor には pseudoreal であることにより

$$Q_{i+} = \Omega^+_{ij}C\bar{Q}^T_{j+}, \quad Q_{i-} = \Omega^-_{ij}C\bar{Q}^T_{j-} \qquad (249)$$

という条件 (psedo-Majorana 条件) を課している。$\bar{Q}$ は Q の Dirac conjugate (今の場合 $\bar{Q} = Q^\dagger\Gamma^0$)。

この代数 Eq. (248) はまた、automorphism 群として知られる群のもとで不変である。その群は添え字 i、j を群の index とみなすような群である。今の場合には $USp(p)\times USp(q)$ となっている。

D.1 6 次元 (2,0) supersymmetry

このとき独立な成分としてあるのは Q_{1+}、Q_{2+} の 2 つである。それぞれが real 成分 8 個を持っているので、合計で supercharge が 16 個あることになる。massless multiplet は通常の

ようにEq. (248)においてcentral chargeを0とおき、light cone gaugeを考えてFock spaceを作ることで決定することができる。このときbosonic little groupは$SO(4) \times USp(2)$になる。masslessでspinが1より大きい場を含まないmultipletだけを書いておくと、

boson ; self-dual 2-form B $(dB = *dB)$ + scalar $\phi \times 5$
fermion ; positive chirality fermion×4

D.2 6次元 $(1,1)$ supersymmetry

このときのbosonic little groupは$SO(4) \times USp(1) \times USp(1)$である。同様にして、masslessでspinが1より大きい場を含まないmultipletだけを書いておくと、

boson ; vector + scalar×4
fermion ; positive and negative chirality fermion

本文中には出てこないが、$(1,1)$ supersymmetryのときにはさらにもう1組存在する。

boson ; vector + scalar×(4+8)
fermion ; positve chirality fermion×6 + negative chirality fermion×(2+4)

である。(4+8)や(2+4)のように書いているのはlittle groupに対する表現が異なるものを区別するためである。

E Calabi-Yau manifold

Calabi-Yau manifoldの詳しい取り扱いについては文献を参照する必要がある。ここでは、本文中で利用する事実を、ごく簡単に概観しておくにとどまる。[28]
Calabi-Yau n-foldはcomplex kähler manifoldで次の条件のうちいずれかをみたす多様体である。

- $SU(n)$ holonomyを持つ。
- Ricci-flat metricをとれる。
- first Chern classが0である。

これらの3つの条件はkähler manifoldに適用されるとき全て等価であるため、どれかひとつの条件を満たせば3つ全て満たしていることになる。
簡単に使われている用語を説明しておく。

1. complex manifold
   real manifold (座標 $x_1, x_2, \cdots, x_{2n}$) に次のように複素座標

$$z_1 = x_1 + ix_{n+1}, \cdots, z_n = x_n + ix_{2n} \tag{250}$$

とその複素共役 ($\bar{z}$ でしるす) を導入すると、多様体上の patch U_1 (座標 z) と U_2 (座標 w) の間の遷移関数が holomorphic になるものをいう。(例; $z_i = f(w_j, \bar{w}_k) = f(w_j)$) つまりひとつの patch で holomorphic な関数はどの patch でも holomorphic な関数となっていて、holomorphicity の global な定義が可能である。

2. k$\ddot{a}$hler manifold
complex manifold でその metric が hermite つまり $g = g_{i\bar{j}} dz^i d\bar{z}^{\bar{j}} + c.c.$ と書けるときに

$$J = \frac{i}{2} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^{\bar{j}} \tag{251}$$

のように定義された (1,1)-form J （k$\ddot{a}$hler form と呼ばれる）が closed であるとき、その manifold は k$\ddot{a}$hler manifold と呼ばれる。k$\ddot{a}$hler form が closed である結果、manifold の metric は local な関数 K(z,$\bar{z}$) (k$\ddot{a}$hler potential) を使って

$$g_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 K(z,\bar{z})}{\partial z^i \partial \bar{z}^{\bar{j}}} \tag{252}$$

と書ける。関数 K は各 patch 上で定義されているが、metric 自体は global に定義されている。

3. CY condition
ここでは complex k$\ddot{a}$hler manifold が Calabi-Yau manifold になるための条件を CY condition と呼ぶ。CY condition はさまざまな結果をもたらすが、ここでは後に必要なことを述べるだけにする。特に $SU(n)$ holonomy を持つという事実を使うと、Calabi-Yau n-fold には covariantly constant holomorphic n-form Ω が存在していることを示すことができる。Ω は下に説明される定義式 $F(z) = 0$ を使うと

$$\Omega = \frac{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}{\partial F / \partial z^{n+1}} \tag{253}$$

のように書かれる。逆にこのような constant holomorphic n-form が存在している complex k$\ddot{a}$hler manifold は Calabi-Yau manifold だということができる。

次に、具体的に複素次元 n の Calabi-Yau manifold (以後 CY^n と略す) はどのように実現されるか紹介したい。ここでは特に、n 次元 complex projective plane (CP^n と略す) もしくは n 次元 weighted projective plane (WCP^n と略す) の中の代数方程式 $F(z) = 0$ によって表される多様体が CY になるために定義式 F が満たすべき条件を与えることにする。CP や WCP 自体が k$\ddot{a}$hler manifold である結果、その中に実現される manifold はまた k$\ddot{a}$hler manifold である。

はじめに、複素 n 次元 WCP^n は通常 $WCP^n(k_1, \cdots, k_{n+1})$ と表記され、空間 C^{n+1} において

$$(z_1, z_2, \cdots, z_{n+1}) \sim (\lambda^{k_1} z_1, \lambda^{k_2} z_2, \cdots, \lambda^{k_{n+1}} z_{n+1}) \tag{254}$$

という同一視をすることで定義された空間である。ここで k_i は正の整数で、それぞれ z_i の weight と呼ばれる。WCP において全ての k_i を等しくおいたものは CP になるのでここでは WCP についてのみ考察すれば十分である。Eq. (254) の同一視をするさいに原点は除かれている、つまり WCP に原点は含まれないことに注意しておくべきである。

定義式 $F(z)$ として選ばれる関数は Eq. (254) のもとで変化しないものでなければならない。したがって、$F(z)$ は Eq. (254) のもとで

$$F(z) \longrightarrow \lambda^d F(z) \tag{255}$$

のように変換するべきである。このとき d のことを $F(z)$ の weight と呼ぶ。本文中での記号と比べやすいように新しい変数 r_i を次のように導入しておく。

$$F(z) \longrightarrow \lambda F(z), \quad \text{under} \quad z_i \longrightarrow \lambda^{r_i} z_i \tag{256}$$

このとき d、k_i、r_i の間の関係は $dr_i = k_i$ である。d や k_i は整数であったが、r_i は一般に整数ではない。

上のような WCP^n の中での定義式の具体的な例として

$$F(z) = \sum_{i=1}^{n+1} z_i^{l_i} \tag{257}$$

を考えてみる。このとき Eq. (254) のもとでの性質より、$d = k_i l_i$、$l_i = 1/r_i$ という関係が成り立つ。ここでは $F(z)$ として、このような z のべき乗の単純な和だけを考えることにする。WCP^n の中の定義式 $F(z) = 0$ であらわされる多様体が CY であるためには first chern class が消えることが必要である。このための条件は

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{l_i} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{k_i}{d} = 1 \tag{258}$$

となることが知られている。

次に、与えられた CY に少し考察を加えてみたい。多様体が CY であるための条件を満たしながら、多様体をどのように変形 (deformation) していくことができるかを考えると自然と CY moduli 空間の考えが出てくる。この deformation の中でも興味があるのは単なる holomorphic な座標変換によって実現されないものである。

CY の metric ($g = g_{i\bar{j}} dz^i d\bar{z}^{\bar{j}} + c.c.$) が次のような変換を受けることを考えよう。

$$g \longrightarrow g + \delta g_{ij} dz^i dz^j + \delta g_{i\bar{j}} dz^i d\bar{z}^{\bar{j}} + c.c. \tag{259}$$

このような deformation が CY condition を破らないことを要請すると、deformation は次のように (Dolbeault) cohomology と対応していることがわかる。

- $\delta g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^{\bar{j}}$ が harmonic、つまり $H^{1,1}_{\bar{\partial}}(X)$ と 1 対 1 に対応している。
  $\delta g_{i\bar{j}}$ は kähler form を変えるため kähler class の deformation と呼ばれる。

- δg_{ij} は $H^{n-1,1}_{\bar{\partial}}(X)$ と 1 対 1 に対応している。
  δg_{ij} で変形した後、metric は hermite ではなくなるので CY condition を満たしつづけるためには non-holomorphic な座標変換をする必要がある。これは complex structure の deformation を意味している。

kähler deformation や complex deformation は torus の場合に当てはめると、torus の大きさ（体積）と形の変形にそれぞれ対応している。

まとめると、CY^n の moduli は (local には)

$$(\text{k}\ddot{a}\text{hler deformation の張る空間}) \times (\text{complex deformation の張る空間})$$

と表現することができる。別の言い方をすると、$H_{\bar{\partial}}^{1,1}(X) \times H_{\bar{\partial}}^{n-1,1}(X)$ となる。さらに、実は k$\ddot{a}$hler manifold の場合には k$\ddot{a}$hler deformation や complex deformation それ自身の作る moduli 空間もまた k$\ddot{a}$hler manifold であることが知られている。

最後に CY^n の例をいくつかあげる。はじめに non-compact な場合からあげていく。

1. C^n plane
   この空間は complex k$\ddot{a}$hler であることはすぐにわかるが、Ricci-flat であるので CY であることも明らかである。

2. $F(z_1, \cdots, z_{n+1}) = 0$ in C^{n+1}
   上の例により C^n 空間は CY であるのでその中に代数方程式でもって表される多様体はまた CY である。ただしこのとき singular になりうる。その具体例は本文中に現われている。

次に compact な場合を紹介する。

1. torus
   良く知られているように torus は C^1 平面における平行四辺形の対辺を同一視することにより得られる。non-compact な例を参照すると torus は CY だと言える。実は torus は複素 1 次元のただひとつの (smooth で compact な)CY である。

2. $\sum_{i=1}^{n+1} z_i^{n+1} = 0$ in CP^n
   これは上に書いた CY 条件を $l_i = n+1$、$d = n+1$、$k_i = 1$ として満たす例である。この CY の複素次元は $n-1$ である。特に n=3 のとき K3 と呼ばれる。K3 は複素次元 2 のただひとつの (smooth で compacto な)CY である。

次に WCP の中に実現される CY の例についても紹介しておきたい。しかし、実は Eq. (254) を見るとわかるように、k_i が全て互いに素でなければ WCP は同一視 Eq. (254) のもとでの固定点を持っている。すなわち、singular である。k_i が全て互いに素であれば代数方程式によって表される多様体は smooth となる。

1. $z_1^6 + z_2^6 + z_3^6 + z_4^6 + z_5^3 = 0$ in $WCP^4(1,1,1,1,2)$
   この式も $k_{(1,2,3,4)} = 1, k_5 = 2$、$l_{(1,2,3,4)} = 6, l_5 = 3$、$d = 6$ とした CY codition を満たしている。

最後に singularity について用語の説明程度に議論したい。定義式 $F(z) = 0$ は $F(z) = 0$ と $\partial F/\partial z_i = 0$ を満たす点が原点のみであるとき transverse と呼ばれる。今、$F(z) = 0$ が C^n のような空間の中の式であり、かつ $F(z)$ が transverse であるとする。$F(z) = 0$ で表された多様体は原点以外では smooth である。しかし、原点で holomorphic n-form Eq. (253) は well-defined でないことからもわかるように、原点に singular point が存在している。対して、$F(z) = 0$ が smooth な WCP の中に定義されているなら、WCP の定義において原点は除かれているために singular point は存在しないことがわかる。

F　d=2 , N=2 superspace formalizm

本文では worldsheet 上に N=2 supersymmetry を持った理論が考察される。ここでは、その取り扱いや convention をまとめておく。

2 次元 N=2 theory は supercharge の real 成分が 4 個なので、4 次元 N=1 theory を dimensional reduction した理論であると考えるとわかりやすい。

しかしここでは、4 次元との関係を考えながらも、d=2、N=1 theory [25] を N=2 に拡張することを考える。

d=2、N=1 superspace formalizm
座標 $(z,\bar{z})$ と、その superpartner $(\theta,\bar{\theta})$ を導入すると、supercharge$(Q,\bar{Q})$ は

$$Q = \frac{\partial}{\partial\theta} - \theta\frac{\partial}{\partial z} \tag{260}$$

$$\bar{Q} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - \bar{\theta}\frac{\partial}{\partial\bar{z}} \tag{261}$$

これらは

$$\{Q,Q\} = -2\partial_z, \quad \{\bar{Q},\bar{Q}\} = -2\partial_{\bar{z}} \tag{262}$$

を満たす。supercharge が superspace の変数で表現できたので covariant derivative は

$$D = \frac{\partial}{\partial\theta} + \theta\frac{\partial}{\partial z} \tag{263}$$

$$\bar{D} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + \bar{\theta}\frac{\partial}{\partial\bar{z}} \tag{264}$$

d=2、N=2 formalizm
N=2 代数は N=1 代数が独立に 2 つ存在しているとみなすことができる。そこで N=1 のときと同じように座標 $(z,\bar{z})$ と、その superpartner $(\theta_1,\theta_2,\bar{\theta}_1,\bar{\theta}_2)$ を導入する。今度は superpartner は 2 倍ある。supercharge は N=1 の場合を参照して

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial\theta_1} - \theta_1\frac{\partial}{\partial z} \tag{265}$$

$$\bar{Q}_1 = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_1} - \bar{\theta}_1\frac{\partial}{\partial\bar{z}} \tag{266}$$

$$Q_2 = \frac{\partial}{\partial\theta_2} - \theta_2\frac{\partial}{\partial z} \tag{267}$$

$$\bar{Q}_2 = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_2} - \bar{\theta}_2\frac{\partial}{\partial\bar{z}} \tag{268}$$

covariant derivetive も同様にして

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial\theta_1} + \theta_1\frac{\partial}{\partial z} \tag{269}$$

$$\bar{D}_1 = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_1} + \bar{\theta}_1\frac{\partial}{\partial\bar{z}} \tag{270}$$

$$\tag{271}$$

D_2 についても同様。次の変数変換をしておくと便利である。

$$\theta_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 + i\theta_2) \quad , \qquad \frac{\partial}{\partial\theta_+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\partial}{\partial\theta_1} - i\frac{\partial}{\partial\theta_2}) \tag{272}$$

$$\theta_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 - i\theta_2) \quad , \qquad \frac{\partial}{\partial\theta_-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\partial}{\partial\theta_1} + i\frac{\partial}{\partial\theta_2}) \tag{273}$$

$$\bar{\theta}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}_1 + i\bar{\theta}_2) \quad , \qquad \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_1} - i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_2}) \tag{274}$$

$$\bar{\theta}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}_1 - i\bar{\theta}_2) \quad , \qquad \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_1} + i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_2}) \tag{275}$$

すると、superderivative は

$$D_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(D_1 - iD_2) \;=\; \frac{\partial}{\partial\theta_+} + \theta_-\frac{\partial}{\partial z} \tag{276}$$

$$D_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(D_1 + iD_2) \;=\; \frac{\partial}{\partial\theta_-} + \theta_+\frac{\partial}{\partial z} \tag{277}$$

$\bar{D}$ についても同様の式がある。

superspace を議論する枠組みは定義されたので superfield を考える。chiral superfield Φ は次のように定義される。

$$D_+\Phi = \bar{D}_+\Phi = 0 \tag{278}$$

（これは 4 次元での $\bar{D}\Phi = 0$ に対応している。）

$$D_+\theta_- = 0 \quad , \qquad D_+(z + \theta_-\theta_+) = 0$$
$$\bar{D}_+\bar{\theta}_- = 0 \quad , \qquad \bar{D}_+(\bar{z} + \bar{\theta}_-\bar{\theta}_+) = 0$$

という関係から N=2 chiral superfield は具体的に

$$\Phi = \phi(y,\bar{y}) + \sqrt{2}\theta_-\psi(y,\bar{y}) + \sqrt{2}\bar{\theta}_-\bar{\psi}(y,\bar{y}) + \theta_-\bar{\theta}_-F(y,\bar{y}) \tag{279}$$

と書かれる。ここで $y = z+\theta_-\theta_+$、$\bar{y} = \bar{z}+\bar{\theta}_-\bar{\theta}_+$ を使った。ϕ は複素 scalar で、ψ、$\bar{\psi}$ はそれぞれ chirality が left と right の complex Weyl fermion。fermion の chirality は left-moving、right-moving にそれぞれ対応している。F は補助場である。fermion の項の前につけた係数は便利のために付けたがいつでも fermion を再規格化することで変えることができる。

以後補助場 F は省略する。後の参照のために chiral superfield を展開しておくと

$$\begin{aligned}\Phi \;=\; & \phi(z,\bar{z}) + \theta_-\theta_+\partial\phi + \bar{\theta}_-\bar{\theta}_+\bar{\partial}\phi + \theta_-\theta_+\bar{\theta}_-\bar{\theta}_+\partial\bar{\partial}\phi \\ & +\sqrt{2}\theta_-\psi(z,\bar{z}) + \sqrt{2}\theta_-\bar{\theta}_-\bar{\theta}_+\bar{\partial}\psi(z,\bar{z}) \\ & +\sqrt{2}\bar{\theta}_-\bar{\psi}(z,\bar{z}) + \sqrt{2}\bar{\theta}_-\theta_-\theta_+\partial\bar{\psi}(z,\bar{z})\end{aligned} \tag{280}$$

次に関数空間での complex conjugate $*$ を定義する。この変換は left-moving と right-moving を変えるものではないことに注意しなければならない。superspace の座標については

$$z^* = z \quad , \qquad \theta_-^* = \theta_+$$
$$\bar{z}^* = \bar{z} \qquad\quad \bar{\theta}_-^* = \bar{\theta}_+$$

θ の積については

$$(\theta_-\theta_+)^* = \theta_-^*\theta_+^* = \theta_+\theta_- \tag{281}$$

と定義する。これより $y^* = z + \theta_+\theta_-$。complex field $\phi(z,\bar{z})$ が real field $\phi_r(z,\bar{z})$、$\phi_i(z,\bar{z})$ を使って $\phi(z,\bar{z}) = \phi_r(z,\bar{z}) + i\phi_i(z,\bar{z})$ と書かれるときには

$$\phi^*(z,\bar{z}) = \phi_r(z,\bar{z}) - i\phi_i(z,\bar{z}) \tag{282}$$

と考える。すると、anti-chiral superfield Φ^* は

$$\begin{aligned}
\Phi^* &= \phi^*(y^*,\bar{y}^*) + \sqrt{2}\psi^*(y^*,\bar{y}^*) + \sqrt{2}\bar{\psi}^*(y^*,\bar{y}^*) && (283)\\
\Phi^* &= \phi^*(z,\bar{z}) + \theta_-\theta_+\partial\phi^* + \bar{\theta}_-\bar{\theta}_+\bar{\partial}\phi^* + \theta_-\theta_+\bar{\theta}_-\bar{\theta}_+\partial\bar{\partial}\phi^* \\
&\quad + \sqrt{2}\theta_-\psi^*(z,\bar{z}) + \sqrt{2}\theta_-\bar{\theta}_-\bar{\theta}_+\bar{\partial}\psi^*(z,\bar{z}) \\
&\quad + \sqrt{2}\bar{\theta}_-\bar{\psi}^*(z,\bar{z}) + \sqrt{2}\bar{\theta}_-\theta_-\theta_+\partial\bar{\psi}^*(z,\bar{z}) && (284)
\end{aligned}$$

（Φ^* は 4 次元の場合には、通常の complex conjugate に相当している。）

supercoordinate に関する積分を次のように定義しておく

$$\begin{aligned}
\int d\theta_+\,\theta_+ &= 1 && (285)\\
\int d\theta_+\,\theta_- &= 0 && (286)\\
\int d^2\theta_+\,\theta_+\bar{\theta}_+ &= \int d\theta_+ d\bar{\theta}_+\,\theta_+\bar{\theta}_+ = -1 && (287)\\
\int d^4\theta\,\theta_-\theta_+\bar{\theta}_-\bar{\theta}_+ &= \int d\theta_+ d\bar{\theta}_+ d\theta_- d\bar{\theta}_-\,\theta_-\theta_+\bar{\theta}_-\bar{\theta}_+ \\
&= \int d\theta_+ d\bar{\theta}_+ d\theta_- d\bar{\theta}_-\,\bar{\theta}_-\theta_-\bar{\theta}_+\theta_+ = -1 && (288)
\end{aligned}$$

以上より、N=2 supersymmetry で不変な action を書くことができる。例として、free kinetic term は

$$\mathcal{L}_{kin} = \frac{1}{8\pi}\int d^4\theta\Phi^*\Phi = \frac{1}{2\pi}(\bar{\partial}\phi^*\partial\phi - \psi^*\bar{\partial}\psi - \bar{\psi}^*\partial\bar{\psi}) \tag{289}$$

superpotential は

$$\mathcal{L}_{pot} = \int d^2\theta_- W(\Phi) = \int d\theta_- d\bar{\theta}_- W(\Phi)\,|_{\theta_+=\bar{\theta}_+=0} \tag{290}$$

superpotential の complex conjugate は

$$\mathcal{L}^*_{pot} = \int d^2\theta_+ W^*(\Phi^*) \tag{291}$$

となる。これらの式が N=2 supersymmetry で不変であることは、4 次元の N=1 superspace formalizm から明らかである。

G　N=2 Superconformal Algebra について

N=2 supersymmetry algebra に conformal 不変性が加わると、N=2 superconformal algebra となる。この代数は非常に多くの内容を持っている。ここでは N=2 superconformal algebra についてまとめておく。ここで、主な convention は [25] に従った。さらに [29, 28] なども参照した。

ここでは特にことわらなければ、holomorphic part について述べているものとする。left-right symmetric な場合を考えているので、anti-holomorphic part も全く同じ結果となる。

N=2 superconformal algebra (SCA) には energy momentum tensor (EM tensor) $T(z)$ に加えて、supercurrent が 2 つ $T_F^{\pm}(z)$、さらに $U_R(1)$ current $J(z)$ がある。それらは次の OPE に従う。

$$\begin{aligned}
T(z)\cdot T(w) &\sim \frac{c}{2(z-w)^4}+\frac{2}{(z-w)^2}T(w)+\frac{1}{z-w}\partial T(w)+\cdots && (292)\\
T(z)\cdot T_F^{\pm}(w) &\sim \frac{\frac{3}{2}T_F^{\pm}(w)}{(z-w)^3}+\frac{\partial T_F^{\pm}(w)}{z-w}+\cdots && (293)\\
T(z)\cdot J(w) &\sim \frac{J(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial J(w)}{(z-w)}+\cdots && (294)\\
J(z)\cdot J(w) &\sim \frac{\frac{1}{3}c}{(z-w)^2}+\cdots && (295)\\
J(z)\cdot T_F^{\pm}(w) &\sim \pm\frac{T_F^{\pm}(w)}{z-w}+\cdots && (296)\\
T_F^{\pm}(z)\cdot T_F^{\mp}(w) &\sim \frac{\frac{1}{12}c}{(z-w)^3}+\frac{\frac{1}{4}J(w)}{(z-w)^2}+\frac{\frac{1}{4}T(w)+\frac{1}{8}\partial J(w)}{z-w}+\cdots && (297)\\
T_F^{\pm}(z)\cdot T_F^{\pm}(w) &\sim \text{finite} && (298)
\end{aligned}$$

となる。ここで c は central charge である。各 operator の mode についての交換関係は

$$\begin{aligned}
[L_n\,,\,L_m] &= (n-m)L_{n+m}+\frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m} && (299)\\
[L_n\,,\,G^{\pm}_{r\pm a}] &= (\frac{n}{2}-(r\pm a))G^{\pm}_{r+n\pm a} && (300)\\
[L_n\,,\,J_m] &= -mJ_{n+m} && (301)\\
[J_n\,,\,J_m] &= \frac{c}{3}n\delta_{n+m} && (302)\\
[J_n\,,\,G^{\pm}_{m\pm a}] &= \pm G^{\pm}_{n+m\pm a} && (303)\\
\{G^{+}_{n+a}\quad G^{-}_{m-a}\} &= L_{m+n}+\frac{1}{2}(n-m+2a)J_{n+m}+\frac{c}{6}[(n+a)^2-\frac{1}{4}]\delta_{n+m} && (304)
\end{aligned}$$

ただしここで mode は次のように定義している。

$$L_n=\oint\tfrac{dz}{2\pi i}z^{n+1}T(z)、J_n=\oint\tfrac{dz}{2\pi i}z^{n}J(z)$$
$$\text{特に } G^{\pm}_{n\pm a}=2\oint\tfrac{dz}{2\pi i}z^{(n\pm a)+\frac{1}{2}}T_F^{\pm}(z)$$

n や m は整数を表している。a は parameter で $0\le a<1$ の範囲にある。この parameter は $G^{\pm}$ が一般に整数 mode でなくてもよいことを示している。というのも $T_F^{\pm}$ は

$$T_F^{\pm}(z)=\sum_{n\in Z}z^{-(n\pm a)-\frac{3}{2}}\frac{1}{2}G^{\pm}_{n\pm a} \qquad (305)$$

であるので、$z\to e^{2\pi i}z$ としたときの周期性は

$$T_F^{\pm}(e^{2\pi i}z)=-e^{\mp 2\pi i a}T_F^{\pm}(z) \qquad (306)$$

となる。これにより a が半整数のとき $T_F^{\pm}$ は NS-sector に、a が整数のとき $T_F^{\pm}$ は R-sector にあることがわかる。

以後aは半整数として、NS-sectorのみを考える。supercurrentのmodeとしては$r=n+a$としてGは半整数rのmodeで展開されると考える。

Eq. (304) において、$n=\pm1$、$m=\mp1$、$a=\mp\frac{1}{2}$とすると

$$\{G^+_{\pm\frac{1}{2}}, G^-_{\mp\frac{1}{2}}\} = L_0 \pm \frac{1}{2}J_0 \tag{307}$$

$(G^+_{\pm\frac{1}{2}})^\dagger = G^-_{\mp\frac{1}{2}}$ に注意すると、上の式の左辺はpositive operatorである。そこでL_0固有値hとJ_0固有値qの間には

$$h \geq \frac{|q|}{2} \tag{308}$$

が成立することがわかる。

ここで、この代数の部分代数について少し述べておく。generator $G^{\pm}_{-1/2}$、L_{-1}、J_0がこれだけで閉じていることは実際に交換関係を書くことでわかる。

$$\begin{aligned} \{G^+_{-1/2} \quad G^-_{-1/2}\} = 2L_{-1} \quad &, \quad [J_0 \quad G^{\pm}_{-1/2}] = \pm G^{\pm}_{-1/2} \\ [L_{-1} \quad J_0] = 0 \quad &, \quad [L_{-1} \quad G^{\pm}_{-1/2}] = 0 \end{aligned} \tag{309}$$

この代数はN=2のsupersymmetry代数である。superspaceにおいてこの代数を実現するには

$$G^{\pm}_{-1/2} = \frac{\partial}{\partial\theta_\pm} + \theta^{\mp}\frac{\partial}{\partial z} = D_\pm \tag{310}$$

$$L_{-1} = \frac{\partial}{\partial z} \tag{311}$$

$$J_0 = \theta_-\frac{\partial}{\partial\theta_-} - \theta_+\frac{\partial}{\partial\theta_+} \tag{312}$$

と表現すればよい。

G.1 primary field

N=0 CFTにおいてよく知られているように、N=2 SCFTにおいてもprimary fieldを定義する。primary field ϕはEM tensorとのOPEが

$$T(z)\cdot\phi(w) \sim \frac{h_\phi}{(z-w)^2} + \frac{\partial\phi(w)}{z-w} + \cdots \tag{313}$$

となるものである。このときϕはweight h_ϕを持つという。primary field ϕと$U_R(1)$ currentとのOPEは

$$J(z)\cdot\phi(w) \sim \frac{Q_\phi}{z-w}\phi(w) + \cdots \tag{314}$$

で、Q_ϕはJのchargeと呼ばれる。superchargeとのOPEが興味深い。

$$T^{\pm}_F(z)\cdot\phi(w) = \frac{\tilde{\phi}^{\pm}(w)}{z-w} + \cdots \tag{315}$$

ここで$\tilde{\phi}(w)$は$\phi(w)$のsuperpartnerとみなすべきものである。

それぞれの OPE を Hilbert 空間に作用する mode operator の言葉で表現すると

$$L_n|\phi\rangle = 0 \qquad n>0 \quad , \quad L_0|\phi\rangle = h_\phi|\phi\rangle \tag{316}$$

$$J_n|\phi\rangle = 0 \qquad n>0 \quad , \quad J_0|\phi\rangle = Q_\phi|\phi\rangle \tag{317}$$

$$G_n^\pm|\phi\rangle = 0 \qquad n>0 \quad , \quad G_{-1/2}^\pm|\phi\rangle \propto |\tilde{\phi}\rangle \tag{318}$$

ここで、$|\phi\rangle$ や $|\tilde{\phi}\rangle$ は ϕ や $\tilde{\phi}$ に対応している Hilbert 空間上の状態を表すとする。

N=2 SCFT の central charge と primary field の間の関係について、後に出てくるので結果だけを少し述べておきたい。N=2 SCA の central charge が $c<3$ の場合には c は連続的な値をとることはできずに、離散的な値

$$c = \frac{3m}{m+2}, \quad m; \text{positive integer} \tag{319}$$

をとるときにだけ理論は unitary になる。このときには primary field は有限個しか存在しない。この model は “minimal model” と呼ばれる。対して、$c \geq 3$ のときには c の連続的な値に unitary な理論が対応している。

G.2 chiral field

次に N=2 SCFT に特有な chiral field を定義する。ϕ と supercurrent T_F^+ との OPE をが singularity を出さないとき、つまり

$$T_F^+(z)\cdot\phi(w) = \text{finite} \tag{320}$$

であるとき、ϕ は chiral field であるといわれる。chiral field は supercurrent T_F^+ による superpartner を持っていないと言ってもよい。

これは Hilbert 空間の言葉で言うと、

$$G_{-1/2}^+|\phi\rangle = 0 \tag{321}$$

となる。

代わりに、T_F^- との OPE をとって singularity を出さないとき、ϕ は anti-chiral field と呼ばれる。

ここで N=2 superspace formalizm との関係についてコメントしておく。今考えている N=2 SCFT は 2 次元の N=2 の場の理論であることから、当然 chiral field も 2 次元 N=2 理論のなかに存在している。どう表現されているかを考えるには Eq. (310) にある関係を使う。chiral field は $G_{-1/2}^+$ を作用させると消えてしまう field であった。このことと Eq. (310) を考え合わせると、Eq. (321) にあらわれる状態 $|\phi\rangle$ を N=2 superfield Φ に含まれる field だとして、Eq. (321) は

$$D_+\Phi = 0 \tag{322}$$

を意味する。つまり chiral field は chiral superfield と対応している。

G.3 chiral primary field

ϕが chiralかつ、primaryであるときϕは chiral primary field と呼ばれる。chiral primary field はいくつかの重要な性質を持っている。下の性質は交換関係や weight に関する議論から導くことができる。

- $h_\phi = \frac{Q_\phi}{2}$ ($h_\phi = -\frac{Q_\phi}{2}$)
  weight は $U_R(1)$ charge から決定される。(括弧の中は anti-chiral field について)

- $h_\phi \leq \frac{c}{6}$
  weight には上限がある。このため chiral primary field の数は有限である。（正確にはここで考えているような SCFT では有限であるというべきである。）

- もし $\chi, \psi \in$ chiral primary field であれば

  2 つの場の OPE $\chi \cdot \psi$ は chiral primary field で展開される。

  anti-chiral field についても同様のことが言える。chiral と anti-chiral field の OPE に singularity はない。

とくに最後の性質から (anti-)chiral primary field は ring structure を持つといわれる。left-moving part、right-moving part を考えると次の 4 つの ring structure がある。

$$(c,c) \quad (a,c) \quad (c,a) \quad (a,a) \tag{323}$$

これらはそれぞれ chiral ring と呼ばれる。ここで (left part,right part) であり、c、a は chiral、anti-chiral primary field を表している。(a,a)、(c,a) はそれぞれ (c,c)、(a,c) の complex conjugate として得られるため、新しい情報を持たない。このため以後は主に (c,c)、(a,c) ring について考察することにする。

G.4 spectral flow

N=2 SCA Eq. (299)~Eq. (304) には a という parameter があり、$T_F^{\pm}$ の周期性を表していた。しかし、これまでは $a=1/2$ だけを議論してきた。その理由はしたに説明するような同型関係があるためである。

異なる a に対する代数の間には同型関係がある事が知られている。交換関係 Eq. (299)~Eq. (304) をみたす generator を $L_n^{(a)}$ のように書くことにすると

$$L_n^{(a+\theta)} = L_n^{(a)} + \theta J_n + \frac{c}{6}\theta^2 \delta_n \tag{324}$$

$$J_n^{(a+\theta)} = J_n^{(a)} + \frac{c}{3}\theta\delta_n \tag{325}$$

$$G_{n+a+\theta}^{+\,(a+\theta)} = G_{n+a}^{+\,(a)} \tag{326}$$

$$G_{n-a-\theta}^{-\,(a+\theta)} = G_{n-a}^{-\,(a)} \tag{327}$$

が成立する。$L_n^{(a+\theta)}$ などは $a \to a+\theta$ とおいた交換関係 Eq. (299) $\sim$ Eq. (304) を満たす。これを見ると、異なる a の値を持つ代数同士は線形変換でつながっていることがわかる。

そこで $a \to a+\theta$ を引き起こすような map を $\mathcal{U}_\theta$ と書く。a という値の代数に対する Hilbert 空間を $\mathcal{H}_a$、その Hilbert 空間に作用する operator を $\mathcal{O}_a$ と書くと次の関係がある。

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{a+\theta} &= \mathcal{U}_\theta \mathcal{H}_a && (328)\\ \mathcal{O}_{a+\theta} &= \mathcal{U}_\theta \mathcal{O}_a \mathcal{U}_\theta^{-1} && (329)\end{aligned}$$

今の場合に当てはめると

$$\begin{aligned}L_n^{(a+\theta)} &= \mathcal{U}_\theta L_n^{(a)} \mathcal{U}_\theta^{-1} && (330)\\ J_n^{(a+\theta)} &= \mathcal{U}_\theta J_n^{(a)} \mathcal{U}_\theta^{-1} && (331)\\ G_{n+a+\theta}^{+\,(a+\theta)} &= \mathcal{U}_\theta G_{n+a}^{+\,(a)} \mathcal{U}_\theta^{-1} && (332)\\ G_{n-a-\theta}^{-\,(a+\theta)} &= \mathcal{U}_\theta G_{n-a}^{-\,(a)} \mathcal{U}_\theta^{-1} && (333)\end{aligned}$$

が成立する。

Hilbert 空間 $\mathcal{H}_a$ と $\mathcal{H}_{a+\theta}$ の違いは $T_F^{\pm}$ に関する部分だけであることに注意すると、$L_n^{(a)}$ や $J_n^{(a)}$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{a+\theta}$ に作用させることはまだ意味を持っている。今、状態 $|h_a, q_a\rangle$ を $\mathcal{H}_a$ に含まれる状態で $L_0^{(a)}$、$J_0^{(a)}$ の固有値 h_a、q_a を持つ状態であるとしよう。map された状態 $\mathcal{U}_\theta|h_a, q_a\rangle$ に対する $L_0^{(a)}$、$J_0^{(a)}$ の固有値 $h_{a+\theta}$、$q_{a+\theta}$ は h_a、q_a を使ってどう表されるかは Eq. (324)~ Eq. (333) を使うと簡単に次のようになることがわかる。

$$\begin{aligned}h_{a+\theta} &= h_a - \theta q_a + \frac{c}{6}\theta^2 && (334)\\ q_{a+\theta} &= q_a - \frac{c}{3}\theta && (335)\end{aligned}$$

これを spectral flow と呼ぶ。

spectral flow は異なる Hilbert 空間の状態間の map であり、その map を共通の L の代数 (Virasoro algebra) や J の代数 (U(1)current algebra) の operator の固有値間の map として表現したものであるということができる。

注意 1

spectral flow の map $\mathcal{U}_{1/2}$ は R-sector$\leftrightarrow$NS-sector という map なので space-time では supercharge に対応している。このことから一般に space-time supercharge を次のようにして書くことができる。N=2 SCA の $U_R(1)$ charge を bosonize して

$$J(z) = i\sqrt{\frac{c}{3}}\partial\phi(z) \tag{336}$$

charge q を持つ vertex operator Φ_q は

$$\Phi_q = e^{i\sqrt{\frac{3}{c}}q\phi}\cdot\mathcal{O} \tag{337}$$

と書くことができる。ここで $\mathcal{O}$ は $U_R(1)$ に関して neutral な operator である。map $\mathcal{U}_\theta$ は $-\frac{\theta}{3}c$ だけ charge を変化させるので

$$\mathcal{U}_\theta = e^{-i\theta\sqrt{\frac{c}{3}}\phi} \tag{338}$$

と書ける。$\theta = 1/2$ のときが space-time supersymmetry にあたっている。Eq. (337) に作用してみると

$$\mathcal{U}_\theta\cdot\Phi_q \sim \frac{1}{z^{\frac{q}{2}}}\Phi_{q-\frac{c}{6}} \tag{339}$$

space-time supersymmetry として持つべき性質は worldsheet 上に branch cut を作ることである。(言いかえると NS-sector $\leftrightarrow$ R-sector の変換をすること) これは q が整数でかつ、奇数であることを要求する。これは GSO projection に他ならない。

注意 2

NS-sector にある chiral ring が spectral flow によりどのように写るかを考えたい。本題にいく前に R-ground state について述べておく。$G_0^\pm$ は交換関係

$$\{G_0^- \quad G_0^+\} = L_0 - \frac{c}{24} \tag{340}$$

を持っている。したがって R-sector の weight h に関しては

$$h \geq \frac{c}{24} \tag{341}$$

が成立する。ただし $(G_0^-)^\dagger = G_0^+$ を使った。$h = \frac{c}{24}$ となる $|\Omega\rangle$ があればそれは primary かつ $G_0^\pm|\Omega\rangle = 0$ である。この状態を R-ground state と呼ぶ。

次に NS-ground state について述べる。これはほとんど明らかに unit operator 1 である。$(h = q = 0)$

本題に入って、chiral primary field を考えよう。chiral primary field は $h = q/2$ であったことを思い出すと、spectral flow $(\theta = 1/2)$ により

$$h \rightarrow h - \frac{1}{2}q + \frac{c}{24} = \frac{c}{24} \tag{342}$$

つまり、chiral primary field は、h がどんな値であっても spectral flow により R-ground state にいく。この逆も正しい。NS-ground state は同じ flow で $(h = \frac{c}{24}$、$q = -\frac{c}{6})$ にいく。

anti-chiral primary field についても全く同様に spectral flow $(\theta = -1/2)$ で R-ground state にいく。

H free theory

N=2 SCFT の中で最も基本的で、簡単なのが free theory である。この理論の action は chiral superfield Φ を用いて

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{8\pi}\int d^2z d^4\theta \Phi^*\Phi & (343)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int d^2z(\bar{\partial}\phi_-\partial\phi_+ - \psi_-\bar{\partial}\psi_+ - \bar{\psi}_-\partial\bar{\psi}_+) & (344)\end{aligned}$$

となる。ここで N=2 chiral superfield Φ は

$$\Phi = \phi_+(y,\bar{y}) + \sqrt{2}\theta_-\psi_+(y,\bar{y}) + \sqrt{2}\bar{\theta}_-\bar{\psi}_+(y,\bar{y}) \tag{345}$$

のように考えた。N=1 の supermultiplet の component で N=2 superfield の各 component を表すと、

$$\begin{aligned} \phi_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \quad , \quad \phi_+ = \phi_-^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)\\ \psi_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + i\psi_2) \quad , \quad \psi_+ = \psi_-^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - i\psi_2)\\ \bar{\psi}_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_1 + i\bar{\psi}_2) \quad , \quad \bar{\psi}_+ = \bar{\psi}_-^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_1 - i\bar{\psi}_2)\end{aligned}$$

このように 2 つの N=1 supermultiplet $(\phi_i, \psi_i, \bar{\psi}_i)$ $i = 1, 2$ が必要になる。$\pm$ の符号に注意するべきである。action を N=1 の成分で書きなおすと、

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2 z (\bar{\partial}\phi_1 \partial\phi_1 + \bar{\partial}\phi_2 \partial\phi_2 - \psi_1 \bar{\partial}\psi_1 - \psi_2 \bar{\partial}\psi_2 - \bar{\psi}_1 \partial\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2 \partial\bar{\psi}_2) \tag{346}$$

この理論の $T(z)$、$T_F^{\pm}(z)$、$J(z)$ は次のように書かれる。

$$T(z) = -\partial\phi_- \partial\phi_+ + \frac{1}{2}(\psi_- \cdot \partial\psi_+ - \partial\psi_- \cdot \psi_+) \tag{347}$$

$$T_F^{\pm}(z) = -\frac{1}{2}\psi_\pm \partial\phi_\mp \tag{348}$$

$$J(z) = \psi_- \psi_+ \tag{349}$$

これらが、前の N=2 SCA を満たすことはそれぞれの OPE が

$$\psi_-(z) \cdot \psi_+(0) \sim \psi_+(z) \cdot \psi_-(0) \sim -\frac{1}{z} \qquad \phi_+(z) \cdot \phi_-(0) \sim \phi_-(z) \cdot \phi_+(0) \sim -\ln z \tag{350}$$

であることを使うと示すことができる。また、central charge c は $c = 3$ になる。right-moving part についても同様に考えることができる。

field の weight、$U_R(1)$ charge を h、q と表し、right-moving part については $\bar{h}$ のように表すとする。それぞれの field に対して $(h, q; \bar{h}, \bar{q})$ を書くと、

$$\begin{array}{ll} \psi_+ \ ; \ (\frac{1}{2}, 1; 0, 0) & \psi_- \ ; \ (\frac{1}{2}, -1; 0, 0) \\ \bar{\psi}_+ \ ; \ (0, 0; \frac{1}{2}, 1) & \bar{\psi}_- \ ; \ (0, 0; \frac{1}{2}, -1) \end{array}$$

となり、(anti-)chiral primary field に対して $h \leq c/6 = 1/2$ であることに注意すると、chiral ring は次のようになる。

$$\begin{array}{l} (c, c) = \{ 1 \, , \, \psi_+ \, , \, \bar{\psi}_+ \, , \, \psi_+ \bar{\psi}_+ \, \} \\ (a, c) = \{ 1 \, , \, \psi_- \, , \, \bar{\psi}_+ \, , \, \psi_- \bar{\psi}_+ \, \} \end{array}$$

ϕ が出てこないのは ϕ は primary field ではないことによる。

上の ψ と $U_R(1)$ charge の関係を見ると、$\psi_\pm$ の符号は $U_R(1)$ charge の符号であったことがわかる。Eq. (345) と scalar $\phi_\pm$ は $U_R(1)$ charge を持っていないことから、Grassman parameter $\theta_\pm$ は $U_R(1)$ charge ± 1 を持っていることがわかる。

I non-linear sigma-model

N=2 SCFT の 2 つ目の例として Non-linear sigma-model を紹介する。[28, 29] ここでも、本文中に出てくる概念の説明程度にとどまる。

前の section で考察された free field theory は (real) boson を target space における座標とみなしたとき、targe space が flat な場合の (non-)linear sigma model であるということができる。general background に対しては

$$S = \int d^2 z \frac{1}{2} G_{\mu\nu}(X) \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu \tag{351}$$

のように target space metric $G_{\mu\nu}$ が入ってくる。この式は N=2 superfield を使って

$$S = \int d^2 z d^4 \theta K(X^i, X^{*\bar{j}}) \tag{352}$$

とすることにより、N=2 supersymmetric な形に一般化することができる。ただし、X^i は chiral superfield であり、target space の複素座標を bosonic component として持っている。また複素座標 X^i と実座標 X^μ の関係は Eq. (250) のようにとる。

Eq. (352) は展開して Grassman 変数を積分することにより leading term で

$$S = \int d^2 z \frac{\partial^2 K(X, X^*)}{\partial X^i \partial X^{*\bar{j}}} \partial X^i \bar{\partial} X^{*\bar{j}} + \cdots \tag{353}$$

つまり、target space は k$\ddot{a}$hler metric を持っている。これは N=2 supersymmetry を持つような non-linear sigma-model の target space は k$\ddot{a}$hler manifold であることを意味する。

target space が k$\ddot{a}$hler manifold であるとき sigma-model は N=2 supersymmetric になるが、さらに comformal 不変性を持つときにつく条件は、target space の metric $(G_{i\bar{j}})$ が Ricci-flat になるということである。つまり、CY target space 上の sigma-model は N=2 SCFT であるということができる。また CY 上の sigma-model の central charge c は CY n-fold のときには $c = 3n$ と計算されている。

最後に、N=2 SCFT の chiral ring についてごく簡単に結果を述べておく。chiral ring と CY の harmonic form の間には関係があるという事実は特に重要である。その説明は以下のように要約できる。Ramond ground state は fermion 0-mode で構成されるが、その fermion 0-mode には

$$\{\psi_0^i \; \psi_0^j\} = \{\psi_0^{*\bar{i}} \; \psi_0^{*\bar{j}}\} = 0 \;, \quad \{\psi_0^i \; \psi^{*\bar{j}}\} = g^{i\bar{j}} \tag{354}$$

という交換関係が成立していた。この関係から、ψ^i、$\psi^{*\bar{j}}$ を昇降演算子とみなすことによって、

$$\text{Ramond ground state } (|R\, ground\rangle) \longleftrightarrow \text{differential form } (f)$$

の対応関係が得られる。さらに supersymmetry generator G_0^+、G_0^- は

$$G_0^+ \longleftrightarrow \partial \;, \; G_0^- \longleftrightarrow \partial^\dagger$$

のように holomorphic exterior drivative とその adjoint に対応付けられるという事実を使うと、

$$G_0^{\pm}|R\, ground\rangle = 0 \longleftrightarrow \partial f = \bar{\partial} f = 0 \tag{355}$$

の対応が得られる。これは次の対応を意味する。

$$\text{Ramond ground state} \longleftrightarrow \text{harmonic form}$$

chiral ring は Ramond ground state から spectral flow により得られるので最終的には

$$\text{chiral ring} \longleftrightarrow \text{harmonic form (cohomology)}$$

という 1 対 1 対応が得られる。具体的には次の対応関係があることが知られている。

$$(c,c)\; ring \quad \longleftrightarrow \quad (n-1,1)\, \text{form} \tag{356}$$

$$(a,c)\; ring \quad \longleftrightarrow \quad (1,1)\, \text{form} \tag{357}$$

J　Landau-Ginzburg model

effective Lagrangian を使って、様々な状況に現われる臨界現象を記述しようとするのが Landau-Ginzburg model (以下 LG と略す) である。LG は様々な局面に登場するが、ここでは必要なことだけをまとめておこう。[29]

N=2 superspace の言葉で書くことにする。chiral superfield Φ^i、$i = 1, \cdots, n$ を導入する。

$$D_+ \Phi^i = 0\,, \quad \bar{D}_+ \Phi^i = 0 \tag{358}$$

action は 2 種類の項、kinetic term (D-term) と superpotential (F-term) から構成される。それぞれを $K(\Phi^i, \Phi^{i*})$、$W(\Phi)$ と書くと、action は具体的には次のようになる。

$$S = \int d^2 z d^4 \theta K(\Phi^i, \Phi^{i*}) + \int d^2 z d^2 \theta_- W(\Phi^i) + \int d^2 z d^2 \theta_+ W^*(\Phi^{i*}) \tag{359}$$

superpotential W の項を詳しく書くと

$$\int d^2 z d\theta_- d\bar{\theta}_- W(\Phi^i) \tag{360}$$

Lagrangian は全体として $U_R(1)$ charge が 0 であって、θ_-、$\bar{\theta}_-$ はそれぞれ left、right-moving part の $U_R(1)$ charge が -1 であったので、superpotential W は $U_R(1)$ charge (1,1) を持つ。Φ^i の $U_R(1)$ charge を r_i とすると、このことは

$$W(\lambda^{r_i} \Phi^i) = \lambda W(\Phi^i), \quad \lambda \in C \tag{361}$$

とならなければならないことを意味する。

いままで述べた理論は N=2 supersymmetric な理論である。ここで繰り込み群の考えを使って、infra で理論は fixed point に到達すると前提する。繰り込み群の fixed point で理論は conformal 不変となる。つまり、上の action の繰り込み群の infra fixed point が N=2 SCFT となると考える。

特に、2 次元 N=2 supersymmetric な理論には、non-renormalization theorem があり、これが非摂動的にも成り立つと考えると superpotential W は繰り込みを受けない。したがって、conformal 不変な理論は superpotential によって特徴付けされる。一方、D-term は繰り込みの影響を受けて複雑に変化するが、infra では fixed point が実現されるような形に落ち着くと考える。

LG の chiral ring は次のようになることが知られている。(c, c) ring は

$$\frac{C[\Phi^1, \cdots, \Phi^n]}{\partial_{\Phi^i} W(\Phi)} \tag{362}$$

ここで、$C[\Phi^1, \cdots, \Phi^n]$ は $\Phi^1, \cdots, \Phi^n$ で作られるすべての多項式を表す。例を 1 つ示すとわかりやすい。

$W = \Phi^l$ (Φ の l 乗) であるとき、$\{1, \Phi, \Phi^2, \cdots, \Phi^{l-2}\}$

LG の (a, c) ring は常に trivial である。つまり、1 だけである。

ただし、LG が離散群で割られた (orbifold 化された) ときには、状況は変わって (c, c)、(a, c) ともに non-trivial になる。

次に LG の central charge について述べる。$W(\Phi) = \Phi^{P+2}$ のときの LG の infra fixed point で表される SCFT の central charge c_P は

$$c_P = \frac{3P}{P+2} \tag{363}$$

であることが知られている。$c_P < 3$ よりこれは minimal model と考えることができる。正確には A-modular invariant を持った P-th minimal model である。

K deformation of N=2 superconformal theory

conformal weight $(h, \bar{h})$ を持った operator を Lagrangian に加え変形することを考える。[28] このとき $h + \bar{h}$ と 2 の大小関係により、結果は大きく異なる。

- $h + \bar{h} > 2$ のとき
  この operator は irrelavant と呼ばれる。この operator を Lagrangian に加えるときの係数は繰り込み群により infra にいくと小さくなり、結果としてこの項は理論には影響しなくなる。

- $h + \bar{h} < 2$ のとき
  この operator は relevant と呼ばれる。この operator の係数は infra で大きくなり、理論を支配する。このために infra での理論は加えた operator で決まってしまう。

最も興味あるのは $h + \bar{h} = 2$ のときである。このとき operator は marginal と呼ばれる。この operator による conformal theory の deformation について考えたい。全体を通して、主に left-right symmetric な場合を考えているので $h = \bar{h} = 1$ の場合に集中しよう。

古典論において $(1,1)$ の weight を持った marginal operator であっても、量子論においては摂動の効果を受けてそうでなくなることがある。そのような operator は conformal theory の変形には不向き、つまり理論を conformal 不変に保たない。そこで摂動の効果をいれても marginal operator のままであるような operator を、特に truely marginal operator と呼んで、truely marginal operator による conformal theory の deformation を考える。truely marginal operator は chiral ring (c,c)、(a,c) から、次の map を使って作ることができることが知られている。

- $\phi \in (c,c)$, $h = \bar{h} = \frac{1}{2}$, $Q = \bar{Q} = 1$
  まず、
  $$\hat{\phi}(w, \bar{w}) \equiv \oint dz\, T_F^-(z) \cdot \phi(w, \bar{w}) \tag{364}$$
  により $\hat{\phi}$ を定義する。$\hat{\phi}$ は $(h = 1, \bar{h} = \frac{1}{2}, Q = 0, \bar{Q} = 1)$ である。
  さらに、
  $$\Phi_{(1,1)}(w, \bar{w}) \equiv \oint d\bar{z}\, \bar{T}_F^-(\bar{z}) \cdot \hat{\phi}(w, \bar{w}) \tag{365}$$
  このとき、$\Phi_{(1,1)}(w, \bar{w})$ は $(h = \bar{h} = 1, Q = \bar{Q} = 0)$ であり、truely marginal operator である。

- $\phi \in (a,c)$, $h = \bar{h} = \frac{1}{2}$, $Q = -1, \bar{Q} = 1$
  まず、
$$\hat{\phi}(w,\bar{w}) \equiv \oint d\bar{z}\, \bar{T}_F^-(\bar{z}) \cdot \phi(w,\bar{w}) \tag{366}$$
  により $\hat{\phi}$ を定義する。$\hat{\phi}$ は $(h = \frac{1}{2}, \bar{h} = 1, Q = -1, \bar{Q} = 0)$ である。
  さらに、
$$\Phi_{(-1,1)}(w,\bar{w}) \equiv \oint dz\, T_F^+(z) \cdot \hat{\phi}(w,\bar{w}) \tag{367}$$
  このとき、$\Phi_{(-1,1)}(w,\bar{w})$ は $(h = \bar{h} = 1, Q = \bar{Q} = 0)$ であり、truely marginal operator である。

K.1 Moduli spaces of N=2 SCFT

N=2 SCFT の truely marginal operator による deformation は理論の moduli 空間を作る。特に local には moduli 空間は

$$\Phi_{(1,1)} \text{ deformation} \otimes \Phi_{(-1,1)} \text{ deformation}$$

となる。

さて、N=2 SCFT が CY target space をもつ non-linear sigma-model として実現されているとき、これらの deformation は何に対応しているかは興味深い。それを知るために、sigma-model では (c,c)、(a,c) は harmonic form に対応していたことを思い出すと、図 3 のようにまとめることができる。

L CY sigma-model and Landau-Ginzburg model

CY sigma-model と LG(の infra fixed point) はともに、N=2 SCFT として表現されるのであった。この 2 つの model の間の関係をこの section では考えたい。[30] 特に、本文中に出てくる具体的な例に沿ってこの関係をまとめておく。

CY target space 上の sigma-model は central chrage $c = 3n$ (n ;complex dimension) であった。一方、superpotential Φ^{P+2} を持った LG の infra-fixed point は P-th minimal model (MM_P) と呼ばれるもので、central charge は $c < 3$ であり、CY sigma-model とは直接関係しないように思える。

2 つの理論の対応は minimal model の tensor product theory を作ることにより得られる。つまり、r 個の minimal model $(MM_{P_1}, MM_{P_2}, \cdots, MM_{P_r})$ を用意して tensor product theory を作る。その理論の EM tensor は

$$T = \sum_{i=1}^{r} 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes T_i \otimes \cdots \otimes 1 \tag{368}$$

である。ここで、T_i は i 番目の minimal model の EM tensor を表している。この tensor 理論の central charge は

$$c = \sum_{i=1}^{r} c_i = \sum_{i=1}^{r} \frac{3P_i}{P_i + 1} \tag{369}$$

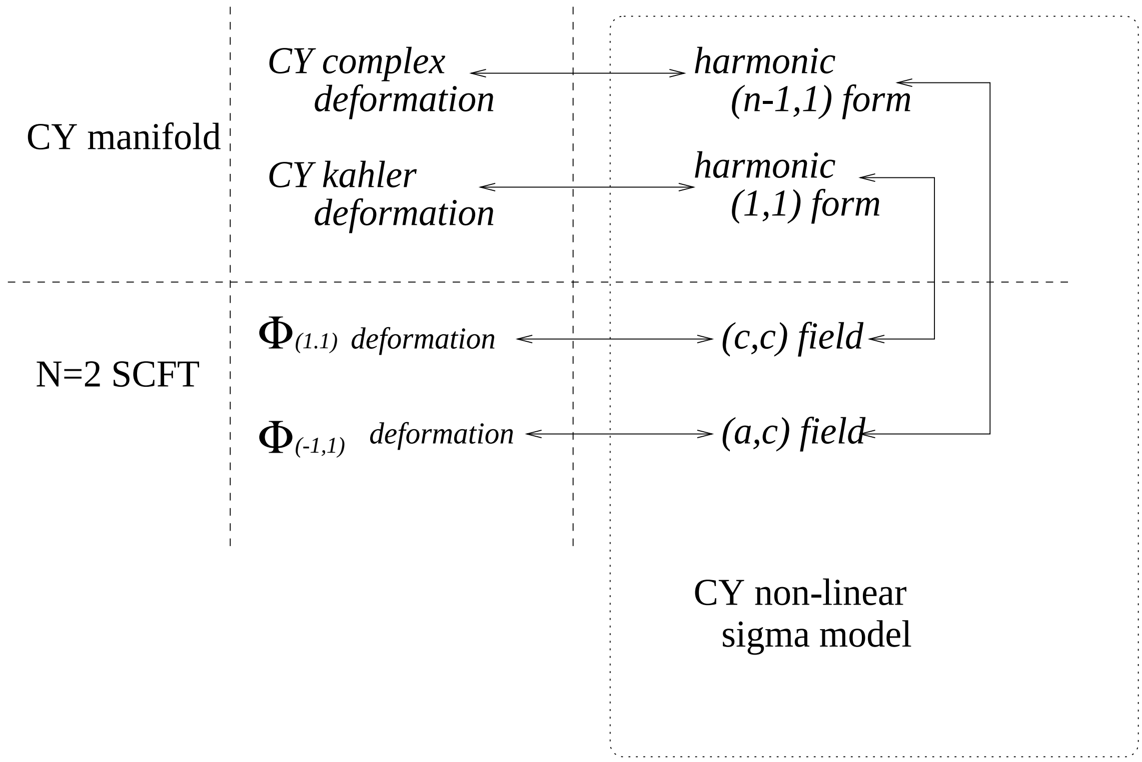

図 3: それぞれの理論での operator 間の対応。

である。この central charge が $3n$ に等しいときには CY sigma-model と tensor 理論の間には何らかの関係を期待することができる。

実際に、2 つの理論の間の対応を見る前にもう 1 つだけ述べておく必要がある。CY sigma-model ははじめから space-time supersymmetry を持っているが、MM_P の tensor 理論が space-time supersymmetry を持つためには、さらに GSO projection をする必要があった。したがって、正確には

$$\text{CY sigma-model} \longleftrightarrow [MM_{P_1} \otimes \cdots \otimes MM_{P_r}]|_{U(1)projected}$$

という対応関係を期待するべきである。ここで、U(1) project (有限離散群によって orbifold 化) されても central charge など local な性質には影響が無いことに注意するべきである。

Minimal model の tensor product は LG model として表すことができる。ここでは superpotential を W と書いて議論するが、実際には具体的な形

$$W(\Phi_1, \cdots, \Phi_r) = \sum_{i=1}^{r} \Phi_i^{P_i+2} \tag{370}$$

を前提していることを忘れてはいけない。

$$S = \int d^2zd^4K(\Phi, \Phi^*) + \int d^2zd^2\theta_- W(\Phi) + c.c. \tag{371}$$

LG のところでも述べたように D-term は理論が superconformal になるように調節されるものなので、ここでは小さいと考えて第 1 近似で無視する。そうすると理論の分配関数 Z

は

$$Z = \int D\Phi_1 D\Phi_2 \cdots D\Phi_r \exp[i(\int d^2z d^2\theta_- W(\Phi) + c.c.)] \tag{372}$$

となる。LG の superpotential には

$$W(\lambda^{r_i}\Phi_i) = \lambda W(\Phi_i) \tag{373}$$

が要求されていた。$\Phi_1 \neq 0$ であるような patch を持ってきて

$$\xi_1^{r_1} = \Phi_1\,,\, \xi_i^{r_1} = \frac{\Phi_i^{r_1}}{\Phi_1^{r_i}}\,(i \neq 1) \tag{374}$$

のように変数変換すると、

$$Z = \int [d\xi_1] \cdots [d\xi_r]\, J\, e^{i\int d^2zd^2\theta\, \xi_1 W'(1,\xi_1,\cdots,\xi_r) + c.c.} \tag{375}$$

となる。ここで Eq. (373) より

$$W(\Phi_1,\cdots,\Phi_r) = W(\xi_1^{r_1},\cdots,\xi_i\xi_1^{r_i},\cdots) = \xi_1 W'(1,\xi_1,\cdots,\xi_r) \tag{376}$$

である。J は変数変換の Jacobian を表しており、具体的には

$$J \sim \xi_1^{\sum_{i=1}^r r_i - 1} \tag{377}$$

である。ここで、もし $\sum_{i=1}^r r_i - 1 = 0$ であれば Jacobian J は constant になり、ξ_1 積分を実行すると次の delta 関数が現われる。

$$\delta(W'(1,\cdots,\xi_r)) = 0 \tag{378}$$

chiral superfield の bosonic component を target space の座標とみなすと、この Eq. (377) は worldsheet から target space への map が $W' = 0$ の manifold 上に制限されることを意味している。

$W' = 0$ という manifold を Φ 座標であらわすと、単純に $W = 0$ という manifold であるように思える。しかし座標変換 Eq. (374) は 1 対 1 の座標変換ではなかったことを考慮しなければばならない。例えば $\xi_i \to e^{2\pi i}\xi_i$ という ξ を変えない変換に対して Φ 座標は

$$(\Phi_1,\cdots,\Phi_r) \longrightarrow (e^{2\pi i r_1}\Phi_1,\cdots,e^{2\pi i r_i}\Phi_i,\cdots) \tag{379}$$

のように一般に non-trivial な変換となる。これは $W' = 0$ という ξ 座標で表される manifold は、Φ 座標では Eq. (379) のような identification を必要としていることを意味する。

以上は $\Phi_1 \neq 0$ という patch での話であったが、すべての Φ が 0 になる点以外では上の議論を適用して同じ結論を得ることができる。patch をつなぎ合わせることで結局 worldsheet から target space への map は

$$W(\Phi_i) = 0 \text{ in WCP}^{r-1}\ (k_1,k_2,\cdots,k_r)$$

に制限される。ここで k_i は正の整数で共通の整数 d を使って、$k_i = r_i d$ と書ける。さらに、条件

$$\sum_{i=1}^r r_i - 1 = 0 \tag{380}$$

が満足されている。この条件は target space が CY^{r-2} であることと同じである。

注意 1

Eq. (379) の操作は U(1) projection に対応する操作である。したがって前に述べた CY sigma-model と $U(1)$ projected tensor 理論の対応がここに現われている。

注意 2

superoptential が Eq. (370) のようであると仮定されれば central charge が等しいことと、条件 $\sum_{i=1}^{r} r_i - 1 = 0$ から

$$3n = \sum_{i=1}^{r} \frac{3P_i}{P_i + 2}, \quad \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{P_i + 2} = 1 \tag{381}$$

となる。また、CY の次元を比較することにより $n = r - 2$ でなければいけない。

M　Liouville Theory

はじめに bosonic string について考え [31, 19]、それを super 化することを考える。特に N=2 の supersymmetric な理論には非繰り込み定理が仮定されるので古典的な bosonic string に対して考察された結果の super 化を考えればよいことがわかる。

また、この論文で Liouville theory というときは matter に couple した gravity を考えたときの Liuville mode というより、下のようにして sigma-model を構成して現われた理論を指すことにする。Liouville theory の central charge は全体の central charge を 0 にするために利用されている。

M.1　(classical) bosonic Liouville theory

はじめに non-trivial な space-time metric $G_{\mu\nu}$、dilaton Φ の background 上での sigma-model を書くと、

$$S = \frac{1}{4\pi l_s^2} \int d^2\sigma \sqrt{|g|}\, [g^{ab} G_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + 2R\Phi(X)] \tag{382}$$

g_{ab} ; worldsheet metric、R ; worldsheet scalar curvature、
g ; g_{ab} の determinant、a, b ; worldsheet indices、μ, ν ; space-time indices

dilaton Φ が Linear dilaton background ($\Phi(X) = -\frac{Q}{2}\phi$) であるとする。 ここで、$\phi$ は space-time 座標の 1 つであり、$X^\phi = \phi$ となる。$G_{\mu\phi} = 0$、$(\mu \neq \phi)$ であるとき、action の ϕ part は分離できて

$$S_\phi = \frac{1}{4\pi l_s^2} \int d^2\sigma \sqrt{|g|}\, [g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi - QR\phi] \tag{383}$$

この action に、次の potential term を加えて得られる action は Liouville action と呼ばれる。

$$S_{pot} = \frac{1}{4\pi l_s^2} \mu \int d^2\sigma \sqrt{|g|} e^{\gamma\phi} \tag{384}$$

Liouvile action 全体を (complex) plane 座標 (z) で書いておく。

$$S_L = S_\phi + S_{pot} = \frac{1}{4\pi l_s^2}\int d^2z\sqrt{|g|}\,[g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi - QR\phi + \mu e^{\gamma\phi}] \tag{385}$$

z の関数 ρ を使って、次の Weyl 変換を定義しよう。

$$g_{ab} \to e^{2\rho}g_{ab}\,, \quad \gamma\phi \to \gamma\phi - 2\rho \tag{386}$$

この変換のもとで S_{pot} (Eq. (384)) は不変である。ところが S_ϕ (Eq. (383)) は

$$\frac{2}{\gamma} + Q = 0 \tag{387}$$

のときのみ不変となる。(実際には不変というより、ϕ の運動方程式に影響するような変化はないというべき。)

action が Eq. (385) のようであることがわかったので、運動方程式や EM tensor がわかる。ここからは簡単のために最終的な結果は conformal gauge ($g_{ab} = \delta_{ab}$) を使って書き、$l_s^2 = 2$ とおいてしまう。はじめに運動方程式は

$$\partial_a\partial^a\phi = \frac{1}{2}\mu\gamma e^{\gamma\phi} \tag{388}$$

EM tensor は $T^{ab} = \frac{4\pi}{\sqrt{g}}\frac{\delta}{\delta g_{ab}}S_L$ で決定される。実際に Eq. (385) を使って計算すると次のようになる。

$$T_{ab} = \frac{1}{4}g_{ab}\partial_c\phi\partial^c\phi - \frac{1}{2}\partial_a\phi\partial_b\phi - \frac{Q}{2}(\partial_a\partial_b\phi - g_{ab}\partial_a\partial^a\phi) + \frac{\mu}{4}g_{ab}e^{\gamma\phi} \tag{389}$$

運動方程式を使って、EM tensor を書き直すと、

$$T_{zz} = -\frac{1}{2}\partial\phi\partial\phi - \frac{Q}{2}\partial\partial\phi\,,\ \bar{T}_{\bar{z}\bar{z}} = -\frac{1}{2}\bar{\partial}\phi\bar{\partial}\phi - \frac{Q}{2}\bar{\partial}\bar{\partial}\phi\,,\ T_{z\bar{z}} = 0 \tag{390}$$

となる。

central charge や OPE について述べておく。conformal gauge では Eq. (385) は次のように簡単な形になる。

$$S_L = \frac{1}{4\pi}\int d^2z\,[\partial\phi\bar{\partial}\phi + \frac{\mu}{2}e^{\gamma\phi}] \tag{391}$$

さらに、もし free ($\mu = 0$) であれば、この action は free な bosonic string の sigma-model と全く同じである。したがって OPE は free な場合と同じになる。得られた OPE を使って EM tensor 同士の OPE をとることによって central charge は

$$c = 1 + 3Q^2 \tag{392}$$

であることがわかる。

$\mu \neq 0$ のときには Liouville potential term は short-distance で non-trivial な寄与をもっており、OPE などは free の場合とは異なっている。ここでは、$\mu \neq 0$ の場合にも central charge は Eq. (392) のままであり、operator $e^{\alpha\phi}$ の weight は $-\frac{1}{2}\alpha(\alpha + Q)$ のように free のときと同じであるということだけ注意しておく。直観的には、$\phi \to \infty$ 近傍を見るだけならほとんど potential term は 0 であり、$\mu = 0$ のときの結果を使うことができる。そのため、

central charge や weight のように local な性質のみで決定される量は free のときと同じだと思うことができるといえるかもしれない。

以上議論してきたことはすべて古典的な議論であった。興味ある N=2 supersymmetric な場合には非繰り込み定理により Liouville potential は守られるので、上の古典的議論を参考にして super 化していくことを考える。その前に、Liouville theory における operator について考察しておく。

Seiberg bound

Liouville potential を持った理論が、free な理論と異なる重要な点は CFT にみられる state-operator mapping を考えることで明らかになる。

簡単に言うと、Liouville theory では operator $e^{q\phi_0}$ に対応する state Φ は

$$\Phi = e^{(q+\frac{Q}{2})}\phi_0 \tag{393}$$

と書かれる。ϕ_0 は ϕ の平均場。($\phi_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma\phi(\sigma)$、minisuperspace approximation を使っている。) Eq. (393) を見ると、$Re[q] < -\frac{Q}{2}$ のとき $\phi_0 \to \infty$ (free region) において state Φ は 0 になることがわかる。しかし、そのような state に対応する spectrum は free theory には存在していない。つまり、operator $e^{q\phi_0}$ 自身が存在していないことになる。このように、Liouville theory では物理的な operator は

$$Re[q] \geq -\frac{Q}{2} \tag{394}$$

という bound を満たさなければならないことが知られている。この bound は Seiberg bound と呼ばれる。

M.2 N=2 super-Liouville theory

bosonic な Liouville theory を参考にして、N=2 super-Liouville theory を考えてみる。はじめに Eq. (385) のそれぞれの term は、superconformal gauge においてどのような super 化を持っているかを考える。初めに kinetic term の super 化を考える。

$$\frac{1}{8\pi}\int d^2z\sqrt{|g|}g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi \Longrightarrow \frac{1}{8\pi}\int d^2zd^4\theta\ \Phi^*\Phi \tag{395}$$

Liouville potential term は

$$\frac{1}{8\pi}\int d^2z\sqrt{|g|}\ \mu e^{\gamma\phi} \Longrightarrow \frac{1}{8\pi}\int d^2zd^2\theta_-\mu e^{\gamma\Phi} + c.c. \tag{396}$$

となる。ここで $c.c.$ は complex conjugate を表す。次に Eq. (385) の R part の super 化を考えるのが正直であるが、この項は superconformal gauge においては global な効果しか持たないと考えられる。

結局、全体の N=2 super-Liouville action は

$$S_{sup} = \frac{1}{8\pi}\int d^2zd^4\theta\ \Phi^*\Phi + \frac{\mu}{8\pi}\int d^2zd^2\theta_- e^{\gamma\Phi} + c.c. \tag{397}$$

component でかくと

$$S_{sup} = \frac{1}{2\pi}\int d^2z\,(\bar{\partial}\phi_-\partial\phi_+ - \psi_-\bar{\partial}\psi_+ - \bar{\psi}_-\partial\bar{\psi}_+) + \frac{\mu}{4\pi}\int d^2z\gamma^2\psi_+\bar{\psi}_+e^{\gamma\phi_+} + \frac{\mu^*}{4\pi}\int d^2z\gamma^2\psi_-\bar{\psi}_-e^{\gamma\phi_-} \tag{398}$$

となる。この action は N=2 Liouville theory の action である。また、ここで γ は実数であると仮定しておく。action が書けたので、EM tensor や supercurrent などを決定することができる。gravitino や vielbein で微分する方法や N=2 formalizm で super 変換を求めてから交換子で EM tensor を定義する方法など様々な方法が考えられる。しかし、ここでは厳密ではないが非常に簡単な方法をとることにする。

Eq. (398) の初めの項は free theory の action であるので、当然 EM tensor などにも free theory の部分が含まれる。また、$\phi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi - iY)$ のように boson 部分を書きなおし、ϕ についての運動方程式を求めると次のようになる。

$$\partial\bar{\partial}\phi = \frac{\mu\gamma^3}{2\sqrt{2}}\psi_+\bar{\psi}_+e^{\gamma\phi_+} + \frac{\mu^*\gamma^3}{2\sqrt{2}}\psi_-\bar{\psi}_-e^{\gamma\phi_-} \tag{399}$$

この式の右辺と Eq. (398) の 2 行目を比べると、normalization までで同じである。これより、EM tensor は free theory からの寄与と ϕ からなる、いわゆる improvement term から作られることが予想できる。ϕ による improvement term として何を使うかは bosonic な Liouville theory と同じものを用いるのが自然である。したがって、EM tensor としては

$$T = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}Q\partial\partial\phi - \frac{1}{2}(\partial Y)^2 + \frac{1}{2}(\psi_-\partial\psi_+ - \partial\psi_-\cdot\psi_+) \tag{400}$$

を用いる。EM tensor が構成されると、supercurrent や $U_R(1)$ current の improvement term も N=2 SCA を満たすようにして決定することができる。その結果は次のようになる。

$$T_F^{\pm} = -\frac{1}{2}\psi_\pm\partial\phi_\mp - \frac{1}{2\sqrt{2}}Q\partial\psi_\pm \tag{401}$$

$$J = \psi_-\psi_+ + \frac{Q}{\sqrt{2}}(\partial\phi_+ - \partial\phi_-) \tag{402}$$

bosonic なときと全く同様な議論から $\mu = 0$ のときの OPE を使うと、central charge は $c = 3(1+Q^2)$ となることがわかる。また、Seiberg bound も Eq. (394) のまま変わらない。

最後に、γ と Q との間の関係についてコメントする。Eq. (398) の 2 行目に注目すると、action が conformal 不変であるためには $\psi_\pm\bar{\psi}_\pm e^{\gamma\phi_\pm}$ などの項は weight (1,1) でなければならない。実際にここで求めた EM tensor を使ってこれを要請すると

$$Q = -\frac{\sqrt{2}}{\gamma} \tag{403}$$

という関係が得られる。

参考文献

[1] N. Seiberg and E. Witten, *Electric-Magnetic Duality, Monopole Condensation, And Confinement In N=2 Supersymmetric Yang-Mills Theory*, hep-th/9407087, Nucl. Phys. B426 (1994) 19.

[2] J. Polchinski, *Dirichlet Branes and Ramond-Ramond Charges*, hep-th/9510017, Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 4724.

[3] J. Maldacena, *The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*, hep-th/9711200, Adv. Theor. Math. Phys. Lett. B428 (1998) 105.

[4] C. Callan, J. Harvey and A. Strominger, *Supersymmetric String Solitons*, hep-th/9112030, in Trieste 1991, Proceedings, String Theory and Quantum Gravity 1991, 208.

[5] O. Aharony, M. Berkooz, D. Kutasov and N. Seiberg, *Linear Dilaton, NS5-branes and Holography*, hep-th/9808149, JHEP 9810 (1998) 004.

[6] A. Giveon, D. Kutasov and O. Pelc, *Holography for Non-Critical Superstrings*, hep-th/9907178, JHEP 9910 (1999) 035.

[7] N. Seiberg, *Notes on Theories with 16 Supercharges*, hep-th/9705117.

[8] L. Brink, J. Schwarz and J. Scherk, *Supersymmetric Yang-Mills Theories*, Nucl. Phys. B121 (1977) 77.

[9] C. Hull, *Strongly Coupled Gravity and Duality*, hep-th/0004195, Nucl. Phys. B583 (2000) 237.

[10] N. Seiberg, *New Theories in Six Dimensions and Matrix Description of M-theory on T^5 and T^5/Z_2* , hep-th/9705221, Phys. Lett. 408B (1997) 98.

[11] N. Itzhaki, J. Maldacena, J.Sonnenschein and S. Yankielowicz, *Supergravity and The Large N Limit of Theories With Sixteen Supercharges*, hep-th/9802042, Phys. Rev. D48 (1998) 46.

[12] H. Ooguri and C. Vafa, *Two-Dimensional Black Hole and Singularities of CY Manifolds*, hep-th/9511164, Nucl. Phys. B463 (1996) 55.

[13] S. Gukov, C. Vafa and E. Witten, *CFT's From Calabi-Yau Four-folds*, hep-th/9906070, Nucl. Phys. B584 (2000) 69.

[14] D. Kutasov and N. Seiberg, *Non-critical superstrings*, Phys. Lett. B251 (1990) 67.

[15] A. Giveon and D. Kutasov, *Little String Theory in a Double Scaling Limit*, hep-th/9909110, JHEP 9910 (1999) 034.

[16] 国友浩, private communication.

[17] C. Vafa, *Lectures on Strings and Dualities*, hep-th/9702201.

[18] 国友浩, private communication.

[19] P. Ginsparg and G. Moore, *Lectures on 2D Gravity and 2D String Theory*, hep-th/9304011, Published in Boulder TASI 92;277-470.

[20] P. Francesco and D. Kutasov, *World sheet and Space time Physics in Two Dimensional (Super) String Theory*, hep-th/9109005, Nucl. Phys. B375 (1992) 119.

[21] H. Dorn and H. Otto, *Two and Three-Point Functions in Liouville Theory*, hep-th/9403141, Nucl. Phys. B429 (1994) 375.

[22] M. Green, J. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory* Cambridge University Press (1987)

[23] A. Giveon and D. Kutasov, *Comments on Double Scaled Little String Theory* hep-th/9911039, JHEP 0001 (2000) 023.

[24] S. Elitzur, A. Giveon, D. Kutasov, E. Rabinovici and G. Sarkissian, *D-Branes in the Backgraound of NS Fivebranes*, hep-th/0005052, JHEP 0008 (2000) 046.

[25] D. Friedan, E. Martinec and S. Shenker, *Conformal Invariance, Supersymmetry And String Theory*, Nucl. Phys. B271 (1986) 93.

[26] J. Polchinski, *String Theory*, Cambridge University Press (1998).

[27] J. Strathdee, *Extended Poincaré Supersymmetry*, Int. J. Mod. Phys. A2 (1987) 273.

[28] B. Greene, *String Theory On Calabi-Yau Manifold*, hep-th/9702155.

[29] W. Lerche, C. Vafa and N. Warner *Chiral Rings In N=2 Superconformal Theories*, Nucl. Phys. B324 (1989) 427.

[30] B. Greene, C. Vafa and N. Warner, *Calabi-Yau Manifolds And Renormalization Group Flows*, Nucl. Phys. B324 (1989) 371.

[31] J. Polchinski, *Remarks on the Liouville Field Theory*, Strings '90 conf., Published in Coll. Station Workshop, 1990.